

Министерство образования и науки Донецкой Народной Республики  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»



## **МАТЕРИАЛЫ V Международной научной конференции**

**Донецкие чтения 2020:  
образование, наука, инновации,  
культура и вызовы современности**



**Том 1**

**Донецк  
17 – 18 ноября 2020 г.**

**Физико-математические  
и технические науки. Часть 1**

## Уважаемые коллеги!



Ставшая уже регулярной политематическая V Международная научная конференция «Донецкие чтения: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности», которая в нынешнем 2020 году проводится Донецким национальным университетом в дистанционной форме, приобретает все больший интерес в отечественном и зарубежном научно-образовательном пространстве. Постоянно расширяется состав ее участников, перечень выносимых на обсуждение проблем, тематика научных презентаций.

Спектр представляемых на конференции исследований позволяет констатировать дальнейшее расширение областей сотрудничества, творческого взаимодействия и научных обменов, а также качественное углубление интеграционных связей ученых и педагогов университета, научных организаций – участников академического консорциума «Научно-образовательный и инновационный комплекс ДонНУ», а также всей отрасли науки и образования Донецкой Народной Республики с научно-образовательным сообществом Русского Мира. Все более интенсивными, насыщенными и плодотворными становятся наши творческие контакты с учеными множества зарубежных государств.

Сборник трудов конференции является 9-томным изданием, включающим 13 книг. Свои доклады на конференцию по результатам выполненных фундаментальных и прикладных исследований в области актуальных проблем естественно-математических, технических и социально-гуманитарных наук прислали известные специалисты и молодые ученые из многочисленных научно-образовательных организаций, представляющие помимо Донецкой и Луганской Народных Республик – Российскую Федерацию, Республику Южная Осетия, Приднестровскую Молдавскую Республику, Республику Узбекистан, Социалистическую Республику Вьетнам. Как и в предшествующие годы, значительная часть освещаемых в докладах результатов является плодом совместных исследований международных научных коллективов.

Обращаясь с пожеланиями успешной работы конференции хочу выразить мнение, что ее проведение бесспорно будет способствовать решению новых важнейших фундаментальных и прикладных задач научного познания, внесет свой вклад в инновационное развитие, в дальнейшее укрепление творческих контактов ученых, педагогов, деятелей культуры и искусства стран-участниц!

Ректор,  
доктор физико-математических  
наук, профессор

С.В. Беспалова

Министерство образования и науки  
Донецкой Народной Республики  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Донецкий национальный университет»

## **V Международная научная конференция**

Материалы  
конференции

**Том 1**

**ФИЗИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
И ТЕХНИЧЕСКИЕ  
НАУКИ**

**Часть 1**

# **Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности**

г. Донецк  
17-18 ноября 2020 г.

Донецк  
Издательство ДонНУ  
2020

ББК Б.я431+397я431

УДК 51+53+004

Д672

*Редакционная коллегия:*

С.В. Беспалова (главный редактор), М.В. Фоменко (отв. секретарь),  
В.А. Дубровина, В.И. Сторожев, И.А. Моисеенко, Н.Н. Щепин

**Д672 Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности:** Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – *Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1* / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – 216 с.

*Ответственность за содержание статей, аутентичность цитат, правильность фактов и ссылок несут авторы статей.*

В первую часть первого тома материалов V Международной научной конференции «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» вошли исследования по актуальным проблемам физико-математических и технических наук. Рассматриваются вопросы механики твердого тела и деформируемых сред, математического анализа и дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, прикладной математики и информатики, информационных систем управления.

Освещенные в сборнике проблемы и направления их решения будут полезны научным работникам, преподавателям, студентам, аспирантам и докторантам, проводящим исследования в области и физико-математических и технических наук.

ББК Б.я431+397я431

УДК 51+53+004

© Коллектив авторов, 2020

© Донецкий национальный университет, 2020

## ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

### *Председатель:*

*Беспалова С.В.*, д-р физ.-мат. наук, профессор, ректор Донецкого национального университета (г. Донецк)

### *Заместитель председателя:*

*Бабурин С.Н.*, д-р юрид. наук, профессор, главный научный сотрудник Института государства и права РАН, Президент Международной славянской академии наук, образования, искусств и культуры, Президент Ассоциации юридических вузов (г. Москва)

### *Члены программного комитета:*

*Аваков С.Ю.*, д-р экон. наук, профессор, ректор Таганрогского института управления и экономики (г. Таганрог)

*Андреев Д.А.*, канд. ист. наук, доцент, заместитель декана по научной работе исторического факультета Московского государственного университета (г. Москва)

*Аноприенко А.Я.*, канд. техн. наук, профессор, ректор Донецкого национального технического университета (г. Донецк)

*Беспалова Т.В.*, д-р филос. наук, руководитель Отдела государственной культурной политики Российского научно-исследовательского института культурного и природного наследия имени Д.С. Лихачева (г. Москва)

*Болнокин В.Е.*, д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотр., руководитель Центра подготовки научных кадров ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова» (г. Москва)

*Воронова О.Е.*, д-р филол. наук, профессор, профессор кафедры журналистики, руководитель Есенинского научного центра Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина, член Общественной палаты Российской Федерации, член Союза писателей и Союза журналистов России (г. Рязань)

*Зайченко Н.М.*, д-р техн. наук, профессор, ректор Донбасской национальной академии строительства и архитектуры (г. Макеевка)

*Качалов Р.Н.*, и.о. ректора ГОУ ВПО «Донецкая государственная музыкальная академия имени С.С. Прокофьева» (г. Донецк)

*Кишкань Р.В.*, председатель Государственного комитета по экологической политике и природным ресурсам при Главе Донецкой Народной Республики (г. Донецк)

*Ковалев А.М.*, д-р физ.-мат. наук, профессор, директор ГУ «Институт прикладной математики и механики» (г. Донецк)

*Кожухов И.Б.*, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры высшей математики НИУ «Московский институт электронной техники» (г. Москва)

*Минаев А.И.*, д-р ист. наук, профессор, ректор Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина (г. Рязань)

*Нечаев В.Д.*, д-р полит. наук, ректор Севастопольского государственного университета (г. Севастополь)

*Полищук В.С.*, д-р техн. наук, директор ГУ «Научно-исследовательский институт «Реактивэлектрон» (г. Донецк)

*Половян А.В.*, д-р экон. наук, профессор, Министр экономического развития Донецкой Народной Республики, и.о. зав. кафедрой менеджмента Донецкого национального университета (г. Донецк)

*Приходько С.А.*, канд. биол. наук, ст. науч. сотр., директор ГУ «Донецкий ботанический сад» (г. Донецк)

*Решидова И.Ю.*, канд. физ.-мат. наук, и.о. директора ГУ «Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина» (г. Донецк)

*Рябичев В.Д.*, д-р техн. наук, профессор, ректор Луганского государственного университета имени Владимира Даля (г. Луганск)

*Савоськин М.В.*, канд. хим. наук, ст. науч. сотр., директор ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко» (г. Донецк)

*Скафа Е.И.*, д-р пед. наук, профессор, проректор по научно-методической и учебной работе Донецкого национального университета (г. Донецк)

*Соболев В.И.*, д-р биол. наук, профессор кафедры здоровья и реабилитации Крымского Федерального университета им. В.И. Вернадского (г. Ялта)

*Сторожев В.И.*, д-р техн. наук, профессор, проректор по научной и инновационной деятельности Донецкого национального университета (г. Донецк)

*Тедеев В.Б.*, канд. техн. наук, профессор, ректор Юго-Осетинского государственного университета имени А.А. Тибилова (г. Цхинвал)

*Третьяков В.Т.*, профессор, декан Высшей школы телевидения Московского государственного университета (г. Москва)

*Шемякина Н.В.*, канд. экон. наук, доцент, и.о. директора ГУ «Институт экономических исследований» (г. Донецк)

# *Механика твердого тела*

УДК 531.38

## **О НОВОМ ПОДХОДЕ В ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ**

*Горр Г.В.*, д-р физ.-мат. наук, проф.

ГУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, ДНР

*g.gorr@donnu.ru*

**Введение.** В докладе изложен новый метод интегрирования уравнений движения системы, состоящей из тела-носителя и трех роторов, которые вращаются вокруг главных осей. Он имеет тесную связь с методом вариации постоянной функции для гиросtatического момента, который линейно зависит от вектора вертикали. При постоянном множителе гиросtatический момент удовлетворяет уравнению Пуассона, а вариация его находится из интеграла площадей. Выполнена редукция исходных уравнений к системе пятого порядка.

**Цель** исследования – получение новых решений данных уравнений в случае сферического распределения масс гиростата и для прецессионных движений тела-носителя. Нахождение явного вида гиросtatического момента для случая трех инвариантных соотношений.

**Основная часть.** Задача о движении гиростата рассматривалась У. Томсоном, В. Вольтерра, Н.Е. Жуковским, А. Греем, В.В. Румянцевым, П.В. Харламовым, Й. Виттенбургом и многими другими учеными. Она может быть условно разбита на две независимые задачи. *Первая* задача (У. Томсон, Н.Е. Жуковский, А. Грей, В.В. Румянцев, П.В. Харламов и другие) характеризуется тем, что в процессе движения роторы равномерно вращаются вокруг своих осей. В постановке Жуковского–Вольтерра понятие *гиростат* используется в том случае, когда он содержит полости с циркулирующей в них жидкостью с постоянной циркуляцией. Актуальность такой задачи обусловлена тем, что уравнения движения гиростата допускают, как и в классической задаче, три первых интеграла.

*Вторая* задача (Н.Е. Жуковский, П.В. Харламов, В.В. Румянцев и другие) отличается от первой тем, что гиросtatический момент зависит от времени; уравнения движения тяжелого гиростата имеют только два первых интеграла. Обзор результатов, полученных в построении прецессионных решений уравнений движения гиростата с переменным гиросtatическим моментом под действием потенциальных и

гироскопических сил дан в монографии [1]. Исследования по данной теме в других постановках указаны в [2, 3].

Изучение задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом имеет важное значение в динамике космического полета, так как для переменной по составу ракетно-космической системы необходимо управление движением с помощью двигателей. Укажем несколько статей по данному управлению – [4–7].

В данном докладе предложен новый метод изучения движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом. С помощью метода вариации постоянной в выражении гиростатического момента получена система пяти дифференциальных уравнений, решения которой рассмотрены на трех инвариантных соотношениях, полученных в [8, 9].

Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, несущего три ротора, которые вращаются вокруг главных осей инерции. Уравнения движения системы  $S$ , состоящей из тела-носителя и трех роторов  $S_1, S_2, S_3$ , запишем в виде

$$\dot{\lambda} - \lambda \times a\mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \mathbf{s} \times \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times a\mathbf{x}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – момент количества движения;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор, направленный по силе тяжести;  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – гиростатический момент;  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор, направленный из неподвижной точки  $O$  в центр тяжести гиростата  $C$  ( $s = mg |\overline{OC}|$ );  $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$  – гириационный тензор; точка над переменными  $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \lambda$  обозначает производную по времени  $t$  в подвижной системе координат. Уравнения (1), (2) необходимо дополнить системой дифференциальных уравнений [10]:

$$\dot{\lambda}_i(t) = L_i(t) \quad (i = \overline{1,3}), \quad (3)$$

где

$$\lambda_i(t) = D_i (a\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i + \dot{\kappa}_i) \quad (i = \overline{1,3}), \quad (4)$$

$D_i$  – моменты инерции роторов  $S_i$  относительно главных осей подвижной системы координат  $Oxuz$  с единичными векторами  $\mathbf{e}_i$ ;  $\dot{\kappa}_i$  – скорости вращения тел  $S_i$  относительно осей данной системы координат;  $L_i$  – проекции моментов  $M_i$ , действующих со стороны тела-носителя  $S_0$  на роторы  $S_i$ . Уравнения (3) можно рассматривать на основании двух подходов: если в результате интегрирования уравнений (1), (2) найдены функции  $x_i = x_i(t)$  и  $\lambda_i = \lambda_i(t)$  и известны скорости вращения  $\dot{\kappa}_i$ , то



уравнения (3) служат для определения функций  $L_i(t)$ ; если известны функции  $L_i(t)$ , а скорости  $\dot{\kappa}_i$  не заданы, то уравнения (3) в силу (4) служат для определения  $\dot{\kappa}_i(t)$ .

Уравнения (1), (2) допускают два первых интеграла

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = k. \quad (5)$$

Опишем метод исследования уравнений (1), (2), которые имеют первые интегралы (5). Пусть вектор гиростатического момента  $\boldsymbol{\lambda}$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} \times a\mathbf{x} = 0. \quad (6)$$

Сопоставляя уравнения (2) и (6), приходим к выводу о том, что функция  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению (2). То есть вектор  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = c\mathbf{v}(t), \quad (7)$$

где  $c$  – постоянная, равная  $|\boldsymbol{\lambda}(t)|$ . При выполнении равенства (7) уравнения (1), (2) описывают задачу о движении тяжелого твердого тела. Данный результат показывает, что при условии (7) решениям уравнений Эйлера–Пуассона можно сопоставить решения уравнений (1), (2), в которых гиростатический момент (7) зависит только от функции  $\mathbf{v}(t)$ . В силу очевидности данного утверждения, будем полагать, что гиростатический момент  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  изменяется по величине, то есть

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = c(t)\mathbf{v}(t), \quad (8)$$

где  $c(t)$  – дифференцируемая функция времени. Подставим значение (8) в интеграл момента количества движения из системы (5):

$$c(t) = k - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}. \quad (9)$$

Вычислим производную  $\dot{c}(t)$ , учитывая только уравнение (2):

$$\dot{c}(t) = -\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \times a\mathbf{x}). \quad (10)$$

Запишем уравнение (1) с учетом равенств (9), (10):

$$\mathbf{v}[\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \times a\mathbf{x})] - \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \mathbf{s} \times \mathbf{v} = 0. \quad (11)$$

Будем полагать, что векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{s}$  составляют независимый базис, то есть равномерные вращения гиростата исключаем из рассмотрения. При умножении левой части уравнения (11) скалярно на  $\mathbf{v}$  получим тождество. Результат умножения левой части уравнения (11) скалярно на векторы  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{v} \times \mathbf{s}$  запишем на основании принятых ранее обозначений:

$$\begin{aligned} & (s_3 v_2 - s_2 v_3)[\dot{x}_1 + (a_3 - a_2)x_2 x_3 + (s_3 v_2 - s_2 v_3)] + \\ & + (s_1 v_3 - s_3 v_1)[\dot{x}_2 + (a_1 - a_3)x_3 x_1 + (s_1 v_3 - s_3 v_1)] + \\ & + (s_2 v_1 - s_1 v_2)[\dot{x}_3 + (a_2 - a_1)x_1 x_2 + (s_2 v_1 - s_1 v_2)] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& [\dot{x}_1 + (a_3 - a_2)x_2x_3][-v_2(s_2v_1 - s_1v_2) + v_3(s_1v_3 - s_3v_1)] + \\
& + [\dot{x}_2 + (a_1 - a_3)x_3x_1][-v_3(s_3v_2 - s_2v_3) + v_1(s_2v_1 - s_1v_2)] + \quad (13) \\
& + [\dot{x}_3 + (a_2 - a_1)x_1x_2][-v_1(s_1v_3 - s_3v_1) + v_2(s_3v_2 - s_2v_3)] = 0.
\end{aligned}$$

Уравнения (12), (13) необходимо изучать совместно с уравнением (2), которое в скалярном виде дает систему трех уравнений:

$$\dot{v}_1 = a_3x_3v_2 - a_2x_2v_3, \quad \dot{v}_2 = a_1x_1v_3 - a_3x_3v_1, \quad \dot{v}_3 = a_2x_2v_1 - a_1x_1v_2. \quad (14)$$

**Заключение.** Таким образом, система (1), (2) редуцирована к системе (12)–(14). После ее интегрирования необходимо изучить уравнения (3), (4). В докладе приведены примеры решений уравнений (12)–(14) в случае [8, 9], которые характеризуются сферическим распределением масс гиростата.

### Список литературы

1. Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. – Донецк: Изд-е ГУ «Институт прикладной математики и механики», 2017. – 250 с.
2. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2. Ч. 2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 555 с.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
4. Kane T.R., Fowler R.C. Equivalence of two gyrostatic stability problems // Journal of Applied Mechanics. – 1970. Vol. 37 (4). – P. 1146–1147.
5. Roberson R.E. The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // Journal of Applied Mechanics. – 1971. Vol, 38 (3). – P. 1146–1147.
6. Асланов В.С., Дорошин А.В. Движение системы соосных тел переменной массы // Прикл. математика и механика. – 2004. –Т. 68. Вып. 6. – С. 999–1009.
7. Асланов В.С., Дорошин А.В. О двух случаях движения неуравновешенного гиростата // Изв. Рос. академии наук. Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 42–55.
8. Горр Г.В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // Прикл. математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 2. – С. 202–214. – <https://doi.org/10.1134/S0032823519020061>
9. Gorr G.V. On Three Invariant of the Equations of Motion of a Body in a Potential Field of Force // Mechanics of Solid, – 2019. – Vol.54, Suppl 2. – P. S104–S114 © Allerton Press, Inc. P. 2–19. – <https://doi.org/10.3103/S0025654419030105>
10. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.

## О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА В ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА

*Горр Г.В.<sup>1</sup>*, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
*Скрыпник С.В.<sup>2</sup>*, канд. физ.-мат. наук, доц.

<sup>1</sup>ГУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, ДНР  
*gvgorr@gmail.com;*

<sup>2</sup>ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет экономики и торговли  
им. Михаила Туган-Барановского», г. Донецк, ДНР

**Введение.** В докладе изложены результаты исследования решения [1] задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

**Цель.** Исследовать условия существования прецессионных, изоконических и асимптотически-равномерных движений гиростата относительно вертикали.

**Основная часть.** Рассмотрим уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [2]:

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{X} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{X} + a\mathbf{X} \times B\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{S}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times a\mathbf{X}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$  – момент количества движения;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор оси симметрии силовых полей;  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – гиростатический момент;  $\mathbf{S}$  – вектор обобщенного центра масс гиростата;  $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$  – гирационный тензор;  $B = (B_{ij})$  и  $C = (C_{ij})$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – постоянные симметрические матрицы третьего порядка; точка над  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{v}$  обозначает производную.

В статье [1] показано, что уравнения (1) допускают решение

$$x_1 = b_1 v_1 + b_3 v_3, \quad x_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2} + c_3 v_3, \quad x_3 = \frac{1}{a_3} \left( \frac{l_0}{2} v_3^{-1} + d_0 v_3 \right), \quad (2)$$

в котором  $b_1, b_3, c_3$  – постоянные параметры, зависящие от  $a_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,3}$ );  $l_0$  и  $d_0$  – произвольные постоянные,  $v_i$  имеют вид

$$v_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad v_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad v_3 = \cos \theta. \quad (3)$$

Переменные  $\theta, \varphi$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{F(\theta)}, \quad \varphi = \varphi_0 + \arcsin \frac{\Phi(\theta)}{\kappa_0 \sin \theta \cos \theta}. \quad (4)$$

В соотношениях (4) обозначения таковы

$$\kappa_0 = \sqrt{a_1^2 b_3^2 + a_2^2 c_3^2}, \quad F(\theta) = \kappa_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \Phi^2(\theta), \quad (5)$$

$$\Phi(\theta) = (a_1 b_1 - d_0) \cos^2 \theta - a_3 \lambda_3 \cos \theta + \frac{l_0}{2}. \quad (6)$$

**1. Прецессионные движения.** Из результатов статьи [1] следует, что уравнения (1) на инвариантных соотношениях (2) допускают интеграл

$$v_3 [a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2 + (d_0 - a_1 b_1) v_3 + a_3 \lambda_3] = \frac{l_0}{2}. \quad (7)$$

Если в равенстве (7) положим  $l_0 = 0$ , то получим

$$v_3 = 0, \quad a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2 + (d_0 - a_1 b_1) v_3 = -a_3 \lambda_3. \quad (8)$$

Движение тела называют *прецессией*, если постоянен угол между двумя осями  $l_1, l_2$ , из которых ось  $l_1$  неизменно связана с телом, а ось  $l_2$  неподвижна в пространстве [2]. Система равенств (8) описывает два класса прецессионных движений гиростата. В силу  $l_0 = 0$  третье соотношение из (2) не имеет особенности при  $v_3 = 0$ . Поэтому *первый* класс прецессий из (7) характеризуется постоянством угла между главной осью инерции и вектором  $\mathbf{v}$ . Его можно получить и из первого дифференциального уравнения из (4) при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , положив  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

*Второй* класс прецессий из (7) имеет более общий вид:

$$A v_1 + B v_2 + C v_3 = D, \quad (9)$$

где  $A = a_1 b_3$ ,  $B = a_2 c_3$ ,  $C = d_0 - a_1 b_1$ ,  $D = -a_3 \lambda_3$ . Поскольку  $d_0$  – произвольная постоянная, то этот тип прецессий определяет класс прецессий с произвольной постоянной.

**2. Прецессионно-изоконические движения.** В векторном виде соотношение (9) можно представить так

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{v} = d_0. \quad (10)$$

В динамике твердого тела представляют большой интерес изоконические движения гиростата [2], так для этих движений подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости, проходящей через неподвижную точку гиростата.

Изоконические движения гиростата можно описать инвариантным соотношением

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{c}) = 0, \quad (11)$$

где  $\mathbf{c}$  – постоянный вектор,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{ax}$  – вектор угловой скорости гиростата. В докладе рассмотрен класс прецессионно-изоконических движений, который характеризуется инвариантными соотношениями (10), (11). Доказано, что в решении (2)–(6) такие движения динамически невозможны.

**3. Асимптотически-равномерные движения.** Рассмотрим первое уравнение из (4), приняв в качестве независимой переменной  $v_3 = \cos\theta$ :

$$\dot{v}_3 = -\sqrt{F^*(v_3)}, \quad F^*(v_3) = \kappa_0^2 v_3^2 (1 - v_3^2) - [(a_1 b_1 - d_0) v_3^2 - a_3 \lambda_3 v_3 + \frac{l_0}{2}]^2. \quad (12)$$

В докладе показано, что на основании уравнений (12) при  $l_0 = 0$  переменная  $v_3(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{v}_3 = -v_3 \sqrt{G(v_3)}, \quad G(v_3) = -\mu_2^2 v_3^2 + \mu_1 v_3 + \mu_0, \quad (13)$$

где

$$\mu_2^2 = \kappa_0^2 + (a_1 b_1 - d_0)^2, \quad \mu_1 = 2a_3 \lambda_3 (a_1 b_1 - d_0), \quad \mu_0 = \kappa_0^2 - a_3^2 \lambda_3^2. \quad (14)$$

Полагая, что параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$\kappa_0^2 - a_3^2 \lambda_3^2 > 0, \quad (15)$$

из (13), (14) устанавливаем, что  $G(0) > 0$ . То есть переменная  $v_3 \in [v_3^{(1)}, v_3^{(2)}]$ , где  $v_3^{(1)}$  и  $v_3^{(2)}$  – действительные корни уравнения  $G(v_3) = 0$ , которые, в силу (15), имеют противоположные знаки. Если  $v_3(0) > 0$ , то из (13) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  переменная  $v_3 \rightarrow 0$ . Из формул (2)–(4) следует, что движение гиростата стремится к равномерному вращению. Тем самым показано, что для прецессий гиростата движение гиростата обладает дополнительным свойством асимптотичности к равномерному вращению.

**4. Случай неподвижного центра масс.** Из условий (46) статьи [1] получим, что при  $s_i = 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ) выполняется равенство  $\lambda_3 = 0$ . Тогда из (12) найдем следующее значение  $F^*(v_3)$ :

$$F^*(v_3) = -[\kappa_0^2 + (a_1 b_1 - d_0)^2] v_3^4 + [\kappa_0^2 - l_0 (a_1 b_1 - d_0)] v_3^2 - \frac{l_0^2}{4}. \quad (16)$$

Если в (16) положить

$$\kappa_0^2 - l_0 (a_1 b_1 - d_0) > 0, \quad (17)$$

то уравнение (16) имеет четыре действительные корня. Условие (17) выполняется, например, при  $d_0 = a_1 b_1$ . Очевидно, что приведен пример действительности решения (2)–(6) при неподвижном центре масс гиростата; функция  $v_3(t)$  из (12) является эллиптической функцией времени.

**5. Общий случай.** В докладе при рассмотрении общего случая обращения интеграла, полученного из (12)

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{\sqrt{F^*(v_3)}} = -(t - t_0),$$

показано, что  $v_3(t)$  является эллиптической функцией времени. Для этой цели объяснены общие методы обращения эллиптических интегралов Лежандра.

### Список литературы

1. Скрыпник С.В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
2. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 304 с.

УДК 531.38

## НОВЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА

*Зыза А.В.*, канд. физ.-мат. наук, доц.  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*o.ziza@donnu.ru*

**Введение.** Моделирование движений гиростата с неподвижной точкой под действием достаточно широкого класса сил приводит к исследованию решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. К таким системам относятся уравнения класса Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Несмотря на то, что задача Коши для указанных дифференциальных уравнений движения гиростата имеет решение, получить конструктивное решение для всего множества параметров невозможно. Это обусловлено тем фактом, что при произвольных значениях параметров задачи уравнения динамики твердого тела не интегрируемы в квадратурах. Указанное обстоятельство затрудняет решение рассматриваемой задачи динамики гиростата и объясняет актуальность построения частных решений в замкнутом виде. Среди частных решений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил выделяют решения полиномиального вида, которые являются обобщением решений полиномиальной структуры классической задачи динамики твердого тела и задачи динамики тяжелого гиростата [1–3].

**Цель** исследования – нахождение условий существования частных решений обобщенного полиномиального класса Коносевича–Поздняковича рассматриваемой задачи и их построение в замкнутом виде. Для такого вида исследования использовались: метод инвариантных соотношений, теория

интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах, полуобратный метод решения задач аналитической механики.

**Основная часть.** Задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B\nu + \nu \times (C\nu - s), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega; \quad (1)$$

которые допускают три первых интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad 2(A\omega + \lambda) \cdot \nu - (B\nu \cdot \nu) = 2\kappa_0, \quad A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot \nu) + (C\nu \cdot \nu) = 2E_0. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) обозначено:  $\omega = (p, q, r)$  – угловая скорость гиростата;  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей;  $\lambda = (\lambda_1, 0, 0)$  – гиростатический момент;  $s = (s_1, 0, 0)$  – вектор обобщенного центра масс;  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке;  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$  и  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  – матрицы третьего порядка (матрица  $B$  характеризует гироскопические силы, обусловленные силой Лоренца; матрица  $C$  – потенциальные силы, обусловленные ньютоновской и кулоновской силами); точка над переменными обозначает относительную производную;  $E_0$  и  $\kappa_0$  – постоянные интегралов.

В докладе рассматривается задача об исследовании условий существования у уравнений (1) частных решений обобщенного полиномиального класса Коносевича–Поздняковича следующей структуры [4]:

$$\begin{aligned} p = \sigma^2, \quad q^2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^n b_i \sigma^i, \quad r^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^m c_j \sigma^j, \\ v_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^l a_k \sigma^k, \quad v_2 = \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \sqrt{Q(\sigma)}, \quad v_3 = \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma} = \sqrt{R(\sigma)}, \quad (3) \\ \psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \varkappa(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j. \end{aligned}$$

Здесь  $n, m, l, n_1, m_1$  – целые неотрицательные числа;  $b_i, c_j, a_k, g_i, f_j$  – параметры, подлежащие определению.

Если для свободных членов полиномов  $\psi(\sigma)$  и  $\varkappa(\sigma)$  из (3) имеет место условие  $g_0^2 + f_0^2 = 0$ , то указанным классом решений в классической задаче динамики можно описать решение Коносевича–Поздняковича уравнений Эйлера-Пуассона [2], а в задаче о движении тяжелого гиростата – решение Харламовой–Мозалевской [3].

Найдены условия существования у уравнений (1) решений вида (3). Полученные новые частные решения характеризуются следующими свойствами:

1.  $n = 2, m = 4, l = 2, n_1 = 2, m_1 = 1$ ;
2.  $n = 3, m = 3, l = 2, n_1 = 2, m_1 = 2$ ;
3.  $n = 3, m = 4, l = 2, n_1 = 1, m_1 = 1$ ;
4.  $n = 4, m = 4, l = 2, n_1 = 1, m_1 = 1$ .

Указанные решения описываются гиперэллиптическими функциями времени и функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Построенные в докладе новые частные решения не имеют аналогов в классической задаче динамики твердого тела и в задаче о движении тяжелого гиростата, то есть они не являются тривиальными обобщениями решения Б.И. Коносевича – Е.В. Поздняковича.

Укажем действительный числовой пример одного из решений, приведенных в докладе:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (6737 + \delta_0)a \cdot 1140^{-1}, \quad A_2 = A_3, \quad A_3 = 2(8691 + \delta_0)a \cdot 1995^{-1}, \\
 B_1 &= -(681875 + 416\delta_0)a \cdot (1161489f_1)^{-1}, \quad B_2 = a \cdot f_1^{-1}, \quad B_3 = a \cdot (3f_1)^{-1}, \quad (4) \\
 C_2 &= C_3, \quad C_1 - C_3 = -5(12392521 + 919\delta_0)a \cdot (6968934f_1^2)^{-1}, \quad (a > 0, g > 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \left( (188452723283 + 30893087\delta_0)ag^2(106193280f_1^2)^{-1}, 0, 0 \right), \\
 s &= \left( -(2331758425519 + 358798891\delta_0)ag^2(669017664f_1^3)^{-1}, 0, 0 \right), \\
 \delta_0 &= \sqrt{54679081}; \quad p = \sigma^2, \quad q = \sigma\sqrt{Q^*(\sigma)}, \quad r = \sigma\sqrt{R^*(\sigma)}, \\
 Q^*(\sigma) &= (41072915 + 5407\delta_0)(3572894976f_1^2)^{-1} \left( 6312f_1^2\sigma^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (122290 + 10\delta_0)f_1g\sigma + (1321171 + 19\delta_0)g^2 \right), \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^*(\sigma) &= -(14288319 + 1891\delta_0)(9486964480f_1^2)^{-1} \left( 40224f_1^2\sigma^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (697216 + 64\delta_0)f_1g\sigma + (8373715 - 65\delta_0)g^2 \right), \\
 v_1 &= -(6737 + \delta_0)(4460117760f_1)^{-1} \left( -1676736f_1^2\sigma^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 33534720f_1g\sigma + (43319\delta_0 - 491144629)g^2 \right), \\
 v_2 &= (4f_15^{-1}\sigma + g)\sqrt{Q^*(\sigma)}, \quad v_3 = (f_1\sigma + 3g)\sqrt{R^*(\sigma)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= -266\sigma(6737 + \delta_0)^{-1}\sqrt{Q^*(\sigma)R^*(\sigma)}, \quad \sigma \in [\sigma_1; \sigma_2] \quad (6) \\
 \sigma_1 &= -g(6312f_1)^{-1} \left( 61145 + 5\delta_0 - \sqrt{491522\delta_0 - 3233543302} \right), \\
 \sigma_2 &= -g(10056f_1)^{-1} \left( 87152 + 8\delta_0 - \sqrt{1557842\delta_0 - 9956587222} \right).
 \end{aligned}$$

В соотношениях (4)–(6) обозначено

$$f_1 = g^2 255360^{-1} \sqrt{4124656494218402 + 451026734378\delta_0}.$$



Построенное решение (4)–(6) содержит два свободных положительных параметра  $a$ ,  $g$  и описывается функциями времени, полученными в результате обращения эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из (6).

#### Список литературы

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
2. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В.Горр, А.М.Ковалев. – К.: Наук. думка, 2012. – 401 с.
3. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В.Горр, А.М.Ковалев. – К.: Наук. думка, 2013. – 408 с.
4. Зыза А.В. Полиномиальные решения двух задач динамики гиростата / А.В.Зыза // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – Т.1. – С.76-78.

УДК 531.38

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИРОСТАТА С ЭЛЕКТРОМОТОРОМ

*Коносевич Б.И.*, д-р физ.-мат. наук,

*Коносевич Ю.Б.*, канд. физ.-мат. наук,

ГУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, ДНР

*konos@iamm.su*

**Введение.** Изучается тяжелый гиростат с неподвижной точкой, состоящий из тела-носителя  $S^0$  и вращающегося в нем ротора  $S'$ .

В [1, 2] рассматриваются модели гиростата с гиростатическим моментом, являющимся известной функцией времени. Но обычно при изучении динамики гиростата предполагают, что ротор либо вращается по инерции без трения, либо он вращается с постоянной угловой скоростью по отношению к телу-носителю. Первый случай практически нереализуем для длительно работающих устройств. Для поддержания вращения ротора при наличии трения достаточно воспользоваться электромотором. Основные типы электромоторов – асинхронный и синхронный.

Наличие электромотора учитывается во многих работах по теории гироскопов. Так, в [3] используется многотоковая модель синхронного электромотора, которая включает дифференциальные уравнения для электрических токов в обмотках ротора.

В настоящей работе рассматривается тяжелый однороторный гиростат с электромотором. Осесимметричный ротор электромотора является ротором гиростата, а статор электромотора является частью тела-носителя.

Трение в сферическом шарнире, реализующем неподвижную точку, предполагается отсутствующим, а относительно оси ротора на него со стороны тела-носителя действуют момент сил трения и момент, создаваемый электромотором. Рассматриваются бестоковые модели асинхронного и синхронного электромотора и многотоковая модель синхронного электромотора. Получены две формы дифференциальных уравнений движения гиростата с электромотором, основанные на использовании двух его тензоров инерции  $A$  и  $A^*$  для неподвижной точки.

**1. Обозначения.** Пусть  $O$  – неподвижная точка,  $C$  и  $C'$  – центры масс гиростата и ротора,

$\omega$  – абсолютная угловая скорость тела-носителя  $S^0$ ,

$\nu$  – единичный вектор направления силы тяжести,

$\phi'$  – угол поворота ротора  $S'$  относительно тела-носителя,

$l$  – единичный вектор оси симметрии ротора,

$h = OC'$  – вектор, указывающий центр масс ротора,

$e$  – единичный вектор, имеющий направление вектора  $c = OC$ ,

$A_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – компоненты тензора инерции  $A^0$  тела-носителя

$S^0$  в связанной с ним системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ ,

$A', B'$  – осевой и экваториальный центральные моменты инерции ротора,

$m'$  – масса ротора,  $m$  – масса всего гиростата,  $\Gamma = mg|c|$ .

Векторы  $\omega, \nu, l, h, e$  задаются своими компонентами  $\omega_i, \nu_i, l_i, h_i, e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Компоненты

тензора  $A^*$  в этой системе координат выражаются по формулам

$$A_{11}^* = A_{11}^0 + m'(h_2^2 + h_3^2) + B'(l_2^2 + l_3^2)A_1'^2,$$

$$A_{12}^* = A_{12}^0 - m'h_{12} + (A' - B')l_{12} \quad (1\ 2\ 3),$$

где (1, 2, 3) – символ круговой перестановки индексов 1, 2, 3. Формулы для компонент тензора  $A$  получаются из них путем отбрасывания членов с  $A'$ .

**2. Уравнения движения.** Вращение ротора описывается уравнением  $A'p' = M$ , где  $M$  – суммарный момент, создаваемый электромотором и силами трения относительно оси ротора. Здесь  $p'$  – проекция абсолютной угловой скорости ротора на его ось симметрии. Она выражается через фазовые переменные по формуле  $p' = \omega_{11}l_1 + \omega_{22}l_2 + \omega_{33}l_3 + \dot{\phi}'$ , с учетом которой уравнение вращения ротора записывается в виде

$$A'(\dot{\omega}_{11}l_1 + \dot{\omega}_{22}l_2 + \dot{\omega}_{33}l_3 + \ddot{\phi}') = M. \quad (1)$$

Выражение момента  $M$  через фазовые переменные зависит от используемой модели электромотора.

Приведем вторую форму уравнений движения гиростата с электромотором для случая бестоковой модели синхронного электромотора. В этих уравнениях вместо угла  $\varphi'$  используется угол  $\gamma = \varphi' - \Omega t$ , где  $\Omega$  – угловая скорость вращения магнитного поля в статоре. Момент  $M$  равен сумме  $M = M(\gamma, \dot{\gamma}) = \Delta M_1(\gamma) + \Delta M_2(\dot{\gamma})$  вращающего момента  $\Delta M_1(\gamma) = -b_0 \sin \gamma - c_0$  ( $b_0, c_0 > 0$ ) и диссипативного момента  $\Delta M_2(\dot{\gamma})$ , для которого  $\dot{\gamma} \Delta M_2(\dot{\gamma}) < 0$  ( $\dot{\gamma} \neq 0$ ),  $\Delta M_2(0) = 0$ .

В том случае, когда осями системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  являются главные оси тензора  $A^*$ , динамические и кинематические уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} A_{11}^* \dot{\omega}_1 + A' \ddot{\gamma} l_1 &= (A_{22}^* - A_{33}^*) \omega_2 \omega_3 + A'(\dot{\gamma} + \Omega)(l_{23} \omega_2 - l_{32} \omega_3) + \Gamma(e_{23} v_3 - e_{32} v_2), \\ A_{22}^* \dot{\omega}_2 + A' \ddot{\gamma} l_2 &= (A_{33}^* - A_{11}^*) \omega_3 \omega_1 + A'(\dot{\gamma} + \Omega)(l_{31} \omega_3 - l_{13} \omega_1) + \Gamma(e_{31} v_1 - e_{13} v_3), \\ A_{33}^* \dot{\omega}_3 + A' \ddot{\gamma} l_3 &= (A_{11}^* - A_{22}^*) \omega_1 \omega_2 + A'(\dot{\gamma} + \Omega)(l_{12} \omega_1 - l_{21} \omega_2) + \Gamma(e_{12} v_2 - e_{21} v_1), \\ \dot{v}_1 &= \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2. \end{aligned} \quad (2)$$

После подстановки в (1) выражений производных  $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$  из (2), приходим к следующему уравнению вращения ротора

$$\begin{aligned} A'(1 - \frac{A'l_1^2}{A_1^*} - \frac{A'l_2^2}{A_2^*} - \frac{A'l_3^2}{A_3^*}) \ddot{\gamma} &= \\ &= A'[\frac{l_1}{A_1^*}(A_2^* - A_3^*)\omega_2\omega_3 + \frac{l_2}{A_2^*}(A_3^* - A_1^*)\omega_3\omega_1 + \frac{l_3}{A_3^*}(A_1^* - A_2^*)\omega_1\omega_2] - \\ &- A'^2(\dot{\gamma} + \Omega)[\frac{l_1}{A_1^*}(l_2\omega_3 - l_3\omega_2) + \frac{l_2}{A_2^*}(l_3\omega_1 - l_1\omega_3) + \frac{l_3}{A_3^*}(l_1\omega_2 - l_2\omega_1)] - \\ &- A'\Gamma[\frac{l_1}{A_1^*}(e_2 v_3 - e_3 v_2) + \frac{l_2}{A_2^*}(e_3 v_1 - e_1 v_3) + \frac{l_3}{A_3^*}(e_1 v_2 - e_2 v_1)] + M. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь коэффициент при  $\ddot{\gamma}$  отличен от нуля, так как в противном случае вырождена матрица компонент тензора  $A$ . Подставив в (2) определяемое уравнением (3) выражение  $\ddot{\gamma}$ , получим для переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  уравнения нормального вида, которые не приводим из-за их громоздкости.

## Список литературы

1. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
2. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
3. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 1 // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – № 2. – С. 124-141.

УДК 531.38; 531.39

## УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ГИРОСТАТА В ГЛАВНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

*Мазнев А.В.*<sup>1</sup>, д-р физ.-мат. наук, доц., *Горбунова Ю.С.*<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

<sup>2</sup>ГОУ ВПО «Академия гражданской защиты», г. Донецк, ДНР,

*a.mazniev@donnu.ru, yulya\_gorbunova\_1993@mail.ru*

**Введение.** Прецессионные движения твердого тела относятся к наиболее наглядным с механической точки зрения движениям и они находят широкое применение в прикладных задачах динамики твердого тела. Обзор результатов, полученных в исследовании прецессий в динамике твердого тела и в динамике связанных твердых тел, приведен в [1].

Основные результаты по интегрированию уравнений движения гиростата установлены в прецессионной системе координат – подвижной системе, одна из осей которой образует постоянный угол с вектором, фиксированным в неподвижном пространстве [1-3]. В данной работе изучены условия существования регулярных прецессий гиростата в случае, когда подвижная система координат является главной системой координат.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями [3,4]

$$A\dot{\bar{\omega}} = (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \times \bar{\omega} + \bar{\omega} \times B\bar{\nu} + \bar{\nu} \times (C\bar{\nu} - \bar{s}), \quad \dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu} \times \bar{\omega}, \quad (1)$$

где введены обозначения:  $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости тела-носителя;  $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор оси симметрии силовых полей;  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – гиростатический момент;  $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор обобщенного центра масс;  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции гиростата;  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$  – матрица, характеризующая гироскопические силы;  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  – матрица, характеризующая потенциальные силы; точка над переменными  $\bar{\omega}, \bar{\nu}$  обозначает дифференцирование по времени.

Уравнения (1) допускают первые интегралы

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = 1, \quad (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{v} - \frac{1}{2}(B\bar{v} \cdot \bar{v}) = k, \quad (2)$$

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2(\bar{s} \cdot \bar{v}) + (C\bar{v} \cdot \bar{v}) = 2E, \quad (3)$$

где  $k, E$  – произвольные постоянные.

Если  $\bar{a}$  – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем то для регулярных прецессий тела-носителя имеют место равенства

$$\bar{a} \cdot \bar{v} = a_0, \quad \bar{\omega} = n\bar{a} + m\bar{v}, \quad (4)$$

где  $a_0 = \cos\theta_0$  ( $\theta_0 = \angle(\bar{a}, \bar{v})$ ),  $n$  и  $m$  – постоянные.

К настоящему времени для уравнений (1) изучены условия существования не только регулярных прецессий гиростата [1], но и другие классы прецессионных движений [3]

$$\bar{a} \cdot \bar{v} = a_0, \quad \bar{\omega} = \dot{\phi}\bar{a} + \dot{\psi}\bar{v}. \quad (5)$$

Здесь  $\dot{\phi}, \dot{\psi}$  – функции времени  $t$ .

Как показано в [3], задача исследования условий существования прецессий для уравнений (1) с первыми интегралами (2), (3) сводится к нахождению решений уравнений

$$\dot{\bar{v}} = \dot{\phi}(\bar{v} \times \bar{a}), \quad (6)$$

$$\dot{\phi}(A\bar{a} \cdot \bar{v}) + \dot{\psi}(A\bar{v} \cdot \bar{v}) = k - (\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) + \frac{1}{2}(B\bar{v} \cdot \bar{v}), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2(A\bar{a} \cdot \bar{a}) + 2\dot{\phi}\dot{\psi}(A\bar{a} \cdot \bar{v}) + \dot{\psi}^2(A\bar{v} \cdot \bar{v}) &= 2E + 2(\bar{s} \cdot \bar{v}) - (C\bar{v} \cdot \bar{v}), \quad (8) \\ \dot{\phi}[A\bar{a} \cdot (\bar{v} \times \bar{a})] + \dot{\psi}[A\bar{v} \cdot (\bar{v} \times \bar{a})] + \dot{\phi}\dot{\psi}[a_0'^2 Sp(A) - 2(A\bar{v} \cdot \bar{v}) + 2a_0(A\bar{a} \cdot \bar{v})] - \\ - \dot{\phi}^2[(A\bar{a} \cdot \bar{v}) - a_0(A\bar{a} \cdot \bar{a})] - \dot{\psi}^2[a_0(A\bar{v} \cdot \bar{v}) - (A\bar{a} \cdot \bar{v})] - \\ - \dot{\phi}[(\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) - a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] - \dot{\psi}[a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) - (\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] + \dot{\phi}[(B\bar{v} \cdot \bar{v}) - a_0(B\bar{a} \cdot \bar{v})] + \\ + \dot{\psi}[a_0(B\bar{v} \cdot \bar{v}) - (B\bar{a} \cdot \bar{v})] + a_0(C\bar{v} \cdot \bar{v}) - (C\bar{a} \cdot \bar{v}) - a_0(\bar{s} \cdot \bar{v}) + (\bar{s} \cdot \bar{a}) &= 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Для изучения движения главных осей координат необходимо выполнить преобразования переменных и параметров уравнений (1), значения которых получены в прецессионной системе координат. В данной работе использован другой метод, который основан на получении решения уравнений (1) для регулярных прецессий (5) в главной системе координат.

**Условия существования регулярных прецессий в главной системе координат.** Пусть  $Oxyz$  – главная система координат с единичными векторами  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ . С помощью параметров  $\mu_0, \sigma_0$  зададим положение вектора  $\bar{a}$  в этой системе  $\bar{a} = a_1\bar{i}_1 + a_2\bar{i}_2 + a_3\bar{i}_3$ , где

$$a_1 = \sin\mu_0 \cos\sigma_0, \quad a_2 = \sin\mu_0 \sin\sigma_0, \quad a_3 = \cos\mu_0. \quad (10)$$

При задании  $\bar{a}$  в виде (10) решение уравнения (6) таково

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 \sin\mu_0 \cos\sigma_0 - a_0' \sin\sigma_0 \cos\varphi + a_0' \cos\sigma_0 \cos\mu_0 \sin\varphi, \\ v_2 &= a_0 \sin\mu_0 \sin\sigma_0 + a_0' \cos\sigma_0 \cos\varphi + a_0' \sin\sigma_0 \cos\mu_0 \sin\varphi, \\ v_3 &= a_0 \cos\mu_0 - a_0' \sin\mu_0 \sin\varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем уравнения (7)–(9) в случае (4)

$$\bar{v} \cdot (nA\bar{a} + \bar{\lambda}) + \bar{v} \cdot \left(mA\bar{v} - \frac{1}{2}B\bar{v}\right) = k, \quad (12)$$

$$2\bar{v} \cdot (nmA\bar{a} - \bar{s}) + \bar{v} \cdot (m^2A\bar{v} + C\bar{v}) = 2E - n^2(A\bar{a} \cdot \bar{a}), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
& nm[a_0^2 Sp(A) - 2(A\bar{v} \cdot \bar{v}) + 2a_0(A\bar{a} \cdot \bar{v})] - n^2[(A\bar{a} \cdot \bar{v}) - a_0(A\bar{a} \cdot \bar{a})] - \\
& -m^2[a_0(A\bar{v} \cdot \bar{v}) - (A\bar{a} \cdot \bar{v})] - n[(\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) - a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] - m[a_0(\bar{\lambda} \cdot \bar{v}) - (\bar{\lambda} \cdot \bar{a})] + \\
& +n[(B\bar{v} \cdot \bar{v}) - a_0(B\bar{a} \cdot \bar{v})] + m[a_0(B\bar{v} \cdot \bar{v}) - (B\bar{a} \cdot \bar{v})] + a_0(C\bar{v} \cdot \bar{v}) - \\
& - (C\bar{a} \cdot \bar{v}) - a_0(\bar{s} \cdot \bar{v}) + (\bar{s} \cdot \bar{a}) = 0. \tag{14}
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы (12),(13) становились тождествами при подстановке в них величин (11). Тогда получим следующие равенства

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= 2m\alpha_2, \quad \beta'_2 = 2m\alpha'_2, \quad \gamma_2 = -m^2\alpha_2, \quad \gamma'_2 = -m^2\alpha'_2, \\
l_1 &= a_0b_1 - (n + 2a_0m)p_1, \quad l'_1 = a_0b'_1 - (n + 2a_0m)p'_1, \\
q_1 &= m(a_0m + n)p_1 + a_0c_1, \quad q'_1 = m(a_0m + n)p'_1 + a_0c'_1,
\end{aligned} \tag{15}$$

где величины  $\alpha_2, \alpha'_2, b_1, b'_1, p_1, p'_1, c_1, c'_1$  – представляют собой соотношения, связывающие параметры задачи.

Рассмотрим уравнение (14), в котором все слагаемые, содержащие множители  $nm, n^2, m^2, m, n$  и свободный член известны и выражены через параметры задачи. Запишем вначале общий вид уравнения (14)

$$D_2 \cos 2\varphi + D'_2 \sin 2\varphi + D_1 \cos \varphi + D'_1 \sin \varphi + D_0 = 0. \tag{16}$$

Из (16) следуют равенства

$$D_2 = 0, \quad D'_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D'_1 = 0, \quad D_0 = 0. \tag{17}$$

Первые два уравнения из системы (17) являются тождествами при выполнении условий (15). Рассмотрим третье и четвертое равенства из (17). На основании принятых ранее обозначений и соотношений (15) получим

$$\begin{aligned}
m(m + 2a_0n)p_1 - a_0^2mb_1 + 2a_0c_1(a_0^2 - a_0'^2) - a_0q'_1 &= 0, \\
m(m + 2a_0n)p'_1 - a_0^2mb'_1 + 2a_0c'_1(a_0^2 - a_0'^2) - a_0q_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Пусть  $a_0 \neq 0$ . Подставляя  $q_1$  и  $q'_1$  в равенства (18), получим

$$mp_1(a_0^2m + a_0n) - a_0^2mb_1 - a_0^2c_1 = 0, \tag{19}$$

$$mp'_1(a_0^2m + a_0n) - a_0^2mb'_1 - a_0^2c'_1 = 0. \tag{20}$$

Распишем равенство  $D_0 = 0$

$$nma_0^* - m^2\alpha_* - ml_0^* + n\beta^* + m\beta_* + c_* + q_0^* = 0, \tag{21}$$

где величины  $\alpha_0^*, \alpha_*, l_0^*, \beta^*, \beta_*, c_*, q_0^*$  известны и представляют собой соотношения, связывающие параметры задачи.

Итак, условиями существования регулярных прецессий (4) у уравнений (1) являются равенства (15), (19)– (21).

**Заключение.** Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены условия существования регулярных прецессий в случае, когда подвижная система координат является главной системой координат. Эти условия найдены в виде системы алгебраических уравнений на параметры задачи.

## Список литературы

1. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

2. Горр Г.В. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Г.А. Котов. – Донецк: ГУ «ИПММ», 2017. – 265 с.
3. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
4. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – 5, №5. – P. 747–754.

УДК 615.849

## **ИНВАРИАНТНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА**

*Платонова Е.С.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*e.platonova@donnu.ru*

**Введение.** Моделирование движений гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием достаточно широкого класса сил приводит к исследованию решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. К таким системам относятся уравнения Кирхгофа-Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Актуальность исследования таких частных решений связана не только с возможностью на основании уравнений П.В. Харламова установить свойства движения тела, но исследовать с помощью первого метода Ляпунова поведение интегральных кривых в окрестностях частных решений [1–6].

**Целью** работы является нахождение частных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил отдельно выделяют решения различной полиномиальной структуры, большинство из которых являются обобщением решений полиномиального вида классической задачи динамики твердого тела и задачи движения тяжелого гиростата.

**Основная часть.** Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем и ньютоновском притяжении. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку и параллельной вектору,

характеризующему направлению постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцовым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле – носителе. Уравнения рассматриваемого движения гири относятся к уравнениям класса Кирхгофа и в векторном виде с учетом ньютоновских сил имеют вид:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times Bv + v \times (Cv - s), \quad \dot{v} = v \times \omega. \quad (1)$$

Уравнения допускают три первых интеграла:

$$(A\omega \cdot \omega) - 2(s \cdot v) + (Cv \cdot v) = 2E_0, \quad 2(A\omega + \lambda) \cdot v - (Bv \cdot v) = 2k_0, \quad (2)$$

$$v \cdot v = 1.$$

В (1), (2) обозначено:  $\omega = (p, q, r)$  – угловая скорость гири;  $v = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей;  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$  – гиристатический момент;  $s = (s_1, s_2, 0)$  – вектор обобщенного центра масс;  $A$  – тензор инерции гири, построенный в неподвижной точке;  $B$  и  $C$  – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную;  $E_0$  и  $k_0$  – постоянные интегралов.

**Новое частное решение.** Рассмотрим случай, когда степени полиномов решения таковы:  $n = 2, m = 4, l = 1, n_1 = 2, m_1 = 1$ .

Тогда решение примет вид

$$q = Q(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0,$$

$$r^2 = R(p) = c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0,$$

$$v_1 = \varphi(p) = a_1 p + a_0, \quad v_2 = \psi(p) = g_2 p^2 + g_1 p + g_0,$$

$$v_3 = \frac{\alpha(p)}{p} \sqrt{R(p)}, \quad \alpha(p) = f_1 p + f_0.$$

**Заключение.** В работе построено новое частное решение обобщенного полиномиального класса Дошкевича дифференциальных уравнений задачи о движении гири с неподвижной точкой в поле действия полиномиальных и гирископических сил. Новое решение зависит от семи свободных параметров задачи и решения, и описывается элементарными функциями времени.

### Список литературы

1. Горр Г.В. Динамика гири, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: Издательство ДонНУ, 2010. – 364 с.
2. Харламов П.В. О различных представлениях уравнений Кирхгофа / П.В. Харламов, Г.В. Мозалевская, М.Е. Лесина // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
3. Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах / С.Л. Зиглин // Функциональный анализ и его приложения. – 1982. – Т. 16, № 3. – С. 30–41.
4. Борисов А.В. Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.



5. KleinF. Über die Theorie des Kreisels/F.Klein; A.Sommerfeld. – New York: Johnson reprint corp., 1965. – 996 p.
6. Харламов П.В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1-13.

УДК 531.38

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ РАСТЯЖЕНИЯ

*Щепин Н.Н.*, канд. физ.-мат. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*shchepin\_nick@mail.ru*

**Введение.** Данная работа посвящена изучению системы твердых тел, связанных упругими цилиндрическими и телескопическими шарнирами. Записаны уравнения равновесия изучаемого объекта в предположении отсутствия действия внешних сил и моментов. Рассмотрен частный случай равновесной конфигурации системы, когда оси симметрии всех тел расположены в одной плоскости.

Для случая шести тел построено решение типа "розы", которое допускает возможность самопересечения в одной точке осей симметрии нескольких тел. Построенное решение является конечномерным аналогом решения Е.Л.Старостина [1], полученного для самопересекающейся оси упругого стержня, но при дополнительном учете растяжения.

**Целью** работы являлось нахождение равновесных конфигураций конечномерной модели упругого стержня, которая представляет собой замкнутую систему твердых тел, связанных цилиндрическими и телескопическими шарнирами, позволяющими промоделировать растяжение оси и нелинейный прогиб.

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему  $n$  твердых тел  $S_j$ . В точках  $P_j$  тел  $S_j$  установлены невесомые, упругие, телескопические шарниры, которые сонаправлены с осью симметрии тела  $S_j$ . В точках  $O_{j+1}$  тела  $S_{j+1}$  телескопический шарнир с помощью упругого цилиндрического шарнира соединяется с телом  $S_{j+1}$ . Точка  $O_{j+1}$  лежит на оси симметрии тела  $S_{j+1}$ . Будем предполагать, что оси симметрии  $O_j P_j = h_j$  тел  $S_j$  ( $j = \overline{1..n}$ ) принадлежат одной плоскости  $OXZ$ , а оси всех цилиндрических шарниров ей перпендикулярны.

Для учета нелинейности поведения упругого стержня момент  $L_j$  в цилиндрических шарнирах выбирался равным [2]

$$L_j = c^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

Полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты. Потенциальная энергия системы с учетом (1) представима в виде

$$\Pi = -c^2 \sum_{j=1}^n \cos(\psi_j - \psi_{j-1}) + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2. \quad (2)$$

Если система замкнута, то выполняются следующие соотношения:

$$f_1 = \sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \cos \psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n (h_j + \xi_j) \sin \psi_j = 0. \quad (3)$$

Если на систему наложены дополнительные связи, то положение равновесия может быть найдено из условия стационарности функции  $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  [3],

$$\delta L = \delta \Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0 \quad (4)$$

Из (2)–(4) получаем следующую систему соотношений

$$c^2 (\sin(\psi_{j+1} - \psi_j) - \sin(\psi_j - \psi_{j-1})) = (h_j + \xi_j) (\lambda_2 \cos \psi_j - \lambda_1 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n},$$

$$\psi_{n+1} = \psi_1, \quad \psi_0 = \psi_n, \quad (5)$$

$$k^2 \xi_j = -(\lambda_1 \cos \psi_j + \lambda_2 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

которая вместе с равенствами (3) позволяет определить неизвестные величины поставленной задачи.

**Стационарное решение типа "роза" в случае шести тел.** Рассмотрим фигуру типа "роза", симметричную относительно оси  $OZ$ . В этом случае длины осей симметрии тел  $O_k P_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) равны

$$O_1 P_1 = h_1, \quad O_2 P_2 = O_6 P_6 = h_2, \quad O_3 P_3 = O_5 P_5 = h_3, \quad O_4 P_4 = h_4, \quad (7)$$

углы  $\psi_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) между осью симметрии тела  $S_k$  и осью  $OX$  таковы:

$$\psi_1 = \psi_4 = 0, \quad \psi_2 = \pi + \varphi, \quad \psi_3 = \pi - \psi, \quad \psi_5 = \pi + \psi, \quad \psi_6 = \pi - \varphi, \quad (8)$$

растяжения  $\xi_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) равны

$$\xi_2 = \xi_6, \quad \xi_3 = \xi_5. \quad (9)$$

Подставляя соотношения (7)–(9) в равенства (3), (5), (6) получим замкнутую систему уравнений для определения основных переменных задачи.

$$-\sin(\varphi + \psi) + \sin \varphi = \frac{(h_2 + \xi_2) \lambda_1 \sin \varphi}{c^2},$$

$$\sin(\varphi + \psi) - \sin \psi = -\frac{(h_3 + \xi_3) \lambda_1 \sin \psi}{c^2}, \quad (10)$$

$$h_1 + h_4 + 2\xi_1 = 2((h_2 + \xi_2) \cos \varphi + (h_3 + \xi_3) \cos \psi)$$

$$\xi_1 = \xi_4 = -\frac{\lambda_1}{k^2}, \quad \xi_2 = \frac{\lambda_1 \cos \varphi}{k^2}, \quad \xi_3 = \frac{\lambda_1 \cos \psi}{k^2}, \quad \lambda_2 = 0.$$

Из системы (10) получаем, что  $\cos\varphi = -\frac{\xi_2}{\xi_1}$ ,  $\cos\psi = -\frac{\xi_3}{\xi_1}$ ,  $\lambda_1 = -k^2 \xi_1$ ,

а для определения неизвестных  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} b\xi_1 + \xi_2 + c\xi_3 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 &= 0, \\ (2\xi_2^2 - \xi_1(\xi_1 + \xi_3))(\xi_1 + \xi_3) &= \alpha\xi_1(1 + \xi_2)(\xi_1^2 - \xi_2^2)[2(\xi_1 + \xi_3) + \\ &+ \alpha\xi_1^2(1 + \xi_2)], \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \alpha\xi_1((c + \xi_3)(\xi_1 + \xi_3) + (1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2)) + \\ &+ \alpha^2\xi_1^3(1 + \xi_2)(c + \xi_3) &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $b = \frac{h_1 + h_4}{2h_2}$ ,  $c = \frac{h_3}{h_2}$ ,  $\alpha = \frac{k^2}{c^2 h_2^2}$ .

В работе показано, что система (11) допускает ненулевое решение задачи при малых значениях  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

**Заключение.** Таким образом, в работе найдено решение для случая замкнутой системы твердых тел типа "роза" с учетом моделирования нелинейности прогибов и растяжения оси. Рассмотрены условия существования данной равновесной конфигурации.

#### Список литературы

1. Starostin E.I. Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self contacts // Phil. Trans. R. Soc. Lond., A. – 2004. – Т. 362. – Р. 1317-1334.
2. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. О новом решении уравнений равновесия системы тел с упругой связью // Прикл. математика и механика. – 2014. – Т. 78, вып. 25. – С. 671-680.
3. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.

# Механика деформируемых сред

УДК 621.923.04

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПОРОШКА ЖЕЛЕЗНОГО РАСПЫЛЕННОГО В ШАРОВОЙ ВИБРОМЕЛЬНИЦЕ

*Алехов Ю.А., Волошанович И.Н., Сагдеева Ф.Н., Шавшина А.Н.*

ГУ «Научно-исследовательский институт «Реактивэлектрон», г. Донецк, ДНР  
*reaktivelektron@mail.ru*

**Введение.** Цель работы заключалась в исследовании влияния процесса механического измельчения порошка железного на его структуру.

Распыленный железный порошок марки ПЖР ВЗ.200.28 (ПЖР), взятый для исследования, находит широкое применение в различных областях промышленности: магнитно-абразивной обработке (МАО), магнитной дефектоскопии, производстве порошковых изделий антифрикционного, конструкционного и электротехнического назначения [1]. Эффективность использования ПЖР в качестве магнитной составляющей зерна магнитно-абразивных порошков (МАП), используемых в качестве инструмента МАО, зависит от формы, размера, и линейно-геометрических размеров частиц [2]. В свою очередь вышеуказанные параметры можно изменять путем механической обработки порошков [3].

**Основная часть.** Для исследования процесса обработки ПЖР были проведены эксперименты на шаровой вибромельнице СВМ 2 продолжительностью 7,5–120 минут. В качестве мелющих тел использовали металлические шары диаметром 30 мм, массовое соотношение ПЖР и шаров составило 1:10. Амплитуда колебаний рабочей камеры мельницы составляла 6 мм, частота колебаний 50 Гц.

Исходный и обработанный порошки подвергали ситовому и оптическому анализу. Результаты анализов представлены на рис. 1–3.

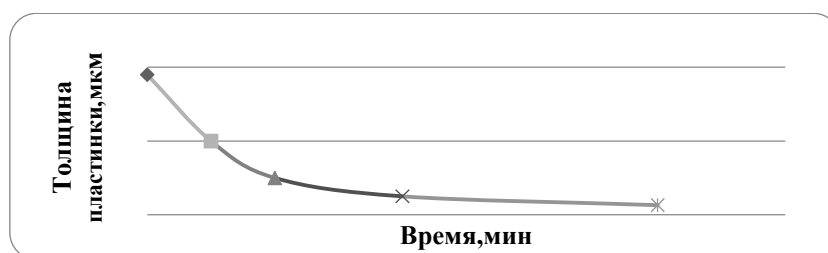


Рис. 1. Зависимость толщины частиц фракции 180–200 мкм ПЖР от времени механической обработки в шаровой вибромельнице СВМ 2.

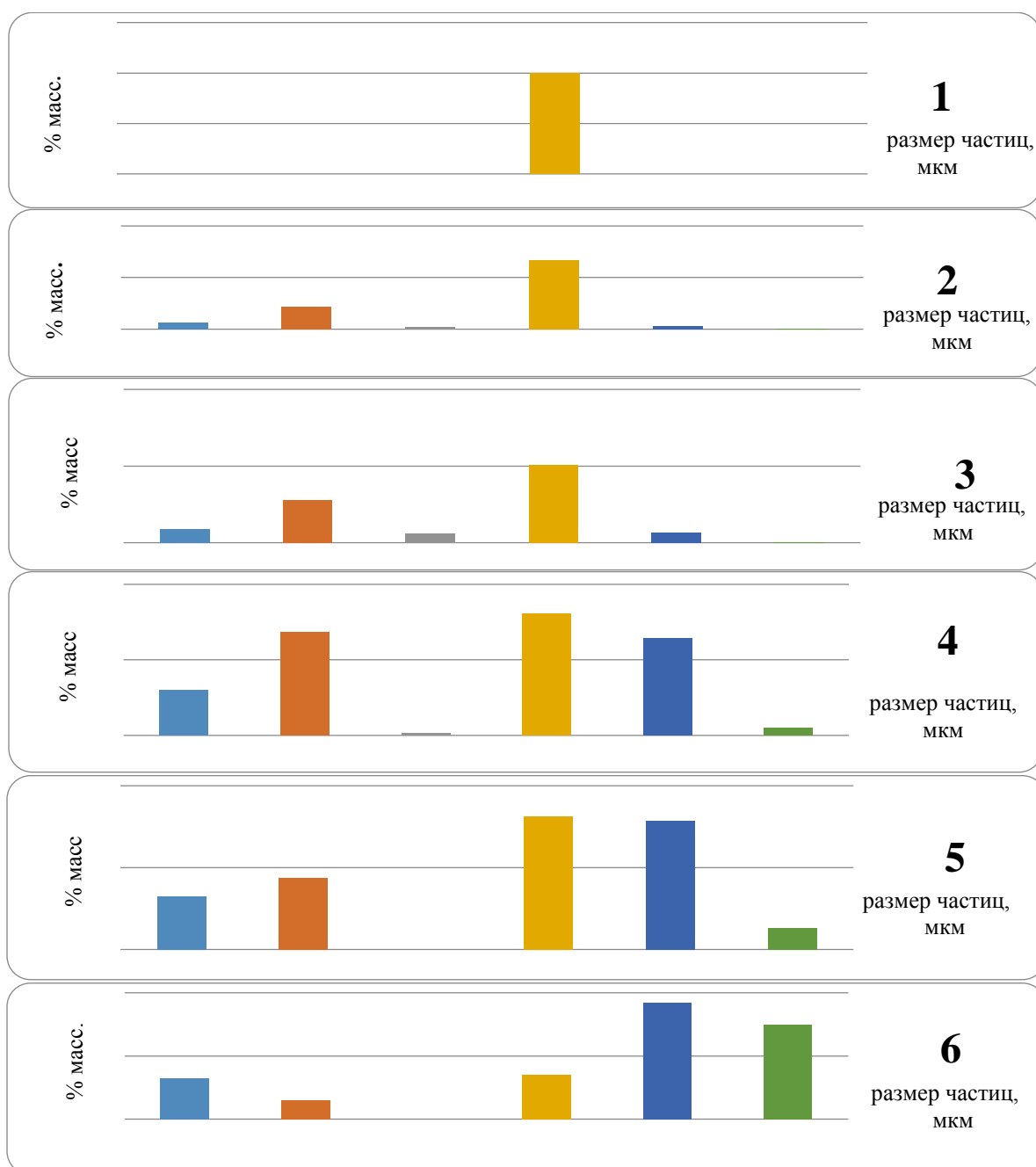


Рис. 2. Гранулометрический состав порошка ПЖР исходного – 1, обработанного в шаровой вибромельнице СВМ 2 в течение: 7,5 мин. – 2, 15 мин. – 3, 30 мин. – 4, 60 мин. – 5, 120 мин. – 6.

**Заключение.** Анализ полученных результатов позволяет заключить, что механическая обработка порошка ПЖР в указанных условиях позволяет не только размолоть частицы с размером 180–200 мкм до размера менее 100 мкм, но и за счет высокой пластичности железа получить пластинчатые частицы диаметром более 250 мкм и толщиной от 15 до 150 мкм. При этом изменяя продолжительность обработки можно управлять гранулометрическим составом и формой частиц получаемых порошков. Что особенно важно для синтеза МАП с управляемыми характеристиками [4].

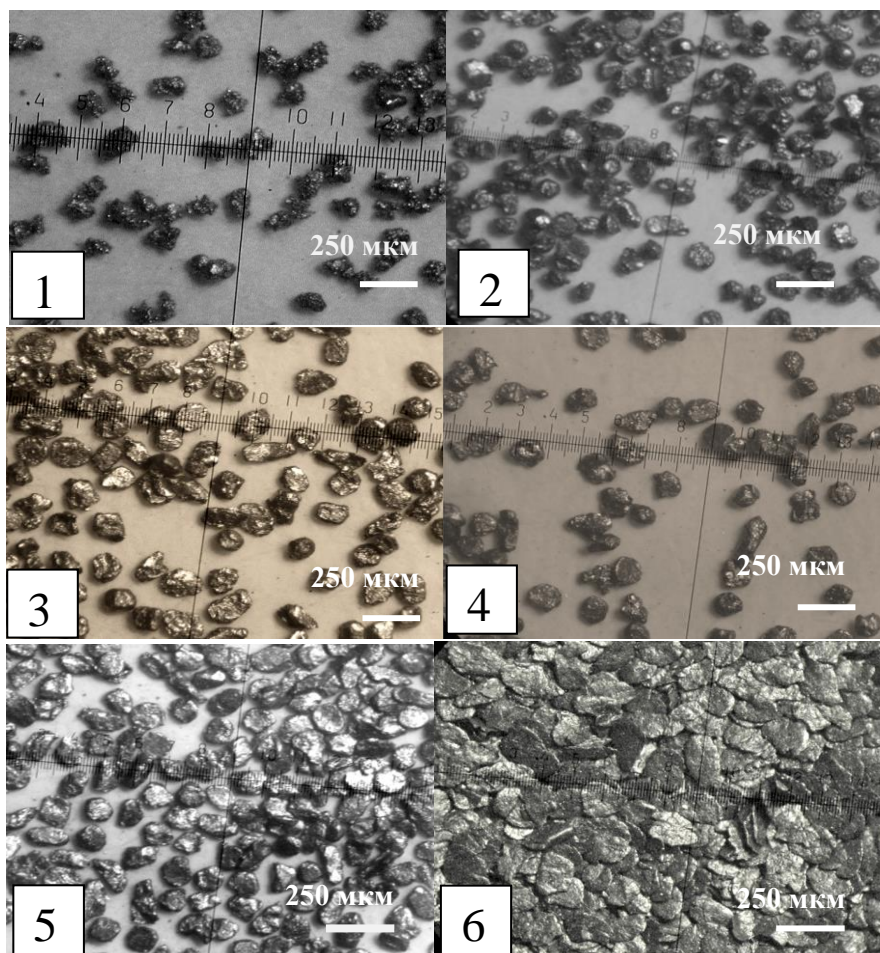


Рис. 3. Частицы ПЖР фракции 180-200 мкм: исходного – 1, обработанного в вибромельнице СВМ-2 в течение: 7,5 мин – 2; 15 мин. – 3; 30 мин. – 4; 60 мин. – 5; 120 мин. – 6.

### Список литературы

1. Кипарисов С.С., Либенсон Г.А. Порошковая металлургия. – М.: Металлургия, 1972.– 528 с.
2. Полищук В.С. Интенсификация процессов получения карбидов, нитридов и композиционных материалов на их основе /– Севастополь: «Вебер», 2003. – 327с.
3. Сиденко П.М. Измельчение в химической промышленности. – Москва., «ХИМИЯ» 1968. – 384 с.
4. Барон Ю.М. Магнитоабразивная обработка изделий и режущих инструментов. – Л.: Машиностроение, 1986. – 176 с.

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОТСЛОЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОКРЫТИЯ

*Богачев И.В.*, канд. физ.-мат. наук,

*Ватульян А.О.*, д-р физ.-мат. наук, проф.

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, РФ

*bogachev89@yandex.ru*

Разработка моделей дефектов, возникающих в объектах из новых неоднородных материалов, в частности, отслоений неоднородных покрытий является актуальной задачей. Одним из распространенных классов современных покрытий являются функционально-градиентные полимерные покрытия, свойства которых зависят от координат и могут изменяться в широких диапазонах. Также для такого рода покрытий характерны реологические свойства и имеют место процессы ползучести и релаксации. Для защитных и изолирующих покрытий возникновение отслоений является критическим фактором и важной практической задачей является локализация отслоения, определение его местоположения и анализ причин его возникновения.

В данной работе представлено развитие рассмотренной ранее задачи моделирования отслоения неоднородного предварительно напряженного покрытия [1] упругой полосы на случай неоднородного вязкоупругого покрытия. Основная часть полосы – подложка – считается упругой и неоднородной. При этом характеристики подложки и покрытия считаются функциями поперечной координаты. Между подложкой и покрытием имеется область отслоения, координаты которой известны. Нижняя грань полосы жестко закреплена, к верхней грани приложена периодическая нагрузка в заданной области. Вязкоупругие свойства покрытия описываются на основе концепции комплексных модулей, уравнения колебаний записаны с помощью принципа соответствия, в рамках которого упругие модули заменяются на функции комплексных модулей, зависящих не только от пространственных координат, но и от частоты колебаний. Для описания использована модель стандартного вязкоупругого тела, в состав которой входят функции мгновенного и длительного модулей, а также время релаксации. На первом этапе для построения функций раскрытия в области отслоения с помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к решению отдельных краевых задач для подложки и покрытия в трансформантах. Для удобства численной реализации проведено разделение постановки задачи на вещественную и мнимую части. Решение каждой из задач представлено в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач Коши для различных

наборов граничных условий. Затем для построения функций раскрытия отслоения из условий равенства нулю напряжений в области отслоения (отслоение моделируется как математический разрез) на основе обращения преобразования Фурье, переводящего произведение функций в свертку, сформулированы соответствующие операторные соотношения в виде интегральных уравнений 1-го рода. Ядра построенных операторных соотношений являются сингулярными и представляют из себя интегралы по бесконечному промежутку, для их вычисления используются специальные подходы, основанные на вычислении их в главном значении по Коши и Адамару. Дополнительно проведено исследование влияния характера параметров отслоения на вид передаточных функций, входящих в ядра операторных соотношений. На основе аналогичного подхода построена схема вычисления функции смещения на верхней границе покрытия. Представлены результаты вычислительных экспериментов по исследованию влияния различных наборов исходных параметров задачи, в частности, времени релаксации на функции раскрытия и смещения на верхней границе слоя. Также проведен анализ влияния исходных параметров задачи на амплитудно-частотные характеристики.

Работа выполнена при поддержке РФФ (код проекта 18-11-00069).

#### Список литературы

1. Bogachev I.V., Vatulyan A.O. On modeling bodies with delaminating coatings taking into account the fields of prestresses // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2020. – No. 1. – P. 5-16. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.01

УДК 539.3

### **О МОДЕЛИРОВАНИИ МЯГКИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ С УЧЕТОМ ПОЛЕЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**

**Богачев И.В.**, канд. физ.-мат. наук.

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, РФ

*bogachev89@yandex.ru*

Современные модели биологических тканей как неоднородных сред сложной структуры должны учитывать как их существенную неоднородность, так и возможное наличие в них полей предварительных напряжений. Предварительные напряжения могут иметь как естественную природу, и возникать, например, при ростовых деформациях для твердых тканей, так и образовываться в процессе рубцевания мягких тканей вследствие их повреждений или оперативного вмешательства. Развитие методов мониторинга физиологического состояния тканей и органов, позволяющих на ранних этапах прогнозировать возникновение и развитие



различных заболеваний и патологий, а также контролировать этапы восстановления поврежденных тканей (костей, сухожилий, мягких тканей), оценивать уровень предварительных напряжений, является одной из самых актуальных задач медицины. Подобные диагностические методы могут быть основаны на ультразвуковой диагностике, принадлежащий к классу акустических методов. Среди ее преимуществ для исследования биологических тканей выделяются простота и универсальность практической реализации, позволяющие исследовать любые органы, и, что особенно важно, неразрушающий, неинвазивный характер.

Опубликованные в современной литературе экспериментальные данные показывают, что кожный кожного покров ведет себя как вязкоупругий композиционный материал, состоящий из нескольких дискретных слоев (эпидермиса, дермы и подкожного жира), обладающих своими собственными характеристиками. Также в каждом из слоев могут присутствовать неоднородные поля предварительных напряжений, возникающие, например, при заживлении после пластических и других операций. Ввиду этих особенностей стандартные модели твердых тел не могут адекватно описать экспериментальные результаты исследований механических свойств кожи.

В данной работе рассмотрена задача моделирования кожного покрова в виде неоднородного по толщине вязкоупругого слоя, в свою очередь состоящего из трех слоев, моделирующих подкожный жир, дерму и эпидермис. Каждый из слоев считался предварительно напряженным. Для описания реологических свойств кожи была использована модель стандартного вязкоупругого тела, в качестве параметров в которую входят мгновенный и длительный модули и время релаксации. Постановка задачи выписана на основе общей линеаризованной постановки задачи о колебаниях предварительно напряженно-деформированного тела. Механические характеристики и предварительные напряжения считались функциями поперечной координаты. С использованием метода соответствия и концепции комплексных модулей в постановке задачи функции упругих модулей заменены на комплексные модули. Для построения вычислительной схемы расчета колебаний и амплитудно-частотных характеристик с помощью преобразования Фурье по продольной координате исходная двумерная задача записана в трансформантах, затем произведено ее осреднение. Решение прямой задачи осуществлялось с помощью вычислительного комплекса на основе метода пристрелки, показавшего высокую точность. Представлен анализ влияния комплексного модуля сдвига и уровня предварительных напряжений на амплитудно-частотные характеристики на верхней грани слоя. Данный анализ может послужить основой для разработки методики идентификации неоднородных характеристик слоя на основе анализа акустического отклика.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 18-71-10045).

## ЭФФЕКТЫ ТРАНСФОРМАЦИИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В МЕМБРАНИРОВАННОМ ДВУХСЛОЙНОМ ЭКРАНЕ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Болнокин В.Е.<sup>1</sup>**, д-р техн. наук, проф.,

**Зыонг Минь Хай<sup>2</sup>**, д-р техн. наук, **Карасев Д.С.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН», г. Москва, РФ

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт ВМФ, г. Хайфон, СРВ

<sup>3</sup>ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*stvi@donnu.ru*

**Введение.** Создание новых типов конструкционных элементов для решения разнообразных задач экранирования гидроакустических волновых воздействий [1–4] продолжает сохранять свою актуальность в связи с перспективами применения при конструировании таких элементов современных непрерывно неоднородных функционально-градиентных анизотропных композиционных материалов, формируемых на базе аддитивных технологий [5]. В этой связи подлежат исследованию волновые деформационные свойства новых структурных вариантов многослойных конструкций плоских гидроакустических экранов из указанных материалов. Вытекающей из этих соображений целью представляемого исследования является получение расчетной модели процессов отражения и прохождения волн деформаций по толщине двухслойного экранирующего пакета из анизотропных функционально-градиентных материалов с мембранными покрытиями слоев при падении на него плоской гармонической гидроакустической волны.

**Получение соотношений расчетной модели.** Рассматривается составное упругое тело, образуемое двумя плоскопараллельными слоями  $L_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) различной толщины. Слой  $L_1$ , занимающий в координатном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  область  $V_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq h_1\}$ , изготовлен из экспоненциально-неоднородного анизотропного материала триклинной системы с приведенными модулями упругости  $c_{ij}^{(1)}$ , приведенным показателем плотности  $\rho_1$  и показателем неоднородности  $\lambda_1$ . Слой  $L_2$ , занимает область  $V_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2, h_1 \leq x_3 \leq h_1 + h_2\}$ , изготовлен из экспоненциально-неоднородного анизотропного материала гексагональной системы с приведенными модулями упругости  $c_{ij}^{(2)}$ , приведенным показателем плотности  $\rho_2$  и показателем неоднородности  $\lambda_2$ . Двухслойный экран контактирует с полубесконечными объемами жидкости, соответственно занимающими области

$$V_- = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < 0\}, V_+ = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h_1 + h_2\}$$

и характеризующимися параметрами адиабатических сжимаемостей  $\chi_-$ ,  $\chi_+$  и плотностей  $\rho_-$ ,  $\rho_+$ . На внешних контактирующих с жидкостью поверхностях экрана и на поверхности сопряжения слоев имеются абсолютно гибкие тонкие нерастяжимые покрытия.

В компонентах  $L_p$  экранирующего пакета вследствие нормального падения на двухслойный экран из глубины полупространства жидкости  $V_-$  плоской гидроакустической волны с потенциалом  $\varphi_-(x_3, t) = \varphi_{01}^{(-)} \exp(-i(\omega t - k_F^{(-)} x_3))$  формируются одномерные деформационные поля, описываемые в  $L_1$  функциями динамических волновых перемещений, скоростей волновых перемещений и динамических напряжений

$$\begin{aligned} u_j^{(1)}(x_3, t) &= G_{uj}^{(1)}(x_3) \exp(-i\omega t), \\ G_{uj}^{(1)}(x_3) &= A_1^{(+)} \mathfrak{G}_{j1}^{(+)} \exp(k_{11} x_3) + A_1^{(-)} \mathfrak{G}_{j1}^{(-)} \exp(-k_{11} x_3) + \\ &+ A_2^{(+)} \mathfrak{G}_{j2}^{(+)} \exp(k_{21} x_3) + A_2^{(-)} \mathfrak{G}_{j2}^{(-)} \exp(-k_{21} x_3) + \\ &+ A_3^{(+)} \mathfrak{G}_{j3}^{(+)} \exp(k_{31} x_3) + A_3^{(-)} \mathfrak{G}_{j3}^{(-)} \exp(-k_{31} x_3); \dot{u}_j^{(1)}(x_3, t) = G_{uj}^{(1)}(x_3) \exp(-i\omega t), \\ G_{uj}^{(1)}(x_3) &= (-i\omega)(A_1^{(+)} \mathfrak{G}_{j1}^{(+)} \exp(k_{11} x_3) + A_1^{(-)} \mathfrak{G}_{j1}^{(-)} \exp(-k_{11} x_3) + \\ &+ A_2^{(+)} \mathfrak{G}_{j2}^{(+)} \exp(k_{21} x_3) + A_2^{(-)} \mathfrak{G}_{j2}^{(-)} \exp(-k_{21} x_3) + \\ &+ A_3^{(+)} \mathfrak{G}_{j3}^{(+)} \exp(k_{31} x_3) + A_3^{(-)} \mathfrak{G}_{j3}^{(-)} \exp(-k_{31} x_3)); \\ \sigma_{3j}^{(1)}(x_3, t) &= G_{\sigma 3j}^{(1)}(x_3) \exp(-i\omega t), \\ G_{\sigma 3j}^{(1)}(x_3) &= \sum_{q=1}^3 [A_{q1}^{(+)} k_{q1} (c_{6-j,5}^{(1)} \mathfrak{G}_{q1}^{(+)} + c_{6-j,5}^{(1)} \mathfrak{G}_{q2}^{(+)} + c_{6-j,5}^{(1)} \mathfrak{G}_{q3}^{(+)}) \exp(k_{j1} x_3) - \\ &- A_{q1}^{(-)} k_{q1} (c_{6-j,5}^{(1)} \mathfrak{G}_{q1}^{(-)} + c_{6-j,5}^{(1)} \mathfrak{G}_{q2}^{(-)} + c_{6-j,5}^{(1)} \mathfrak{G}_{q3}^{(-)}) \exp(-k_{j1} x_3)] \quad (j = \overline{1, 3}), \end{aligned}$$

а в слое  $L_2$  – функциями динамических волновых перемещений, скоростей волновых перемещений и динамических напряжений

$$\begin{aligned} u_j^{(2)}(x_3, t) &= G_{uj}^{(2)}(x_3) \exp(-i\omega t), \\ G_{uj}^{(2)}(x_3) &= A_{j2}^{(+)} \exp(k_{j2} x_3) + A_{j2}^{(-)} \exp(-k_{j2} x_3); \\ \dot{u}_j^{(2)}(x_3, t) &= G_{uj}^{(2)}(x_3) \exp(-i\omega t), \\ G_{uj}^{(2)}(x_3) &= (-i\omega)(A_{j2}^{(+)} \exp(k_{j2} x_3) + A_{j2}^{(-)} \exp(-k_{j2} x_3)); \\ \sigma_{3j}^{(2)}(x_3, t) &= G_{\sigma 3j}^{(2)}(x_3) \exp(-i\omega t), \\ G_{\sigma 3j}^{(2)}(x_3) &= c_{44}^{(2)} (A_{j2}^{(+)} k_{j2} \exp(k_{j2} x_3) - A_{j2}^{(-)} k_{j2} \exp(-k_{j2} x_3)) \quad (j = \overline{1, 2}). \end{aligned}$$

Введенные представления содержат двенадцать произвольных подлежащих определению коэффициентов  $A_{j1}^{(\pm)}$ ,  $A_{j2}^{(\pm)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ). В жидкостных полупространствах вследствие взаимодействия падающей волны с

экранирующим пакетом генерируется отраженная в  $V_-$  гидроакустическая волна с потенциалом  $\tilde{\varphi}_-(x_3, t) = \varphi_{02}^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_F^{(-)} x_3))$  и прошедшая в  $V_+$  гидроакустическая волна с потенциалом  $\varphi_+(x_3, t) = \varphi_0^{(+)} \exp(-i(\omega t - k_F^{(+)} x_3))$ . Представления гидроакустических волн содержат два неизвестных амплитудных параметра  $\varphi_{02}^{(-)}, \varphi_0^{(+)}$ . В итоге, расчетная модель экрана сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений 14 порядка, следующей из краевых условий на покрытых мембранами граничных поверхностях компонентов пакета, формулируемых в виде

$$\begin{aligned} G_{uj}^{(1)}(0) &= 0 \quad (j = 1, 2), \quad G_{ut3}^{(1)}(0) = G_v^{(-)}(0), \quad G_{\sigma33}^{(1)}(0) = G_P^{(-)}(0), \\ G_{uj}^{(1)}(h_1) &= 0 \quad (j = 1, 2), \quad G_{uj}^{(2)}(h_1) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad G_{u3}^{(1)}(h_1) = G_{u3}^{(2)}(h_1), \\ G_{\sigma33}^{(1)}(h_1) &= G_{\sigma33}^{(2)}(h_1), \quad G_{uj}^{(2)}(h_1 + h_2) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad G_{ut3}^{(2)}(h_1 + h_2) = G_v^{(+)}(h_1 + h_2), \\ G_{\sigma3j}^{(2)}(h_1 + h_2) &= G_P^{(+)}(h_1 + h_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_v^{(-)}(x_3) &= ik_F^{(-)}(-\varphi_{01}^{(-)} \exp(ik_F^{(-)} x_3) + \varphi_{02}^{(-)} \exp(-ik_F^{(-)} x_3)), \\ G_P^{(-)}(x_3) &= (-i\omega\rho_-)(\varphi_{01}^{(-)} \exp(ik_F^{(-)} x_3) + \varphi_{02}^{(-)} \exp(-ik_F^{(-)} x_3)), \\ G_v^{(+)}(x) &= -ik_F^{(+)}\varphi_0^{(+)} \exp(ik_F^{(+)} x_3), \quad G_P^{(+)}(x_3) = (-i\omega\rho_+)\varphi_0^{(+)} \exp(ik_F^{(+)} x_3). \end{aligned}$$

**Заключение.** Представленные в работе расчетные соотношения являются основой для детального исследования возможностей функционирования гидроакустических экранов, обуславливаемых сочетанием факторов физико-механических особенностей конструкционных материалов и наличия покрытий на границах слоев экранирующего пакета.

### Список литературы

1. Корякин Ю.А. Корабельная гидроакустическая техника: состояние и актуальные проблемы / Ю.А. Корякин, С.А. Смирнов, Г.В. Яковлев. – СПб: Наука, 2004. – 410 с.
2. Болнокин В.Е. Исследование систем гидроакустического экранирования для подводных транспортных средств / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай. – Воронеж: Научная книга, 2016. – 196 с.
3. Глазанов В.Е. Акустические экраны для подводных преобразователей и антенн. Теория и расчет / В.Е. Глазанов. – СПб.: СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. – 175 с.
4. Болнокин В.Е. Иерархическая нечеткая модель гидроакустической активности подводных транспортных средств / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай. // Экономика и менеджмент систем управления. – 2017. – № 4. – С. 49-60.
5. Functionally graded materials: design, processing and applications / Edited by Y. Miyamoto. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.

## МОДЫ ИЗГИБНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ ИЗОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

*Болнокин В.Е.*<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф.,

*Сторожев В.И.*<sup>2</sup>, д-р техн. наук, проф., *Дубяго Л.В.*<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН», г. Москва, РФ

<sup>2</sup>ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

**Введение.** Теоретический анализ процессов распространения упругих волн вдоль криволинейных траекторий в деформируемых телах [1–4], в том числе изучение спектров и свойств изгибных волн деформаций вдоль окружного (углового) направления в тонких пластинах круговой и концентрической кольцевой геометрии в составных кольцевых пластинах, представляет интерес как для прочностных расчетов, для технологий ультразвуковой дефектоскопии, так и для приложений в теории электронных устройств на поверхностных акустических волнах, в линиях задержки волновых сигналов [5, 6]. Различные подлежащие исследованию аспекты данной проблемы заключаются в использовании различных моделей динамического изгибного деформирования пластин, включая классическую прикладную модель, уточненные теории, модели учета упругих оснований и начальных деформаций; в разнообразных вариантах описания физико-механических свойств материалов пластин, включая цилиндрическую анизотропию, толщинную и радиальную неоднородность; в задании различных типов и сочетаний граничных условий на граничных контурах пластин. При столь широком числе подлежащих исследованию актуальных вопросов в рассматриваемой предметной области, имеются лишь единичные опубликованные работы по теории распространения окружных волн в тонких изотропных пластинах со свободными внутренним и внешним граничными контурами, базирующиеся на прикладной кирхгоффовской модели динамического изгиба [7].

С учетом представленных соображений, целью данной работы является получение численно-аналитического решения задачи о закономерностях распространения упругих изгибных волн в окружном направлении лежащей на линейном упругом основании (упругом основании Винклера) изотропной кольцевой пластины со свободными краями.

**Получение основного дисперсионного соотношения.** В рамках прикладной модели динамического изгиба тонких изотропных пластин и модели линейного упругого основания Винклера [8 – 10] уравнение для функции прогиба  $w$  кольцевой пластины, занимающей в полярных координатах  $O r \theta$  область  $S = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ , записывается в виде

$$\Delta \Delta w(r, \theta, t) + (\zeta / D)w(r, \theta, t) + (\rho h / D)(\partial^2 w(r, \theta, t) / \partial t^2) = 0, \quad (1)$$

где  $\zeta$  – коэффициент пастели линейного упругого основания;  $\rho$  – плотность материала плиты;  $h$  – толщина плиты;  $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$  – параметр цилиндрической жесткости;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\Delta = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + r^{-2} \partial^2 / \partial \theta^2$  – оператор Лапласа в полярных координатах.

При введении для исследуемой изгибной гармонической волны с круговой частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  вдоль окружного углового направления  $\theta$  в рассматриваемой кольцевой пластине представления

$$w(r, \theta, t) = w_0(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)), \quad (2)$$

для амплитудной функции  $w_0(r)$  из (1) следует уравнение

$$(\partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r - (k/r)^2 + \lambda^2)(\partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r - (k/r)^2 - \lambda^2)w_0(r) = 0, \quad (3)$$

$$\lambda = ((\zeta - \rho h \omega^2) / D)^{1/4}, \quad (4)$$

решение которого выражается через специальные цилиндрические функции первого и второго рода с индексами  $k$

$$w_0(r) = a_1 J_k(\lambda r) + a_2 N_k(\lambda r) + a_3 I_k(\lambda r) + a_4 K_k(\lambda r). \quad (5)$$

С учетом вида граничных условий для функции  $w(r, \theta, t)$  на контурных линиях пластины  $r = R_j$

$$[(\partial^2 / \partial r^2 + \nu r^{-1} \partial / \partial r + \nu r^{-2} \partial^2 / \partial \theta^2)w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} = 0, \quad (6)$$

$$[(\partial / \partial r \cdot (\Delta) + (1 - \nu)(r^{-2} \partial^3 / \partial r \partial \theta^2 - r^{-3} \partial^2 / \partial \theta^2)w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} = 0,$$

дисперсионное уравнение для волн исследуемого типа первоначально может быть записано как равенство нулю функционального определителя

$$F(k, \omega) = \det \|\mathfrak{S}_{qp}(k, \omega)\| = 0 \quad (q, p = \overline{1, 4}) \quad (7)$$

с элементами вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{j1}(k, \omega) &= (J_{k-2}(\lambda R_j) - 2J_k(\lambda R_j) + J_{k+2}(\lambda R_j)) / 4 + \\ &+ (\nu / (2R_j))(J_{k-1}(\lambda R_j) - J_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2 / R_j^2)J_k(\lambda R_j), \\ \mathfrak{S}_{j2}(k, \omega) &= (N_{k-2}(\lambda R_j) - 2N_k(\lambda R_j) + N_{k+2}(\lambda R_j)) / 4 + \\ &+ (\nu / (2R_j))(N_{k-1}(\lambda R_j) - N_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2 / R_j^2)N_k(\lambda R_j), \\ \mathfrak{S}_{j3}(k, \omega) &= (I_{k-2}(\lambda R_j) + 2I_k(\lambda R_j) + I_{k+2}(\lambda R_j)) / 4 + \\ &+ (\nu / (2R_j))(I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2 / R_j^2)I_k(\lambda R_j), \\ \mathfrak{S}_{j4}(k, \omega) &= -(K_{k-2}(\lambda R_j) + 2K_k(\lambda R_j) + K_{k+2}(\lambda R_j)) / 4 - \\ &- (\nu / (2R_j))(K_{k-1}(\lambda R_j) + K_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2 / R_j^2)K_k(\lambda R_j), \\ \mathfrak{S}_{j+2,1}(k, \omega) &= (k^2 / R_j^3)J_k(\lambda R_j) + \\ &+ ((\nu - 1)k^2 / R_j^2 - \lambda^2)(J_{k-1}(\lambda R_j) - J_{k+1}(\lambda R_j)) / 2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{j+2,2}(k, \omega) &= (k^2 / R_j^3) N_k(\lambda R_j) + \\
&+ ((\nu - 1)k^2 / R_j^2 - \lambda^2)(N_{k-1}(\lambda R_j) - N_{k+1}(\lambda R_j)) / 2, \\
\mathfrak{G}_{j+2,3}(k, \omega) &= (k^2 / R_j^3) I_k(\lambda R_j) + \\
&+ ((\nu - 1)k^2 / R_j^2 + \lambda^2)(I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j)) / 2, \\
\mathfrak{G}_{j+2,4}(k, \omega) &= (k^2 / R_j^3) K_k(\lambda R_j) + \\
&+ ((1 - \nu)k^2 / R_j^2 - \lambda^2)(K_{k-1}(\lambda R_j) + K_{k+1}(\lambda R_j)) / 2 \\
&(j = \overline{1, 2}),
\end{aligned}$$

а подлежащий определению параметр  $k$  фигурирует как индексный показатель специальных цилиндрических функций.

Для численного анализа дисперсионного соотношения (7) разработано алгоритмическое приложение в среде программирования «Mathematica».

Предложена также методика асимптотического анализа дисперсионного уравнения (7) в коротковолновом низкочастотном диапазоне на основе использования асимптотических представлений цилиндрических функций для конечных значений аргументов и неограниченно возрастающих значениях индексов [11].

**Заключение.** Результатом представленных исследований является теоретический алгоритм численно-аналитического решения задачи о закономерностях распространения упругих изгибных волн в окружном направлении изотропной кольцевой пластины со свободными краями, лежащей на линейном упругом основании. Построено дисперсионное уравнение, описывающее спектр волн анализируемого типа.

### Список литературы

1. Бреховских Л.М. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы / Л.М. Бреховских // Акуст. журн. – 1960. – Т. 13, № 4. – С. 541–554.
2. Голубева Е.В. О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре / Е.В. Голубева // Акуст. журн. – 1986. – Т. 22, № 3. – С. 385–386.
3. Rostafinski W. Analysys of propagation of waves of acoustic frequensis in curved ducts / W. Rostafinski // J. Acoust. Soc. Amer. – 1975. – V. 56. – P. 11–15.
4. Vboulis G. Curcumferental waves around cylindrical inhomogeneties in plane viscoelastic solid systems / G. Vboulis, S.A. Paipetis, P.S. Theocaris // J. Sound Vibrat. –1974. – V. 35, № 4. – P. 521–533.
5. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э.Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
6. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В.Мелешко. – К.: Наук.думка, 1981. – 284 с.
7. Тютюкин В.В. Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны. / В.В. Тютюкин // Акуст. Журн. –2003. – Т. 49, № 6 – С. 843–851.
8. Горбунов-Посадов М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

9. Агаларов Дж.Г. Колебания пластины, шарнирно закреплённой и упруго подвешенной на винклеровом основании / Дж. Г. Агаларов, Г.А. Мамедова // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2018. – № 7. – С. 48–53.
10. Ишкова А.Г. Вынужденные колебания круглой пластинки на упругом полупространстве // А.Г. Ишкова // Изв. АН СССР. Сер. Мех. тверд. тела. – 1989. – N 1. – С. 180–183.
11. Кузнецов Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1965. – 272 с.

УДК 539.3

## ИЗГИБ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА БАЗЕ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРИИ В ВАРИАНТЕ {1,2}-АППРОКСИМАЦИИ

*Бондаренко Н. С.*, канд. физ.-мат. наук, доц.  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*n.bondarenko@donnu.ru*

**Введение.** Широкое распространение современных композиционных материалов в инженерной практике обуславливает необходимость разработки методов расчёта элементов конструкций из таких материалов на базе теорий высших порядков, учитывающих явления, обусловленные сдвигами и обжатием. В связи с этим построение и развитие обобщённых теорий пластин и оболочек, более точных, чем классическая теория Кирхгофа-Лява, весьма актуально в настоящее время [1–3].

Применение метода  $\{m, n\}$ -аппроксимации при решении задач для пластин с концентраторами напряжений позволяет получать решения с произвольной, наперёд заданной точностью. В то же время использование данного метода связано со значительными математическими сложностями, обусловленными сложностью структуры уравнений метода  $\{m, n\}$ -аппроксимации при больших значениях  $m$  и  $n$ . Настоящая работа посвящена решению задачи изгиба трансверсально-изотропной пластины под действием сосредоточенной силы в рамках  $\{1,2\}$ -аппроксимации.

**Основная часть.** Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщины  $2h$  в безразмерной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , определённой с точностью до полутолщины пластины  $h$ . В начале координат на пластину действует сосредоточенная сила  $\vec{F}$ .

Разрешающая система уравнений статики на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,2\}$ -аппроксимации, описывающая состояние изгиба, включает в себя [4]:



– уравнения закона Гука:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) + \lambda_0 R_1; & M_2 &= D_0 \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right) + \lambda_0 R_1; \\
 H &= \frac{1-\nu}{2} D_0 \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} \right); & R_1 &= \Omega_0 \left[ w_2 + \frac{\lambda_0}{3} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) \right]; \\
 Q_{i0} &= \Lambda_0 \left[ \gamma_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( w_0 - \frac{w_2}{14} \right) \right] & (i=1, 2); \\
 Q_{i2} &= -\frac{\Lambda_0}{14} \left[ \gamma_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_0 - 2w_2) \right] & (i=1, 2),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\gamma_x, \gamma_y$  – аналоги углов поворота нормали;  $w_0, w_2$  – коэффициенты разложения перемещения  $u_z$  в ряд по полиномам Лежандра  $P_k = P_k(x_3)$  [4] ( $u_z = w_0 P_0 + w_1 P_1 + w_2 P_2$ );  $M_1, M_2, H$  – аналоги изгибающих и крутящего моментов;  $Q_{i0}, Q_{i2}$  ( $i=1, 2$ ),  $R_1$  – обобщённые усилия;

$$\begin{aligned}
 D_0 &= \frac{2}{3} \frac{1}{1-\nu^2}; & \lambda_0 &= \frac{\nu'}{1-\nu} E^*; & \Lambda_0 &= \frac{28}{15} \frac{1}{E/G'}; \\
 \Omega_0 &= \frac{7}{5} \frac{(1-\nu)/E^*}{1-\nu-2(\nu')^2 E^*}; & E^* &= \frac{E}{E'};
 \end{aligned}$$

$E, E'$  – модули Юнга для направлений в плоскостях изотропии и перпендикулярных к ней;  $\nu, \nu', G, G'$  – коэффициенты Пуассона и модули сдвига, соответствующие этим направлениям;

– уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} + m_1 &= 0; & \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_{20} + m_2 &= 0; \\
 \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} + q_3 &= 0; & \frac{\partial Q_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} - 3R_1 + q_5 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $m_1, m_2, q_3, q_5$  – коэффициенты разложения компонент вектора объёмной силы в ряды по полиномам Лежандра [4].

Моменты в соотношениях (1), (2) определены с точностью до величины  $Eh^2$ , а обобщённые усилия – до  $Eh$ .

Представления компонент вектора перемещений и тензора напряжений для состояния изгиба на базе обобщённой теории в варианте {1,2}-аппроксимации представлены в [4].

Было построено фундаментальное решение задачи изгиба (1), (2) с правыми частями разрешающих уравнений вида  $q_i = q_i^* \delta(x_1, x_2)$ ,

$m_i = m_i^* \delta(x_1, x_2)$ , где  $\delta(x_1, x_2)$  – двумерная дельта-функция Дирака. При этом использовалась методика, описанная в [5]. Выражения для обобщённых усилий и моментов представляют собой линейные комбинации специальных  $G$ -функций  $G_{n,\nu}(z)$ , например:

$$R_1 = \frac{\lambda_0 \Omega_0}{6\pi A_1} \left\{ \left( q_3^* + q_3^* \frac{A_1 a_1^2}{14\lambda_0 \Omega_0} + q_5^* \frac{A_1 a_1^2}{\lambda_0 \Omega_0} \right) G_{0,0}(a_1 r) - \frac{2}{r^2} (m_1^* x_1 + m_2^* x_2) G_{0,1}(a_1 r) \right\},$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad A_1 = D_0 + \frac{1}{3} \lambda_0^2 \Omega_0; \quad a_1^2 = \frac{196 D_0 \Omega_0}{9 A_1 \Lambda_0}.$$

Были проведены численные исследования обобщённых усилий для случая изгиба трансверсально-изотропных пластин при сосредоточенном силовом воздействии, для которого  $m_1^* = m_2^* = q_3^* = q_5^* = 1$ . Рассматривались два вида материала пластины:

- изотропный ( $E^* = 1$ ;  $E / G' = 2,6$ ;  $\nu = \nu' = 0,3$ );
- трансверсально-изотропный ( $E^* = 5$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,07$ ).

Значения параметра сдвиговой податливости  $E / G'$  для трансверсально-изотропного материала брались такими: 40, 80, 120. Были построены графики изменения  $Q_{10}$ ,  $Q_{20}$ ,  $R_1$  вдоль оси абсцисс.

**Заключение.** На основании проведённых исследований можно сделать такие выводы:

- увеличение параметра сдвиговой податливости  $E / G'$  приводит к возрастанию модулей обобщённых усилий  $Q_{10}$ ,  $Q_{20}$ ,  $R_1$ ;
- при расчёте тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из современных композиционных материалов, на сосредоточенные силовые воздействия, приводящие к изгибу, необходимо использовать обобщённые теории пластин и оболочек.

### Список литературы

1. Tuchapskyu R. I. Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the  $\{m, n\}$ -approximation method / R. I. Tuchapskyu // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 226, No. 1. – P. 52–68.
2. Zelensky A. The method of integrating systems of high-order equilibrium equations of the mathematical theory of thick plates under intermittent loads (part 1) / A. Zelensky, A. Privarnikov // Innovative scientific researches: European development trends and regional aspect. Collective monograph. – 4th ed. – Riga, Latvia: «Baltija Publishing», 2020. – P. 221–255.

3. Zelensky A. G. The method of successive approximations in the mathematical theory of shallow shells of arbitrary thickness / A. G. Zelensky // World Science. – 2019. – Vol. 1, No. 11 (51). – P. 31–39.
4. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – Киев : Наукова думка, 1982. – 296 с.
5. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебное пособие // В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ПОКРЫТИЕМ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

**Ватульян А.О.<sup>1</sup>**, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
**Нестеров С.А.<sup>2</sup>**, канд. физ.-мат. наук.

<sup>1</sup>ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, РФ

<sup>2</sup>ФГБУН «Южный математический институт – филиал ВНИЦ РАН», г. Владикавказ, РФ  
*aovatulyan@sfnedu.ru*

**Введение.** В настоящее время для изучения эффектов, наблюдаемых в тонкослойных покрытиях, широко используются градиентные теории упругости, в определяющие уравнения которых входят масштабные параметры. Градиентная теория была сформулирована в 60-е годы прошлого века в работах Миндлина и Тупина [1, 2], а начиная с 70-х годов прошлого века градиентные теории стали применять и к задачам термоупругости [3]. Для решения практических задач широко используют однопараметрическую модель Айфантиса [4], в которой плотность энергии деформации имеет вид:

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \alpha^2 \left( \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii,k} \varepsilon_{jj,k} + \mu \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k} \right). \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  – градиентный параметр, имеющий размерность длины. Вводятся определяющие соотношения для компонент тензора напряжений Коши  $\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$ , тензора моментных напряжений  $m_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = \alpha^2 \tau_{ij,k}$ , тензора полных напряжений  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k} = (1 - \alpha^2 \nabla^2) \tau_{ij}$ . В случае постановки задачи несвязанной термоупругости в уравнении (1) делаем замену  $\varepsilon_{ij}$  на  $\varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} T$ . Математическая постановка задачи градиентной термоупругости состоит из уравнений равновесия, записанных в полных напряжениях, уравнения теплопроводности и граничных условий.

В дальнейшем однопараметрические градиентные модели Айфантиса и Лурье стали применяться и для получения уточнённой оценки НДС системы «покрытие-подложка» в случае упругих и термоупругих тел [5, 6].

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим равновесие прямоугольника с покрытием, нижняя граница которого  $x_3 = 0$  жестко заземлена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней границе  $x_3 = h$ , действует термосиловая нагрузка в виде теплового потока  $q(x_1, h) = q_0 f_1(x_1)$ ,  $x_1 \in [-l, l]$  либо механической силы  $\sigma_{33}(x_1, h) = p_0 f_2(x_1)$ ,  $x_1 \in [-l, l]$ . Боковые стороны прямоугольника  $x_1 = \pm l$  теплоизолированы  $\frac{\partial T}{\partial x_1}(\pm l, x_3) = 0$ ,  $x_3 \in [0, h]$  и находятся в условиях скользящей заделки  $u(\pm l, x_3) = 0$ ,  $\sigma_{31}(\pm l, x_3) = 0$ ,  $x_3 \in [0, h]$ . В формулах обозначим индексами «1» и «2» параметры и функции, соответствующие подложке и покрытию соответственно. В качестве неклассических граничных условий примем равенство нулю соответствующих моментных напряжений на нижней и верхней сторонах прямоугольника, т.е.  $m_{xy}^{(1)}(x_1, 0) = m_{yy}^{(1)}(x_1, 0) = 0$ ,  $m_{xy}^{(2)}(x_1, h) = m_{yy}^{(2)}(x_1, h) = 0$ . Кроме того, на линии сопряжения  $x_3 = h_1$  должны выполняться не только условия непрерывности по температуре  $T_1(x_1, h_1) = T_2(x_1, h_1)$ , тепловому потоку  $q_1(x_1, h_1) = q_2(x_1, h_1)$ , перемещениям  $u_1(x_1, h_1) = u_2(x_1, h_1)$ ,  $v_1(x_1, h_1) = v_2(x_1, h_1)$ , но и по градиентам перемещений  $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, h_1) = \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, h_1)$ ,  $\frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x_1, h_1) = \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x_1, h_1)$ , полным напряжениям  $\sigma_{xy}^{(1)}(x_1, h_1) = \sigma_{xy}^{(2)}(x_1, h_1)$ ,  $\sigma_{yy}^{(1)}(x_1, h_1) = \sigma_{yy}^{(2)}(x_1, h_1)$  и моментным напряжениям  $m_{xy}^{(1)}(x_1, h_1) = m_{xy}^{(2)}(x_1, h_1)$ ,  $m_{yy}^{(1)}(x_1, h_1) = m_{yy}^{(2)}(x_1, h_1)$ . Напряжения Коши определяются по формулам:

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_3} - \gamma T, \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right),$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} - \gamma T.$$

Решение задачи термоупругости начинается с нахождения распределение температуры на основе решения классической задачи теплопроводности. Затем приступают к нахождению перемещений. Перемещения согласно Айфантису [4] можно представить в виде суммы классического решения и дополнительных градиентных слагаемых  $u_i = u_i^{клас} + u_i^{град}$ ,  $v_i = v_i^{клас} + v_i^{град}$ ,  $i = 1, 2$ . Решения классической задачи термоупругости основано на методе разделения переменных. Для этого разлагаем перемещения, температуру и нагрузку в ряды

$$u_i^{клас} = \sum_{n=0}^{\infty} U_i^{(n)}(x_3) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x_1\right), \quad v_i^{клас} = \sum_{n=0}^{\infty} V_i^{(n)}(x_3) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x_1\right),$$

$$T_i = \sum_{n=0}^{\infty} W_i^{(n)}(x_3) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x_1\right), \quad f_i(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} g_i^{(n)} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x_1\right), \quad i = 1, 2.$$

Это позволяет выполнить тождественно механические и тепловые граничные условия на боковых сторонах прямоугольника.

В работе градиентные слагаемые для перемещений  $u_i^{град}$ ,  $v_i^{град}$ ,  $i = 1, 2$  находят приближенно на основе метода Вишика-Люстерника [7]. Для этого определена локализация пограничных слоев и введены в рассмотрение растягивающие координаты. Для нахождения первой пары погранслойных поправок решается система 2 дифференциальных уравнений в перемещениях 4-го порядка путем их сведения к уравнению 8-го порядка, характеристическое уравнение которого содержит 4 корня второй кратности. При удовлетворении условия ограниченности решений на бесконечности остаются ненулевыми только 4 константы интегрирования. Оставшиеся неизвестные константы интегрирования определяются путем удовлетворения граничных условий на заделке.

**Результаты вычислений.** Проведены вычисления перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений в случае как механического, так и теплового нагружения прямоугольника. При этом нагрузка принимается равной первой гармонике  $f(x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{l} x_1\right)$ , что позволяет ограничиться в методе разделения переменных только одним членом ряда. Так как перемещения и деформации непрерывны на линии сопряжения полос, то из-за скачка термомеханических характеристик возникает и скачок напряжений Коши в окрестности линии сопряжения. Также выяснено, что по мере увеличения относительной толщины покрытия, скачок напряжений Коши увеличивается экспоненциально и при определенной толщине покрытия выходит на стационарное значение.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-11-00069).

### Список литературы

1. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses / R.A. Toupin // Arch. Rational // Mech. Anal. – 1962. – V. 11. – P. 385–414.
2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity / R.D. Mindlin // Arch. Rational Mech. Anal. – 1964. – V. 16. – P. 51–78.
3. Ahmadi G. First strain gradient theory of thermoelasticity / G. Ahmadi, K. Firoozbakhsh // International Journal of Solids and Structures. – 1975. – V. 11. – P. 339–345.
4. Altan B.S. On some aspects in the special theory of gradient elasticity / B.S. Altan, E.C. Aifantis // J. Mech. Behav. Mater. – 1997. – V. 8(3). – P. 231–282.
5. Лурье С.А. Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур / С.А. Лурье, Тьюнг Фам, Ю.О. Соляев //

- Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18(3). – С. 440–449.
6. Лурье С.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя / С. А. Лурье, Ю.О. Соляев, Л.Н. Рабинский, Ю.Н. Кондратова, М.И. Волов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – Т. 1. – С. 161–181.
  7. Вишик М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12(5). – С. 3–122.

УДК 539.3

## КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО FGM ЦИЛИНДРА

*Ватульян А.О.<sup>1,2</sup>*, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
*Нестеров С.А.<sup>2</sup>*, канд. физ.-мат. наук.

<sup>1</sup>ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, РФ

<sup>2</sup>ФГБУН «Южный математический институт – филиал ВЦ РАН», г. Владикавказ, РФ  
*aovatulyan@sfnedu.ru*

**Введение.** В настоящее время все шире элементы цилиндрической формы изготавливаются из функционально-градиентных материалов (FGM), представляющих собой двухфазные композиты с непрерывным изменением термомеханических характеристик [1]. Технология изготовления FGM с требуемыми свойствами является достаточно сложной и требует на последнем этапе диагностики свойств изделия.

Современные методики диагностики свойств конструкций опираются на теоретические результаты, полученные в области коэффициентных обратных задач (КОЗ). При этом наиболее часто применяемым методом решения обратных задач теплопроводности является построение функционала невязки и его минимизация каким-либо из градиентных методов [2, 3]. В тоже время КОЗ термоупругости изучены слабо [4] из-за сложности построения операторных уравнений. Для преодоления этой трудности в работах [5–7] предложен подход для решения одномерных задач, основанный на организации итерационного процесса, на каждом этапе которого решается операторное уравнение.

Данный доклад посвящен решению задачи об идентификации термомеханических характеристик конечного цилиндра.

**Постановка и решение прямой задачи термоупругости для цилиндра.** Рассмотрим задачу о неустановившихся осесимметричных колебаниях FGM конечного полого термоупругого цилиндра. Цилиндр имеет высоту  $2h$ , внутренний радиус  $a$  и внешний радиус  $b$ . Торцы

цилиндра теплоизолированы  $\frac{\partial \theta}{\partial z}(r, \pm h, t) = 0$  и находятся в условиях скользящей заделки  $u_z(r, \pm h, t) = 0$ ,  $\sigma_{rz}(r, \pm h, t) = 0$ . На внутренней поверхности цилиндра  $r = a$ , свободной от механических нагрузок  $\sigma_{rr}(a, z, t) = \sigma_{rz}(a, z, t) = 0$ , поддерживается нулевая температура  $\theta(a, z, t) = 0$ . Колебания цилиндра вызываются двумя способами: 1) распределенной по закону  $S(z)G_1(t)$  нормальной механической нагрузкой с амплитудой  $p^0$ ; 2) распределенным по закону  $R(z)G_2(t)$  тепловым потоком с амплитудой  $q^0$ , приложенными на внешней боковой поверхности. Термомеханические характеристики цилиндра изменяются только по радиальной координате, т.е.  $\lambda = \lambda(r)$ ,  $\mu = \mu(r)$ ,  $\rho = \rho(r)$ ,  $\gamma = \gamma(r)$ ,  $k = k(r)$ ,  $c = c(r)$ . Прямая задача заключается в определении функций  $\theta = \theta(r, z, t)$ ,  $u_r = u_r(r, z, t)$ ,  $u_z = u_z(r, z, t)$  из решения задачи связанной термоупругости при известных термомеханических характеристиках.

При решении прямой задачи сначала выполняем обезразмеривание задачи, аналогично как в [5]. Далее применяется преобразования Лапласа по времени  $\tau$  к уравнениям термоупругости. Полученная задача термоупругости в трансформантах решается на основе метода разделения переменных. Для этого полагаем  $\alpha_n = \frac{n\pi}{\beta_0}$ ,  $\tilde{U}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(\xi, p) \cos(\alpha_n \eta)$ ,

$$\tilde{V}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}_n(\xi, p) \sin(\alpha_n \eta), \quad \tilde{W}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{w}_n(\xi, p) \cos(\alpha_n \eta).$$

В этом случае граничные условия на торцах цилиндра выполняются тождественно. Кроме того предположим, что функции  $S(\eta)$  и  $R(\eta)$  – четные, тогда законы изменения внешней нагрузки допускают представления в виде разложения в ряд Фурье по косинусам.

Распишем компоненты тензора напряжений в виде:

$$\tilde{\Omega}_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{1n} \cos(\alpha_n \eta), \quad \tilde{\Omega}_{\varphi\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{2n} \cos(\alpha_n \eta), \quad \tilde{\Omega}_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{3n} \cos(\alpha_n \eta).$$

Тогда после некоторых преобразований получим набор линейных краевых задач для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Решение полученных задач строится на основе метода пристрелки для каждого значения параметра преобразования  $p \in [0, \infty)$ .

После нахождения решения в трансформантах оригиналы находятся численно на основе формулы разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра по формуле

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k^*(e^{-\tau}),$$

где  $a_k = \sum_{i=0}^k c_i^{(k)} \tilde{F}(i)$ ,  $c_i^{(k)}$  – коэффициенты смещенного многочлена Лежандра.

**Решение обратной задачи термоупругости для цилиндра.** В обратной задаче требуется восстановить термомеханические характеристики цилиндра по дополнительной информации о температуре и радиальном перемещении. Разложим дополнительную информацию по соответствующим гармоникам. Опираясь на подход, изложенный в [5], для каждой гармоники были получены операторные уравнения для решения нелинейной обратной задачи на основе итерационного процесса. В случае восстановления только одной характеристики при известных остальных операторные уравнения упрощаются. Так, ограничившись рассмотрением нулевой гармоники, для нахождения поправок коэффициента теплопроводности на  $m-1$  итерации необходимо решать интегральное уравнение 
$$\int_{\xi_0}^1 \bar{k}^{(m)} L(\xi, \tau) \xi d\xi = r_0 (f_0(1, \tau) - w_0^{(m-1)}(1, \tau)).$$
 Ядро интегрального уравнения имеет вид:

$$L(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} w_0^{(m-1)}(\xi, \tau_1) \frac{\partial w_0^{(m-1)}(\xi, \tau - \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1.$$

Итерационный процесс стартует с выбора начального приближения, которое определяется в классе линейных функций. Следует отметить, что численные решения ИУ построены с помощью метода регуляризации Тихонова [8]. Выход из итерационного процесса осуществляется по условию достижения наперед заданного количества итераций.

В первой серии вычислительных экспериментов использовалось механическое нагружение цилиндра, а во второй серии – тепловое нагружение. Найдены наиболее информативные временные интервалы съема дополнительной информации. Вычислительные эксперименты показали: 1) монотонные законы изменения термомеханических характеристик восстанавливаются с погрешностью, не превышающей 7 %; 2) максимальная погрешность реконструкции теплоемкости, коэффициента температурного напряжения – в окрестности  $\xi = \xi_0$ , что связано с особенностями ядер соответствующих интегральных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Южного математического института – филиала ВНИЦ РАН, г. Владикавказ.

### Список литературы

1. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L. W. Byrd // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – V. 60. – P. 195–216.
2. Алифанов О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
3. Hao D. N. Methods for inverse heat conduction problems / D. N. Hao. – Frankfurt/Main: Peter Lang Pub. Inc., 1998. – 249 p.
4. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред / В. А. Ломазов. – Орел: Из-во ОрелГТУ, 2002. – 168 с.



5. Vatulyan A. O. Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data / A. O. Vatulyan, V. V. Dudarev, R. M. Mnukhin, R. D. Nedin. // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. – 2020. – V. 81.
6. Ватульян А. О., Нестеров С. А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // *Инженерно-физический журнал*. – 2015. – Т. 88, №4. – С. 951–959.
7. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи термомеханики / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров. – Ростов-на-Дону – Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. – 146 с.
8. Тихонов А. Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 230 с.

УДК 539.3

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

**Ватульян А.О.<sup>1</sup>**, д-р физ.-мат. наук, проф., **Плотников Д.К.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича  
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, РФ  
*vatulyan@aaanet.ru*

<sup>2</sup>Южный математический институт ФГБУН ФНИЦ «Владикавказский научный  
центр РАН», г. Владикавказ, РФ  
*dustheap@mail.ru*

В настоящее время в современной технике среди новых материалов все большую популярность приобретают функционально-градиентные материалы, характеризующиеся непрерывным изменением свойств. Внедрение в практику градиентных материалов делает актуальным исследование задач для тел неоднородной структуры в рамках различных подходов. Кроме того, структуры с непрерывно изменяющимися свойствами характерны и для природных объектов, таких как биологические ткани.

Одной из перспективных областей применения функционально-градиентных материалов является изготовление градиентных покрытий различного назначения (упрочняющих, термобарьерных и др.). Неотъемлемой частью производства покрытий является контроль свойств полученных структур и диагностика дефектов, появление которых обусловлено различием свойств покрытия и подложки. Различия в упругих и температурных характеристиках материалов покрытия и подложки приводит к концентрации напряжений на их границе. Так же недостаточно надлежащая подготовка покрываемых поверхностей препятствует адгезии разномодульных материалов. В следствие указанных факторов для

покрытий характерны дефекты в виде трещин и отслоений на границе покрытия и подложки.

Среди средств, используемых при идентификации приповерхностных характеристик новых материалов, в том числе покрытий, наиболее популярным являются методы индентирования [1]. Применение индентирования к определению свойств неоднородных объектов требует решения ряда задач для тел неоднородной структуры.

В настоящей работе в рамках плоской задачи теории упругости исследованы смешанные задачи для неоднородной упругой полосы: задача о контактном взаимодействии жесткого штампа с поперечно-неоднородной упругой полосой, сцепленной с недеформируемым основанием по нижней границе; задача об отслоении покрытия от неоднородной полосы. На основе интегрального преобразования Фурье задача сведена к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от упругих свойств полосы, относительно трансформант компонент вектора смещений и тензора напряжений. На основе анализа данной системы и решения ряда вспомогательных краевых задач сформулированы интегральное уравнение контактной задачи относительно неизвестного контактного давления и система интегральных уравнений относительно функций, характеризующих скачки компонент вектора смещений на границе полосы и покрытия, в задаче об отслоении покрытия.

В обеих рассмотренных задачах ключевыми объектами служат символы Фурье ядер интегральных операторов, которые в случае неоднородных свойств полосы могут быть построены численно [2], либо на основе приближенных подходов [3]. Исследовано поведение символов ядер интегральных операторов при малых и больших значениях параметра преобразования Фурье, при малых значениях параметра значение символа определяется осредненными значениями податливостей полосы. Анализ символов при больших значениях реализован на основе метода Вишика-Люстерника. Отметим, что в контактной задаче поведение передаточных функций при больших значениях параметра преобразования определяется только значениями параметров Ламе полосы на верхней границе, а в задаче об отслоении – предельными значениями упругих модулей на границе покрытия и упругого основания. Результаты асимптотического анализа использованы при численном решении операторных уравнений.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 18-11-00069).

### **Список литературы**

1. Borodich F.M. Nanoindentation in studying mechanical properties of heterogeneous materials / F.M. Borodich, S.J. Bull, S.A. Epshtein // Journal of Mining Science, 2015. – Vol. 51, no. 3. – P. 470–476.

2. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А. В. Белоконь и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 240 с.
3. Ватульян А.О. Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы / А.О. Ватульян, Д.К. Плотников // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 485. – № 5. – С. 564–567.

УДК 539.3:534.1

## ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХСЛОЙНОМ ПОПЕРЕЧНО-АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ СИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ В ТОЛЩЕ НЕОДНОРОДНОГО ГЕОМАССИВА

*Глухов А.А., Пачева М.Н.,*

*Сторожев В.И.,* д-р техн. наук, проф.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*stvi@donnu.ru*

**Введение.** Решение круга прикладных проблем таких научно-технических отраслей, как геоакустика, сейсмоакустическая разведка, акустоэлектроника, технологии ультразвукового неразрушающего контроля связано с теоретическим анализом задач распространения локализованных упругих волн в многослойных пакетах, расположенных внутри упругих массивов (окруженных упругими полупространствами) из анизотропных непрерывно-неоднородных по толщине (функционально-градиентных) деформируемых материалов [1 – 3]. Указанная неоднородность свойственна нанокompозитным материалам, изготавливаемым с использованием современных аддитивных технологий, а также в весьма обширном числе случаев – тонкослоистым горным материалам в силу изменения химического состава и структуры микрослоев в пластах осадочных пород [4]. При наличии обширных исследований в области волнового деформирования многослойных сред [1 – 3], анализ спектров и свойств локализованных сдвиговых волн, каналами для распространения которых являются заключенные между анизотропными функционально-градиентными полупространствами трехслойные пакеты с трансверсально-изотропными компонентами, является неисследованной научной задачей, методике решения которой посвящена данная работа.

**Методика получения основного дисперсионного соотношения.** Рассматривается волноводная структура, занимающая в прямоугольных безразмерных координатах  $Ox_1x_2x_3$  область

$$V = V_- \cup V_{1-} \cup V_2 \cup V_{1+} \cup V_+, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} V_- &= \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty < x_3 \leq -h_2\}, \\ V_{1-} &= \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h_2 < x_3 \leq -h_1\}, \\ V_2 &= \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h_1 < x_3 < h_1\}, \\ V_{1+} &= \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, h_1 \leq x_3 < h_2\} V_+ = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, h_2 \leq x_3 < \infty\}. \end{aligned}$$

Применительно к рассматриваемой волноводной структуре исследуются процессы распространения вдоль координатного направления  $Ox_1$  локализованных горизонтально поляризованных сдвиговых гармонических упругих волн циклической частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ , в которых комплексные функции волновых упруги смещений задаются исходными представлениями

$$\begin{aligned} u_2^{(V_{\pm})}(x_1, x_3, t) &= \varphi_{\pm}(x_3) \cdot E(\omega, k, x_1) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ u_2^{(V_{1\pm})}(x_1, x_3, t) &= \varphi_{1\pm}(x_3) \cdot E(\omega, k, x_1) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ u_2^{(V_2)}(x_1, x_3, t) &= \varphi_2(x_3) \cdot E(\omega, k, x_1) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ E(\omega, k, x_1) &= \exp(-i(\omega t - kx_1)) \end{aligned} \quad (2)$$

Компоненты  $V_{\pm}$  рассматриваемого составного тела являются полубесконечными телами из трансверсально-изотропных функционально-градиентных экспоненциально-неоднородных упругих материалов с осями изотропии, коллинеарными координатному направлению  $Ox_3$ , а компоненты  $V_{1\pm}, V_2$  являются трансверсально-изотропными слоями с аналогично ориентированными направлениями механической симметрии. Физико-механические характеристики функционально-градиентных компонентов рассматриваемого составного волновода, включаемые в модель распространения горизонтально поляризованных нормальных волн сдвига, имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11}^{(\pm)} &= c_{011} \cdot \exp(\mp \lambda x_3), c_{12}^{(\pm)} = c_{012} \cdot \exp(\mp \lambda x_3), c_{44}^{(\pm)} = c_{044} \cdot \exp(\mp \lambda x_3), \\ \rho_{\pm} &= \rho_0 \cdot \exp(\mp \lambda x_3); \end{aligned} \quad (3)$$

модули упругости  $c_{11}^{(1+)} = c_{11}^{(1-)} = c_{11}^{(1)}$ ,  $c_{11}^{(2)}$ ,  $c_{12}^{(1+)} = c_{12}^{(1-)} = c_{12}^{(1)}$ ,  $c_{12}^{(2)}$ ,  $c_{44}^{(1+)} = c_{44}^{(1-)} = c_{44}^{(1)}$ ,  $c_{44}^{(2)}$  а также параметры плотности  $\rho_{1+} = \rho_{1-} = \rho_1$ ,  $\rho_2$  являются постоянными величинами.

Комплексные амплитудные функции  $\varphi_{\pm}(x_3)$  в рассматриваемой модели определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_{\pm}''(x_3) \pm \lambda \varphi_{\pm}'(x_3) + \beta^2 \varphi_{\pm}(x_3) = 0, \quad (4)$$

и их решения с учетом симметрии анализируемого волнового по координате  $x_3$  и свойств затухания интенсивности волновых полей при отходе от границ пакета слоев вглубь полупространств записываются в виде

$$\varphi_{\pm}(x_3) = A \cdot \exp(\mp \gamma x_3), \quad (5)$$

где  $A$  – неопределенный коэффициент,  $\gamma$  – удовлетворяющее условию  $\text{Re } \tilde{\gamma}_q > 0$  значение величины

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_q &= -(\lambda/2) - (-1)^q ((\lambda^2/4) - \beta^2)^{1/2} \quad (q = \overline{1, 2}), \\ \beta^2 &= [\rho_1 \omega^2 - c_{066} k^2] / c_{044}, \quad c_{066} = (c_{011} - c_{012}) / 2. \end{aligned} \quad (6)$$

Комплексная амплитудная функция  $\varphi_2(x_3)$  с учетом априорного свойства четности записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_3) &= D \cdot \cos(\gamma_2 x_3), \quad \gamma_2 = ((\rho_2 \omega^2 - c_{66}^{(2)} k^2) / c_{44}^{(2)})^{1/2}, \\ c_{66}^{(2)} &= (c_{11}^{(2)} - c_{12}^{(2)}) / 2, \end{aligned} \quad (7)$$

с неопределенным коэффициентом  $D$ .

Комплексные амплитудные функции  $\varphi_{1\pm}(x_3)$  соответственно выбираются в виде, обеспечивающем симметрию общего волнового поля в рассматриваемой волноводной структуре:

$$\varphi_{1\pm}(x_3) = B \cdot \cos(\gamma_1 x_3) \pm C \cdot \sin(\gamma_1 x_3). \quad (8)$$

Здесь  $B, C$  – неопределенные коэффициенты;

$$\gamma_1 = ((\rho_1 \omega^2 - c_{66}^{(1)} k^2) / c_{44}^{(1)})^{1/2}, \quad c_{66}^{(1)} = (c_{11}^{(1)} - c_{12}^{(1)}) / 2.$$

Дисперсионное соотношение для исследуемых локализованных волн формулируется как следствие из граничных условий на контактных поверхностях рассматриваемого составного волновода, являющихся, по предположению, плоскостями идеального механического сопряжения:

$$\begin{aligned} \varphi_+(h_2) &= \varphi_{1+}(h_2), \quad c_{044} \exp(-\lambda h_2) \varphi_+'(h_2) = c_{44}^{(1)} \varphi_{1+}'(h_2), \\ \varphi_{1+}(h_1) &= \varphi_2(h_1), \quad c_{44}^{(1)} \varphi_{1+}'(h_1) = c_{44}^{(2)} \varphi_2'(h_1), \\ \varphi_{1-}(-h_1) &= \varphi_2(-h_1), \quad c_{44}^{(1)} \varphi_{1-}'(-h_1) = c_{44}^{(2)} \varphi_2'(-h_1), \\ \varphi_-(-h_2) &= \varphi_{1-}(-h_2), \quad c_{044} \exp(-\lambda h_2) \varphi_-'(-h_2) = c_{44}^{(1)} \varphi_{1-}'(-h_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Следствием из соотношений (9) ввиду эквивалентности их первой и второй пары является однородная система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $A, B, C, D$ , а равенство нулю ее функционального определителя и является искомым дисперсионным соотношением, имеющим вид

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, k) &= \det \|\zeta_{pa}\| = 0, \\ \zeta_{11} &= \exp(-\gamma h_2), \quad \zeta_{12} = -\cos(\gamma_1 h_2), \quad \zeta_{13} = -\sin(\gamma_1 h_2), \quad \zeta_{14} = 0, \\ \zeta_{21} &= -\gamma c_{044} \exp(-(\gamma + \lambda) h_2), \quad \zeta_{22} = \gamma_1 c_{44}^{(1)} \sin(\gamma_1 h_2), \quad \zeta_{23} = -\gamma_1 c_{44}^{(1)} \cos(\gamma_1 h_2), \\ \zeta_{24} &= 0, \quad \zeta_{31} = 0, \quad \zeta_{32} = \cos(\gamma_1 h_1), \quad \zeta_{33} = \sin(\gamma_1 h_1), \quad \zeta_{34} = -\cos(\gamma_2 h_1), \quad \zeta_{41} = 0, \\ \zeta_{42} &= -\gamma_1 c_{44}^{(1)} \sin(\gamma_1 h_1), \quad \zeta_{43} = \gamma_1 c_{44}^{(1)} \cos(\gamma_1 h_1), \quad \zeta_{44} = \gamma_2 c_{44}^{(2)} \sin(\gamma_2 h_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Применительно к полученному уравнению может быть реализован параметрический анализ с выделением областей изменения  $(\omega, k)$ , в которых возможно существование действительных ветвей исследуемого спектра, а также асимптотический анализ в низкочастотной длинноволновой области с применением приближений для значений экспоненциальных и тригонометрических функций с малыми аргументами.

**Заключение.** Результатом представленных исследований является построение дисперсионного соотношения в модели распространения симметричных горизонтально поляризованных сдвиговых локализованных упругих волн в заключенном между трансверсально-изотропными функционально-градиентными полупространствами трехслойном пакете с трансверсально-изотропными компонентами.

### Список литературы

1. Бреховских Л.М. Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
2. Григорян В.Г. Локализованные акустические волны в слоистых структурах. / В.Г. Григорян, Л. Вендлер. // Физика твердого тела. – 1991. – Т. 33, №7. – С. 2120-2128.
3. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н.А. Шульга – Киев: Наукова думка, 1981. – 200 с.
4. Liu J. The propagation behavior of Love waves in a functionally graded layered piezoelectric structure / J. Liu, Z.K. Wang // Smart Mat. Struct. – 2005. – N. 14. – P. 137-146.

УДК 539.3

## ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЛИ ПОЛОСЫ

*Глушанков Е.С.*, канд. физ.-мат. наук  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*evgenij.glushankov@gmail.com*

**Введение.** В современной науке и технике в качестве элементов конструкций широко используются пластинки из пьезоматериалов с различными геометрическими очертаниями.

В данной работе предложен подход к решению плоских задач электромагнитоупругости для многосвязной полуплоскости или полосы. Построен общий вид комплексных потенциалов, проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинок,

проведено сравнение результатов исследований с известными результатами, полученными ранее с применением методов интегралов типа Коши, наименьших квадратов и необходимого условия минимума функционала [1].

**Постановка задачи для полуплоскости.** Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $Oxy$  многосвязную полуплоскость, занимающую область  $S$ , ограниченную прямолинейной границей  $L_1^+$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ). На контурах пластинки заданы значения усилий (первая основная задача) либо перемещений (вторая основная задача). Также на них заданы значения потоков индукций электромагнитного поля. На бесконечности же заданы значения растягивающих усилий и потоки индукций электромагнитного поля. Обозначим через  $S^+$  сплошную полуплоскость без отверстий, т.е. область  $S$  вместе с внутренностями эллиптических контуров  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ).

Решение задачи определения термоэлектромагнитоупругого состояния полуплоскости сводится к определению комплексных потенциалов электромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ), определенных в областях  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями [1]

$$z = x + \mu_k y, \quad (1)$$

где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения задачи электромагнитоупругости. В общем случае комплексные потенциалы имеют вид [3]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} + \Phi_k^+(z_k). \quad (2)$$

Здесь  $\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$  – постоянные, определяемые из условий на бесконечности и на контурах отверстий;  $z_{kl}$  – точки, соответствующие произвольным точкам из внутренностей эллиптических контуров  $L_l$  при аффинных преобразованиях (1);  $a_{kln}$  – неизвестные постоянные;  $\zeta_{kl}$  – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений внешностей кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ ,  $S_k^+$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (1);  $\Phi_k^+(z_k)$  – функции, голоморфные в сплошных полуплоскостях  $S_k^+$ , получаемых из  $S^+$  аффинными преобразованиями (1).

Выберем вне области  $S^+$  некоторый вспомогательный эллиптический контур  $L_{\mathcal{L}+1}$ . Тогда  $\Phi_k^+(z_k)$  представим в виде функций, голоморфных вне эллиптических контуров  $L_{k, \mathcal{L}+1}$ , получаемых из  $L_{\mathcal{L}+1}$  преобразованиями (1):

$$\Phi_k^+(z_k) = A_{k,\mathcal{L}+1} \ln(z_k - z_{k,\mathcal{L}+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,\mathcal{L}+1,n}}{\zeta_{k,\mathcal{L}+1}^n}. \quad (3)$$

Тогда комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  принимают вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}. \quad (4)$$

Неизвестные постоянные  $a_{kln}$  определяются из граничных условий.

**Постановка задачи для полосы.** Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $Oxy$  многосвязную полосу, занимающую область  $S$ , ограниченную параллельными прямолинейными границами  $L_1^+$ ,  $L_2^+$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ). На контурах пластинки заданы значения усилий либо перемещений, а также значения потоков индукций электромагнитного поля. На бесконечности заданы значения растягивающих усилий и потоки индукций электромагнитного поля.

Будем рассматривать полосу как пересечение двух полуплоскостей. Обозначим через  $S_1^+$ ,  $S_2^+$  сплошные полуплоскости, ограниченные прямолинейными границами  $L_1^+$ ,  $L_2^+$  соответственно, а через  $S_{k1}^+$ ,  $S_{k2}^+$  – сплошные полуплоскости, получаемые из  $S_1^+$ ,  $S_2^+$  аффинными преобразованиями (1). Тогда функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) принимают вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} + \sum_{p=1}^2 \Phi_{kp}^+(z_k), \quad (5)$$

где  $\Phi_{kp}^+(z_k)$  – функции, голоморфные в областях  $S_p^+$  ( $p = \overline{1, 2}$ ).

Выберем вне областей  $S_p^+$  ( $p = \overline{1, 2}$ ) некоторые вспомогательные эллиптические контуры  $L_{\mathcal{L}+p}$ . Тогда, следуя подходу к решению задачи для полуплоскости, функции  $\Phi_{kp}^+(z_k)$  представим в виде функций, голоморфных вне эллиптических контуров  $L_{k,\mathcal{L}+p}$ , получаемых из  $L_{\mathcal{L}+p}$  аффинными преобразованиями (1). В результате, функции  $\Phi_k(z_k)$  принимают вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} \quad (6)$$

**Численные исследования.** После определения комплексных потенциалов становится возможным определять значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (механические напряжения и перемещения, индукции, напряженности и потенциалы электромагнитного поля) в любой точке пластинки [1].



Были проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных полуплоскости и полосы с различными геометрическими очертаниями. Для удовлетворения граничным условиям использовался метод наименьших квадратов [2]. На каждом из контуров пластинки выбиралась система точек, в которых удовлетворялись граничные условия. В рядах Лорана, входящих в представления (4) либо (6), сохранялось достаточное число членов. Полученная переопределенная система линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являлись коэффициенты  $a_{kln}$  рядов Лорана, решалась с использованием сингулярного разложения матриц [3]. Как показали численные исследования, для достижения высокой точности результатов следует на каждом из контуров выбирать по 400-600 точек, а в рядах Лорана – по 40-70 членов. Отрезки прямолинейных границ, на которых выбирались точки, составляли в длину 20-30 размеров отверстий. Вспомогательные эллиптические контуры полагались круговыми, расположенными на расстоянии 4-6 собственных радиусов от прямолинейных границ. Чем меньше расстояние между контурами пластинки, тем больше точек следует выбирать на соответствующих контурах и больше членов сохранять в соответствующих рядах. Если же отверстие удалено от других отверстий и прямолинейных границ более, чем на 10 собственных размеров, то его влияние на ТЭМУС около остальных отверстий становится незначительным и им можно пренебречь.

Было установлено совпадение полученных результатов с результатами, представленными в работе [1]. Однако при рассмотренном здесь подходе вид комплексных потенциалов существенно упрощается и становится проще реализовать алгоритм в виде программы на языке высокого уровня.

### Список литературы

1. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
3. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

## КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Гольцев А.С.*, д-р физ.-мат. наук, проф.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*a.goltsev@donnu.ru*

**Введение.** Моделирование сосредоточенных температурных воздействий является актуальной проблемой, поскольку позволяет проводить компьютерные исследования для такого технологического процесса, как сварка. Существуют различные методы реализации сварочного процесса, но простейшим из них является точечная сварка. При этом характер распределения температурного поля и внутренних силовых факторов во многом зависит от свойств материала, подвергаемого сварочному процессу, и от условий теплообмена с внешней средой. Влияние всех этих факторов на характеристики сварочного процесса удобно исследовать на компьютерных моделях для простейшего случая точечной сварки.

**Цель.** Данная работа посвящена методам построения компьютерной модели температурного поля в ортотропной пластине, подвергнутой точечной сварке.

**Основная часть.** Рассмотрим тонкую ортотропную пластину толщиной  $2h$ , находящуюся в тепловом контакте с внешней средой нулевой температуры. Будем рассматривать случай симметричного теплообмена с внешней средой, когда параметры теплообмена на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины одинаковы. Пусть пластина нагревается произвольно распределёнными по её объёму источниками тепла объёмной плотности  $W_0$ , которые по толщине пластины распределены равномерно. В этом случае температура пластины ( $T$ ) не изменяется по толщине и определяется лишь средней температурой ( $T_1$ ) [1, 2].

$$T(x, y, z) = T_1(x, y); \quad T_1(x, y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T(x, y, z) dz.$$

Уравнение теплопроводности ортотропных пластин в рассматриваемом случае будет наиболее простым. В безразмерной системе координат  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ), определённой с точностью до величины  $h$  и совмещённой с главными осями теплопроводности, оно имеет следующий вид [3]:

$$\Delta_\lambda T_1(x_1, x_2) - \mu_1 T_1(x_1, x_2) = -W_1(x_1, x_2), \quad (1)$$

где

$$\Delta_{\lambda} = \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}};$$

$$W_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-1}^1 W_0(x_1, x_2, x_3) dx_3;$$

$\mu_1 = Bi$  – критерий Био на лицевых поверхностях  $x_3 = \pm 1$ ;  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$  – главные коэффициенты теплопроводности;  $W_1$  – плотность источников средней температуры.

Сосредоточенное температурное воздействие в рассматриваемом случае определяется распределением объёмных источников тепла только по толщинной координате в одной точке срединной поверхности пластины. Действие такого источника тепла моделируется с помощью дельта-функции Дирака ( $\delta$ ) путём следующего представления плотности источников средней температуры:

$$W_1(x_1, x_2) = W_1^* \delta(x_1, x_2), \quad (2)$$

где  $W_1^*$  – интенсивность сосредоточенного “плоского” источника тепла.

Предполагаем, что место сосредоточенного температурного воздействия находится на значительном удалении от границ пластины и температурное поле на внешнем граничном контуре пластины пренебрежимо мало, поэтому пластину можно считать бесконечной.

Решение уравнения (1) с правой частью (2) найдено методом двумерного интегрального преобразования Фурье. В полярной системе координат  $(r, \varphi)$  оно имеет следующий вид [3]:

$$T_1(r, \varphi) = \frac{W_1^*}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\theta}{\lambda^2(\theta)} G_{n,n}(a(\theta)r) d\theta; \quad (3)$$

$$\varepsilon_0 = 1; \quad \varepsilon_n = 2, n \geq 1; \quad a(\theta) = \sqrt{\mu_1} / \lambda(\theta); \quad \lambda^2(\theta) = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta.$$

Здесь  $G_{n,n}(z)$  – специальная G-функция [4]. Программа расчёта температуры по формуле (3) реализована на языке C++.

Для визуализации распределения температуры от действия сосредоточенного “плоского” источника тепла использованы возможности системы компьютерной математики Maple [5]. Графическая структура трёхмерной графики типа GRID, входящая в опции команды PLOT3D, позволяет отображать поверхность над участком координатной плоскости, ограниченной отрезками вдоль координатных осей. Значения отображаемой поверхности (значения координаты  $z$  поверхности) задаются переменной-списком для равноотстоящих точек координатной плоскости. Если функция расчёта точек поверхности имеет особенность в начале координат, например, температура по формуле (3), то сетка точек расчёта выбирается так, чтобы начало координат не попадало в точку расчёта.

Пример визуализации температурного поля в квадрате  $10 \times 10$  от действия сосредоточенного “плоского” источника тепла в начале координат, мощностью  $W_1^* = 1$ , представлен на рис. 1.

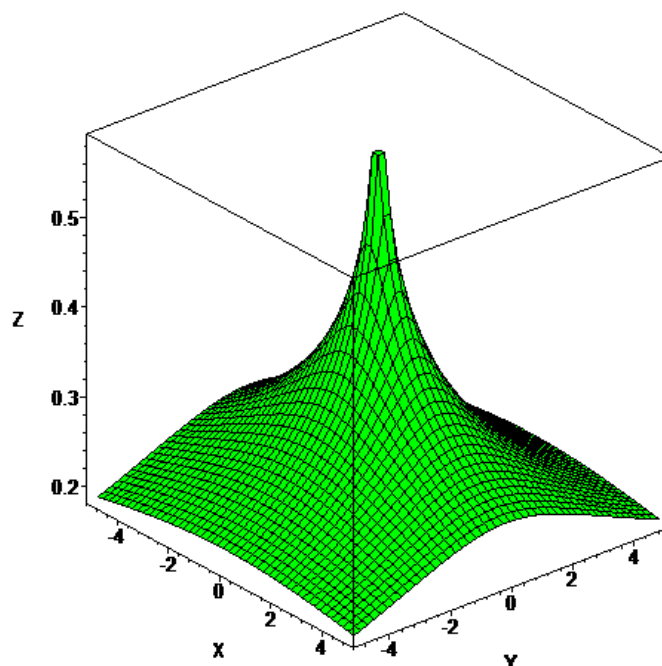


Рис. 1

Характеристики материала и внешней среды брались следующими:  $\lambda_1 = 2,31$ ;  $\lambda_2 = 1$ ;  $Bi = 0,001$  (сильная термоизоляция).

Построенная компьютерная модель ярко демонстрирует неравномерность распределения температуры вдоль главных направлений теплопроводности (оси  $x$  и  $y$ ). На одинаковом расстоянии от источника тепла (5 единиц) температура вдоль оси  $x$  намного больше, чем по оси  $y$ .

**Заключение.** Предложенная компьютерная модель позволяет наглядно демонстрировать особенности распределения температуры в пластинах из различных ортотропных материалов в широком диапазоне значений теплообмена с окружающей средой.

#### Список литературы

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – Киев: Наукова думка, 1972. – 308 с.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщённая термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – Киев: Наукова думка, 1976. – 311 с.
3. Гольцев А.С. Фундаментальное решение уравнений плоской задачи термоупругости для тонких ортотропных пластин при симметричном теплообмене / А.С. Гольцев // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. – 1999. – № 1. – С. 57-61.
4. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонНУ, 1980. – 128 с.
5. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчётах / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 800 с.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛИТ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЯДОМ ОТВЕРСТИЙ

**Занько А.И.**, канд. физ.-мат. наук,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*a.zanko@donnu.ru*

**Введение.** В настоящей работе с использованием комплексных потенциалов, метода малого параметра и обобщенного метода наименьших квадратов было получено решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязной анизотропной плиты с периодическим рядом отверстий. Искомые функции разлагаются в ряды Лорана, для определения коэффициентов которых получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений. По известным функциям приближений и представлениям степеней малого параметра находятся значения изгибающих моментов в любой момент времени.

**Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим тонкую вязкоупругую анизотропную плиту, с бесконечным периодическим рядом одинаковых, одинаково ориентированных эллиптических отверстий с контурами  $L_l$  ( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (рис. 1) с центрами вдоль оси  $Ox$  с началом в центре отверстия с контуром  $L_0$ , называемого основным. Контур отверстия свободны от внешних воздействий, на бесконечности действуют моменты  $M_y^\infty, M_x^\infty, N_{xy}^\infty = 0$ .

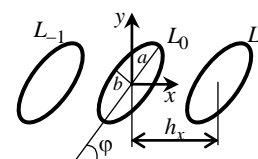


Рис. 1

Следуя предложенным в работах [1] подходам, задачу определения вязкоупругого состояния плиты будем решать методом малого параметра с использованием комплексных потенциалов. При таком подходе комплексные потенциалы теории изгиба тонких плит [2, 3] разлагаются в ряды по малому параметру вида [4]

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j W'_{jk}(z_k), \quad (1)$$

где  $\lambda$  - малый параметр, в качестве которого выбирается изменение во времени коэффициента Пуассона  $\nu_{12}$ ;  $W'_{jk}(z_k)$  - производные комплексных потенциалов приближений, имеющие в данном случае вид

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} W'_{jkl}(z_k); \quad (2)$$

$\Gamma_{jk}$  - комплексные постоянные, которые находятся из решения известных систем [4];  $W'_{jkl}(z_k)$  - функции, голоморфные вне контуров  $L_{kl}$  областей  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными преобразованиями.

**Построение решения задачи.** Используя методы конформных отображений и разложения функций в ряды Лорана, найдем общие представления неизвестных функций  $W'_{jkl}(z_k)$ . Отобразим конформно внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$  в областях  $S_k$  [5]. Тогда функции  $W'_{jkl}(z_k)$ , голоморфные вне контуров  $L_{kl}$  в областях  $\zeta_{kl}$  будут голоморфными вне кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  и могут быть представлены рядами Лорана, поэтому функции (2) примут вид

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{jkl n}, \quad (3)$$

где  $\varphi_{kln} = 1/\zeta_{kl}^n$ ,  $a_{jkl n}$  – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах.

В силу периодичности напряженного состояния значения моментов в точках  $z$  и  $z + h_x$  будут одинаковыми. С учетом этого для производных комплексных потенциалов приближений окончательно будем иметь

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkn} \psi_{kn}(z_k), \quad (4)$$

где

$$\psi_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_{kln}(z_k); \quad (5)$$

$a_{jkn}$  – постоянные, определяемые из граничных условий лишь на одном из контуров, например, на контуре основного отверстия  $L_0$ . На остальных контурах в силу периодичности производных комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически.

Граничным условиям будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов. Для этого выберем на контуре  $L_0$  систему точек, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Тогда для определения неизвестных постоянных  $a_{jkn}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{0ki} \delta_{k,s} \psi'_{kn}(t_{km}) a_{jkn} = \frac{df_{ji}(t_m)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0ki} \delta_{k,s} \Gamma_{jk} \quad (m = \overline{1, M_0}; i = \overline{1, 2}). \quad (6)$$

Систему (6) будем решать с использованием сингулярных разложений [4]. После ее решения комплексные потенциалы (2) будут известными и по ним можно найти значения моментов в любой момент времени.

**Описание результатов численных исследований.** Были проведены численные исследования напряженного состояния плиты из материалов алюминий (материал М1) и эпоксид (М2) [1]. Результаты расчетов

приведены для двух случаев: когда  $t = 0$  (в начальный момент времени) и  $t = 400$  (стационарное состояние).

В табл. 1 для плиты с периодическим рядом круговыми отверстиями радиуса  $a$  даны значения изгибающих моментов  $M_s$  вблизи центрального отверстия в зависимости от центрального угла  $\theta$  для различных значений  $c/a$ , где  $c$  – расстояние между отверстиями. Из табл. 1 видно, что с уменьшением расстояния между отверстиями значения изгибающих моментов в зоне между отверстиями значительно растут. Так, если плита изготовлена из материала М1, то при переходе в стационарное состояние значения моментов  $M_s$  в точке, соответствующей  $\theta = \pi/2$ , при  $c/a = 0,01$  уменьшаются на 36,0%; эти же изменения при  $\theta = 0$  составляют 3%.

Таблица 1

Материал	$c/a$	$t$ , час.	$\theta$ , рад.			
			0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
М1	2	0	2,330	1,716	0,658	0,184
		400	2,423	1,844	0,728	0,117
	0,5	0	5,032	2,693	0,740	0,168
		400	5,138	2,900	0,848	0,108
	0,1	0	19,277	4,214	0,782	0,180
		400	19,498	4,548	0,906	0,115
	0,01	0	140,952	4,178	0,700	0,212
		400	144,812	4,582	0,802	0,136

### Список литературы

1. Калоеров С.А. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88–98
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
3. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
4. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 141–151.
5. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

*Калоеров С.А.*, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
*Авдюшина Е.В.*, канд физ.-мат. наук, доц.,

*Глушанков Е.С.*, канд физ.-мат. наук  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*evgenij.glushankov@gmail.com*

**Введение.** К настоящему времени точные решения задачи по определению напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин с отверстиями получены лишь для случаев нагружений пластинки с эллиптическим отверстием усилиями, равномерно распределенными на бесконечности или на контуре отверстия [1]. Для случая действия сосредоточенных сил во внутренних точках можно использовать различные приближенные методы [2, 3], которые для близких расстояний от точек приложения сил до контура отверстия не позволяют получать результаты достаточной степени точности, а для случая приложения сосредоточенных сил в точках контура отверстия решений задач нет. В данном сообщении приводится решение задачи, пригодное для любых случаев, в том числе, когда силы приложены в точках контура отверстия.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим анизотропную пластинку, занимающую бесконечную односвязную область  $S$ , ограниченную эллиптическим контуром  $L_1$  с полуосями  $a_1$  и  $b_1$ . На бесконечности и по контуру отверстия пластинка не нагружена, во внутренней точке  $z_1^0(x_1^0, y_1^0)$  области  $S$  действует сосредоточенная сила  $P_1^0(X_1^0, Y_1^0)$ .

Задача определения напряженно-деформированного состояния пластинки сводится к нахождению комплексных потенциалов  $\Phi_k(z_k)$  ( $k=1, 2$ ) [1, 3]

$$\Phi_k(z_k) = A_{k1}^0 \ln(z_k - z_{k1}^0) + \Phi_{0k}(z_k), \quad (1)$$

где  $A_{k1}^0$  – известные постоянные, получаемые из решения системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{k1}^0 = (Y_1^0/2\pi, -X_1^0/2\pi, 0, 0), \quad (2)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные вне контуров  $L_{k1}$  областей  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными преобразованиями  $z_k = x + \mu_k y$ , в которых  $\mu_k$  – комплексные постоянные. При этом функции должны удовлетворять



условиям  $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik1} \Phi_k(t_k) = 0$ , которые можно записать в виде

$$\Phi_k(t_k) = -\bar{r}_{1k} \overline{\Phi_k(t_k)} - \bar{r}_{2k+1} \overline{\Phi_{k+1}(t_{k+1})} \quad (3)$$

где  $g_{ik1}$ ,  $\bar{r}_{ij}$  – известные постоянные,  $k$  – индекс, принимающий значения 1 и 2, причем значение индекса  $k+1$  при  $k=2$  формально считается равным 1.

Используя конформные отображения внешности единичных кругов  $|\zeta_{k1}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{k1}$  [4]  $z_k = R_{k1}(\zeta_{k1} + m_{k1}/\zeta_{k1})$ , где  $R_{k1} = (a_1 - i\mu_k b_1)/2$ ,  $m_{k1} = (a_1 + i\mu_k b_1)/2R_{k1}$ , и разлагая функции, голоморфные вне кругов, в ряды Лорана, для комплексных потенциалов получаем

$$\Phi_k(z_k) = A_{k1}^0 \ln(\zeta_{k1} - \zeta_{k1}^0) + \Phi_{0k}(\zeta_{k1}), \quad (4)$$

где  $\zeta_{k1}^0$  – точки, соответствующие  $z_{k1}^0$  при конформных отображениях;  $\Phi_{0k}(\zeta_{k1})$  – функции, голоморфные в отображенных областях вне  $|\zeta_{k1}| \geq 1$ . На контурах этих кругов  $\zeta_{k1} = \sigma = e^{i\theta}$ , где  $\theta$  – параметр параметрического задания эллипса. Тогда, подставляя функции (4) в граничные условия (3), получаем

$$A_{k1}^0 \ln(\sigma - \zeta_{k1}^0) + \Phi_{0k}(\sigma) = -\sum_{j=1}^2 \bar{r}_{jk+j-1} \left[ \bar{A}_{k+j-1,1}^0 \ln\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{\zeta}_{k+j-1,1}^0\right) + \overline{\Phi_{0k+j-1}(\sigma)} \right]. \quad (5)$$

Применив к этим граничным условиям методы интегралов типа Коши, находим  $\Phi_{0k}(\zeta_{k1})$ , окончательно для комплексных потенциалов и их производных получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= A_{k1}^0 \ln(\zeta_{k1} - \zeta_{k1}^0) - \bar{r}_{1k} \bar{A}_{k1}^0 \ln\left(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \bar{\zeta}_{k,1}^0\right) - \bar{r}_{2k+1} \bar{A}_{k+1,1}^0 \ln\left(\frac{1}{\zeta_{k1}} - \bar{\zeta}_{k+1,1}^0\right); \\ \Phi'_k(z_k) &= \left[ \frac{A_{k1}^0}{\zeta_{k1} - \zeta_{k1}^0} + \frac{\bar{r}_{1k} \bar{A}_{k1}^0}{\zeta_{k1} (1 - \bar{\zeta}_{k,1}^0 \zeta_{k1})} + \frac{\bar{r}_{2k+1} \bar{A}_{k+1,1}^0}{\zeta_{k1} (1 - \bar{\zeta}_{k+1,1}^0 \zeta_{k1})} \right] \frac{\zeta_{k1}^2}{R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}. \end{aligned} \quad (6)$$

По этим функциям легко находятся основные напряжения

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k),$$

а по последним – и напряжения на произвольных площадках. Если эллипс переходит в прямолинейный разрез, то вычисляются и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

С использованием приведенного точного решения были проведены численные исследования распределения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в пластинке из углепластика [5] вблизи контура кругового отверстия ( $b_1 = a_1$ ) на площадках, перпендикулярных к контуру в зависимости от отношения  $c/a_1$  расстояния  $c$  от точки приложения сосредоточенной силы до контура отверстия к радиусу отверстия  $a_1$ . Для некоторых значений отношения  $c/a_1$  на рисунке приведены графики распределения напряжений  $\sigma_s$  в

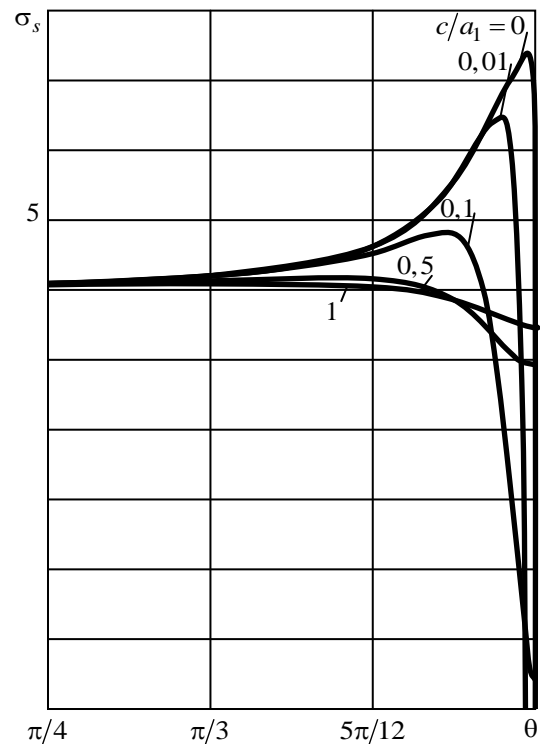
зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от направления оси  $Ox$ , против часовой стрелки. Из графиков видно, что значение  $c/a_1$  существенно влияет на распределение напряжений лишь вблизи точки приложения усилий, а на удалении от этой точки влияние несущественно. При уменьшении  $c/a_1$  концентрация напряжений вблизи точки приложения усилий резко возрастает. При этом в непосредственной близости от точки образуется зона очень сильного сжатия, которая переходит в зоны сильного растяжения, а далее по контуру – ослабевающего.

Как показали расчеты, при использовании обобщенного метода наименьших квадратов, если  $c/a_1 \geq 0,5$ , то значения получаемых этим методом значений напряжений почти не отличаются от истинных (получаемых с использованием точного решения), если при решении задачи в искомых рядах Лорана оставлять не менее 40-50 членов и при удовлетворении граничным условиям брать не менее 300-500 коллокационных точек. Для более близких расстояний эти результаты разнятся значительно, не говоря о том, что если точка приложения силы находится на контуре отверстия, решить задачу никакими методами, кроме метода интегралов типа Коши, не представляется возможным.

Также были проведены численные исследования изменения значений напряжений в зависимости и от значения отношения  $b_1/a_1$  полуосей эллиптического отверстия с выявлением аналогичных закономерностей.

### Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К.-Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
5. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.



## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

*Калоеров С.А.*, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
*Авдюшина Е.В.*, канд физ.-мат. наук, доц., *Ермаков О.Э.*  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*o.avdushina@donnu.ru*

**Введение.** Из-за потребностей различных областей науки и техники исследования концентрации напряжений в пластинах из композиционных материалов с отверстиями вблизи прямолинейных границ давно разработаны методы решения таких задач [1, 2]. При этом граничные условия на контурах отверстий удовлетворяются методом рядов [1] или дискретным методом наименьших квадратов [2]. Но для сильно анизотропных материалов и в случаях весьма близких расположений отверстий и трещин от прямолинейных границ эти методы не позволяют получать результаты с высокой степенью точности. В работе [3] для решения таких задач использован обобщенный метод наименьших квадратов, обеспечивающий более высокую точность удовлетворения граничным условиям. В данной работе этим подходом исследуется напряженное состояние полуплоскости с отверстиями и трещинами вблизи прямолинейной границы.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим анизотропную пластинку в виде полуплоскости с прямолинейной границей  $L^+$  и эллиптическими отверстиями с контурами  $L_l$  и полуосями  $a_l, b_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ). Выберем основную прямоугольную систему координат  $Ox$  с осью  $Ox$ , параллельной прямой  $L^+$  и центром в произвольной точке полуплоскости на расстоянии  $h^+$  от  $L^+$ , и локальные системы координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах эллипсов  $x_{0l}, y_{0l}$ , направлениями осей  $O_l x_l$  вдоль полуосей  $a_l$  и углами  $\varphi_l$  между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемыми от оси  $Ox$  против часовой стрелки. Граница  $L^+$  и контуры  $L_l$  не нагружены, на бесконечности полуплоскость находится под действием усилий  $\sigma_x^\infty = p$ , напряжения  $\sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$  и угол поворота  $\omega_3^\infty$  равны нулю.

Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости будем проводить с использованием функций обобщенных комплексных переменных  $\Phi_k(z_k)$  [4]. Эти функции определены и голоморфны в полуплоскостях  $S_k$ , получаемых из заданной полуплоскости

С известными аффинными преобразованиями и ограниченными контурами  $L_k^+$  и  $L_{kl}$ , соответствующими  $L^+$  и  $L_l$  при этих преобразованиях. После конформных отображений внешностей кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{kl}$  и применения к граничным условиям на прямолинейной границе методов вычисления интегралов типа Коши для этих функций находим

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_{k \ln}(z_k) a_{k \ln} - \bar{r}_k \varphi_{k \ln}^+(z_k) \bar{a}_{k \ln} - \bar{s}_{k+1} \varphi_{k+1 \ln}^+(z_k) \bar{a}_{k+1 \ln} \right), \quad (1)$$

в которых  $\Gamma_k$ ,  $\bar{r}_k$ ,  $\bar{s}_{k+1}$  – известные постоянные;  $\varphi_{k \ln} = 1/\zeta_{kl}^n$ ,  $\varphi_{k+j \ln}^+ = 1/(\zeta_{k+jl}^+)^n$ ;  $\zeta_{kl}$ ,  $\zeta_{k+jl}^+$  – переменные, определяемые из отображений [3]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad z_k = -(\bar{\mu}_{k+j} - \mu_k) h^+ + \bar{z}_{k+j,l} + \bar{R}_{k+jl} \left( \zeta_{k+jl}^+ + \frac{\bar{m}_{k+jl}}{\zeta_{k+jl}^+} \right) \quad (j=0,1),$$

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \quad R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функции  $\Phi_k(z_k)$  точно удовлетворяют условиям на прямолинейной границе  $L^+$ , а на контурах  $L_p$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) им будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов, выбрав на каждом из них систему коллакационных точек  $t_{pm}$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_p}$ ). Эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме. Удовлетворив этим условиям, для определения неизвестных коэффициентов  $a_{k \ln}$  получаем следующую переопределенную систему линейных алгебраических уравнений:

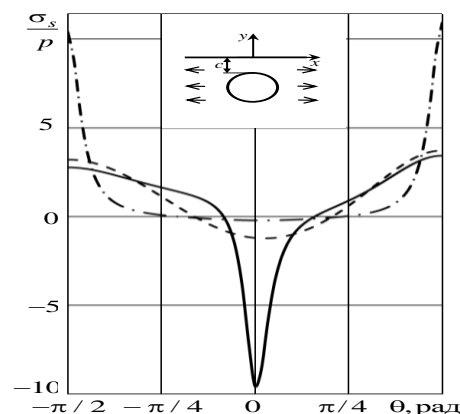
$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kpi} \delta_{k,s} \left[ \varphi'_{k \ln}(t_{kpm}) a_{k \ln} - \bar{r}_k \varphi'_{k \ln}^+(t_{kpm}) \bar{a}_{k \ln} - \bar{s}_{k+1} \varphi'_{k+1 \ln}^+(t_{kpm}) \bar{a}_{k+1 \ln} \right] = \\ = \frac{df_{pi}(t)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k \left( p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}; i = \overline{1, 2} \right). \quad (2)$$

После решения этой системы методом сингулярных разложений постоянные  $a_{k \ln}$ , а следовательно и функции  $\Phi'_k(z_k)$ , будут известными и по ним можно вычислять напряжения в любой точке полуплоскости, а если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез, то и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) для его концов.

**Описание результатов численных исследований.** Проведены численные исследования распределения напряжений в полуплоскости в зависимости от ее физико-механических свойств и геометрических

характеристик отверстий, их взаимного расположения относительно друг друга и границы полуплоскости. Ниже описаны лишь некоторые из полученных результатов для полуплоскости с круговым отверстием. При проведении расчетов в рядах Лорана (1) оставлялось 50 членов, при формировании системы (2) выбиралось 200 коллокационных точек.

На рисунке для случая полуплоскости с круговым отверстием, находящимся на расстоянии радиуса отверстия от границы полуплоскости, изображены графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_s$  около контура кругового отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру в зависимости от центрального угла отверстия  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки.



Сплошная, штриховая и штрих-пунктирная линии рисунка соответствуют полуплоскости из углепластика HMS/DX209 [5] с мягкими волокнами вдоль оси  $Oy$ , вдоль оси  $Ox$  и изотропного материала. Из рисунка и других полученных результатов численных исследований следует, что влияние прямолинейной границы на напряженное состояние около контура отверстия велико, высокая концентрация напряжений наблюдается в точках перемены между контуром отверстия и границей полуплоскости, последние напряжения особенно велики в случаях эллиптических отверстий с перпендикулярной к границе большой полуосью, в пределе в случаях трещин, перпендикулярных к прямолинейной границе.

### Список литературы

1. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С. А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
2. Калоеров С.А. Концентрация напряжений в анизотропной полу-плоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 63–72.
3. Калоеров С.А. Общие решения задач для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2018. – № 2. – С. 22–35
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

*Калоеров С.А.*, д-р физ.-мат. наук, проф., *Полянский М.А.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*kaloerov@mail.ru*

**Введение.** Пластинки из пьезоматериалов с отверстиями и трещинами широко применяются в качестве элементов различных конструкций современного машиностроения, авиастроения и приборостроения. При действии различных механических сил и электромагнитных полей около отверстий возникают большие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Для исследования электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пьезопластин разработаны методы, использующие комплексные потенциалы электромагнитоупругости [1]. При этом наиболее точные результаты получаются, если при решении задач используется обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [2], который позволяет проще других построить вычислительный процесс, обеспечивая при этом высокую точность удовлетворения граничным условиям. В данной работе последний метод использован при решении задачи для пластинки с произвольными криволинейными отверстиями. Численные исследования проведены для пластинки треугольным отверстием.

**Постановка и метод решения задачи.** Рассматривается занимающая бесконечную многосвязную область  $S$  пьезопластинка с эллиптическими отверстиями  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l, b_l$ , центрами в точках  $O_l (x_{0l}, y_{0l})$  и углами  $\varphi_l$  между положительным направлением оси  $Ox$  и полуосями  $a_l$ . Эллипсы  $L_l$  могут переходить в прямолинейные разрезы, располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации, аппроксимируемые дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов. Контур отверстия не нагружен, на бесконечности заданы значения напряжений и компонент векторов напряженностей электромагнитного поля, а угол поворота пластинки  $\omega_3^\infty = 0$ .

Если при решении задачи об определении ЭМУС пластинки использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости [1], то задача сводится к нахождению функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) обобщенных комплексных переменных  $z_k$  из граничных условий на контурах пластинки. При этом комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими контурам

$L_l$  области  $S$  при аффинных преобразованиях  $z_k = x + \mu_k y$ , где  $\mu_k$  – корни известного характеристического уравнения, и после конформных отображений внешностей единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{kl}$  [3]

$$\begin{aligned} z_k &= z_{0kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}); \\ z_{0kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}; \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}} \end{aligned}$$

ЭТИ ИМЕЮТ ВИД

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (1)$$

в котором  $\Gamma_k$  – известные постоянные [1];  $\varphi_{kln}(z_k) = 1/\zeta_{kl}^n$ ;  $a_{kln}$  – неизвестные постоянные, которые определяются из граничных условий на контурах отверстий. Этим условиям будем удовлетворять ОМНК. Для этого на каждом из контуров  $L_p$  ( $p=1, \mathcal{L}$ ) выберем систему точек  $t_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$   $m = (\overline{1, M_p})$ , в которых удовлетворим граничным условиям. Получим систему

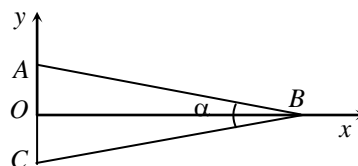
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left[ \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_{kpi} \delta_{kp} a_{kln} \varphi'_{kln}(t_{kpm}) + \bar{g}_{kpi} \bar{\delta}_{kp} \bar{a}_{kln} \overline{\varphi'_{kln}(t_{kpm})} \right) \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[ g_{kpi} \delta_{kp} \Gamma_k \right] \left( p = \overline{1, \mathcal{L}}, i = \overline{1, 4}, m = \overline{1, M_p} \right), \quad (2) \\ \delta_{ks} = \frac{dt_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \end{aligned}$$

После нахождения псевдорешения системы (2) методом сингулярного разложения [2] постоянные, входящие в комплексные потенциалы, будут известны, что позволяет найти основные характеристики (напряжения, деформации, индукции и напряженности электромагнитного поля) ЭМУС в любой точке пластинки.

**Анализ результатов численных исследований.** Численные исследования ЭМУС проведены для пластинки с треугольным отверстием, т. е. в приведенном решении считалось, что  $\mathcal{L} = 3$  и имеются отверстия с контурами  $L_1, L_2, L_3$ , которые представлялись прямолинейными разрезами. При этом граничные условия удовлетворялись на внешних сторонах этих разрезов. При проведении расчетов количество членов в рядах Лорана (1) для каждого отверстия  $L_p$  ( $p=1, 2, 3$ ) и точек  $M_p$  на контурах  $L_p$ , для

которых составлялись уравнения (2), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на заданных контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, необходимо было в рядах Лорана оставлять от 40 до 70 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 500 «коллокационных точек».

При проведении расчетов рассматривался равнобедренный треугольник  $ABC$  (рисунок) с боковыми сторонами  $AB$  и  $BC$  длины  $2a_1$  каждая и углом между ними  $\alpha$  и основанием  $AC$  так, что в прямоугольной системе координат  $Oxy$  с началом в центре основания  $AC$  и осью  $Ox$  вдоль высоты треугольника  $OB$ . Тогда длина основания треугольника  $AC$  равна  $4a_1 \sin(\alpha/2)$ , высота  $OB$   $2a_1 \cos(\alpha/2)$ , а вершины треугольника находятся в точках  $A(0, 2a_1 \sin(\alpha/2))$ ,  $B(2a_1 \cos(\alpha/2), 0)$ ,  $C(0, -2a_1 \sin(\alpha/2))$ .



Треугольное отверстие  
в пластинке

Считалось, что пластинка на бесконечности растягивается усилиями  $\sigma_y^\infty = p$ , остальные воздействия на бесконечности отсутствуют, т. е.  $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_x^\infty = E_y^\infty = H_x^\infty = H_y^\infty = 0$ .

Численными исследованиями установлено, что в рассматриваемой пластинке с треугольным отверстием при данном нагружении наибольших значений напряжения и другие основные характеристики получают в окрестности вершины  $B$  треугольника, причем, чем меньше угол  $\alpha$ , тем больше эти значения; при  $\alpha \leq 5\pi/180$  значения основных характеристик около вершины треугольника такие же большие, как около конца трещины. На значения основных характеристик значительно влияет и учет пьезосвойств материала пластинки. Последнее влияние особенно велико в окрестности концов трещин.

### Список литературы

1. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерная и плоская задачи электромагнитоупругости для тел с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 50-62.
2. Калоеров С.А., Добряк Д.А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ. науки.– 2006.– Вип. 2. – С. 77–88.
3. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10-26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).



## ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ОДНОСВЯЗНЫХ ПЛИТ

**Калоеров С.А.**, д-р физ.-мат. наук, проф., **Сероштанов А.В.**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*kaloerov@mail.ru*

**Введение.** В различных областях науки и техники широко используются конструкции с элементами в виде тонких плит из пьезоматериалов, эксплуатируемые в условиях поперечного изгиба. Под действием различных внешних воздействий в этих элементах могут возникать высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации таких конструкций. В работе [1] для исследования напряженно-деформированного состояния тонких плит предложен метод, основанный на введении и использовании комплексных потенциалов. В данной работе с помощью этих функций даны точные аналитические решения задач для эллиптической плиты и бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. Описаны и результаты численных исследований.

**Комплексные потенциалы задачи.** Если при решении задач об изгибе электромагнитоупругих плит использовать комплексные потенциалы, то решение задачи для плиты с внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий  $L_l$  сводится к нахождению комплексных потенциалов  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) из граничных условий на контурах плиты. При этом комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими контурам  $L_l$  области  $S$  при аффинных преобразованиях  $z_k = x + \mu_k y$ , где  $\mu_k$  – корни известного характеристического уравнения, и в общем случае имеют вид [1]  $W_k'(z_k) = g\Gamma_k z_k + W_{0k}'(z_k)$ , где  $g$  – постоянная, равная нулю в случае конечной области и 1, если область бесконечна;  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка.

**Эллиптическая плита.** Пусть эллиптическая плита (рис. 1) с контуром  $L_0$  и полуосями  $a_0$ ,  $b_0$  находится под действием равномерно распределенных по контуру механических изгибающих моментов интенсивности  $m_0$ , а поперечные силы и индукционные моменты на нем равны нулю, т. е.  $M_n(s) = m_0$ ,  $p(s) = m_{a0}(s) = m_{b0}(s) = 0$ . В данном случае комплексные потенциалы  $W_k'(z_k) = W_{k0}'(z_k)$ ,

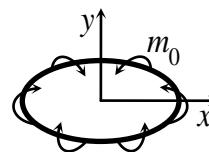


Рис. 1

где  $w'_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в областях  $S_k$ , а следовательно, представимых рядами по полиномам Фабера. После удовлетворения граничным условиям для этих функций получают выражения  $W'_k(z_k) = a_k z_k$ , где  $a_k$  – постоянные, вычисляемые из решения полученной системы 4 линейных уравнений с 4 неизвестными. Для моментов вычисляются выражения

$$(M_x, M_y, H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) a_k.$$

Аналогичные выражения получаются, если на контуре диска приложены моменты индукций. Исследованиями установлено, что при действии механических сил в плите электромагнитные моменты не возникают, а при действии электромагнитных моментов при отсутствии механических воздействий, показывается, что в плите механические моменты не возникают. Такой вывод получается и для прямоугольника и вообще для любой сплошной конечной плиты. Таким образом, в сплошной конечной пластинке пьезоэффект не наблюдается.

**Бесконечная плита с эллиптическим отверстием.** Рассмотрим бесконечную электромагнитоупругую плиту с эллиптическим отверстием (рис. 2) с полуосями  $a_1, b_1$  и контуром  $L_1$ . Контур отверстия свободен от

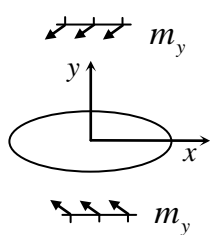


Рис. 2

загружений, на бесконечности действуют механические моменты  $M_y^\infty = m_y$ , остальные механические и индукционные моменты равны нулю. После удовлетворения граничным условиям на контуре отверстия для функций получают выражения  $W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + a_{k11}/\zeta_{k1}$ , где  $\Gamma_k$  и  $a_{k11}$  – постоянные, вычисляемые из решения полученных систем 4 линейных уравнений с 4 неизвестными для каждой из групп.

Проведены численные исследования электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) плиты в зависимости от физико-механических свойств ее материала, геометрических характеристик отверстия и типа приложенных воздействий. На рис. 3 для плиты с круговым отверстием, в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки, приведены графики распределения моментов  $M_s$ , соответствующих нормальным напряжениям  $\sigma_s$ , действующим вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру. В качестве материала плиты был выбран композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют  $PZT-4$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $CoFe_2O_4$ . Кривые приведены для случаев задач электромагнитоупругости (ЭМУ) (сплошная линия), магнитоупругости (МУ) (штриховая линия), когда не учитываются электрические свойства материала, электроупругости (ЭУ) (штрих-пунктирная линия), когда не учитываются магнитные свойства

материала, и теории упругости (ТУ) (пунктирная линия), когда не учитываются ни электрические, ни магнитные свойства материала. Как следует из рис. 3, около контура отверстия вблизи точки  $\theta=0$  наблюдается концентрация моментов  $M_s$  (напряжений  $\sigma_s$ ). Совместный учет электрических и магнитных свойств значительно влияет на значения основных характеристик. Видно, что с учетом всех свойств полученные значения моментов в некоторых точках в два раза больше соответствующих значений, полученных без учета этих свойств. Поэтому при исследованиях ЭМУС нельзя пренебрегать пьезосвойствами и решать задачу теории упругости об изгибе анизотропной плиты, а нужно решать общую задачу электромагнитоупругости или хотя бы магнитоупругости, когда получаемые значения моментов (а следовательно и напряжений) близки к их значениям в общем случае, когда учитываются все пьезосвойства.

### Список литературы

1. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 37–57.
2. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – 1998. – С. 8–26. – (Механика композитов. В 12 т. Т. 7).
3. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.

УДК 004.424:519.3

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ УСКОРЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ CUDA

*Комаричев Р.Е.<sup>1</sup>, Судаков С.Н.<sup>2</sup>*, д-р физ.-мат. наук, с.н.с.

<sup>1</sup>ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, ДНР,

<sup>2</sup>ГУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, ДНР

*komarichev\_pi15b@mail.ru, sudakov@iamm.su*

**Введение.** Для анализа прочностных характеристик конструкций проводят инженерные расчёты с применением аналитических и численных методов. МКЭ (метод конечных элементов) – один из современных методов численного анализа. Широкое распространение получил после того, как объединились два его направления – инженерное и математическое [1].

Цель – ускорить алгоритм МКЭ с использованием средств CUDA для снижения времени обработки сложных моделей. CUDA – это архитектура

параллельных вычислений, разработанная NVIDIA Corporation, которая позволяет значительно повышать вычислительную производительность с помощью графических процессоров [2].

**Основная часть.** Основные идеи МКЭ могут быть проиллюстрированы с помощью простейших краевых задач. На примере простейшей краевой задачи разобран МКЭ в одномерном случае. Для этого рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка с граничными условиями первого рода. Выполнив над ним некоторые операции, получаем интегральное тождество, соответствующее краевой задаче. Её приближённое решение заключается в нахождении кусочно-линейной функции через разбиение оси  $Ox$  на отрезки и введение базисных функций. Прямая линия, полученная на каждом отрезке, есть конечный элемент. Один из примеров прикладного применения этого метода – предсказание деформации натянутой струны, закреплённой в двух точках, под воздействием определённых сил.

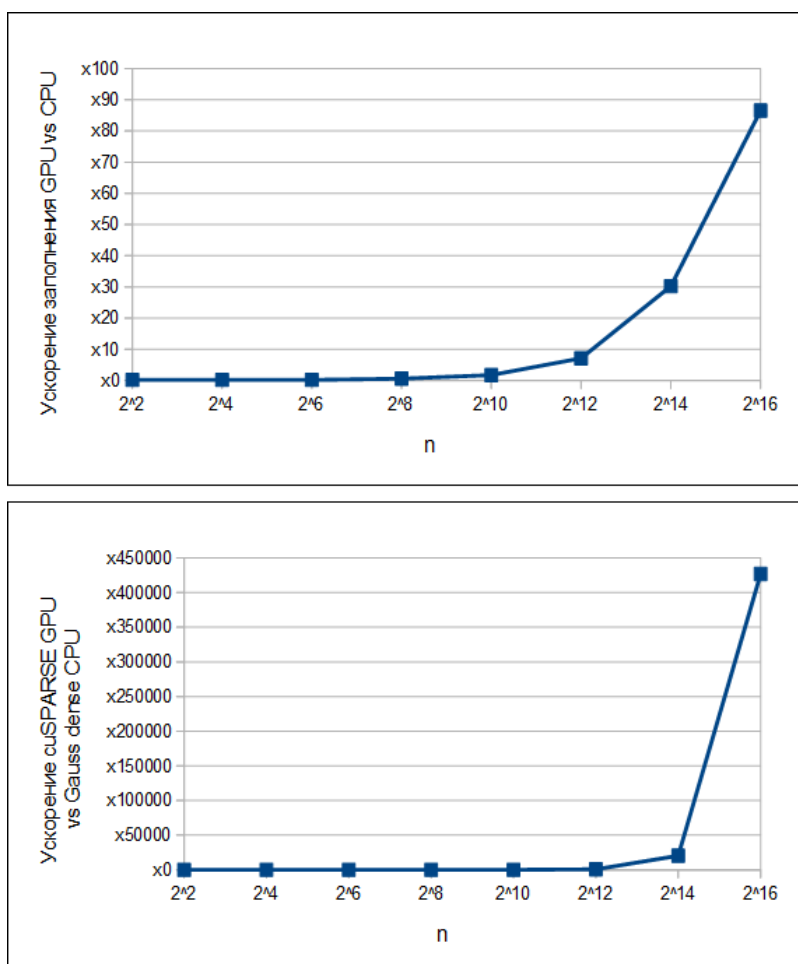


Рис. 1. Ускорения процессов заполнения матрицы коэффициентов (сверху) и решения СЛАУ (снизу) на ГПУ по сравнению с ЦПУ при различных размерах матрицы  $n$ .

Видно, что в процессе обработки каждого конечного элемента выполняется одна и та же последовательность операций. Такая ситуация,

когда требуется выполнять одинаковые инструкции снова и снова для большого количества входных данных, иначе говоря SIMD (single instruction, multiple data), является благоприятной для повышения производительности за счёт графических процессоров. Современные модели домашних центральных процессоров имеют на своём борту десятки вычислительных ядер, в то время как видеокарты – тысячи.

Даже в рассматриваемом простейшем случае задачи МКЭ выявлено несколько потенциальных участков для оптимизации. Во-первых, учитывая, что решение задачи подразумевает решение СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений), а количество уравнений может быть огромным, в контексте GPGPU (general-purpose computing on graphics processing units) очевидно напрашивается распараллеливание процесса формирования матрицы коэффициентов. Во-вторых, учитывая специфику МКЭ, можно быть уверенным в том, что матрица коэффициентов будет разрежённой. Потому предлагается отказаться от привычного представления матриц в виде двумерных массивов, тем самым сэкономив не только время выполнения, а и объём потребляемой памяти. В-третьих, есть возможность выиграть на самом решении СЛАУ, возложив эту подзадачу на библиотеку cuSPARSE, которая содержит для этой цели готовые оптимизированные алгоритмы [3].

**Заключение.** Реализованный для ГПУ (графического процессорного устройства) алгоритм МКЭ с учётом описанных аспектов имеет для больших  $n$  гораздо большую производительность по сравнению с версией, традиционно работающей на ЦПУ (центральном процессорном устройстве) без применения специальных средств (см. рис. 1).

### Список литературы

1. Секулович М. Метод конечных элементов / Пер. с серб. Ю. Н. Зуева; под ред. В.Ш. Барбакадзе. – М.: Стройиздат, 1993 – 664 с.: ил. – Перевод изд. Metod konacnih elemenata / Miodrag Sekulovic, 1988. – ISBN 5-274-01755-X.
2. CUDA Toolkit Documentation v11.1.0 [Электронный ресурс] // CUDA Toolkit Documentation. – URL: <https://docs.nvidia.com/cuda/index.html> (дата обращения: 06.10.2020).
3. cuSPARSE [Электронный ресурс] // CUDA Toolkit Documentation. – URL: <https://docs.nvidia.com/cuda/cusparse/index.html> (дата обращения: 06.10.2020).
4. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 352 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

## ВТОРЫЕ ГАРМОНИКИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ

*Моисеенко И.А.*, д-р физ.-мат. наук, доц., *Мельничук Н.Ю.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*miamia733@mail.ru*

**Введение.** Наличие открытых неисследованных вопросов волновой динамики цилиндрических тел в последние годы обусловлено, прежде всего, появлением новых вариантов постановки ранее сформулированных задач данного класса. Актуализация указанных подходов реализуется в контексте современных запросов инновационных научно-технических отраслей, в том числе развитием технологий неразрушающего ультразвукового контроля и достижениями в технологиях изготовления и обработки новых конструкционных материалов, формируемых, в частности, методами 3D печати. В этой связи может быть выделен круг неклассических проблем волновой механики цилиндрических деформируемых тел, в которых, ставятся задачи комплексного учета специфических факторов усложнения физико-механических свойств. В представленном исследовании таковыми факторами выступают непрерывная, определяемая специальным функциональным законом, радиальная неоднородность физико-механических свойств материала волновода (свойств инновационных функционально-градиентных материалов), а также учет геометрической и физической нелинейности в процессах динамического деформирования рассматриваемых волноводов. Исследования, связанные с учетом каждого из указанных факторов по отдельности в случае трансверсально-изотропных материалов, в частности, представлены соответственно в работах [1] и [2].

**Постановка задачи.** Рассматривается изготовленный из трансверсально изотропного материала цилиндрический волновод радиуса  $R$ , имеющий в поперечном сечении форму круга. Волновод занимает в отнесенных к нормирующему параметру  $R_* = R$  безразмерных цилиндрических координатах  $Or\theta z$  область  $V = \{r \in [0,1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}$ . Граничная поверхность волновода определяется соотношением  $G = \{r = 1, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}$ .

Математическая модель динамического напряженно-деформированного состояния упругих цилиндрических тел включает систему дифференциальных уравнений движения

$$r^{-1} \partial_r (r \mathbf{S}_{rr}) + r^{-1} \partial_\theta \mathbf{S}_{r\theta} + \partial_z \mathbf{S}_{rz} - r^{-1} \mathbf{S}_{\theta\theta} - (\rho_0 R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r = 0,$$

$$r^{-1}\partial_r(r\mathbf{S}_{\theta r})+r^{-1}\partial_\theta\mathbf{S}_{\theta\theta}+\partial_z\mathbf{S}_{\theta z}+r^{-1}\mathbf{S}_{r\theta}-\left(\rho_0R_*^2/c_*\right)\partial_t^2u_\theta=0,$$

$$r^{-1}\partial_r(r\mathbf{S}_{zr})+r^{-1}\partial_\theta\mathbf{S}_{z\theta}+\partial_z\mathbf{S}_{zz}-\left(\rho_0R_*^2/c_*\right)\partial_t^2u_z=0,$$

где  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{S}_{ij} \neq \mathbf{S}_{ji}$ ,  $i, j = r, \theta, z$ ) – первый тензор Пиола-Киргофа [3];  $u_j$  ( $j = r, \theta, z$ ) – нормированные компоненты вектора смещений вдоль осей системы координат  $Or\theta z$ ;  $\rho_0$  – плотность в начальный момент времени;  $c_*$  – нормирующий параметр размерности напряжений. Соотношения связи между первым  $\mathbf{S}$  и вторым  $\mathbf{T}$  ( $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji}$ ,  $i, j = r, \theta, z$ ) тензорами Пиола-Киргофа имеет вид [3]  $\mathbf{S} = \mathbf{FT}$ , где  $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{I}$ ;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  $\mathbf{G}$  – тензор градиентов деформаций

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \partial_r u_r & r^{-1}\partial_\theta u_r - r^{-1}u_\theta & \partial_z u_r \\ \partial_r u_\theta & r^{-1}\partial_\theta u_\theta + r^{-1}u_r & \partial_z u_\theta \\ \partial_r u_z & r^{-1}\partial_\theta u_z & \partial_z u_z \end{bmatrix}.$$

Соотношения связи между термодинамическими напряжениями (компонентами тензора  $\mathbf{T}$ ) и компонентами тензора деформаций  $\mathbf{E}$  [4]

$$\mathbf{T}_{ij} = \rho_0 \partial U(\mathbf{E}) / \partial \mathbf{E}_{ij} \quad (i, j = r, \theta, z),$$

где  $U(\mathbf{E})$  – внутренняя энергия на единицу массы, при соответствующем выборе начального состояния задается представлением [4]

$$\rho_0 U(\mathbf{E}) = \rho_0 U(\mathbf{O}) + \frac{1}{2} c_{ijmn} \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{mn} + \frac{1}{6} c_{ijmnl} \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{mn} \mathbf{E}_{kl} + \dots$$

Здесь  $\mathbf{O}$  – нулевой тензор;  $c_{ijmn}$  и  $c_{ijmnl}$  – отнесены к нормирующему параметру  $c_*$  коэффициенты упругости соответственно второго и третьего порядка [4]. Соотношения связи между тензорами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{G}$  вида

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}^T + \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{G}).$$

Модель включает также граничные условия свободной  $\mathbf{T}_{rj}|_{(r,\theta,z) \in G} = 0$  ( $j = r, \theta, z$ ), либо жестко закрепленной  $u_j|_{(r,\theta,z) \in G} = 0$  ( $j = r, \theta, z$ ) граничной поверхности волновода. В поставленной модели полагается, что материал волновода является функционально-неоднородным в радиальном направлении, а его плотность  $\rho_0$  и нормированные коэффициенты упругости  $c_{ijmn}$  и  $c_{ijmnl}$  описываются представлениями

$$\rho_0 = \tilde{\rho}_0 \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad c_{ijmn} = \tilde{c}_{ijmn} \exp(f_{\lambda,q}(r)),$$

$$c_{ijmnl} = \tilde{c}_{ijmnl} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad f_{\lambda,q}(r) = \lambda r^q.$$

Здесь  $\lambda$  ( $\lambda \in R$ ) и  $q$  ( $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ) параметры, характеризующие функциональный закон неоднородности материала;  $\tilde{\rho}_0$ ,  $\tilde{c}_{ijmn}$  и  $\tilde{c}_{ijmnl}$  соответственно плотность в начальный момент времени и нормированные коэффициенты упругости однородного материала.

Представленная модель рассматривается в рамках концепции малых нелинейных ангармонических эффектов. Полагается, что компоненты вектора волновых упругих перемещений представляются суммами линейных и квадратичных членов по степеням малого параметра в виде соотношения характерных амплитуд и длин рассматриваемых волн. В результате применения метода разложения решений по малому параметру получена рекуррентная последовательности краевых задач для определения амплитудных составляющих комплексных функций перемещений в первых линейных гармониках и вторых гармониках, характеризующих нелинейные ангармонические возмущения. Построены решения указанных краевых задач в аналитической матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решений в равномерно и абсолютно сходящиеся степенные ряды с определяемыми из явных рекуррентных соотношений векторными коэффициентами. Получены представления функций волновых перемещений в нелинейных ангармонических возмущениях, описываемых суммой вторых гармоник с удвоенными частотами для отдельно взятых линейных монохроматических нормальных волн кручения и вторых гармоник комбинационного типа, характеризующих нелинейное взаимодействие.

**Заключение.** Полученные результаты могут быть использованы в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализа моделей ультразвуковой диагностики.

### Список литературы

1. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Теорет. и прикл. механика. – 2014. – №. 9 (55). – С. 139-145.
2. Moiseyenko Igor A. Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonic for Guided Torsion Elastic Waves in Transversely Isotropic Cylinder / Igor A. Moiseyenko, Valeriy I. Storozhev, Oksana Yu. Sidash. // Nonlinear Dynamics – 2016: Proceedings of 5-th International conference, Dedicated to the 90-th Anniversary of Academician V.L. Rvachev, (September 27–30, 2016) / National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute” at al. – Kharkov, 2016. – 538 p. – P. 457-464.
3. Truesdell C, Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Ed. by S.S. Antman. Third Edition. / C. Truesdell, W. Noll. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag. 2004. – 602 p.
4. Физическая акустика. Том 1. Часть А. Методы и приборы ультразвуковых исследований / Под редакцией У. Мэзона. – М. : Изд-во Мир. 1966. – 592 с.



## УЧЕТ РАЗБРОСА ЗНАЧЕНИЙ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ОСЕВОМ СЖАТИИ

*Мутин Д.И.*<sup>1</sup>, д-р техн. наук, *Сторожев С.В.*<sup>2</sup>, канд. экон. наук, доц.,  
*Номбре С.Б.*<sup>2</sup>, канд. физ.-мат. наук, доц.

<sup>1</sup>ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН», г. Москва, РФ

<sup>2</sup>ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,  
г. Макеевка, ДНР

*s.storozhev@donnu.ru*

**Введение.** Проблема синтеза и анализа моделей потери устойчивости тонкостенных деформируемых конструктивных элементов [1, 2] сохраняет ряд важных в недостаточной мере исследованных теоретических и прикладных аспектов. К ним относятся вопросы оценки влияния неопределенности в виде разбросов экспериментальных и технологических расчетных значений физико-механических и геометрических параметров конструкций на подлежащие определению значения критических интенсивностей внешних нагрузжений. При этом применение методов вероятностного стохастического анализа [3] в качестве инструмента для учета отмеченных факторов неопределенности зачастую сталкивается с ситуацией отсутствия соответствующей исходной информации, имеющей корректную статистическую природу. В качестве подхода, позволяющего, в этой связи, использовать данные обработки маломощных частотных выборок и субъективные экспертные заключения, могут быть использованы методы теории нечетких множеств [4 – 6]. В контексте вышесказанного, целью данной работы является распространение нечетко-множественной методики анализа факторов неопределенности в теоретических моделях деформирования и термостабилизации конструкций [5, 6] на задачи устойчивости тонких цилиндрических оболочек при равномерном осевом сжатии.

Соотношения детерминистических версий модели. В работе [7] получены следующие уточненные аналитические соотношения для критических значений параметра внешнего нагружения в задаче о равномерном осевом сжатии тонкой идеально упругой изотропной круговой цилиндрической оболочки с радиусом  $R$ , длиной  $L$  и толщиной стенки  $h$ , изготовленной из материала с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . В случае безмоментного докритического состояния и задания на краях оболочки граничных условий шарнирного опирания критическое сжимающее осевое усилие  $q_{mn1}^*$  для формы потери устойчивости с числом волн в окружном направлении  $n$  и числом полуволн в продольном направлении  $m$  имеет величину

$$q_{mn1}^* = Eh[(\lambda_m / (\lambda_m^2 + n^2))^4 (\lambda_m^2 + (2 + \nu)n^2) + (12(1 - \nu^2))^{-1} (h/R)^2 ((\lambda_m^2 + n^2)^2 / \lambda_m^2)] = F_1(h, R, L, E, \nu, m, n), \lambda_m = m\pi RL^{-1}. \quad (1)$$

В случае безмоментного докритического состояния и задания на краях оболочки граничных условий жесткого закрепления соответствующее критическое сжимающее осевое усилие  $q_{mn2}^*$  имеет представление

$$q_{mn2}^* = Eh[(2\lambda_m / (4\lambda_m^2 + n^2))^4 (4\lambda_m^2 + (2 + \nu)n^2) + (12(1 - \nu^2))^{-1} (h/R)^2 ((4\lambda_m^2 + 2\lambda_m^2 n^2 + (3/4)n^4) / \lambda_m^2)] = F_2(h, R, L, E, \nu, m, n). \quad (2)$$

Представления (1), (2) являются основой для решения задачи учета разброса значений экзогенных параметров в рассматриваемой модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки в рамках концепции перехода к нечетко-множественному описанию неопределенных исходных параметров и расширения областей определения функциональных соотношений (1), (2) на нечетко-множественные аргументы с применением  $\alpha$ -уровневой формы эвристического принципа обобщения [4 – 6].

Получение нечетко-множественных оценок для эндогенных параметров модели. Для реализации целей исследования вводится предположение об эффективном описании разбросов экзогенных геометрических и физико-механических параметров модели  $h, R, L, E, \nu$  на основе введения их представлений в виде нормальных нечетких трапецеидальных интервалов [8]  $\tilde{h}, \tilde{R}, \tilde{L}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$  с опорными точками

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4), \tilde{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4), \quad (3)$$

$$\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4), \tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4).$$

Нечеткие интервалы  $\tilde{h}, \tilde{R}, \tilde{L}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$  представляются в форме суперпозиций соответствующих множеств  $\alpha$ -уровня

$$\tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [h_\alpha, \bar{h}_\alpha], \tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [R_\alpha, \bar{R}_\alpha], \tilde{L} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [L_\alpha, \bar{L}_\alpha], \quad (4)$$

$$\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [E_\alpha, \bar{E}_\alpha], \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\nu_\alpha, \bar{\nu}_\alpha],$$

где

$$h_\alpha = (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4, \quad (5)$$

$$\underline{R}_\alpha = (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4, \dots,$$

$$\underline{\nu}_\alpha = (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, \bar{\nu}_\alpha = \alpha \nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4.$$

Нечетко-множественные представления эндогенных параметров  $\tilde{q}_{mnj}^*$  критических усилий, получаемые в результате применения модифицированной формы эвристического принципа обобщения с учетом справедливых в областях определения соответствующих функций свойств

$$\begin{aligned} \partial F_j(h, R, L, E, \nu, m, n) / \partial h > 0, \partial F_j(h, R, L, E, \nu, m, n) / \partial R < 0, \\ \partial F_j(h, R, L, E, \nu, m, n) / \partial E > 0, \partial F_j(h, R, L, E, \nu, m, n) / \partial \nu > 0 \quad (j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (6)$$

ИМЕЮТ ВИД:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{mj}^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{mj\alpha}^*, \bar{q}_{mj\alpha}^*]; \\ q_{mj\alpha}^* &= \inf_{L \in [L_\alpha, \bar{L}_\alpha]} \{F_j(\underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, L, \underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, m, n)\}, \\ \bar{q}_{mj\alpha}^* &= \sup_{L \in [L_\alpha, \bar{L}_\alpha]} \{F_j(\bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, L, \bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, m, n)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

**Заключение.** Результатом представленных исследований является разработка нечетко-множественной методики учета факторов разброса экзогенных геометрических и физико-механических параметров в задачах устойчивости тонких цилиндрических оболочек при равномерном осевом сжатии.

#### Список литературы

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
2. Croll J.G.A. Stability in Shells / J.G.A. Croll// Nonlinear Dynamics. – 2006. – Vol. 43. – P. 17 – 28.
3. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
4. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
5. Сторожев В.И. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103 – 111.
6. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
7. Тодчук В.А. Устойчивость цилиндрических оболочек / В.А. Тодчук // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2016. – №. 3 (45). – С. 25 – 28.
8. Grzegorzewski P., Mr'owka E. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P.Grzegorzewski, E. Mr'owka //Fuzzy Sets Syst. –2005. – Vol.153. – P. 115–135.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ С НЕОДНОРОДНЫМИ СВОЙСТВАМИ**

*Недин Р.Д.*, канд. физ.-мат. наук, доц.  
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, РФ  
*rdn90@bk.ru*

Анализ и оценка предварительного напряженного состояния (ПНС) в технических деталях и компонентах может значительно повысить точность прогнозирования отказов элементов конструкций. Оценка уровня остаточных напряжений обычно проводится с помощью различных экспериментальных методов – разрушающих, полуразрушающих и неразрушающих [1]. Ввиду особенностей технологического процесса изготовления современных материалов со сложной структурой, многие из них находятся в неоднородном предварительном напряженно-деформированном состоянии. В связи с этим достаточно большое количество российских и зарубежных работ посвящено моделированию и изучению неоднородных материалов, а также влияния предварительных напряжений на прочностные характеристики материалов. Отметим, что часто при изготовлении для улучшения механических характеристик и свойств конструкций в них специально формируют поля предварительных напряжений.

В настоящей работе описана общая линейаризованная постановка задачи о колебаниях предварительно напряженного упругого тела, приведены слабая и вариационная постановки задачи [2]. На основе этой модели рассмотрен ряд задач об установившихся колебаниях предварительно напряженных тел в рамках плоского состояния.

Проведена оценка представленной модели на основе анализа влияния различных типов предварительно напряженных состояний структур на их динамические характеристики. В частности, была проведена серия экспериментов по сравнению собственных частот и амплитудно-частотных характеристик сплошных круговых цилиндров, балок и стержней, сжатых либо растянутых в осевом направлении, полученных с помощью метода конечных элементов на основе предложенной модели, с опубликованными, экспериментально подтвержденными, значениями собственных частот рассматриваемых тел. При этом проанализировано влияние дополнительных факторов ПНС, в частности, учета начальных деформаций, на динамические характеристики. Также рассмотрены различные типы граничных условий. Исходя из полученных результатов сравнения, сделан вывод об адекватности предложенных моделей.

На основе обобщенной модели ПНС получены постановки ряда задач об установившихся колебаниях предварительно напряженных тел в рамках плоской задачи теории упругости, в частности, для неоднородной тонкой пластины типа Тимошенко-Миндлина при установившихся смешанных планарно-изгибных колебаниях [3]. На основе этих постановок исследован ряд частных задач для функционально-градиентных, слоистых, перфорированных пластин, в том числе с отверстиями и жесткими включениями. Построены алгоритмы численного решения прямых задач с помощью метода конечных элементов, исследовано влияние различных типов однородного и неоднородного предварительного напряженного состояния пластин на их амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты. Приведены результаты вычислительных экспериментов при различных законах изменения материальных модулей, моделирующих сплавы, слоистые композиты и т.д. Для увеличения точности расчетов осуществлялось локальное сгущение конечно-элементной сетки в зонах отверстий и включений. Предложенные модели позволяют задавать произвольный тип предварительного состояния в пластине: как в виде аналитических зависимостей, так и численно.

Исследованы вопросы реконструкции одноосного и плоского начального напряженного состояния в плоских областях с помощью методик акустического зондирования [1]. Рассмотрен ряд соответствующих обратных задач, отличающихся типом имеющейся дополнительной информации об измеренном поле перемещений в режиме акустического зондирования. Предложены различные подходы к реконструкции одноосного и плоского предварительного напряженно-деформированного состояния в плоских областях, на основе итерационно-регуляризационных, проекционных и других подходов. Проанализированы возможности идентификации параметров плоского предварительного напряженного состояния на основе данных измерения частотных характеристик области. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции ПНС различного типа, предложены некоторые рекомендации по проведению наиболее эффективных режимов акустического зондирования.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-71-10045).

### **Список литературы**

1. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. – Ростов-наДону: Изд-во ЮФУ, 2014. – 206 с.
2. Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // Eng. Struct. – 2017. – Vol. 151. – P. 391-405
3. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // Math. Meth. Appl. Sci. – 2018. – Vol. 41. – P. 1600-1618.

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОЛУЧЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ

*Нескородев Р.Н.*, канд. физ.-мат. наук, доц.  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*nromn72@gmail.com*

**Введение.** В задачах изгиба изотропных и трансверсально-изотропных плит система дифференциальных уравнений разбивается на два независимых уравнения: бигармоническое и метагармоническое [1, 2]. Это позволяет ставить краевые задачи с тремя граничными условиями.

Для ортотропных плит разрешающее уравнение характерно тем, что оно не разделяется на два независимых уравнения четвертого и второго порядков [3]. В работе [4] при помощи метода малого параметра предложен способ деления уравнения шестого порядка на два уравнения четвертого и второго порядков.

В данной работе для получения разрешающих уравнений в представлениях для перемещений учтены слагаемые более высокого порядка, что позволило получить систему, состоящую из дифференциальных уравнений четвертого и второго порядков.

**Основные соотношения уточненной теории изгиба ортотропных плит и получение разрешающей системы.** Рассматривается ортотропная плита, имеющая толщину  $2h$  и отнесенная к декартовой системе координат  $Oxyz$ . Оси  $Ox$  и  $Oy$  расположены в срединной плоскости плиты, а  $Oz$  – нормальна к этой плоскости. Представление для перемещений выбираются в виде отрезков рядов по функциям толщинной координаты  $p_i(z)$

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 \partial_1 \varphi_1(x, y) + p_3 \partial_1 \varphi_3(x, y), & u_2 &= p_1 \partial_2 \varphi_2(x, y) + p_3 \partial_2 \varphi_4(x, y), \\ u_3 &= w_0(x, y) + p_2 w_2(x, y) + p_4 w_4(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Из уравнений равновесия следует, что если в разложении для напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_6$  ограничиться слагаемыми, имеющими порядок малости  $h^k$ , то в напряжениях  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  необходимо оставить слагаемые, имеющие порядок  $h^{k+1}$ , а для напряжений  $\sigma_3$  нужно учитывать слагаемые, имеющие порядок  $h^{k+2}$ . Уравнения закона Гука с учетом отмеченных выше фактов в первом приближении дают выражения для напряжений в форме

$$\sigma_1 = p_1 s_{11} = p_1 (A_{11} \partial_1^2 \varphi_1 + A_{12} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{13} w_2),$$

$$\sigma_2 = p_1 s_{21} = p_1 \left( A_{21} \partial_1^2 \varphi_1 + A_{22} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{23} w_2 \right), \quad (2)$$

$$\sigma_6 = p_1 s_{61} = p_1 A_{66} \partial_1 \partial_2 (\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$\sigma_4^* = A_{44} \partial_2 \left[ w_0 + p_0 \varphi_2 + p_2 (w_2 + \varphi_4) \right],$$

$$\sigma_5^* = A_{55} \partial_1 \left[ w_0 + p_0 \varphi_1 + p_2 (w_2 + \varphi_3) \right], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^* = p_1 s_{31} + p_3 s_{33} = p_1 \left( A_{31} \partial_1^2 \varphi_1 + A_{32} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{33} w_2 \right) + \\ + p_3 \left( A_{31} \partial_1^2 \varphi_3 + A_{32} \partial_2^2 \varphi_4 + A_{33} w_4 \right). \end{aligned}$$

Здесь  $p_1(z)$  нечетная то переменной  $z$  функция, характеризующая распределение усилий по толщине плиты и приняты обозначения

$$p_0 = p'_1, \quad p_i(z) = \int p_{i-1}(z) dz \quad (i > 1).$$

Выражения для напряжений  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  можно также найти удовлетворяя уравнениям равновесия

$$\sigma_4 = P_2 S_{42}, \quad \sigma_5 = P_2 S_{52}, \quad \sigma_3 = P_3 S_{33}; \quad (4)$$

Здесь принято

$$P_2 = p_2(h) - p_2(z), \quad P_3 = p_3(z) - p_2(h)z, \quad (5)$$

$$S_{42} = \partial_2 \left( c_{11} \partial_1^2 \varphi_1 + L_{22} \varphi_2 + A_{23} w_2 \right), \quad L_{22} = A_{66} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2,$$

$$S_{52} = \partial_1 \left( L_{11} \varphi_1 + c_{11} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{13} w_2 \right), \quad L_{11} = A_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2,$$

$$S_{33} = \partial_1 S_{52} + \partial_2 S_{42} = R_2 \partial_1^2 \varphi_1 + G_2 \partial_2^2 \varphi_2 + D_2 w_2, \quad D_2 = A_{13} \partial_1^2 + A_{23} \partial_2^2,$$

$$R_2 = A_{11} \partial_1^2 + D_{12} \partial_2^2, \quad G_2 = D_{12} \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2, \quad c_{11} = A_{12} + A_{66}, \quad D_{12} = c_{11} + A_{66}.$$

Дифференциальные уравнения, описывающие изгиб плит получаются из следующих предположений:

1. Поперечное нормальное напряжение  $\sigma_3$  в соотношениях (4) равно нулю, когда  $z = \pm h$ . Поскольку  $P_3(h) \neq 0$ , следует положить  $S_{33} = 0$ .

2. Поперечные усилия и момент, полученные интегрированием правых частей соотношений (3) и (4) равны.

Предположения 2 приводят к уравнениям:

$$A_{55} \left[ w_0 + k_0 \varphi_1 + k_2 (w_2 + \varphi_3) \right] - K_2 \left( L_{11} \varphi_1 + c_{11} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{13} w_2 \right) = 0,$$

$$A_{44} \left[ w_0 + k_0 \varphi_2 + k_2 (w_2 + \varphi_4) \right] - K_2 \left( c_{11} \partial_1^2 \varphi_1 + L_{22} \varphi_2 + A_{23} w_2 \right) = 0; \quad (6)$$

$$k_1 s_{31} + k_3 s_{33} - K_3 S_{33} = 0. \quad (7)$$

Здесь введены обозначения  $k_{2i} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_{2i} dz$ ,  $k_{2i+1} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_{2i+1} z dz$  ( $i = 0, 1$ ),

$$K_2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h P_2 dz, \quad K_3 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h P_3 z dz.$$

Для получения первого уравнения полагается  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ,

$$w_2 = -\frac{1}{A_{33}} D_2 \varphi, \quad w_4 = -\frac{1}{A_{33}} \left( A_{31} \partial_1^2 \varphi_3 + A_{32} \partial_2^2 \varphi_4 \right),$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{k_{22} A_{44} A_{55}} \left[ A_{44} L_{11} - A_{55} c_{11} \partial_1^2 + \frac{A_{55} A_{23}}{A_{33}} D_2 \right] \varphi,$$

$$\varphi_4 = -\frac{1}{k_{22} A_{44} A_{55}} \left[ A_{55} L_{22} - A_{44} c_{11} \partial_2^2 + \frac{A_{44} A_{13}}{A_{33}} \right] \varphi.$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$\left[ B_{11} \partial_1^4 + 2R_{12} \partial_1^2 \partial_2^2 + B_{22} \partial_2^4 \right] \varphi = 0, \quad (8)$$

где  $B_{11} = A_{11} - A_{13}^2 / A_{33}$ ,  $B_{22} = A_{22} - A_{23}^2 / A_{33}$ ,  $R_{12} = B_{12} + 2A_{66}$ ,  
 $B_{12} = A_{12} - A_{13} A_{23} / A_{33}$ .

Полагая  $\varphi_1 = \alpha_1 \psi$ ,  $\varphi_2 = \alpha_2 \psi$ ,  $w_2 = (\beta_1 \partial_1^2 + \beta_2 \partial_2^2) \psi$ , можно получить второе уравнение системы

$$\left[ 1 - \varepsilon^2 (\partial_2^2 + q^2 \partial_1^2) \right] \psi = 0, \quad \varepsilon^2 = \frac{K_2}{k_0} \frac{A_{66}}{A_{55}}, \quad q^2 = \frac{A_{55}}{A_{44}}. \quad (9)$$

Представления для напряжений (2)–(3) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям плоских гранях плиты. Функции  $\varphi$  и  $\psi$  в совокупности удовлетворяют системе уравнений шестого порядка. Это позволяет удовлетворить трем граничным условиям на боковой поверхности плиты.

### Список литературы

1. Васильев В.В. Классическая теория пластин - история и современный анализ // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46-58.
2. Шевченко В.П., Нескородев Р.Н. Об одном варианте уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С.50-57.
3. Reissner E. On the theory of transverse bending of elastic plates / E. Reissner // Intern. J. Solids Struct. – 1976. – V. 12, № 8. – P. 545-554.
4. Нескородев Р.Н. Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикл. механики. – 2017. – № 3-4 (60-61). – С. 60-68.



## ОБОСНОВАНИЕ ЭКСПРЕСС-МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД И СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Стариков Г.П.*<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф.

*Мельник Т.Н.*<sup>2</sup>, канд. физ.-мат. наук, *Нескреба Д.А.*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ГУ «Институт физики горных процессов», г. Донецк, ДНР

<sup>2</sup>ГУ «Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина», г. Донецк, ДНР  
*perviy.den@mail.ru*

Одной из важнейших характеристик любого твердого тела является прочность. Имеется большое число методов определения физических параметров, характеризующих прочность материала в конкретных условиях эксплуатации объекта. Однако все данные методы основаны на исследовании свойств макроскопического сплошного объекта.

Представляется целесообразной разработка метода определения прочности образцов диспергированных горных пород, т.е. анализ прочности измельченных образцов, разделенных на фракции с различающимися размерами частиц. В данном случае имеется возможность значительно сократить длительность подготовительного этапа измерений и избежать искажений их результатов вследствие локальных отклонений в структурном и химическом составе породы.

Суть экспериментов, положенных в основу экспресс-метода определения прочности, состоит в следующем. Из диспергированной породы, образовавшейся после разрушения образца, отбираются фракции разных размеров. В данной работе были отобраны три фракции образца глинистого сланца с диаметром гранул 0,4–0,5 мм, 2–2,5 мм и 5 мм, навеской по 35 г. Фракции поочередно засыпаются в контейнер высокого давления, который устанавливается на тот же пресс с регистрирующей аппаратурой. Результаты измерений дают возможность построить графики нагрузка-относительная деформация для каждой из фракций (Рис. 1а).

В первую очередь, на начальном этапе нагружения наблюдается резкое уменьшение объема измельченной породы. Очевидно, что данный этап соответствует уплотнению породы и вытеснению пустот. Кривые нагружения практически совпадают для всех фракций. Далее начинается механическое воздействие на собственно гранулы. Здесь наблюдается различие между кривыми нагружения: в случае фракции с меньшим размером гранул для достижения одной и той же степени деформации требуется приложить большее усилие.

**Результаты и обсуждение.** Анализ результатов проводился на основе дискретно-контактной теории прессования порошков [1, 2], суть

которой состоит в анализе условий контактного взаимодействия и деформаций отдельных частиц. О поведении прессуемой навески как единого объекта судят на основании гипотезы об идентичности условий деформирования отдельной частицы и брикета в целом [3]. Упругая деформация отдельных частиц была описана на основе решения широко известной контактной задачи Герца [4], согласно которой наблюдаемое на опыте соотношение «усилие-деформация» описывается законом  $\sigma \sim \varepsilon^{3/2}$ .

В хрупких материалах (к которым относится большее число горных пород) величина предела текучести (где деформация увеличивается без значительного увеличения нагрузки) близка к пределу прочности. Поэтому хрупкие материалы испытывают малую пластическую деформацию, быстро переходя при росте напряжений к стадии разрушения.

В рассматриваемом случае одноосного сжатия гранул горной породы, следует учитывать, что разрушение отдельных гранул (пусть даже эти гранулы одного размера) может происходить в разные моменты времени, под разным нагружением. В качестве объяснения приведем критерий разрушения Гриффитса в его простейшей форме  $\sigma_{cr} \sqrt{a} = const$ , где  $\sigma_{cr}$  – напряжение разрушения, а  $a$  – длина трещины (или иного дефекта). В реальных горных породах размер трещин и пор, по которым может произойти разрушение, варьируются в широком диапазоне. Соответственно, поставить в прямое соответствие экспериментальным кривым аппроксимацию типа  $\sigma \sim \varepsilon^{3/2}$  ожидаемо оказывается возможным только в ограниченном диапазоне деформаций, до  $\varepsilon \sim 0.12 - 0.15$ . Далее все больший вклад в соотношение «усилие-деформация» вносится разрушением и уплотнением разрушенных фрагментов гранул.

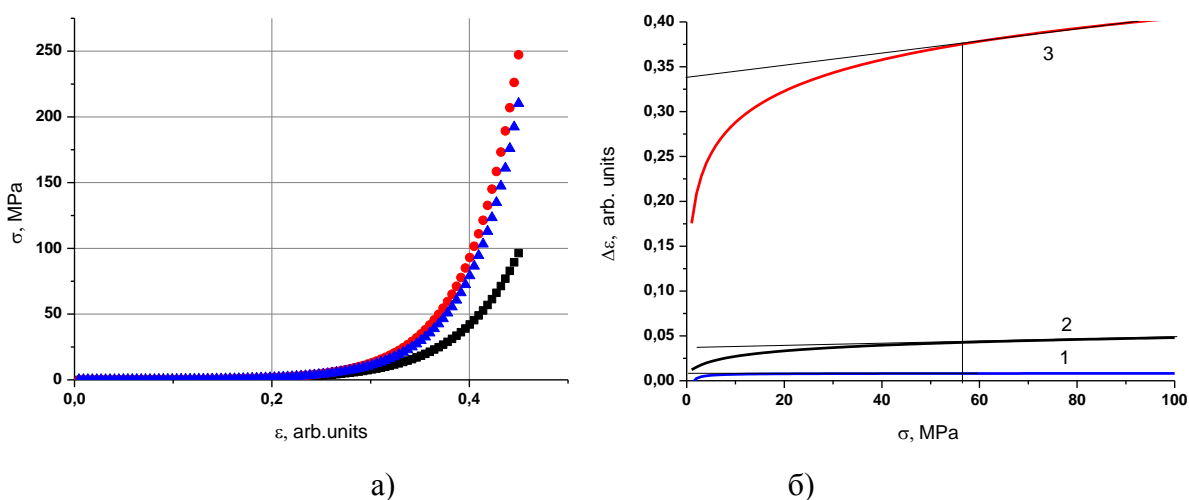


Рис. 1. Соотношение усилия нагрузки и относительной деформации для фракций разного размера: а) экспериментальные данные для фракций размером 0,4–0,5 мм (■), 2–2,5 мм (▲), 5 мм (●); б) разность деформации навесок гранул разных размеров при одной и той же нагрузке: 1) 2.5 и 5 мм, 2) 2.5 и 0.5 мм; 3) 5 и 0.5 мм

Поэтому представляется целесообразным исключить вклад в зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  пластической деформации (пусть и незначительной) и разрушения частиц породы. Для этого можно найти разность экспериментальных кривых, измеренных для частиц разных диаметров, полагая, что в силу широкого разброса дефектов по размерам и случайности их распределения по объему частиц и по отдельным частицам, данный вклад в среднем будет одинаков для навесок гранул разных размеров, взятых из одного и того же образца породы.

На рис.1б представлена разность деформации навесок гранул разных размеров при одной и той же нагрузке. Видно, что в определенный момент разница в деформации достигает постоянного значения либо начинает нарастать линейно и более медленно. Имеются основания полагать, что в этот момент полностью закачивается стадия упругого деформирования гранул как отдельных объектов, где приложенное усилие зависит от размера гранул. Произошло разрушение гранул по линиям содержащихся в них пор и трещин и максимальное уплотнение навески. Поэтому именно данный уровень нагружения может быть интерпретирован как предел прочности данного материала.

**Заключение.** Как видно на рис.1, начало заключительной стадии деформации при любой разнице в размерах гранул происходит на одном и том же уровне нагружения. Для данных образцов (глинистый сланец) он составляет 58 МПа. Иными словами, при любой разности размеров гранул оцениваемый предел прочности не изменяется. Единственное отличие состоит в том, что при близких размерах гранул (рис.1б-1, размер гранул отличается в 2 раза, а не в 5 раз (2) или в 10 (3)) график разности деформаций практически выходит на горизонтальную прямую насыщения, что облегчает нахождение  $\sigma_{cr}$ .

#### Список литературы

1. Штерн М.Б. Феноменологические теории прессования порошков / М.Б. Штерн, Г.Г.Сердюк, Л.А. Максименко и др. – Киев: Наукова думка. – 1982. – 140 с.
2. Бальшин М.Ю. Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна / М.Ю. Бальшин. – М.: Металлургия. – 1972. – 336 с.
3. Самодурова М.Н. Основные уравнения континуальной теории порошков с особыми свойствами / М.Н. Самодурова, Л.А. Барков, В.А. Иванов, Б.А. Яров // Вестник ЮрГУ, серия «Металлургия». – 2013. – Т. 13, №2. – С. 65-68.
4. Ландау Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука. – 1965. – 204 с.

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН СДВИГА В СОСТАВНОМ ВОЛНОВОДЕ ИЗ ИЗОТРОПНОГО И ОРТОТРОПНОГО ПОЛУСЛОЕВ

*Пачева М.Н.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*marinapacheva@mail.ru*

**Введение.** Исследование специфических эффектов и закономерностей в процессах прохождения стационарных волн деформаций по кусочно-однородным составным в продольном направлении волноводам является актуальной неисследованной по многим аспектам фундаментальной задачей волновой механики деформируемого твердого тела, имеющей также значительный прикладной интерес в механике сооружений и машиностроительных конструкций, в акустоэлектронике, сейсмодинамике и технологиях ультразвуковой волновой диагностики [1, 2]. Задачи этого типа ранее исследовались для изотропных составных волноводов [1 – 3], и в значительной мере открытыми остаются случаи волноводов, составленных из разнотипных по свойствам механической симметрии материалов. В этой связи, целью настоящей работы является решение относящейся к указанной предметной области задачи, заключающейся в параметрическом анализе соотношений между величинами суммарных по сечению волновода средних за период потоков мощности в полях падающей, отраженной и преломленной нормальных сдвиговых волн SH типа в составном волноводе из изотропного и трансверсально-изотропного полуслоев со свободными плоскими гранями.

**Соотношения для параметрического исследования.** В исследуемой модели рассматривается составной кусочно-однородный волновод, занимающий в прямоугольных координатах  $Ox_1x_2x_3$  область

$$V = V_1 \cup V_2 = \{x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \cup \{x_1 > 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}. \quad (1)$$

Составляющая  $V_1$  волновода представляет собой изотропный полуслой из материала с механическим параметром Ламе  $\mu$  и плотностью  $\rho_1$ ; полуслой  $V_2$  составлен из ортотропного материала с модулями упругости  $c_{44}, c_{66}$  и плотностью  $\rho_1$ ; грани полуслоев  $x_3 = \pm h$  свободны от напряжений; в плоскости сопряжения между полуслоями имеется идеальный механический контакт. Полагается, что из глубины  $V_1$  вдоль положительного координатного направления  $Ox_1$  на поверхность  $\Gamma = \{x_1 = 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}$  контакта полуслоев падает

нормальная SH волна с амплитудой  $u$  круговой частотой  $\omega$  из моды  $n$  соответствующего дисперсионного спектра, и ее волновое число  $k_n^{(1)}$  соответственно описывается выражением  $k_n^{(1)} = ((\rho_1/\mu)\omega^2 - (n\pi/h)^2)^{1/2}$ . При взаимодействии падающей волны с поверхностью контакта полуслоев в  $V_1$  формируется поле принадлежащих моде  $n$  отраженных волн, а в  $V_2$  – поле принадлежащих моде  $n$  преломленных волн с волновым числом  $k_n^{(2)} = ((\rho_2\omega^2 - c_{66}(n\pi/h)^2)/c_{66})^{1/2}$ . Амплитуды отраженной  $u_{1n}$  и преломленной  $u_{2n}$  волн, получаемые на основе решения рассматриваемой краевой задачи, соответственно имеют вид

$$u_{1n} = u(\beta_n - \alpha_n)/(\beta_n + \alpha_n), \quad u_{2n} = 2u\beta_n/(\beta_n + \alpha_n),$$

$$\alpha_n = c_{66}k_n^{(2)}, \quad \beta_n = \mu k_n^{(1)}, \quad (2)$$

а парциальные величины средних за период суммарных по сечению потоков мощности в отраженных  $P_{1n}$  и преломленных  $P_{2n}$  волнах описываются представлениями

$$P_{1n} = -\mu k_n^{(1)} ((\beta_n - \alpha_n)/(\beta_n + \alpha_n))^2 u^2, \quad P_{2n} = 4c_{66}k_n^{(2)} (\beta_n/(\beta_n + \alpha_n))^2 u^2. \quad (3)$$

Полученные представления, с учетом выражения для суммарного по сечению потока мощности  $P_0$  в падающей волн  $P_0 = \mu k_n^{(1)} u^2$ , удовлетворяют условию энергетического баланса  $P_{2n} - P_{1n} = P_0$ .

**Результаты численно-аналитических исследований параметрических зависимостей для потоков мощности.** В высокочастотном  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\omega \gg n$  коротковолновом диапазоне для относительных величин  $P_{jn}/P_0$  в долях потока падающей волны могут быть получены аналитические оценки, базирующиеся на асимптотических представлениях

$$k_n^{(1)} \approx (\rho_1/\mu)^{1/2} \omega, \quad k_n^{(2)} \approx (\rho_2/c_{66})^{1/2} \omega,$$

$$\alpha_n \approx (\rho_2 c_{66})^{1/2} \omega, \quad \beta_n \approx (\rho_1 \mu)^{1/2} \omega, \quad (4)$$

откуда следует

$$P_{1n} \approx -(\rho_1 \mu)^{1/2} ((\rho_1 \mu)^{1/2} - (\rho_2 c_{66})^{1/2}) / ((\rho_1 \mu)^{1/2} + (\rho_2 c_{66})^{1/2}), \quad (5)$$

$$P_{2n} \approx 2(\rho_2 c_{66}) / ((\rho_1 \mu)^{1/2} + (\rho_2 c_{66})^{1/2}),$$

причем полученные асимптотические представления также удовлетворяют условию энергетического баланса  $P_{2n}/P_0 - P_{1n}/P_0 = 1$ . Как видно, в асимптотической высокочастотной коротковолновой версии относительные величины  $\tilde{P}_{jn} = P_{jn}/P_0$  выражаются через импеданс сдвиговой волны в материале полуслоя  $V_1$  и импеданс сдвиговой горизонтально поляризованной волны в материале полуслоя  $V_2$ .

Результаты численного исследования некоторых свойств определяемых соотношениями (3) параметрических зависимостей

$P_{jn}(\omega, \rho_1, \rho_2, \mu, c_{44}, c_{66}, h, n)$  в частотном диапазоне  $\omega \in [1.7 \cdot 10^6 \text{ [рад/с]}, 5.0 \cdot 10^6 \text{ [рад/с]}]$  проведены для случая задания параметров

$$n = 1, \rho_1 = 4\rho_*, \rho_2 = 2.5\rho_*, \mu = 1.5c_*, c_{44} = 6c_*, h = 0.01l_*, \quad (6)$$

$$\rho_* = 10^3 \text{ [кг/м}^3\text{]}, c_* = 10^{10} \text{ [Па]}, l_* = 1 \text{ [м]},$$

и варьирования параметра  $\vartheta = c_{44} / c_{66}$  со значениями  $\vartheta = 2, \vartheta = 6, \vartheta = 12, \vartheta = 60$  с целью анализа характера влияния относительного количественного показателя поперечной анизотропии материала компоненты  $V_2$  на анализируемые энергетические характеристики. Частотные зависимости для  $|\tilde{P}_{jn}|$  соответственно описываются линиями с номером  $j$  на рисунках 1 – 4 при вышеуказанных вариантах задания  $c_{66}$ . Варианты варьирования расчетных параметров отражают фактор роста относительной степени толщиной анизотропии для материала трансверсально-изотропного полуслоя  $V_2$  при уменьшении его сдвиговой жесткости в горизонтальной плоскости.

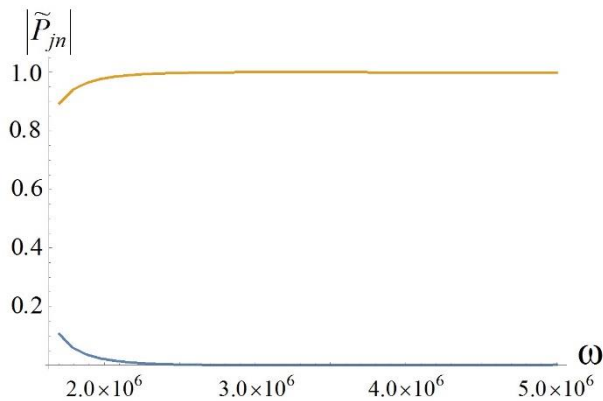


Рис. 1. Распределения  $|\tilde{P}_{jn}|$  при  $\vartheta = 2$ .

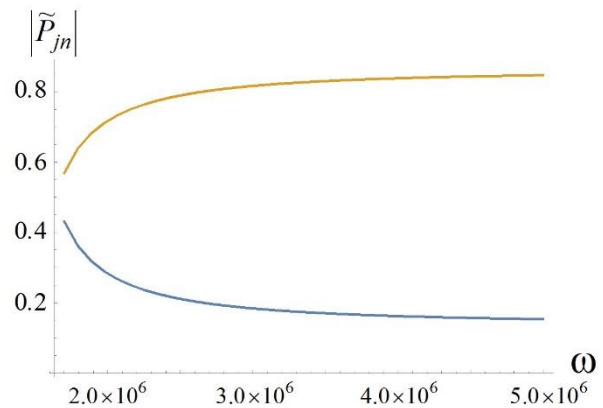


Рис. 2. Распределения  $|\tilde{P}_{jn}|$  при  $\vartheta = 6$ .

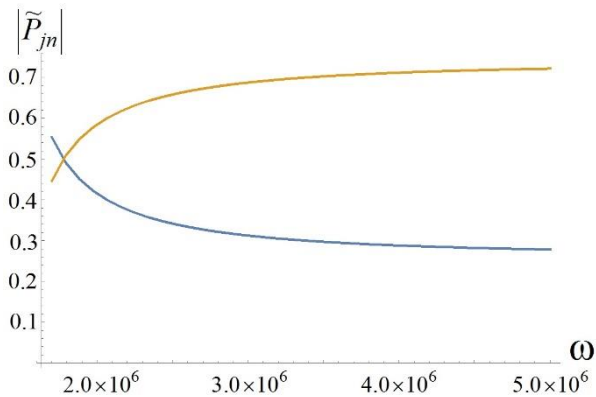


Рис. 3. Распределения  $|\tilde{P}_{jn}|$  при  $\vartheta = 12$ .

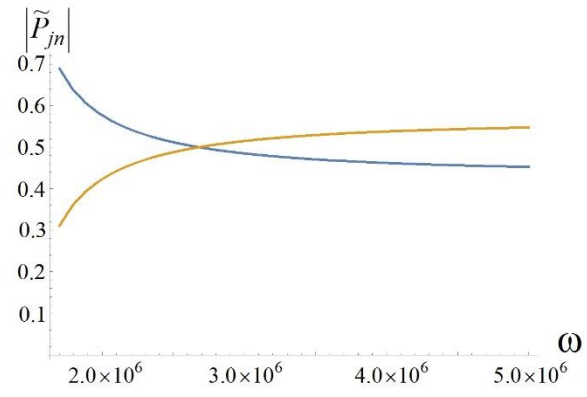


Рис. 4. Распределения  $|\tilde{P}_{jn}|$  при  $\vartheta = 60$ .

Так, если для случаев  $\vartheta = 2$  и  $\vartheta = 6$  в рассматриваемом частотном диапазоне существенно преобладают энергетические потоки в

преломленных волнах, то по мере увеличения показателя  $\vartheta$  исследуемый частотный диапазон подразделяется на «низкочастотный» отрезок преобладания потока в отраженной волне и диапазон высоких частот, в котором восстанавливается свойство преобладания потока в преломленной волне и реализуется выход соотношения потоков на асимптотические значения.

**Заключение.** В итоге проведенных исследований реализован анализ влияния фактора меры механической анизотропии на соотношения между потоками мощности в падающей, отраженной и преломленной нормальных волнах SH типа в составном волноводе из контактирующих изотропного и трансверсально-изотропного полуслоев со свободными плоскими гранями.

#### Список литературы

1. Гетман И.П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1993. – 144 с.
2. Силин Р.А. Периодические волноводы / Р.А. Силин. – М.: Фазис, 2002. – 436 с.
3. Городецкая Н.С. Отражения-прохождения волн Рэлея – Лэмба на вертикальной границе в составном волноводе при различных импедансах контактирующих сред / Н.С. Городецкая // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 102–110.

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3

### НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ МЕТОДИКА УЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

*Сторожев С.В.*, канд. экон. наук, доц.,

*Номбре С.Б.*, канд. физ.-мат. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,

г. Макеевка, ДНР

*s.storozhev@donnu.ru*

**Введение.** Дальнейшее развитие методов теоретического анализа упругих колебаний предварительно напряженных пластин относится к ряду современных актуальных направлений в математическом моделировании деформационных процессов, что обусловлено все более широким распространением подобных ответственных элементов в конструкциях машин, приборов и сооружений [1]. При этом одним из важных аспектов в таких исследованиях является учет разброса экзогенных параметров конструкций, который, принимая во внимание характер доступной информации о факторах неопределенности в

рассматриваемых моделях, более корректно осуществлять на основе применения нечетко-множественных подходов [2 – 3], в сравнении с методами вероятностно-стохастического анализа [4], предполагающими более строгие требования к исходным данным. В этом контексте целью настоящей работы является разработка методики учета неопределенности экзогенных параметров в моделях колебаний предварительно напряженных прямоугольных пластин на основе нечетко-интервальной [5] интерпретации параметров с разбросами и перехода к нечетко-интервальным аргументам в аналитических представлениях характеристик исследуемых колебаний на базе применения модифицированной формы эвристического принципа обобщения [6].

Эндогенные параметры детерминистических версий моделей. В рамках выполненных в работах [7, 8] исследований получен цикл соотношений для приведенных частотных характеристик собственных поперечных колебаний предварительно-напряженных изотропных прямоугольных пластин толщины  $2h$ , занимающих в координатном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  область  $V = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2, -h \leq x_3 \leq h\}$ , при различных типах краевых условий на боковых граничных поверхностях. Пластины изготовлены из изотропного материала с параметрами Ламе  $\lambda, \mu$  и плотностью  $\rho$ , а их начальное однородное деформированное состояние описывается заданием функций упругих перемещений вида  $u_1 = a_0x_1, u_2 = a_0x_2, u_3 = c_2a_0$ .

Для шарнирно закрепленной по контуру пластины рассматриваемого вида частоты собственных поперечных колебаний  $\gamma_{jmn}^{(1)}$  с показателями изменяемости формы  $(m, n)$  в срединной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{jmn}^{(1)} &= h[-\delta_{2mn1} + (-1)^{j+1}(\delta_{2mn1}^2 - 4\delta_{1mm1}\delta_{3mn1})][2\delta_{1mm1}]^{-1} = \\ &= F_{1j}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) \quad (j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (1)$$

в которых

$$\begin{aligned} \delta_{1mm1} &= \rho_1[3\lambda + 7\mu + \mu(a_0 + 6c_2) + 3\lambda c_2] \cdot [\mu(\lambda + 2\mu)(1 + a_0)(1 + c_2)]^{-1}, \\ \delta_{2mn1} &= -(4\pi^2[(3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu) + 2(c_2 - a_0)/(1 + a_0)]\zeta_{mn} + 1), \\ \delta_{3mn1} &= 8\pi^4\zeta_{mn}^2\rho_1^{-1}(1 + c_2)\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu), \quad \rho_1 = \rho((1 + a_0^2)(1 + c_2))^{-1}, \\ \zeta_{mn} &= (n/l_1)^2 + (m/l_2)^2. \end{aligned}$$

Для пластины с жестко закрепленным контуром низшие приведенные резонансные частоты поперечных колебаний имеют представления вида

$$\begin{aligned} \gamma_{jmn}^{(2)} &= h[-\delta_{2mn2} + (-1)^{j+1}(\delta_{2mn2}^2 - 4\delta_{1mn2}\delta_{3mn2})][2\delta_{1mn2}]^{-1} = \\ &= F_{2j}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) \quad (j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (2)$$

в которых



$$\delta_{1mn2} = \eta_2^4 (1 - \pi/4) \rho_1 [3\lambda + 7\mu + \mu(a_0 + 6c_2) + 3\lambda c_2] \cdot [\mu(\lambda + 2\mu)(1 + a_0)(1 + c_2)]^{-1},$$

$$\delta_{2mn2} = -\eta_2^2 (4[(3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu) + 2(c_2 - a_0)/(1 + a_0)](2 - \pi/4 - 2/\pi)(1 + \eta_1^2)/2 + (l_1/\pi)^2 (1 - \pi/4)),$$

$$\delta_{3mn2} = 16\zeta_{mn}^2 \rho_1^{-1} (1 + c_2) \mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)(1 + \eta_1^2 (1 - 2/\pi)), \eta_1 = l_1/l_2.$$

Для пластины, у которой два противоположных края  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$  свободны, а два других жестко закреплены

$$\gamma_{jmn}^{(3)} = h[-\delta_{2mn3} + (-1)^{j+1} (\delta_{2mn3}^2 - 4\delta_{1mn3}\delta_{3mn3})][2\delta_{1mn3}]^{-1} = \quad (3)$$

$$= F_{3j}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) (j = \overline{1, 2}),$$

где

$$\delta_{1mn3} = \eta_2^4 (1 - 3\pi/16) \rho_1 [3\lambda + 7\mu + \mu(a_0 + 6c_2) + 3\lambda c_2] \cdot [\mu(\lambda + 2\mu)(1 + a_0)(1 + c_2)]^{-1},$$

$$\delta_{2mn2} = -\eta_2^2 (4[(3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu) + 2(c_2 - a_0)/(1 + a_0)]((1 - 3\pi/16)(1 + 2\eta_1^2)/2 + (1 - 3/2\pi))),$$

$$\delta_{3mn2} = 8\rho_1^{-1} (1 + c_2) \mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)(2 + \eta_1^2 (2 - 3\pi/16 - 3/2\pi) - 3\pi/16).$$

Нечетко-множественные описания неопределенных приведенных резонансных частот. Следующая фаза теоретического алгоритма получения нечетко-множественных оценок значений приведенных резонансных частот поперечных колебаний предварительно напряженных пластин предполагает введение нечетко-интервальных представлений [5] для обладающих разбросами геометрических и физико-механических параметров модели  $h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \tilde{l}_j = (l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}, l_{j4}), \tilde{a}_0 = (a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}), \quad (4)$$

$$\tilde{c}_2 = (c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}), \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4),$$

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4),$$

а также их запись в форме суперпозиций альфа-срезов

$$\tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \tilde{l}_j = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}], \tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}],$$

$$\tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}], \tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}],$$

$$\tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}],$$

где

$$\underline{h}_\alpha = (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4, \underline{l}_{j\alpha} = (1 - \alpha)l_{j1} + \alpha l_{j2}, \quad (5)$$

$$\bar{l}_{j\alpha} = \alpha l_{j3} + (1 - \alpha)l_{j4}, \dots, \underline{\rho}_\alpha = (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha \rho_2, \bar{\rho}_\alpha = \alpha \rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4.$$

С учетом справедливых во всех областях определения свойств производных

$$\partial F_{pj}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) / \partial h \geq 0, \partial F_{pj}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) / \partial \rho \leq 0, \quad (6)$$

искомые оценки для неопределенных резонансных частот принимают вид

$$\tilde{\gamma}_{jmn}^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)}, \bar{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)}]; \quad (7)$$

$$\underline{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)} = \inf_{\substack{l_j \in [l_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}] \\ a_0 \in [a_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}] \\ c_2 \in [c_{2j\alpha}, \bar{c}_{2\alpha}] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} \{F_{pj}(\underline{h}_\alpha, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \bar{\rho}_\alpha, m, n),$$

$$\bar{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)} = \sup_{\substack{l_j \in [l_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}] \\ a_0 \in [a_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}] \\ c_2 \in [c_{2j\alpha}, \bar{c}_{2\alpha}] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} \{F_{pj}(\bar{h}_\alpha, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \underline{\rho}_\alpha, m, n).$$

**Заключение.** Разработана нечетко-множественная методика оценки влияния факторов неопределенности в виде разбросов экспериментальных и технологических значений исходных геометрических и физико-механических параметров в задачах о поперечных собственных колебаниях предварительно напряженных прямоугольных изотропных пластин.

### Список литературы

1. Егорычев О.О. Колебания плоских элементов конструкций / О.О. Егорычев – М.: АСВ, 2005. – 240 с.
2. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M.Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
3. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
4. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
5. Grzegorzewski P. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E.Mr'owka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
6. Прийменко С.А. Методика анализа факторов неопределенности в модели резонансных колебаний трехслойных композитных цилиндрических панелей / С.А.Прийменко, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван, Чан Ба Ле Хоанг // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2019. – №3-4. – С. 88–94 .
7. Хрупов А.А. Вывод частотного уравнения поперечных колебаний предварительно напряжённой пластины / А.А. Хрупов // Промышленное и гражданское строительство. – 2009. – № 5. – С. 76–77.
8. Хрупов А.А. Вывод частотного уравнения собственных поперечных колебаний предварительно напряжённой пластины, жёстко закреплённой по контуру // Вестник МГСУ. – 2009. – № 2. – С. 54–57.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ТРЕЩИНОПОДОБНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

*Юров В.О.*

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, РФ  
vyurov@sfnedu.ru

Рассмотрена в осесимметричной постановке задача распространения волн в упругом неоднородном вдоль радиальной координаты цилиндрическом волноводе при наличии кольцевых или радиальных трещин [1] под действием поверхностной нагрузки. Для построения эталонного поля перемещений на внешней границе неоднородного волновода без дефектов применяется интегральное преобразование Фурье и метод пристрелки для решения возникающих краевых задач в пространстве трансформант. Для выполнения обращения применяется как прямое численное интегрирование по контуру, так и теория вычетов, нахождение вычетов заданных численно функций. При рассмотрении задач с трещинами введены функции скачков радиальных и продольных перемещений. В пространстве трансформант решаются четыре вспомогательные задачи Коши и определяются передаточные функции. При удовлетворении условиям равенства нулю напряжений на берегах трещин получены системы интегральных уравнений относительно скачков перемещений. Для решения систем гиперсингулярных интегральных уравнений применен метод граничных элементов [2]. Для нахождения коэффициентов алгебраической системы относительно узловых значений функций раскрытия использованы обобщенные значения расходящихся интегралов. Предельное поведение передаточных функций определяется асимптотически, а интегралы считаются с помощью квадратурных формул высокого порядка точности. Построены функции раскрытия и волновое поле на поверхности волновода.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90017.

Автор выражает благодарность научному руководителю Ватульяну А.О. за внимание к работе.

### Список литературы

1. Ватульян А. О. Об определении конфигурации трещины в анизотропной упругой среде / А.О. Ватульян, И.В. Баранов // Акустический журнал. – 2005. – Т. 51, № 4. – С. 456–462.
2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 253 с.

# *Информационные системы управления*

УДК 338.28.001.76

## **ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ИННОВАЦИОННО-АКТИВНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ**

*Балдынюк А.И.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*h.baldyniuk@donnu.ru*

**Введение.** На сегодняшний день применение информационно-аналитической системы на любом предприятии, в том числе инновационно-активном (ИАП) становится обязательным условием его эффективного функционирования. Информационная поддержка инновационной деятельности является сложной задачей, решение которой не может осуществляться за счет полной автоматизации процесса принятия управленческих решений, однако может поддерживаться информационно-аналитической системой. Это обуславливает необходимость создания информационно-аналитической системы ИАП.

**Целью исследования** является разработка рекомендаций по созданию информационно-аналитической системы ИАП.

**Основная часть.** Информационно-аналитическая система представляет собой систему, которая направлена на накопление знаний и систематизированное предоставление данных для принятия управленческих решений на основе комплексного анализа информации.

Информационно-аналитическая система ИАП должна быть ориентирована на такие направления как [1; 2]:

- определение актуальных направлений поиска, разработки и внедрения инновационных процессов и продуктов в деятельность ИАП;
- получение актуальной информации об инновациях на рынке;
- определение экономических, научно-технических, экологических и социальных показателей составляющих развития страны;
- нормативно-правовое обеспечение деятельности ИАП;
- оперативное определение проблем и снижение негативного влияния внешней среды;
- извлечение необходимой и качественной информации об инновационной, производственной и организационной деятельности;
- получение информации об основных бизнес-процессов ИАП и их реорганизацию при необходимости;
- своевременность и оперативность предоставления необходимой информации;

- снижение времени обработки большого объема информации;
- эффективное стратегическое планирование деятельности ИАП;
- выработка результативных управленческих решений;
- увеличение прибыли ИАП и его устойчивости;
- формирование единого информационного пространства ИАП, что позволит: максимально автоматизировать договорные отношения и контроль выполнения каждого этапа работ по договору (разработка инновационных продуктов, услуг, процессов), регистрировать, контролировать и осуществлять поиск необходимых документов о выполненных работах и изучение ретроспективы договорных отношений, в результате чего повысится качество и скорость обслуживания клиентов; оградить ИАП от рисков, связанных с недобросовестными клиентами за счет автоматически формирующейся ретроспективы взаимодействия с клиентами; создать эффективный организационно-экономический механизм управления, который охватывает все бизнес-процессы ИАП (производственные, инновационные, финансовые, технологические); выйти на новые рынки за счет внедрения Интернет-сервисов, позволяющих ИАП осуществлять электронную торговлю инновациями и создавать инновационные услуги (Интернет-банкинг);
- осуществление автоматизированного поиска возможных партнеров в инновационном поле;
- автоматизированное построение бизнес-планов инновационных проектов;
- осуществление прогнозирования рисков от вложений в инновационную деятельность;
- использование различных методов, в том числе математических, а так же средств моделирования реакции ИАП на инновационное управление;
- охват всех стадий инновационного проекта от его проектирования до дальнейшего сопровождения с момента появления идеи о нем и до уничтожения продуктов инновационной деятельности. С учетом того, что инновационные разработки проходят различные стадии, на которых возникает множество сложностей, таких как: организация инновационного процесса, создание контактной группы, определение необходимых финансовых, организационных, пространственных, временных, энергетических ресурсов, определение структуры и внешнего вида инновации, привлечение инвесторов, организация сбыта разработок, их внедрения и поддержания необходимо получать своевременный доступ к экономической, научно-технической, экологической, патентной, социальной, другим видам информации и осуществлять ее распространение среди персонала, который задействован в инновационном проекте;
- функциональность на всех этапах жизненного цикла инновационного проекта;

- обеспечение минимальных трудовых и финансовых затрат на проектирование и сопровождение инновации;
- формирование прозрачной системы денежных потоков ИАП, с выделением средств на поддержание и развитие ИТ-инфраструктуры;
- информационная безопасность процесса проектирования и эксплуатации инновационного проекта.

**Заключение.** Создание информационно-аналитической системы ИАП является неременным условием, которое обеспечивает эффективность функционирования ИАП и осуществление инновационной деятельности. В связи с этим является необходимым дальнейшее изучение темы исследования, научная новизна которого заключается в разработке требований к формированию информационно-аналитической системы ИАП. Полученные результаты являются основой для дальнейших исследований, а именно разработки эффективных методов и механизмов информационно-аналитической системы ИАП.

#### Список литературы

1. Гусынина, И.А. Информационно-аналитическое обеспечение управленческих решений в контроллинге бизнес-процессов / И.А. Гусынина, О.А. Заббарова. – Москва : В мире научных открытий, 2011. – 172 с. – Текст : непосредственный.
2. Филиппов, В. А. Информационно-аналитическая поддержка малого инновационного предпринимательства / В. А. Филиппов. – Москва : КомКнига, 2017. – 200 с. – Текст : непосредственный.

УДК 330

## ИННОВАЦИОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ КАК ИНСТРУМЕНТ РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЩЕСТВА

*Гайдарь Е.В.*, канд. экон. наук

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*e.gaydar@donnu.ru*

**Введение.** Большие массивы научно – технических знаний, потоков информации под влиянием инновационных механизмов стали основой экономического, социального, культурного развития современного общества. Информационно-коммуникационные технологии преобладают в современном мире и являются главным фактором роста объемов производства, качества продукции, а также уровня жизни населения.

**Цель** исследования – изучение теоретических положений влияния инновационных механизмов на уровень развития информационного общества.

**Основная часть.** Теоретические аспекты информационного общества изучали многие ученые Д. Белл, Р. Райх, Г. Шиллер, Ю. Хабермас, М. И. Лещенко, М. Н. Черкасов, В. М. Глушков, Е. П. Кругляков, С. П. Капица, Н. Н. Моисеев и др.

Существуют различные мнения относительно сущности информационного общества. Некоторые исследователи пришли к выводу, что информационное общество – это новое общество, новая экономическая формация, некоторые считают информационное общество новым состоянием экономики.

Ученые, характеризуя информационное общество, делали акцент на такой его характеристике, как гибкая специализация.

Гибкая специализация предоставляет предприятиям конкурентные преимущества, поскольку стало возможным производство высококачественной продукции благодаря современным инновационным технологиям. Гибкая специализация невозможна без специалистов высокой квалификации, обладающих знаниями не только в определенной профессиональной сфере, но и владеющих современными информационными технологиями.

К специалистам в информационном обществе выдвигаются требования постоянного овладения новыми знаниями, переподготовки и даже получения новых профессий.

Информационное общество можно охарактеризовать по следующим критериям:

- технологический – информационные технологии широко применяются в производстве, учреждениях, образовании и в быту;
- социальный – информация является важным стимулятором изменения качества жизни, реализован широкий доступ к ней;
- экономический – информация становится ключевым фактором в экономике как ресурс, услуга, товар, источник добавленной стоимости и занятости;
- политический – свобода информации приводит к политическому прогрессу, который характеризуется участием в политическом процессе всех слоев населения, к уменьшению разницы между классами;
- культурный – признание культурной ценности информации для развития индивида и общества в целом [1].

Общество считается информационным, если:

- любой индивид, группа лиц, предприятие и учреждение в любой точке страны в любое время могут получить за соответствующую плату или бесплатно необходимую информацию для принятия решений;
- в обществе производится, функционирует и является доступной любому индивиду или группе лиц современная информационная технология;

- существуют развитые инфраструктуры, обеспечивающие создание информационных ресурсов в объеме, необходимом для поддержания научно-технического и социально-исторического прогресса;

- происходит процесс автоматизации и роботизации всех сферах отраслей производства и управления;

- осуществляются радикальные изменения социальных структур [2].

Проведенный анализ на основании данных Росстата позволил выявить ряд существующих проблем развития информационного общества (табл. 1) [3].

Таблица 1

Основные показатели, характеризующие развитие информационного общества

Показатель	Единица измерения	Период				
		2015г.	2016г.	2017г.	2018г.	2019г.
Численность персонала, занятого научными исследованиями и разработками	к-во	738857	722291	707887	682580	682464
Удельный вес инновационных товаров, работ, услуг в общем объеме отгруженных товаров, выполненных работ, услуг	%	8,4	8,5	7,2	6,5	5,3
Уровень инновационной активности организаций	%	9,3	8,4	8,5	12,8	9,1
Использование информационных и коммуникационных технологий в организациях	%	92,3	92,4	92,1	94	93,5
Объем научных и научно – технических работ, выполненных собственными силами организаций (предприятий)	%	15,6	17,2	23,9	25,1	27,4
Внедрено новых прогрессивных технологических процессов	%	16,5	20,4	23,6	18,7	16,1

При том, что постоянно растет объем научных и научно-технических работ, выполненных собственными силами организаций, стоит отметить тенденцию к уменьшению уровня инновационно-активных предприятий, внедрению новых прогрессивных технологий, а также количества работников занятых научными исследованиями и разработками. Все это свидетельствует о недостаточном уровне инновационного развития экономики, без чего создание информационного общества невозможно. Организации, которые внедряют инновационные технологии, в том числе высокие информационно-коммуникационные, нуждаются в государственной поддержке.



**Заключение.** Таким образом, было исследовано влияние инновационных механизмов и информационно-коммуникационных технологий на развитие информационного общества.

#### **Список литературы**

1. Лещенко, М. И. Инновационно-инвестиционная стратегия промышленности : учеб. пособие / М. И. Лещенко. – М. : МГИУ, 2011. – 340 с.
2. Курбанов, Т. Х. Научно-техническая деятельность: анализ и направления научно – технических результатов / Т. Х. Курбанов. – Текст : непосредственный // Научный альманах. – Тамбов : Грамота, 2019. – № 1-1 (51). – С. 42-45.
3. Росстат. Наука, инновации и информационное общество. Мониторинг развития информационного общества в Российской Федерации, 2019. – [сайт]. – URL: [http://gks.ru/free\\_doc/new\\_site/business/it/monitor\\_rf.xls](http://gks.ru/free_doc/new_site/business/it/monitor_rf.xls) (дата обращения 03.05.2020).

УДК 004.438

## **РОЛЬ ЯЗЫКОВ ВИЗУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОМ АНАЛИЗЕ И ПРОГРАММИРОВАНИИ**

*Гизатулин А.М.*, канд. экон. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*a.gizatulin@donnu.ru*

**Введение.** Процесс цифровой трансформации организаций охватил весь мир. Главной технической целью этого процесса является создание цифрового образа организации, который является не просто гомоморфной моделью, но и позволяет приобрести организации новые возможности для развития. Сегодня фокус эффективности работы организации сместился с операционного уровня на стратегический уровень. Руководители крупных организаций понимают, что процесс цифровизации – это не дань моде, не требование государственных структур, а необходимость, без которой не возможно будет выжить в слабопредсказуемой, быстроизменяющейся среде будущего.

Невозможно построить адекватный цифровой образ организации без соответствующего программного обеспечения. Научный интерес представляет проблема эффективной разработки программного обеспечения и особенно решение задачи эффективного взаимодействия заказчика и разработчика программного обеспечения, которая в значительной степени решается с помощью визуального моделирования.

Актуальность исследования заключается в повышении интереса, как со стороны частных организаций и государственного сектора, так и со

стороны ученых, к проблеме эффективной разработки программного обеспечения в новых условиях развития экономики. Построение цифрового образа организации является дорогостоящей процедурой. На практике каждая организация решает сама, вкладывать ли деньги в визуальное моделирование своей деятельности или использовать альтернативные варианты. В отечественных исследованиях недостаточно исследован вопрос влияния визуального моделирования на эффективность разработки программного обеспечения, а, соответственно, и на создание цифрового образа организации. Однако адекватный цифровой образ организации является критически важным с экономической и социальной точек зрения, особенно в частном и государственном корпоративном секторе экономики. Поэтому исследования, посвященные выявлению роли визуального моделирования в разработке программного обеспечения, являются чрезвычайно актуальными для развития отечественной экономики и государственного сектора услуг.

**Цель исследования:** выявить роль языков визуального моделирования в объектно-ориентированном анализе и программировании в современных условиях развития экономики.

В ходе проведения исследования были использованы принципы общенаучной методологии, положения теории организаций, теории программной инженерии, теории формальных языков и грамматик и применены методы логического, сравнительного, структурного анализа на основе системного и архитектурного подходов. Для реализации цели проведен ряд исследований по изучению способов повышения эффективности разработки программного обеспечения на основе анализа особенностей языков визуального моделирования.

**Основные результаты.** Фундаментом для развития языков визуального моделирования стали работы зарубежных исследователей Г. Буча, И. Джакобсона, П. Коуда, Д. Рэмбо, Б. Селика, Д. Харела и др. Сегодня не только зарубежные, но и отечественные ученые активно ведут разработки в данной области.

Значимость языков визуального моделирования в объектно-ориентированном анализе и программировании возрастает по мере увеличения размера ИТ-проекта.

Очевидно, что размер ИТ-проекта может быть напрямую связан со степенью сложности ИТ-проекта. Для больших и сложных проектов существенное значение имеет построение диаграммы классов, чтобы разработчики могли легко понять систему и классы, связанные друг с другом. Диаграмма классов используется не только для визуализации, описания и документирования различных аспектов системы, но также для построения исполняемого кода программного приложения. Диаграмма классов является основой для эффективного структурного моделирования. С помощью

диаграмм процесс документации может быть включен в процесс разработки, поскольку документация создается во время проектирования.

Кознов Д. В. исследовал вопросы создания и реализации в рамках CASE-пакета Real языка визуального моделирования для проектирования компонентного программного обеспечения со сложной событийно-ориентированной логикой и возможностью автоматической генерации конечного кода. Он отмечает наличие трудности в формализации процесса создания программного обеспечения по причине его творческого характера. Визуальное моделирование предназначено для понижения сложности создания программного обеспечения, повышения качества анализа и проектирования. Кознов Д. В. заключает, что остается неясным принципиальное положение диаграмм при создании программного обеспечения (относительно проектной документации, программного кода и т.д.) [1].

Прямым следствием неясного положения визуального моделирования в процессе разработки программного обеспечения является проблема поддержания цикличности процесса разработки. Сюда относится и проблема семантических разрывов между моделями, и контроль целостности информации в разных моделях, и односторонняя связь с программным кодом, и т.д.

Степанов П. А. исследовал вопросы сокращения сроков и трудоемкости проектирования программных средств с использованием визуальных языковых моделей предметной области. Он предложил объединить модели функционирования объекта и модели его визуального представления [2].

Сегодня с помощью языков визуального моделирования возможно моделирование любых областей (аппаратные компоненты, интеллектуальные агенты) на протяжении всего жизненного цикла программного обеспечения без привязки к языку программирования.

Языки визуального моделирования имеют и свои недостатки. Каждый человек создает и интерпретирует визуальную модель по-своему. Создается неоднозначность в процессе анализа и извлечения информации из графических нотаций. Может также возникнуть коллизия, когда одна модель противоречит другой. Также, при разработке специального графического редактора возникает необходимость программирования при его разработке.

Хотя новые формальные методы практически не создаются, только исследуются их свойства и возможности применения, они полезны на всех этапах жизненного цикла программного обеспечения, так как они имеют поддержку математического и программного инструментария. Для полноценного моделирования организаций уровня развития формальных методов недостаточно. Поэтому целесообразно совместное применение формальных методов и языков визуального моделирования.

**Заключение.** Понимание роли языков визуального моделирования в объектно-ориентированном анализе и программировании позволит руководителям цифровой трансформации организаций построить более адекватный цифровой образ организации и создать артефакты для дальнейшего использования в типовых условиях.

#### Список литературы

1. Кознов, Д. В. Основы визуального моделирования / Д. В. Кознов. – Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2012. – 248 с. – Текст : непосредственный.
2. Степанов, П. А. Визуализация состояния сложных технических объектов с помощью вычислительных моделей / П. А. Степанов, М. Ю. Охтилев, Б. В. Соколов. – Текст : непосредственный // Информационно-управляющие системы. – 2017. – № 6. – С. 132–135.

УДК 004:338.28

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ДОКУМЕНТООБОРОТА НА ПРЕДПРИЯТИЯХ МАЛОГО БИЗНЕСА

*Коробейникова К.В.*, канд. экон. наук

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*k.korobeinikova@donnu.ru*

**Введение.** Поиск, извлечение, распространение и представление информации – это одна из функций, присущих всем системам управления документами. Однако в системах управления документами, используемых большинством предприятий малого бизнеса, наиболее полно автоматизированы только два процесса – учет документов и контроль их исполнения.

Анализ публикаций по системам электронного документооборота (СЭД), основанный на критериях оптимального применения СЭД, показывает, что при принятии решений по применению СЭД в небольшой организации необходимо обязательно руководствоваться потребностями бизнеса. В целом это: безопасность, гибкость, минимальная стоимость; простота внедрения, разработки и поддержки; прозрачность и возможность контролировать документооборот; упрощение различных управленческих операций [1, 2].

**Цель исследования** состоит в анализе проблем использования СЭД на малых предприятиях и разработке предложений по созданию инфраструктуры автоматизации управления, которая предоставляет достаточный объем информации для принятия решений.

**Основная часть.** Для внедрения систем управления документами в условиях цифровой среды создается инфраструктура применения СЭД, которая предоставляет достаточный объем информации для принятия решений. Внедрение СЭД направлено на вовлечение конечных исполнителей документов и заказов в цифровой рабочий процесс, а также призвано обеспечить прозрачность действий по выполнению заказов для пользователей всех уровней [3].

При этом важно понимать, что для малого бизнеса делается упор на простоту прикладных решений. В частности, это означает, что компания готова отказаться от многих работ, которые выполняет текущая система электронного документооборота, поскольку в них нет необходимости. Соответственно, подход, использованный в данной работе, основан на следующих основных моментах:

При применении СЭД на предприятиях малого бизнеса необходимо:

- следить за производственной дисциплиной и контролировать качество операций или их результаты;

- обеспечивать направление и вручение документов исполнителям.

В целом положения законодательства создают правовые условия, необходимые для развития системы цифрового документооборота.

В настоящее время важно сформировать набор типовых решений для малого бизнеса, которые позволят организовать безопасный и экономичный цифровой документооборот.

Для обеспечения гибкости и удовлетворения максимально широкого диапазона потребностей конечный набор решений должен быть модульным, то есть независимым от каждого компонента пакета и способности включать их в любые изменения. При этом экономичность выступает главным критерием формирования пакета решений.

Для запуска СЭД требуется не только установка оборудования и настройка программного обеспечения. Но при этом не надо проводить полную реструктуризацию бизнес-процессов и переподготовку сотрудников. Чем меньше объем изменений бизнес-процессов при внедрении системы, тем больше шансов уложиться в сроки внедрения, а иногда даже запуска системы в целом, поэтому интегрированные информационные системы всегда реализуются по частям, а относительно закрытые направления деятельности последовательно автоматизируются, и в дальнейшем объединяются с интеграционной системой.

С технологической точки зрения система управления цифровыми документами представляет собой четырехмерную систему, которая охватывает офисную работу, подготовку документов и их привязку к внешней среде для цифрового обмена. Таким образом, чтобы повысить шансы завершить автоматизацию в подходящие сроки, необходимо заранее внедрить автоматизированные системы и инструменты офисной работы для организации совместной работы по подготовке документов.

Ввод в эксплуатацию системы цифрового документооборота не только облегчает технологическое внедрение цифрового рабочего процесса в офисную работу, но и позволяет на практике познакомить с концепцией цифровизации бумажной работы и делопроизводственных процессов.

Психологическая подготовка зачастую важнее получения необходимой технической поддержки. Технологически использование актуального современного универсального программного обеспечения от одного производителя позволит качественно перевести бизнес-процессы документооборота в цифровой вид.

Основная техническая проблема для сотрудников, которые переходят на цифровой документооборот, заключается в использовании аналогово-цифрового формата для рукописного подписания документов. Без понимания и реализации этого приема невозможно перейти к полностью безбумажной обработке.

Полный перевод входящих и исходящих документов на безбумажную технологию не требуется. Это ограничение может быть нарушением прав отдельных граждан, не имеющих доступа к компьютерным технологиям и Интернету: принятые функции записи бумажных документов, содержащиеся в традиционных подписях заявителей, также могут быть использованы в системах цифрового документооборота. Это необходимо для устранения изначального «информационного неравенства». Если не уделить должного внимания решению этой проблемы, лица, не имеющие полного доступа к системам цифрового документооборота, останутся вне цифрового общества.

В СЭД должны быть предусмотрены инструменты контроля процессов документооборота, целью которых является их измерение согласно определенным критериям, по крайней мере, при регистрации документов, постановке их на контроль и снятии с него, передачи документов в архив. Отдельные элементы каждого из таких процессов измеряются количеством документов, сотрудников, задействованных в обработке документов, временем обработки. Точность измерений повышается за счет передачи документов по маршрутам внутри компании с использованием реестров.

Нормативная регламентация работы с документами будет способствовать определению и оценке возможностей повышения эффективности, результативности использования СЭД.

**Заключение.** В настоящее время важно сформировать набор типовых решений для малого бизнеса, которые позволят предприятиям организовать безопасный цифровой документооборот с минимальными экономическими затратами и соответствующей сложностью разработки и сопровождения.

В современных условиях необходимо создание инфраструктуры автоматизации управления, которая предоставляет достаточный объем информации для принятия решений, а также призвана обеспечить функционирование цифрового документооборота.

## Список литературы

1. Сергеев, С. Н. Цифровой документооборот: как достичь эффективности? / С. Н. Сергеев. – Текст : электронный // Бюджет. – 2018.– № 11 (191). – С. 27-29. – URL: <https://e-library.ru/id=37259248> (дата обращения: 21.10.2020).
2. Егоров, В. П. Цифровая железная дорога и электронный документооборот / В. П. Егоров, Н. И. Балахонцев. – Текст : электронный // Вестник Академии права и управления. – 2018. – № 2 (51). – С. 53-58 – URL: <https://e-library.ru/https://elibrary.ru/item.asp?id=35213496> (дата обращения: 21.10.2020).
3. Гривас, В. Н. Электронный документооборот в условиях цифровой экономики / В. Н. Гривас. – Текст : электронный // Научная дискуссия современной молодежи: актуальные вопросы состояния и перспективы инновационного развития экономики. – 2019. – С. 64-68. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=id=37609448> (дата обращения: 21.10.2020).

УДК 373

## ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

*Крулькевич М.И.*, д-р техн. наук, проф.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*krulkevich@inbox.ru*

**Введение.** Актуальность исследования проблем использования цифровых технологий в обеспечении более глубоких возможностей обучения определяется тем, что доля отраслей, которые опираются на цифровые технологии, постоянно растет.

Многочисленные исследования подчеркивают важность цифровых технологий в обеспечении возможностей обучения [1, 2]. В проведенных исследованиях отмечается важность роли современных технологий в предоставлении лучших образовательных возможностей, однако подчеркивается, что, несмотря на развитие, которое могут обеспечить цифровые технологии, задача, которую выполняет преподаватель, остается важной с точки зрения роли, отведенной ему в наставничестве, отслеживании процесса усвоения знаний учащимися и развитии их навыков.

**Цель** статьи состоит в раскрытии роли цифровых технологий в повышении эффективности обучения.

Технологии не только в большей степени контролируют жизнь людей, но и их растущее использование влияет на учебные программы, новые цифровые навыки на рабочих местах и изменение использования услуг», – отмечают авторы [3].

**Основная часть.** Исследователи признают, что цифровые навыки становятся все более доступными в образовании, и они приводят пример

некоторых стран, которые интегрировали знания о цифровом образовании, таких как Франция и Норвегия, которое определяется как понимание информационных и коммуникационных технологий, повседневное обращение с ними и взаимодействие с ними в рамках базовой учебной программы, в то время как страны, такие как Эстония и Великобритания, ввели компьютерное кодирование или программирование уже в начальных классах [4].

Использование цифровых технологий в образовательных учреждениях не обязательно приводит к лучшим возможностям обучения. Ученые указывают на то, что в действительности нет положительной корреляции между степенью использования учащимися компьютеров и их успеваемостью по математике, грамотности и даже цифровой грамотности. В этом контексте отмечается, что цифровые технологии обладают потенциалом для улучшения преподавания и обучения во многих отношениях, но они не могут достичь этого развития в отдельности.

Эксперты отмечают, что цифровые технологии могут помочь сделать процесс обучения студентов более привлекательным и в значительной степени способствуют укреплению глубокого обучения, но, тем не менее, они признают, что роль педагога остается важной в достижении этого результата.

Цифровое образование часто называют привлекательным способом быстро и всесторонне охватить большее количество людей. Цифровые технологии могут дать образование тем, кто не смог этого достичь, например, лицам с ограниченными возможностями для передвижения или тем, кто учится в нерабочее время.

Цели образования сместились с подготовки к работе на подготовку к жизни. Этот сдвиг привел к необходимым преобразованиям во всех компонентах образовательных систем, включая наиболее важные из которых – четкие преобразования ролей и условий обучения.

Характерными особенностями образования в условиях перехода на цифровое обучение является:

- переход на электронную среду обучения и избавление от бремени традиционной бумажной среды;
- изменение традиционного стиля обучения;
- расширение процессов преподавания и обучения за пределы учебной аудитории;
- создание комфортной учебной среды с позитивным взаимодействием между студентами и педагогом;
- предоставление студенту личных навыков, которые сделают его более готовым к дальнейшей учебе и на рынке труда.
- использование заинтересованности студентов в современных технологиях и ее ориентация для положительного использования нового программного обеспечения и технологических продуктов.



Дистанционное обучение Интернет предлагает бесконечные возможности обучения преподавателям в этой области, в том числе возможность многократного обучения широкому спектру вещей, инструментов и методов. Как уже упоминалось, преподаватель, который хочет организовать курс дистанционного обучения, должен знать содержание и область, которую он хорошо преподает, а также определять стратегии, которые могут повлиять на студентов и привлечь их. Но помимо этого преподавателю необходимо научиться пользоваться многими инструментами, оборудованием и техниками, в том числе:

- платформой для проведения образовательных курсов;
- редактированию видео и аудиофайлов;
- способами представления информации в виде графиков, слайдов и других презентационных материалов.

Другими словами, существует множество инструментов, оборудования и навыков, которые повышают ценность преподавания дисциплин в цифровой среде.

Стратегическими подходами к повышению эффективности электронного бизнеса должно быть инфраструктурное развитие и институциональная поддержка внедрения цифровых технологий. При этом, безусловно, реализация каждого из этих стратегических подходов в том или другом регионе должна учитывать их специфику и особенности развития. В зависимости от этого могут варьироваться как технологические решения, которые могут применяться для развития информационно коммуникационной инфраструктуры, так и мероприятия по стимулированию внедрения конкретных цифровых технологий.

Интеграция дистанционного образования с пространственным или традиционным образованием имеет особое значение в эпоху цифровых технологий.

Пространственные встречи и уроки характеризуются обменом и применением информации и знаний. С другой стороны, при использовании цифровых технологий можно получить опыт, аналогичный опыту на расстоянии, способствуя реальному взаимодействию студентов. Дистанционное образование может быть эффективным дополнением для более быстрого развития учащихся. Это происходит, например, путем интеграции цифровых материалов с повседневным образом жизни учащегося, например с прохождением онлайн-тестов, интерактивными видео и полезной глубиной изучаемых тем.

**Заключение.** Стратегическими подходами к повышению эффективности образования в цифровой среде должно быть инфраструктурное развитие и институциональная поддержка внедрения цифровых технологий. При этом, безусловно, реализация каждого из этих стратегических подходов должна учитывать их специфику и особенности развития. В зависимости от этого могут варьироваться как технологические решения, которые могут применяться для систем

дистанционного обеспечения, так и мероприятия по стимулированию внедрения конкретных цифровых технологий.

### Список литературы

1. Тазов, П. Ю. Вопросы цифрового обучения и методы повышения эффективности обучения цифрового поколения в условиях цифровой среды / П. Ю. Тазов. – Текст : непосредственный // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 6-2. – С. 385–391.
2. Тазов, П. Ю. Повышение эффективности цифрового обучения на примере обучения студентов / П. Ю. Тазов. – Текст : непосредственный // Образование: традиции и инновации: материалы XXIII международной научно-практической конференции. – 2020. – С. 132–135.
3. Фрайссин, Ж. Обучение в цифровых сетях: кооперативное обучение, коллаборативное обучение и педагогические инновации / Ж. Фрайссин. – Текст : непосредственный // Непрерывное образование: XXI век. – 2016. – № 4 (16). – С. 119–135.
4. Кущева, Н. Б. Цифровое обучение и роль преподавателя высшей школы в реализации электронного обучения / Н. Б. Кущева, В. И. Терехова. – Текст : непосредственный // Мир науки. Педагогика и психология. – 2019. – Т. 7. – № 2. – С. 17.

УДК 004:316.776

## ВНЕДРЕНИЕ СИСТЕМ ЦИФРОВОГО ДОКУМЕНТООБОРОТА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДОКУМЕНТАМИ

*Курдюмова И.А.*, канд. филол. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*kurdiumova@mail.ru*

**Введение.** Непрерывное развитие электроники положительно отразилось на информационных и коммуникационных технологиях, поскольку они обеспечили среду и потребность в использовании информационных технологий в различных областях, требующих исключительных возможностей, таких как управление документами.

Основой ведения деятельности любой бизнес-организации является хорошо организованный процесс движения документов между ее структурными подразделениями. По мере развития организации существующие бизнес-процессы усложняются и развиваются новые, что неизбежно приводит к увеличению объема рабочего процесса и необходимости перехода к цифровым процессам обработки информации, обеспечивающим комплексную работу с электронными документами в цифровой среде.

**Цель исследования** состоит в анализе проблем внедрения систем электронного документооборота (СЭД) в современных условиях.

**Основная часть.** С развитием информационных технологий решена проблема увеличения объема бумажных документов путем перехода на СЭД. Особенность этого перехода за последние пятнадцать лет связана с тем, что до середины 2000-х гг. на рынок информационных продуктов была выведена крупная корпоративная СЭД [1]. Это связано с такими факторами: дороговизной разработки систем и, как следствие, их рентабельность для среднего и малого бизнеса; повышенной сложностью СЭД; невозможностью создания глобальных решений, которые могут удовлетворить потребности большого числа организаций.

Сегодняшний рынок СЭД претерпел некоторые изменения: количество доступных решений резко увеличилось. Организации имеют четкое представление о положительных и отрицательных последствиях внедрения системы электронного документооборота; Разработчики, используя усовершенствованные технологии, смогли увеличить разнообразие своих продуктов и сделать их доступными широкому кругу потребителей [2].

Однако многие проблемы по-прежнему актуальны. Прежде всего, это рентабельность внедрения СЭД. Несмотря на широкий ассортимент СЭД на рынке, организация часто отказывается от их приобретения из-за дороговизны. Кроме того, процесс внедрения защищенной системы электронного документооборота требует участия не только квалифицированных специалистов по информационной безопасности, но и широкого круга специалистов, что зачастую является очень сложной, а иногда и невозможной задачей. Проблема состоит в том, что увеличение количества инновационных малых и средних предприятий в современной высокотехнологичной экономике привело к резкому повышению требований к системной целостности и универсальности, расширению специализированной подготовки по информационной безопасности [3].

СЭД обеспечивают сохранность изображений документов с помощью сканеров, а затем извлекают их по запросу. Эти системы смогли сократить обширные области для хранения исторической информации о документах и обеспечили неограниченное использование документов путем их поиска и извлечения. Они также помогли решить проблемы потери, и ошибки при размещении документов в электронных архивах [4]. Это позволило использовать один и тот же документ несколькими сотрудниками одновременно. Кроме того, СЭД обеспечивают преимущества при создании, разработке процесса ввода, извлечения, обработке и обновлении документов из любой точки информационной сети (в рамках требуемых мер безопасности). Они также позволяют извлекать отчеты и статистику из хранимых документов и отвечать на многие запросы.

С документооборотом и управлением документами можно обойтись использованием электронной системы. Успех этого процесса ограничивают многие трудности, которые заключаются в отсутствии точных методов подсчета, сохранения, классификации и индексирования документов и обеспечения точного механизма поиска необходимого документа.

Среди наиболее заметных трудностей, от которых страдает процесс управления документами, могут быть выделены следующие:

- потеря некоторых или всех важных документов и документов;
- существенные затраты времени и сил на поиск важной информации;
- сложность подсчета и классификации необходимых документов;
- распространение различных видов документов;
- отсутствие механизма документирования операций и внесения изменений в документы;
- недостаточный уровень безопасности и защиты информации.

К важнейшим функциям СЭД относятся:

- управление учетными записями пользователей;
- управление в группах пользователей (сотрудники группы по управлению);
- наличие органа управления безопасностью (Privilege On Management);
- формирование диспетчера отчетов (отчеты по управлению);
- архивирование документов и последующий мониторинг их движения и работы с ними (отслеживание, архивация);
- организация открытых документальных сессий (Open Workflow);
- организация замкнутых документальных циклов (Managed Workflow);
- совместные операции;
- работа с архивами длительного хранения, включая архивы различных компонентов;
- управление контрактами и их сопровождение;
- интеграция с факсами;
- интеграция с электронной почтой;
- просматривание PDF-файлов (встроенный в PDF Viewer);
- просмотр фотографий и фильмов (встроенный в медиаплеер);
- построение классификации (классификация документов Builder);
- обмен мгновенными сообщениями (модуль Intra Chat);
- слияние почтовых сообщений (почта Merge Generator);
- поиск контента (Search Web Contents Index);
- кодирование документов (генератор кода документа).

В то же время следует отметить, что существует парадокс: с одной стороны, развитие систем управления предприятиями приводит к необходимости организации качественного и безопасного документооборота; с другой стороны, рынок не готов удовлетворить потребности этих организаций – решения либо слишком упрощены, либо их развитие не соответствует финансовым возможностям предприятий.

**Заключение.** Внедрение систем цифрового документооборота, построенной на основе лучших практик, призвано удовлетворить потребности средних и крупных организаций в управлении документами в

условиях цифровой среды, а также требуемый уровень безопасности и защиты информации.

### Список литературы

1. Феофанов, А. Н. Системы электронного документооборота, как инструмент цифровой экономики / А. Н. Феофанов, К. С. Пономарев, М. А. Шутиков. – Текст : электронный // Технология машиностроения. – 2018. – № 9. – С. 69-74. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36314799> (дата обращения: 21.10.2020).
2. Мунтяну, В. Н. Система электронного документооборота как основа развития цифровой экономики / В. Н. Мунтяну. – Текст : электронный // Молодежь и наука XXI века: Материалы Международной научной конференции. – 2018. – С. 432-435. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36564098> (дата обращения 21.10.2020).
3. Акаткин, Ю. М. Цифровая трансформация правительства: датацентричность и модели ориентированность / Ю. М. Акаткин, Е. Д. Ясиновская. – Текст : электронный // Информационные ресурсы России. – 2019. – № 1. – С. 2–7. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36849830> (дата обращения 21.10.2020).

УДК 004:651:378

## УПРАВЛЕНИЕ ДОКУМЕНТАЦИОННО-ИНФОРМАЦИОННЫМИ ПОТОКАМИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ

*Мащенко Н.Е.*, канд. экон. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*n.mashchenko@donnu.ru*

**Введение.** Переход системы образования Донецкой Народной Республики на стандарты Российской Федерации в условиях нестабильности политической и экономической ситуации потребовал от учебных заведений максимальных усилий с учетом сохранения и приумножения интеллектуального, материального, информационного потенциала.

Управление образовательной организацией, тем более, учреждением высшего уровня, в современных условиях требует четкого понимания и прозрачности всех процессов, происходящих в нем с целью эффективного управления. А поскольку все этапы управленческой деятельности предполагают работу с информационными потоками, которые циркулируют между руководителями и исполнителями, то эффективному управлению информационными потоками образовательной организации следует уделять значительное внимание.

Документооборот в образовательных учреждениях является разновидностью информационного потока, который в значительной степени определяет характер их деятельности.

Актуальность работы обусловлена проблемой эффективного управления информационными потоками образовательного учреждения, материальной основой которой является документ.

**Основная часть.** Современные вузы характеризуются заметным увеличением информационных потоков вследствие усложнения их структуры, усиления требований к организациям такого вида, функционирующим в условиях цифровой экономики, от которых зависит качество подготовленной квалифицированной рабочей силы. Актуальным в цифровой экономике становится непрерывное образование, что требует от вузов открытия курсов повышения квалификации, программ переподготовки. Следует учитывать, что большое количество реализуемых отдельных коммуникаций, в том числе из внешней среды, также формируется в информационные потоки организации.

Информационные потоки – это совокупность пакетов информации (сообщений), необходимой для управления и циркулирующей как внутри рассматриваемой системы, так и между ней и внешней средой. Информационный поток может быть в речевой, документной (бумажной и электронной) и другой форме. Он может генерироваться процессами материального или финансового потока в рассматриваемой системе, между системой и внешней средой. Его главное назначение – поддержание реализации управляющих функций [1].

Анализ информационных потоков позволяет качественно рассмотреть и оценить процесс управления данной организацией с учетом специфики ее деятельности, своевременно внести в него коррективы.

Информационные потоки, циркулирующие в высшем учебном заведении с точки зрения значимости его процессов и целей деятельности, схематично представлены на рис. 1. Основным в вузе является учебный процесс и, таким образом, основными здесь являются информационные потоки, сопровождающие его, между участниками потоков, например, сотрудниками кафедр и учебной частью, участвующими в учебном процессе.

Дополнительными специализированными потоками являются научный, информационно-библиотечный, воспитательный и др. Следует отметить, что научный поток очень значим для вуза, поскольку от его функционирования зависит качество подготовки студентов и уровень квалификации преподавателей.

Для более эффективного управления информационными потоками вуза, следует иметь четко составленную организационную структуру с наделением каждому из подразделений полномочий, функций, указанием взаимоотношений с другими структурами, что отражается в положениях о подразделениях и должностных инструкциях сотрудников. Необходимо иметь разработанные регламенты работы в разных ситуациях, где четко прописан порядок действий с указанием видов документов в данной ситуации и порядок их согласования и подписания. Это приведет к более быстрому и эффективному принятию решений в конкретных ситуациях.



Рис. 1. Информационно-документационные потоки образовательного учреждения высшего образования

Следует учитывать, что все информационные потоки взаимодействуют друг с другом, и в процессе их функционирования создаются те или иные документы: управленческие, учебные, плановые, отчетные, научно-исследовательские и др.

Основным документом, определяющим документационные ресурсы, является сводная номенклатура дел организации и ее структурных подразделений, в которой отражены все документы, которые создаются в организации с учетом сроков их хранения. Для рационализации данных процессов необходима автоматизация делопроизводства посредством систем электронного документооборота, что сделает прозрачным все информационно-документационные потоки учреждения как для руководства с целью эффективного управления ими, так и для работников с целью эффективного их исполнения.

**Заключение.** В современном обществе требуется системный подход к организации управления, следовательно, возникает необходимость

тщательного исследования и совершенствования документационно-информационного обеспечения управленческой деятельности.

Процесс управления документами образовательного учреждения необходимо брать под контроль для оптимизации информационных потоков при помощи новейших информационно-телекоммуникационных технологий.

### Список литературы

1. Воронин, А. Д. Управление операционной логистической деятельностью : учебное пособие для учреждений высшего образования / А. Д. Воронин, А. В. Королев. – Минск : Вышэйшая кола, 2014. – 271 с. – Текст : непосредственный.

УДК 651.012.12:004.9

## ИННОВАЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННОГО ДОКУМЕНТООБОРОТА ОРГАНИЗАЦИИ

*Митрохина Е.А.*, канд. экон. наук

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*e.mytrokhina@donnu.ru*

**Введение.** На сегодняшний день можно наблюдать накопление достаточного опыта разработки и внедрения систем электронного документооборота (СЭД), их повсеместное распространение в различных организациях, растущую базу клиентов-пользователей. Все это позволяет сделать вывод, что в технологическом аспекте проблема, связанная с автоматизацией документооборота в организациях и учреждениях, уже практически решена.

Назревает вопрос о дальнейшем развитии электронного документооборота. Учитывая доступность передовых технологий обработки информации, технологий искусственного интеллекта, а также переход к цифровым технологиям, можно с уверенностью говорить о дальнейшем качественном скачке в таком развитии.

**Цель работы** – описать возможности применения инновационных решений в системе электронного документооборота, которые могут кардинальным образом повлиять на ее развитие.

**Основная часть.** Исследования отечественных и зарубежных ученых и опыт практиков в области автоматизации документооборота позволяют выделить основные направления внедрения инновационных технологий в электронный документооборот (рис. 1).



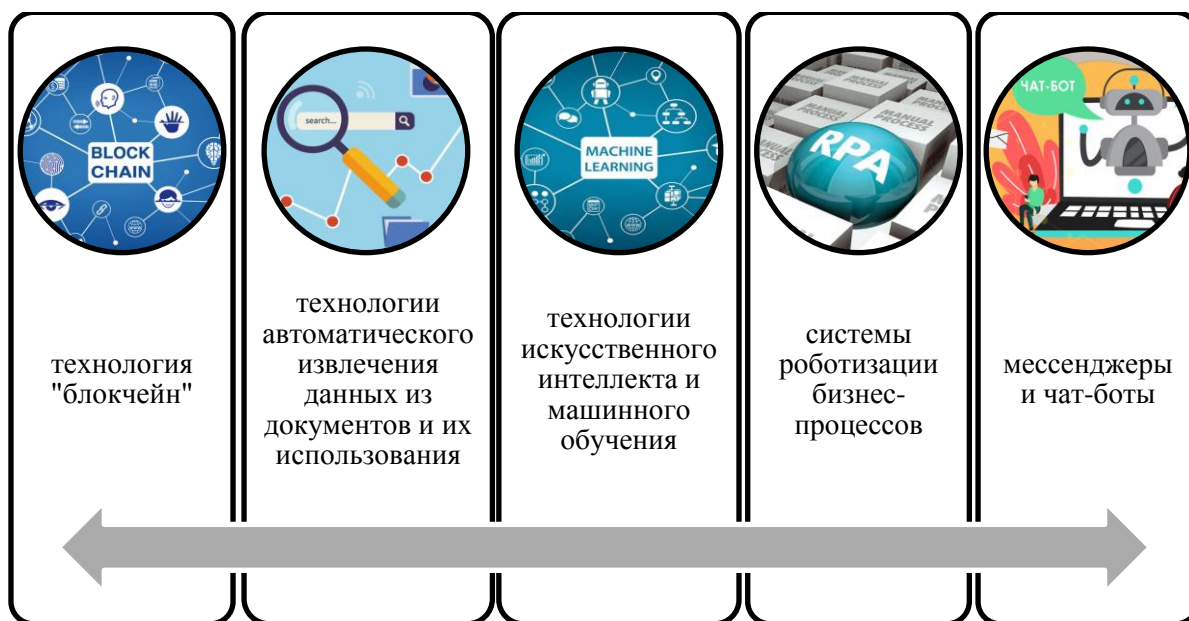


Рис. 1. Инновационные технологии в СЭД

Ниже описаны возможности применения каждой из перечисленных технологий в СЭД.

#### 1. Применение технологии «блокчейн».

Так как целью развития СЭД является возможность обмена электронными документами между различными пользователями (в том числе организациями), а такое движение ограничено корпоративными и бюрократическими барьерами, то возникает необходимость применения новейшей технологии «блокчейн».

В рамках СЭД такую технологию можно применять, чтобы обеспечить достоверность и надежность документооборота. Однако, несмотря на множество ее преимуществ, есть и существенные трудности, которые останавливают широкое ее распространение. Во-первых, технология «блокчейн» требует существенных аппаратных ресурсов. Во-вторых, необходимо достаточное количество специалистов-разработчиков для воплощения проектов. В-третьих, необходимо, чтобы пользователи доверяли данной технологии, то есть необходимо рассказать и объяснить, как она работает.

Однако, несмотря на все трудности, данная технология способна стать инновационным инструментом для бизнеса, требуется только определение способов устранения препятствий и попытки снизить возможные издержки.

#### 2. Применение технологий автоматического извлечения данных из документов и их использования.

Отмечается, что системам электронного документооборота необходимо взаимодействовать с инструментами для работы с текстом. Большинство проектных СЭД уже используют данные технологии, ведь такая функциональность на данный момент становится наиболее востребованной в силу развивающейся цифровизации документооборота.

3. Применение технологий искусственного интеллекта и машинного обучения.

С переходом на электронный документооборот в организации можно наблюдать кардинальное ускорение процессов обработки документов, но не изменение сущности этих процессов. Для их радикального преобразования и существенного роста эффективности необходимо применение технологий искусственного интеллекта и машинного обучения.

Примерами применения указанных технологий в области документооборота являются следующие [1]: обнаружение аналогов текстов, автоматическое формирование заданий, создание резолюций руководства для распорядительной или входящей документации, работа с обращениями граждан, поиск и отбор документов, подбор маршрута согласования для документа и прочее.

Данные технологии способны обеспечить максимальную результативность работы с документами и избавить работников организации от выполнения однообразных операций.

4. Применение RPA (роботизация бизнес-процессов) для автоматизации документооборота.

RPA способна повысить эффективность автоматизации документооборота [2]. Перед организациями появляется возможность передать часть функций в СЭД роботам (например, автоматическая регистрация событий, мониторинг качества вводимых данных, обработка принимаемой информации, уведомление клиентов-пользователей и прочее). Однако роботизация операций может создать некоторые проблемы. В частности, если учитывать, что СЭД направлены не только на автоматизацию бизнес-процессов, но и на обеспечение юридической значимости документированной информации, то возникает вопрос об ответственности за выполнение роботизированных операций. Указанный вопрос на данный момент не имеет четкого ответа.

5. Использование мессенджеров и чат-ботов.

В настоящее время можно наблюдать тенденцию к применению мессенджеров в ведении деловой корреспонденции и ее дальнейшему фиксированию в СЭД посредством присоединения к документу в виде чата.

Несмотря на то, что СЭД представляют собой рабочий инструмент, который не предполагает использование неформальной переписки, мессенджеры начинают постепенно употребляться для работы. Они могут применяться для регистрации важных фактов, событий, транзакций. Кроме того, использование чат-ботов по факту является одним из интерфейсов, посредством которых можно взаимодействовать с СЭД,

**Заключение.** Необходимо отметить, что в современном мире технологии меняются крайне быстро, и то, что некоторое время назад казалось немыслимым, сейчас становится реальностью, а то, что на сегодняшний день широко применимо, завтра может стать историей.

Развитие СЭД замедляется распространенными традиционными подходами к документам и документообороту, законодательными и корпоративными ограничениями, психологией клиентов-пользователей и прочим. Однако динамика количественных и качественных преобразований вынуждает постепенно совершенствоваться и находить более экономичные и практичные решения и менее рискованные способы перехода к ним. Такими решениями в системе электронного документооборота организации являются описанные инновационные подходы и инструменты.

### Список литературы

1. Андреев, В. Перспективы использования технологий искусственного интеллекта в системах автоматизации документооборота / Владимир Андреев. – 19.01.2018. – Текст : электронный // itWeek : [сайт]. – 2018. – URL: <https://www.itweek.ru/ecm/article/detail.php?ID=199260> (дата обращения: 06.10.2020).
2. Митрохина, Е. А. Возможности применения RPA для автоматизации документооборота / Е. А. Митрохина. – Текст : непосредственный // Документы и архивы в условиях цифровой экономики : материалы Международной научно-практической конференции (Донецк, 22-23 апреля 2020 г.) / редакционная коллегия: Пономаренко Н. Ш. (председатель) [и др.] ; Министерство образования и науки Донецкой Народной Республики, ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» [и др.]. – Донецк : ДОННУ, 2020. – С. 37–41.

УДК 338.242

## МЕСТО И РОЛЬ ПРОДОВОЛЬСТВЕННОГО КОМПЛЕКСА В ЭКОНОМИКЕ ГОСУДАРСТВА

*Овчаренко А.С.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*a.ovcharenko@donnu.ru*

**Введение.** Продовольственный комплекс, состоящий из группы взаимосвязанных отраслей народного хозяйства и обеспечивающий население продовольствием, играет большую роль и занимает важное место в экономике Донецкой Народной Республики.

Формирование продовольственного комплекса и обеспечение населения продовольствием для любого государства является приоритетным заданием, поскольку обеспечивает продовольственную безопасность и имеет социально-экономическую значимость. В связи с этим, вопрос изучения роли и места продовольственного комплекса в составе экономики Республики является весьма актуальным.

Вопросами исследования продовольственного комплекса занимались многие ученые: В. Д. Малыгина, А. И. Алтухов, В. Г. Гусаков,

И. М. Куликов, И. А. Минаков, Э. Н. Крылатых, А. А. Никонов, Н. Я. Коваленко, В. П. Можин, А. Н. Сёмин, П. В. Лещиловский, Е. И. Кивейша и другие.

**Целью исследования** является определение роли и места продовольственного комплекса в экономике государства.

**Основная часть.** Фундаментальная потребность человека – потребность в питании – обеспечивается агропромышленным комплексом. Как отмечает Е. И. Чернушевич, составной частью агропромышленного комплекса любой страны является продовольственный комплекс [1].

В научных кругах существует большое количество описаний сущности и специфики продовольственного комплекса.

Так, Л. В. Погребняк считает, что продовольственный комплекс представляет собой систему технически взаимосвязанных отраслей, производств и видов деятельности, которые объединены единой целью – удовлетворением потребностей населения в продовольствии [2].

Группа авторов во главе с Н. Я. Коваленко отмечает, что в число структурных элементов продовольственного комплекса входят типизированные сельскохозяйственные предприятия, отрасли и производства, обеспечивающие сельское хозяйство необходимой техникой, оборудованием и материальными ресурсами, а также организации по заготовке, хранению и реализации продукции [3].

Как видно, ключевым звеном продовольственного комплекса является сельское хозяйство, от темпов и уровня развития которого зависит продуктивная деятельность отраслей и производств, входящих в состав комплекса.

Продуктовые подкомплексы продовольственного комплекса представлены на рис. 1.

ПРОДУКТОВЫЕ ПОДКОМПЛЕКСЫ ПРОДОВОЛЬСТВЕННОГО		
	ЗЕРНОПРОДУКТОВЫЙ	
	СВЕКЛОСАХАРНЫЙ	
	МАСЛОЖИРОВОЙ	
	ПЛОДООВОЩЕКОНСЕРВНЫЙ	
ПЛОДОКОНСЕРВНЫЙ		ОВОЩЕКОНСЕРВНЫЙ
	КАРТОФЕЛЕПРОДУКТОВЫЙ	
	ВИНОГРАДОВИНОДЕЛЬЧЕСКИЙ	
	ЧАЙНЫЙ	
	ЖИВОТНОВОДЧЕСКИЙ	
МЯСНОЙ	МОЛОЧНЫЙ	ПРОИЗВОДСТВО ЯИЦ
РЫБОПРОДУКТОВЫЙ		

Рис. 1. Продуктовые подкомплексы продовольственного комплекса

Следует отметить, что одним из основных жизнеобеспечивающих комплексов Донецкой Народной Республики является продовольственный комплекс, входящий в состав агропромышленного комплекса и включает комплекс перерабатывающих предприятий пищевой промышленности. Республиканским органом исполнительной власти, обеспечивающим государственную политику и определяющим приоритетные направления, стратегию и механизм развития отраслей и сфер, отнесенных к агропромышленному комплексу, является Министерство агропромышленной политики и продовольствия.

Как отмечает руководство Министерства агропромышленной политики и продовольствия, важной составляющей формирования продовольственного комплекса Республики являются обеспечение устойчивого роста сельскохозяйственного производства – основы обеспечения населения продовольствием – и рост благосостояния государства в целом.

Показатели агропромышленного комплекса демонстрируют положительную динамику и увеличение производства основных сельскохозяйственных культур. Так, за январь-март 2020 г. индекс объема производства сельскохозяйственной продукции в хозяйствах всех категорий по сравнению с аналогичным периодом 2019 г. составил 98,8 %, в т.ч. на сельскохозяйственных предприятиях – 97,8 %, в хозяйствах населения – 102,4 %.

Наметились тенденции увеличения производства продуктов животноводства у ФЛП. За январь-март 2020 г. валовой надой молока увеличился на 3,1 %, производство яиц – на 3,9 %, на убой реализовано скота и птицы в живом весе на 1,2 % больше, чем за этот же период предыдущего года.

За отчетный период перерабатывающими предприятиями закуплено от сельскохозяйственных товаропроизводителей всех категорий скота и птицы (в живой массе) на 3,6 % молока – на 9,5 % больше, чем за аналогичный период прошлого года. Объем реализованной продукции предприятиями пищевой промышленности за январь-март 2020 г. вырос по сравнению с январем-мартом 2019 г. на 11,9 % (в действующих ценах). Доля пищевых продуктов, напитков и табачных изделий в общем объеме реализованной промышленной продукции составляет 13,9 % [4].

С целью комплексного развития всех отраслей агропромышленного комплекса Министерство агропромышленной политики и продовольствия разрабатывает проекты программ, которые проходят согласование в установленном законодательством порядке.

**Заключение.** Таким образом, очевидно, что продовольственный комплекс, входящий в состав агропромышленного комплекса, занимает важное место в экономике Республики, выполняя функции локомотива экономического развития, улучшая при этом благосостояние населения.

## Список литературы

1. Чернушевич, Е. И. Экономика и организация сельскохозяйственного производства : учебно-методический комплекс / Е. И. Чернушевич. – Гродно : ГГАУ, 2010. – 23 с. – Текст: непосредственный.
2. Погребняк, Л. В. Интенсификация и проблемы повышения эффективности регионального продовольственного комплекса : специальность 08.02.03 : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук / Л. В. Погребняк. – М., 1987. – 20 с. – Текст: непосредственный.
3. Экономика сельского хозяйства: Учебник для студентов высших учебных заведений / Н. Я. Коваленко, Ю. И. Агирбов, Н. А. Серова [и др.]. – М. : ЮРКНИГА, 2004. – 384 с. – Текст: непосредственный.
4. Состояние агропромышленного комплекса Донецкой Народной Республики за январь-март 2020 года. – Текст: электронный // Министерство экономического развития Донецкой Народной Республики : официальный сайт. – 2015–2020. – URL: [http://mer.govdnr.ru/index.php?option=com\\_content&view=article&id=7987:sostoyanie-agropromyshlennogo-kompleksa-donetskoj-narodnoj-respubliki-za-yanvar-mart-2020-goda&catid=8:novosti&Itemid=141](http://mer.govdnr.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=7987:sostoyanie-agropromyshlennogo-kompleksa-donetskoj-narodnoj-respubliki-za-yanvar-mart-2020-goda&catid=8:novosti&Itemid=141) (дата обращения: 01.10.2020).

УДК 004.9:330.47

## ЦИФРОВИЗАЦИЯ ПРОДОВОЛЬСТВЕННОГО КОМПЛЕКСА СКВОЗЬ ПРИЗМУ ЭКСТЕРНАЛИЙ

*Пономаренко Н.Ш.*, канд. экон. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*n.ponomarenko@donnu.ru*

**Введение.** Стремительное развитие информационных технологий последовательно воздействовало на процесс преобразований в большинстве сфер деятельности, который включает такие направления как автоматизация и информатизация, цифровизация и цифровая трансформация.

Технологический прорыв в сферах системы связи, передачи и обработки данных, доступность к информационным ресурсам сети Интернет, глубина проникновения инструментов интеллектуального анализа данных в управление и создание цифровой среды оказало влияние на реальную жизнь, систему жизнеобеспечения людей и продовольственный комплекс, как одну из главных ее оставляющих.

Сингулярность цифровых технологий и платформ, их противоречивый и сквозной характер проникновения в тандеме с экстермальными факторами влияют на распределение ресурсов, изменяют инфраструктуру продовольственного комплекса, определяют приоритеты и стратегии его развития. В этой связи анализ дуальных экстерналий является весьма

актуальным и необходимым заинтересованным сторонам, представляющим все элементы инфрасистемы продовольственного комплекса.

**Цель исследования:** с помощью превентивного анализа определить последствия цифровизации продовольственного комплекса сквозь призму дуальности экстерналий.

**Основные результаты.** Продовольственный комплекс, как сложная растущая открытая динамическая система, генерирует беспрецедентный объем данных из неограниченного количества источников всех звеньев продовольственной цепи «производитель-потребитель» и в смежных областях. В результате обработки и обобщения этих огромных массивов данных с помощью цифровых технологий и платформ получают уникальные знания и информацию, которые могут использоваться, например, в определении качества основных видов сельскохозяйственной продукции и безопасности жизнедеятельности людей. Процесс цифровизации продовольственного комплекса воздействует на природу и людей, затрагивает все элементы и различные объекты его инфраструктуры. С этим воздействием и связано возникновение экстерналий, как результата производства, потребления товаров и услуг в виде некомпенсируемых внешних эффектов и действий одной стороны на другую.

В научной литературе [1; 2] такие внешние эффекты рассматриваются как экстерналии, связанные с взаимозависимостью функции полезности и производственной функцией. Внешние эффекты, приносящие выгоду для определенного внешнего субъекта, считают положительными экстерналиями. Внешние эффекты (дополнительные издержки), снижающие производительность или полезность для некоторого внешнего субъекта, определяют как отрицательные экстерналии.

Вареникин А. О. [3] трактует экстерналии как некомпенсируемые воздействия (положительные или отрицательные) одной стороны на другую, или как побочные результаты любой деятельности, которые касаются не непосредственных ее участников, а третьих лиц.

Обладая масштабным эффектом, обеспечивая информационную основу жизнедеятельности и коммуникаций, цифровизация создает положительные экстерналии в продовольственной сфере.

Они связаны с электронным институционализмом и технологической сингулярностью, например, повышением производительности труда, появлением электронной торговли, новых рабочих мест и профессий, фрилансеров, квалифицированных кадров, повышающих информационно-интеллектуальный потенциал предприятий и общества в целом. Увеличиваются технологические возможности хозяйствующих объектов продовольственного комплекса на основе применения цифровых технологий, мультисервисных услуг, высокой скорости передачи огромных объемов информации и возможности их облачного хранения.

Отметим положительные экстерналии цифровизации продовольственного комплекса:

- структурный потенциал – определяет иерархию системы – связи, роль и место каждой структурной единицы;

- потенциал функций управления – устанавливает пространственно-временные и причинно-следственные связи между элементами управляемой и управляющей систем;

- информационный потенциал – формирует информационную инфраструктуру и является связующим звеном между всеми элементами инфраструктуры, обеспечивает доступность информации и цифровых технологий;

- потенциал диверсификации – повышает устойчивость продовольственного комплекса, как системы в целом к внешним и внутренним деструктивным воздействиям;

- природно-ресурсный и экологический потенциалы – как совокупность природных возможностей территории;

- потенциал адаптивности – повышает устойчивость к воздействию деструктивных факторов.

Важно отметить отрицательные экстерналии, оказывающие негативное воздействие на окружающую среду, жизнь, здоровье людей и продовольственный комплекс Донецкой Народной Республики, как одну из главных составляющих системы жизнеобеспечения:

- обострение военно-политической обстановки оказало влияние на вывод капитала и отсутствие внешних инвестиций;

- из-за боевых действий произошли негативные эколого-экономические последствия: различного рода разрушения природных объектов, экологические ущербы, загрязнения, отходы и т.д.;

- экономическая блокада и ограничения свободного перемещения стали причиной низкого уровня доходов населения, нарушением инфраструктуры продовольственного комплекса и транспортной логистики;

- территориальная непризнанность не позволяет приобретать предприятиям лицензионное программное обеспечение.

Очевидно, что подвергшиеся внешнему воздействию в результате нестабильной военно-политической обстановки предприятия и население Донецкой Народной Республики, вынуждены самостоятельно компенсировать возникшие у них отрицательные экстерналии и различные виды ущерба.

**Заключение.** Раскрыта дуальность экстерналий цифровизации продовольственного комплекса, проявляющаяся в существовании положительных и отрицательных экстерналий. Существует значительный перечень внешних социально-экономических экстерналий. Компромиссной и взаимовыгодной для всех элементов инфраструктуры продовольственного комплекса может стать программа мер по интернализации экстерналий.



## Список литературы

1. Coase, Ronald H. «The Problem of Social Cost» / Journal of Law and Economics. – 1960. – P. 1–44.
2. Кузовкова, Т. А. Сущность и виды экстерналий развития инфокоммуникаций и подходы к оценке внешней социально-экономической эффективности отраслевой инфраструктуры / Т. А. Кузовкова, А. Д. Кузовков, Д. В. Кузовков. – Текст : электронный // Электронный научный журнал «Век качества». – 2017. – № 2. – С. 72–81. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/suschnost-i-vidy-eksternaliy-razvitiya-infokommunikatsiy-i-podhody-k-otsenke-vneshney-sotsialno-ekonomicheskoy-effektivnosti/viewer/свободный> (дата обращения: 20.10.2020).
3. Вереникин, А. О. Внешние эффекты (экстерналии) / А. О. Вереникин. – Текст : электронный // Глоссарий. – URL: [https://lpp.econ.msu.ru/glossary/Article.20110325\\_6258/](https://lpp.econ.msu.ru/glossary/Article.20110325_6258/) (дата обращения: 20.10.2020).

УДК 519.688

## РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ВЕБ-СЕРВИСЕ MATH PARTNER

*Рыбаков М.А., Рыбакова Н.С., Киселева Т.Н.*

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»,  
г. Тамбов, РФ  
*mikhail08101987@mail.ru*

**Введение.** С помощью современных систем компьютерной алгебры (СКА) можно решать множество математических задач, используя различные функции и функциональные матрицы, получая при этом точные численно-аналитические решения и решения с нужной степенью точности числовых коэффициентов.

В современном мире всё большее и большее значение в прикладной математике и информатике приобретают облачные системы символьных вычислений, в которых вычисления производятся на сервере. Одной из первых и наиболее полной в этом классе является СКА Math Partner (<http://mathpar.com>).

В настоящее время количество автоматизируемых объектов в самых разных технических областях постоянно расширяется и автоматизируются все более сложные объекты управления. Анализ и расчет характеристик систем автоматического управления (САУ) является важной научно-практической проблемой, имеющей высокую актуальность и большое значение в научных исследованиях и инженерных расчетах.

**Постановка задачи.** Системы автоматического управления являются *многоканальными*, если у них больше одной входной

переменной. Следовательно, объекты, которые имеют больше одной управляемой величины, также являются многоканальными, или объектами многоканального управления.

Допустим, что  $y_1, \dots, y_p$  - выходные переменные,  $u_1, \dots, u_m$  - параметры управления, а  $f_1, \dots, f_l$  - возмущающие воздействия. В таком случае уравнения многоканальных стационарных линейных систем и объектов можно записать как:

$$\sum_{j=1}^p a_{ij}(p)y_j = \sum_{j=1}^m b_{ij}(p)u_j + \sum_{j=1}^l c_{ij}(p)f_j, i = 1, \dots, p. \quad (1)$$

Здесь  $a_{ij}(p), b_{ij}(p), c_{ij}(p)$  обозначают полиномы от оператора дифференцирования с постоянными коэффициентами.

Для получения системы алгебраических уравнений будем использовать преобразование Лапласа для уравнения (1) при нулевых начальных условиях в результате:

$$\sum_{j=1}^p a_{ij}(s)Y_j(s) = \sum_{j=1}^m b_{ij}(s)U_j(s) + \sum_{j=1}^l c_{ij}(s)F_j(s), i = 1, \dots, p, \quad (2)$$

где  $Y_j(s) = L\{y_j(t)\}, U_j(s) = L\{u_j(t)\}, F_j(s) = L\{f_j(t)\}$ .

Для того чтобы описать многоканальные системы и объекты, используют передаточные функции. Передаточной функцией  $W_{ij}^u(s)$  (в изображениях Лапласа) по  $j$ -му параметру управления и  $i$ -му выходу является отношение [1]:

$$W_{ij}^u(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}. \quad (3)$$

Полученная передаточная функция вычисляется приравнением к нулю в системе (2) изображений всех возмущающих воздействий и параметров управления, кроме  $U_j(s)$ . В результате решения данной системы находим  $Y_i(s)$ . Следующим шагом разделим его на  $U_j(s)$  и получим в итоге передаточную функцию.

Подобным образом определяется передаточная функция  $W_{ij}^f(s)$  по  $j$ -му возмущающему воздействию и  $i$ -му выходу:  $W_{ij}^f(s) = \frac{Y_i(s)}{F_j(s)}$ . (4)

В случае многоканальных систем для полного описания необходимо  $p \cdot m$  передаточных функций по управлению и  $p \cdot l$  передаточных функций по возмущению. Эти функции записывают в матричном виде:

$$W^u(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^u(s) & \dots & W_{1m}^u(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{p1}^u(s) & \dots & W_{pm}^u(s) \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$W^f(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^f(s) & \dots & W_{1l}^f(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{p1}^f(s) & \dots & W_{pl}^f(s) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матрица (5) является матрицей передаточных функции по управлению (передаточной матрицей по управлению), матрица (6) –

матрицей передаточных функции по возмущению (передаточной матрицей по возмущению).

Допустим, что один из управляющих параметров будет дельта-функцией:  $u_j = \delta(t)$ , а остальные управляющие параметры и возмущающее воздействие равны нулю. Решение системы (2) при нулевых начальных условиях обозначим  $w_{1j}^u(t), w_{2j}^u(t), \dots, w_{pj}^u(t)$ . Данные функции называют весовыми, или импульсными, переходными функциями. Функция  $w_{ij}^u(t)$  называется *импульсной переходной, или весовой функцией*, по  $j$ -му параметру управления и  $i$ -му выходу т.к. описывает реакцию системы на  $i$ -выходе при действии в точке приложения  $j$ -ого параметра управления единичного импульса.

Матрицу  $W^u(t) = \begin{bmatrix} W_{11}^u(t) & \dots & W_{1m}^u(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{p1}^u(t) & \dots & W_{pm}^u(t) \end{bmatrix}$ , состоящую из весовых

функций по управлению, называют *импульсной переходной, или весовой матрицей по управлению*.

*Импульсная переходная, или весовая матрица по возмущению*, определяется следующим образом:

$W^f(t) = \begin{bmatrix} W_{11}^f(t) & \dots & W_{1l}^f(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{p1}^f(t) & \dots & W_{pl}^f(t) \end{bmatrix}$ . Здесь  $w_{1j}^f(t), w_{2j}^f(t), \dots, w_{pj}^f(t)$ -

решение системы (1), когда  $f_j = \delta(t)$ , а все остальные возмущающие воздействия и параметры в данном случае равны нулю.

**Заключение.** В настоящее время в системе Math Partner встроен расчет динамических характеристик для одноканальных САУ. Предполагается, что на этой основе и с применением алгоритмов решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в СКА Math Partner будут разработаны алгоритмы для расчета следующих динамических характеристик многоканальных САУ:

- передаточной матрицы по управлению;
- передаточной матрицы по возмущению;
- весовой матрицы по управлению;
- весовой матрицы по возмущению.

Кроме того, в системе Math Partner имеется интерфейс для решения задач на кластере ИСП РАН. Применение этого интерфейса позволяет возвращать результаты вычислений пользователю системы Math Partner в привычном графическом виде. Мы планируем дополнить пакет параллельных программ и сделать возможным расчет динамических характеристик САУ большого масштаба на кластере с распределенной памятью.

## Список литературы

1. Глазков, С. А. Алгоритмы решения дифференциальных уравнений в Math Partner / С. А. Глазков. – Текст : непосредственный // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – Том 23. – Вып. 122. – Тамбов : Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 2018. – С. 250–260.
2. Малашонок, Г. И. Решение систем линейных дифференциальных уравнений и расчет динамических характеристик систем управления в веб-сервисе Math Partner / Г. И. Малашонок, М. А. Рыбаков. – Текст : непосредственный // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – Том 19. – Вып. 2. – Тамбов : Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 2014. – С. 517–529.
3. Рыбаков, М. А. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа / М. А. Рыбаков. – Текст : непосредственный // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – Том 14. – Вып. 4. – Тамбов : Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 2010. – С. 791–792.

УДК 005.92:364

## ДОКУМЕНТИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБЩЕСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ПО РЕШЕНИЮ СОЦИАЛЬНЫХ ВОПРОСОВ ГРАЖДАН

*Филатова Я.В.*, канд. экон. наук, *Харакиоз А.В.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*ya.filatova@donnu.ru*

**Введение.** На современном этапе развития государственности Донецкой Народной Республики (ДНР) возросла необходимость участия общества в обеспечении защиты прав и свобод граждан. Правовая основа взаимодействия общества и государства посредством институтов гражданского общества установлена Конституцией ДНР, Гражданским кодексом ДНР и Законом ДНР «Об обращениях граждан» от 20.02.2015 № 13-ІНС (действующая редакция по состоянию на 12.09.2020).

Общественное движение является наиболее распространенной организационно-правовой группой общественных объединений ДНР. К сожалению, сведений об их деятельности, находящихся в открытом доступе, не достаточно, чтобы делать выводы об их эффективности в качестве институтов защиты и реализации социальных прав граждан. Однако, учитывая, что становление гражданского общества в ДНР находится на ранней стадии, факт существования подобных организаций свидетельствует о наличии необходимости общества в институтах гражданского общества, способных выражать и отстаивать нужды отдельно

взятых членов социума и его групп, выявлять реальные потребности населения, решать наболевшие вопросы, требующие срочного решения.

**Целью исследования** является описание алгоритма организации работы с обращениями граждан в Общественном движении «Донецкая Республика».

**Основная часть.** Общественное движение «Донецкая Республика» (далее – ОД «ДР») является добровольным общественным объединением, созданным в целях участия граждан ДНР в политической жизни общества.

Особый интерес для исследования представляет регламент работы общественных приемных, разработанный в соответствии с действующим законодательством ДНР и утвержденный Председателем ОД «ДР» от 11.12.2017 [1]. Регламент определяет организацию работы с обращениями граждан, правила регистрации, учета и контроля за их исполнением, анализ и порядок отчетности о работе с обращениями граждан.

Общественная приемная (ОП) Председателя Общественного движения «Донецкая Республика» – место, предназначенное для обращения граждан к Председателю ОД «ДР», а также проведения приема граждан руководителями органов государственной власти, органов местного самоуправления, депутатами Народного Совета ДНР, должностными лицами для реализации своих прав и законных интересов.

Организацию приема граждан организует руководитель приемной. Информация об организации приема граждан обнародуется руководителем приемной через средства массовой информации или путем публикации на официальном сайте органа, руководитель которого осуществляет прием с указанием телефонного номера приемной, адреса и электронной почты.

Делопроизводство по обращениям граждан относится к обязанностям руководителя приемной и куратора ОП Председателя ОД «ДР». Лучше понять последовательность действий и взаимосвязь процессов приема, рассмотрения и решения социальных вопросов граждан в ОП Председателя ОД «ДР» поможет визуализированный алгоритм, разработанный авторами исследования (рис. 1).

Необходимо отметить, что письменные обращения рассматриваются в течение 30 календарных дней со дня регистрации, а те, которые не требуют дополнительного изучения, – безотлагательно, но не позднее 15 календарных дней со дня их получения. В исключительных случаях этот срок может быть продлен до 45 календарных дней [1].

Предложения, заявления и жалобы граждан и содержащиеся в них замечания с целью своевременного устранения порождающих их причин, систематически анализируются и обобщаются. К обязательным видам отчетности можно отнести следующие формы: 1-М Министры; 1-М Главы; 1-М Депутаты; сводная по депутатам; вопросы, решаемые на местном уровне; служебная информация.

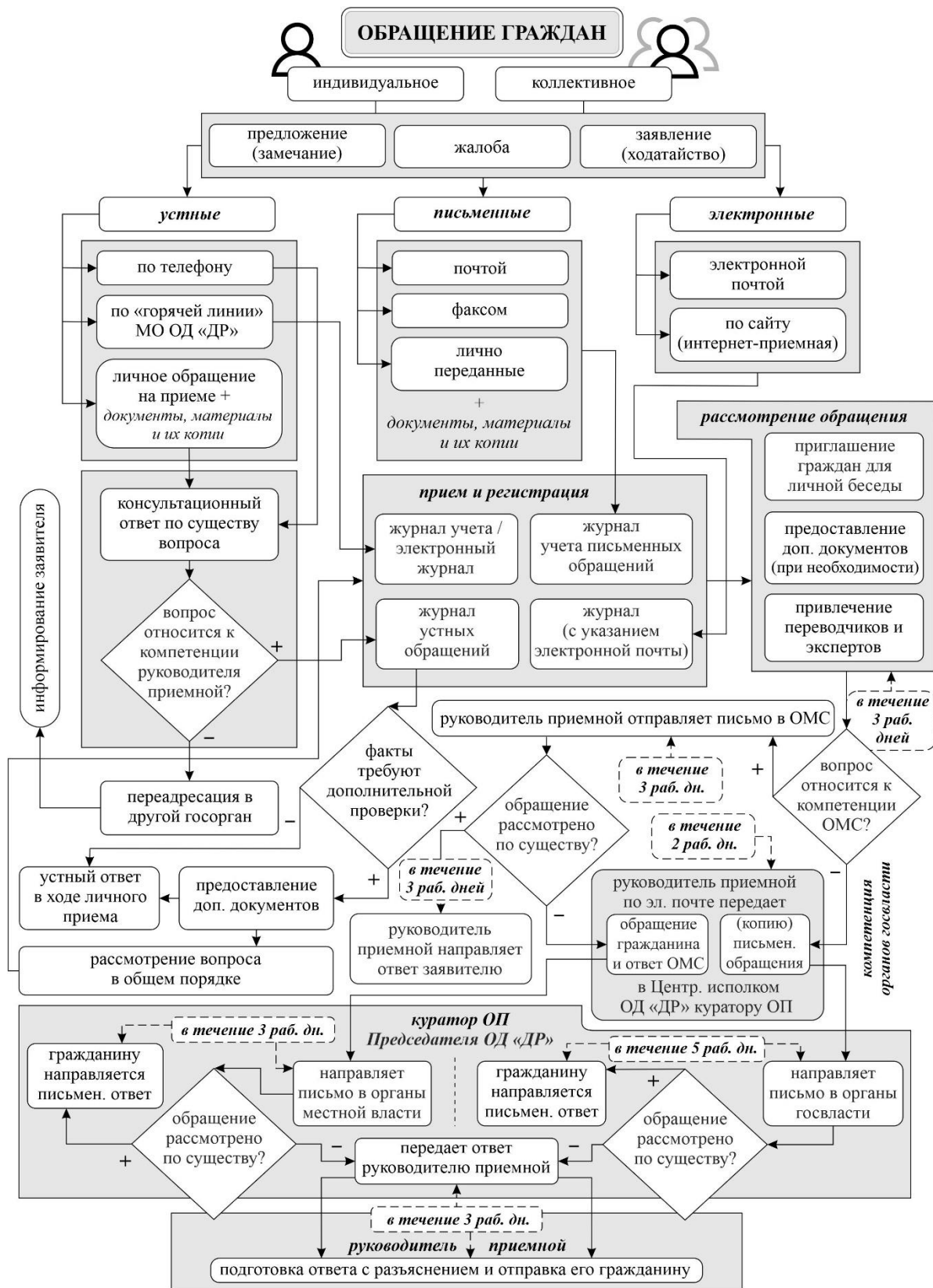


Рис. 1. Алгоритм организации работы с обращениями граждан в ОП Председателя ОД «ДР», авторская разработка

Примечание: ОП – общественная приемная, ОД «ДР» – Общественное движение «Донецкая Республика», ОМС – орган местного самоуправления, МО – местное отделение.

Среди основных вопросов, по которым обращаются граждане, можно выделить следующие: материальная помощь, получение социальных льгот; гуманитарная помощь; трудоустройство; здравоохранение; образование; жилищно-коммунальные вопросы; восстановление разрушенного жилья; транспорт; связь; жалобы на органы власти; охрана правопорядка, жалобы на действия военных; торговля; экономика; вступление в общественное движение, сотрудничество; получение справочной информации.

**Заключение.** Представленный авторами алгоритм позволит проследить движение обращений граждан от получения до отправки ответа гражданину в Общественном движении «Донецкая Республика» с учетом всех возможных вариантов его рассмотрения.

### **Список литературы**

1. Регламент работы общественных приемных Председателя Общественного движения «Донецкая республика» : [утвержден Председателем Общественного движения «Донецкая республика» А. В. Захарченко от 11 декабря 2017 г.]. – 2017. – 7 с.

УДК 331.101.5

## **ПАРАМЕТРЫ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ РАБОЧЕЙ СИЛЫ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ**

*Химич Э.В.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*e.himich@donnu.ru*

**Введение.** Конкуренция занимает важное место в системе социально-трудовых отношений. Работники конкурируют между собой за получение более престижного и высокооплачиваемого места, а работодатели в свою очередь стремятся привлечь более квалифицированные кадры. Шансы работника на получение желаемого места, определяются уровнем его конкурентоспособности.

Многие авторы определяют конкурентоспособность рабочей силы, как степень развития используемых в процессе трудовой деятельности способностей индивидуума и его квалификации. Конкурентоспособность индивидуума показывает, в какой мере его возрастные, профессионально-квалификационные, физиологические, социально-бытовые характеристики соответствуют требованиям, предъявляемым к рабочей силе на рынке труда [2, 3].

**Цель работы** – выявление влияния цифровизации на изменение конкурентоспособности рабочей силы.

**Основная часть.** Стремительное развитие информационных технологий положило начало появлению цифровой экономики.

В эпоху развития цифровой экономики требуются совершенно новые компетенции и навыки у рабочей силы – цифровые. Базовых знаний, таких как: умение грамотно писать, хорошо поставленная речь и владение офисными программами на уровне продвинутого пользователя, становится недостаточно.

Для более эффективного использования цифровых технологий, сотрудники должны обладать оптимальным сочетанием следующих качеств: коммуникабельность и взаимодействие с другими людьми, быстрое восприятие информации и легкообучаемость, нестандартное и критическое мышление, умение работать в команде, инициативность, рациональное использование рабочего времени.

Безусловно, цифровизация общества имеет ряд положительных сторон: появление рабочих мест и занятости нового типа, дистанционное обучение и работа в удаленном режиме, изменяется при этом и характер условий труда, а также квалификационные требования для работников. Выделяя положительные стороны цифровизации, нужно отметить и негативные, которые проявляются: в массовом высвобождении рабочей силы; автоматизация и роботизация процессов может привести к риску роста уровня безработицы в стране, что обусловит усиление конкуренции рабочей силы.

В процессе цифровизации происходят изменения к требованиям рабочей силы, так для адаптации к цифровой инфраструктурной среде, от сотрудников недостаточно тех знаний, которыми они обладали, необходимо овладение новыми типами цифровых знаний.

Подготовка нового поколения специалистов, которые будут отвечать современным требованиям цифровой экономики, требует кардинального изменения в системе среднего и высшего образования для формирования необходимых компетенций. Важно отметить, необходимость внедрение STEM-подходов и STEM-технологий (S – science, T – technology, E – engineering, M – mathematics). Данные изменения нуждаются в финансовой поддержке государства для надлежащего обеспечения материально-технической базы, для подготовки рабочей силы, которая соответствовала бы современным требованиям рынка труда.

Новая модель обучения предполагает формирование у специалистов таких навыков, как:

- развитие «гибких навыков» и ИТ-навыков;
- масштабное использование информационно-коммуникационных технологий и цифровых технологий;
- работа в режиме многозадачности с использованием цифровых технологий;
- быстрый поиск и фильтрация данных и цифрового контента;



- работа в режиме онлайн с возможностью обратной связи с помощью цифровых технологий;
- умение работать с цифровым контентом: редактирование, наполнение;
- распознавание рисков и угроз в цифровой среде;
- способность обеспечить безопасность устройств и цифрового контента.

Внедрение цифровых рабочих мест имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными:

- повышение эффективности работоспособности персонала;
- обеспечение благоприятных условий труда,
- возможность работать дома, без привязки к физическому месту;
- гибкий график работы;
- возможность обратной связи;
- сокращение издержек на аппаратное обеспечение, офисные помещения и др.

В процессе цифровизации значительно снизилась роль формальных дипломов и сертификатов об образовании.

Работодатели обращают внимание помимо личностных качеств работников, на их умение оперативно реагировать и находить решение в сложных ситуациях, работать в режиме многозадачности, наиболее важной способностью сейчас является способность принятия управленческих решений в критической ситуации, а также, как отмечалось выше, наличие желаемых «цифровых навыков» у кандидатов.

Развитие цифровой экономики, требует быстрого реагирования на трансформации рынка труда, скоординированных действий государства и учебных заведений по подготовке и переподготовке персонала, а также трудоустройству.

Кардинальные изменения терпит существующая система социально-трудовых отношений. Рассматривая человеческий капитал, как основу источников богатств, появляется необходимость переосмысления концепции сознания «максимизация прибыли» на «максимизацию полезности».

**Заключение.** Таким образом, развитие цифровой экономики является многогранным процессом, который осуществляет как положительное, так и негативное влияние на занятость. И это необходимо учитывать при оценке будущих последствий развития цифровых технологий, в том числе в сфере занятости [1].

Цифровизация может способствовать повышению уровня безработицы, а, следовательно, и обострению конкуренции на рынке труда. К рабочей силе предъявляются совершенно новые параметры конкурентоспособности, а именно, наличие деловых и межличностных качеств, «гибких навыков» и цифровых компетенций.

Главное – понять, что переход на новые технологии неизбежен.

## Список литературы

1. Ковбаско, А. Н. Трансформация занятости в условиях развития цифровой экономики / А. Н. Ковбаско. – Текст : непосредственный // Современные проблемы рынка труда и занятости в контексте политики быстрого экономического роста: материалы заседания круглого стола (г. Киев, 17 май. 2018). – М. : ИПК ГСЗУ, 2018. – С.34–38.
2. Томилов, В. В. Маркетинг рабочей силы : учебное пособие / В. В. Томилов, Л. Н. Семеркова. – СПб. : Издательство СПГУЭиФ, 1997. – 84 с. – Текст : непосредственный.
3. Фатхутдинов, Р. А. Стратегический менеджмент : учебник / Ране Ахметович Фатхутдинов. – 7-е изд., исправлено и дополнено. – Москва : Издательство «Дело», 2005. – 448 с. – Текст : непосредственный.

УДК 004.78:351

## ПРОБЛЕМЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОНТЕНТОМ ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСОВ

*Хромова М.Н.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, ДНР  
*khromovamaria96@gmail.com*

**Введение.** Системы управления контентом (CMS) были разработаны для максимального облегчения самостоятельного наполнения интернет-ресурсов компании тематическим содержимым для определенной целевой аудитории без привлечения услуг контент-разработчиков, веб-дизайнеров и других представителей зоны фриланса.

Проблематика систем управления контентом, их преимущества и болевые точки исследованы в работах многих отечественных ученых и специалистов в области интернет-менеджмента и информационных технологий, в том числе, таких как Д. Е. Васильев, А. Д. Кузин и др.

Главная особенность любой системы CMS заключается в том, что для заполнения интернет-ресурса внутри самой системы не требуются особых умений в области IT-технологий и программирования. Для успешной и эффективной реализации в использовании достаточно внимательно прочитать инструкцию по эксплуатации или же посмотреть обучающий видеоролик, далее освоить интерфейс самой системы с помощью пошаговых подсказок, заранее встроенных в каждую CMS, и освоить принцип работы.

Основные функции CMS следующие:

- изначально заложенный простейший интерфейс для создания наполнения содержимым;

- управление созданным контентом: хранение, история изменений версий, соблюдение режима доступа, управление потоком документов и т.п.;

- публикация наполнения интернет-ресурса [1].

**Основная часть.** На данном этапе развития контент-менеджмента существует достаточное количество CMS-систем, предлагаемых разработчиками как в популярных приложениях бесплатного общего доступа, так и на платной основе с помощью ежемесячной подписки или единоразовой покупки. Разница между подпиской и платным скачиванием CMS в целом состоит в том, что ежемесячная платная подписка включает в стоимость круглосуточную техподдержку по любым вопросам и автоматическую установку новейших обновлений от разработчиков данной CMS. Платное скачивание подобных систем без подписки предполагает самостоятельный поиск и подключение обновлений и расширений в дальнейшем. Среди наиболее популярных бесплатных версий можно выделить CMS WordPress, Joomla! и Drupal.

Лидирующие позиции рейтинга коммерческих продуктов возглавляет CMS российского производства 1С-Битрикс; также в топ-10 вошли популярные продукты, такие как UMI.CMS и Net.Cat [2].

Главным достоинством систем управления контентом, как основного инструмента разработки веб-ресурсов, является минимизация затрат компании на разработку и дальнейшее планирование стратегии управления веб-источника. Это заключается в существенной экономии на услугах фрилансеров и IT-технологов, так как простейший функционал системы позволяет самостоятельно создать проект простого веб-ресурса сотруднику, не имеющему специальных навыков программирования. При выборе свободно распространяемой CMS снижаются затраты на покупку и обновление продукта, и от владельца ресурса требуется лишь оплата аренды сервера и доменного имени.

Еще одним преимуществом является унификация кода, достигаемая за счет использования в CMS типовых функций и процедур. Простые макеты веб-страниц создаются путем установки и настройки типовых модулей CMS с помощью простого интерфейса с отличной технической поддержкой. Графическое оформление устанавливается одновременно с системой CMS, а наполнение веб-страницы нужным информационным и графическим контентом представляет собой текстовый редактор, аналогичный большинству популярных приложений.

Также несомненным плюсом считается высокий уровень безопасности веб-страниц, разработанных для любого вида CMS. Фундамент безопасного использования системы заключается в шифровании создателями спец кодов, а поскольку CMS универсальны и предназначены для использования большинством, то можно говорить об их относительной устойчивости к попыткам взлома из-за постоянных обновлений самого фундамента системы и массового контроля со стороны пользователей. Создатели «уникально написанных интернет-ресурсов» часто усложняют управление ими, не акцентируя внимания на проблеме обеспечения информационной

безопасности, и зачастую перестают их поддерживать, что приводит к быстрому изнашиванию таких ресурсов и появлению в них уязвимых точек, что приводит к снижению уровня защиты.

Достоинством CMS также является то, что она удобно интегрирована с поисковыми системами и социальными сетями. Исходя из популярности CMS, большинство глобальных поисковиков и социальных сетей унифицировали процесс интеграции с веб-страницами, разработанными на основе CMS, что предоставляет разработчикам и пользователям таких систем дополнительные возможности [3].

В то же время, некоторые достоинства CMS являются и их недостатками. Главным из них оказывается доступность кодировки большинства ресурсов управления контентом. Открытый доступ шифрования приводит к тому, что любой пользователь имеет возможность внедрить в ядро CMS изменения (так называемые «инъекции»), из-за чего основанный на этой CMS ресурс становится потенциально уязвимым для несанкционированного вмешательства.

Вторым недостатком является низкая ответственность IT-технологов за качество и недостаточная безопасность расширений для плагина, разработанных ими для разнообразных CMS. Максимум, что может грозить технологам за недостаточно качественное расширение, обновление или прекращение его поддержки, это исключение созданного ими плагина из хранилища CMS. Такая ситуация приводит к появлению большого количества неоконченных либо недостаточно проверенных расширений. Будучи доступными для использования, они представляют потенциальную угрозу для владельца интернет-ресурса из-за наличия множества слабых мест.

Третий важный недостаток заключается в достаточно простых комбинациях уязвимостей, которые характерны для всех веб-страниц, созданных на основе одноплатформенных CMS. Опытный хакер за минимально количество времени сможет определить основу веб-ресурса CMS и подобрать ключ продукта исходя из его аналогичных представителей.

**Заключение.** Основываясь на изложенном выше, можно сделать вывод, что сложившаяся ситуация обуславливает особую актуальность программирования новых технологий, позволяющих выявлять и оперативно ликвидировать слабые места в веб-страницах, созданных на основе наиболее популярных CMS.

Предлагаемое решение заключается в детальном изучении проблематики информационной безопасности веб-страниц и уязвимости фундамента виртуальных систем не только с позиции «защиты» от них, т.е. предупреждения их возникновения на этапе разработки уникального программного кода, но и с позиции «атаки», т.е. их активного поиска, выявления и ликвидации в уже работающих ресурсах, в том числе созданных с применением наиболее распространенных CMS.

Для реализации данного метода должны быть спроектированы тематические онлайн-тренинги, курсы на базе различных тестовых интернет-ресурсов, сгенерированных ботов с комплексом типичных разновидностей сбоев системы безопасности и ошибок систем CMS. Такой тип можно внедрить в систему подготовки администрирования CMS для демонстрации признаков уязвимостей и тактики их обнаружения. Обучающиеся смогут использовать эти приложения в качестве виртуальных тренажеров, на которых будут отрабатывать практические навыки выявления, диагностирования и устранения изучаемых уязвимостей.

### **Список литературы**

1. Савельева, Н. Системы управления контентом / Н. Савельева. – 21.04.2004. – Текст : электронный // OSP – Гид по технологиям цифровой трансформации : [сайт]. – 2004. – URL: <https://www.osp.ru/os/2004/04/184166> (дата обращения: 06.10.2020).
2. Рейтинг CMS 2019. – Текст : электронный // Рейтинг Рунета : [сайт]. – 2019. – URL: <http://www.ratingruneta.ru/cms/> (дата обращения: 04.10.2020).
3. Рудинский, И. Д. Системы управления контентом как инструментарий разработки интернет-ресурсов / И. Д. Рудинский, М. Ю. Михайловский. – Текст : электронный // Вестник науки и образования Северо-Запада России. – 2016. – № 4. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sistemy-upravleniya-kontentom-kak-instrumentariy-razrabotki-internet-resursov> (дата обращения: 10.10.2020).

# Математический анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.927.4

## О РАЗНОСТИ РЕЗОЛВЕНТ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

*Агибалова А.В.*, канд. физ.-мат. наук  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*kf.madu@donnu.ru*

В течение последних двадцати лет одномерные возмущения самосопряжённых операторов интенсивно изучались Саймоном, Дель Рио Макаровым и многими другими авторами в связи с проблемой устойчивости точечного спектра и при изучении сингулярного непрерывного спектра (см. [1], [2] и обзор [3]). Некоторые результаты можно найти в работах [4] и [5]. Для возмущений компактных самосопряжённых операторов (или самосопряжённых операторов с компактной резольвентой), но возмущения которых уже не самосопряжённые, спектральная структура становится неожиданно богатой и сложной, как только покинуть классы, охватываемые классическими теориями. Больше результатов содержится в работе [6].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Ly = -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \text{col}(y_1, y_2), \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

с невырожденной матрицей  $B$  и комплекснозначной потенциальной матрицей  $Q$ :

$$B = \text{diag}(b_1, b_2) \text{ и } Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix} \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{2 \times 2}). \quad (2)$$

К уравнению (1) сначала присоединим граничные условия  $U_j(y) := a_{j1}y_1(0) + a_{j2}y_2(0) + a_{j3}y_1(1) + a_{j4}y_2(1)$ ,  $j \in \{1,2\}$ , (3) предполагая, что линейные формы  $\{U_j\}_{j=1}^2$  линейно независимы.

Пусть  $\Phi(x, \lambda)$  – фундаментальная матрица системы (1):

$$\Phi(x, \lambda) := (\Phi_1(x, \lambda) \quad \Phi_2(x, \lambda)).$$

Собственные значения задачи (1) – (3) есть корни характеристического уравнения  $\Delta(\lambda) := \det U(\lambda) = 0$ , где

$$U(\lambda) := \begin{pmatrix} U_1(\Phi_1(x, \lambda)) & U_1(\Phi_2(x, \lambda)) \\ U_2(\Phi_1(x, \lambda)) & U_2(\Phi_2(x, \lambda)) \end{pmatrix}.$$

Далее, обозначим

$$A_{jk} := \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{pmatrix} \text{ и } J_{jk} := \det A_{jk}, \quad J_{jk} \in \{1, \dots, 4\}.$$

Теперь рассмотрим систему (1) с граничными условиями специального вида  $\tilde{U}_1(y) := y_1(0) - h_1 y_2(0) = 0$ ,  $\tilde{U}_2(y) := y_1(1) - h_2 y_2(0) = 0$  (4) Здесь  $h_1, h_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , а через  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  обозначим её характеристический определитель.

В пространстве  $\mathfrak{X} = L^2([0,1]; \mathbb{C}^2)$  обозначим через  $L_{U_1, U_2}$  оператор, ассоциированный с задачей (1)–(3), а через  $L_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2}$  оператор, ассоциированный с задачей (1), (2), (4).

В следующей теореме даётся простое алгебраическое условие на коэффициенты общей задачи (1)–(3), обеспечивающее одномерность разности резольвент операторов  $L_{U_1, U_2}$  и  $L_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2}$ . Более того, приводится явная форма этой разности.

**Теорема.** Пусть  $L_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2} \neq L_{U_1, U_2}$  и  $\lambda \in \rho(L_{U_1, U_2}) \cap \rho(L_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2})$ .

(i) Тогда разность резольвент  $R_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1, U_2}(\lambda)$  одномерна тогда и только тогда, когда

$$J_{34}h_2 + J_{14}h_1 = J_{42}. \quad (5)$$

(ii) Пусть условие (5) нарушено и к тому же

$$\gamma(\lambda) := J_{14} + J_{34}\varphi_{11}(\lambda) \neq 0.$$

Тогда разность резольвент  $R_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1, U_2}(\lambda)$  допускает представление

$$(R_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2}(\lambda) - R_{U_1, U_2}(\lambda))f = (f, \Psi^*(\cdot, \lambda)\beta(\lambda))_{L^2([0,1]; \mathbb{C}^2)} \cdot \Phi(\cdot, \lambda)\alpha(\lambda),$$

где  $\Psi(\cdot, \lambda) := i\Phi(1, \lambda)\Phi^{-1}(\cdot, \lambda)B$ , а  $f \in L^2([0,1]; \mathbb{C}^2)$ . Вектор-функции  $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\beta = \text{col}(\beta_1, \beta_2)$ , задаются равенствами

$$\alpha_1(\lambda) = h_1 - \frac{J_{34}\tilde{\Delta}(\lambda)}{\gamma(\lambda)}, \quad \alpha_2(\lambda) = 1, \\ \overline{\beta_1(\lambda)} = \frac{J_{13} - J_{34}\varphi_{21}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad \overline{\beta_2(\lambda)} = \frac{\gamma(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

## Список литературы

1. Del Rio R. Operators with singular continuous spectrum. II. Rank one operators / R. Del Rio, N. Makarov, B. Simon // Comm. Math. Phys. –1994. – V. 165, №1. – P. 59–67.
2. Lunyov A. A. On spectral synthesis for dissipative Dirac type operators / A. A. Lunyov, M. M. Malamud // Integr. Equations and Oper. Theory. – 2014. – V. 80, №1. – P. 78–106.
3. Liaw C. Rank one perturbations and singular integral operators / C. Liaw, S. Treil // J. Funct. Anal. – 2009. – V. 257, №6. – P. 1947–1975.
4. Albeverio S. Decompositions of singular continuous spectra of H.2-class rank one perturbations / S. Albeverio, A. Konstantinov, V. Koshmanenko // Integral Equations Operator Theory. – 2005. – V. 52, №4. – P. 455–464.
5. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.– М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – с. 448.
6. Agibalova A. V. Completeness Property of One-Dimensional Perturbations of Normal and Spectral Operators Generated by First Order Systems / A. V. Agibalova, A. A. Lunyov, M. M. Malamud, L. L. Oridoroga // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2019. – V. 91, No. 37, <https://doi.org/10.1007/s00020-019-2535-1>.

## РАСШИРЕНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЯКОБИ

*Ананьева А.Ю.,*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*ananeva89@gmail.com*

Пусть  $A$  – плотно определенный неотрицательный симметрический оператор в гильбертовом пространстве  $H$ . Поскольку  $A$  неотрицателен, то по теореме Фридрихса-Крейна он допускает неотрицательные самосопряженные расширения. Квалифицированное описание всех неотрицательных самосопряженных расширений  $A$ , а также критерий единственности неотрицательного самосопряженного расширения  $A$  впервые были даны Крейном в [7]. Его результаты были обобщены в многочисленных статьях (см. [2, 5, 6] и ссылки в них).

Среди всех неотрицательных самосопряженных расширений  $A$  два (экстремальных) расширения особенно интересны и достаточно важны, чтобы у них было название. Расширение Фридрихса (так называемое «жесткое» расширение)  $A_F$  является «наибольшим» в смысле квадратичных форм.  $A_F$  – самосопряженный оператор, связанный с замыканием симметрической формы

$$t[u, v] = (Au, v)_H, \quad u, v \in \text{dom}(A)$$

Если  $A$  положительно определен, то расширение Крейна («мягкое» расширение)  $A_K$  определяется как ограничение  $A^*$  на область

$$\text{dom}(A_K) = \text{dom}(\bar{A}) \dot{+} \ker(A^*).$$

Пусть  $A_j, B_j \in \mathbb{C}^{p \times p}$ . Кроме того, предположим, что матрицы  $A_j$  самосопряжены, а матрицы  $B_j$  обратимы для каждого  $j \geq 0$  (см. [3, гл. VII, 2]). Рассматриваем полубесконечную матрицу Якоби с матричными

элементами  $J = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & 0_p & \cdots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & \cdots \\ 0_p & B_1^* & A_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$

где  $0_p$  – нулевая матрица размера  $p \times p$ . Для последовательности  $u = (u_j)$ ,  $u_j \in \mathbb{C}^p$ ,  $Ju$  снова является последовательностью векторов-столбцов. Если мы положим  $B_{-1} = 0_p$ ,

$$(Ju)_j = B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j \geq 0.$$

Максимальный оператор  $T_{max}$  определим  $(T_{max})_j = (Ju)_j, j \geq 0$  на области  $\text{dom}(T_{max}) = \{u \in l_p^2 : Ju \in l_p^2\}$ . Минимальный оператор  $T_{min}$  – это замыкание в  $l_p^2$  предминимального оператора  $T$ , являющегося сужением  $T_{max}$  на область

$$\text{dom}(T) = \{u \in l_p^2 : u_j = 0 \text{ для всех, кроме конечного числа значений } j\}.$$

Через  $(P_j(z))$  обозначим решение матричного уравнения



$$(JU)_j = zU_j, j \geq 0.$$

С начальными условиями  $P_0(z) = I_p$ ,  $P_1(z) = B_0^{-1}(zI_p - A_0)$ . Здесь  $I_p \in C^{p \times p}$  – единичная матрица. Кроме того, через  $(Q_j(z))$  обозначим решение задачи

$$(JU)_j = zU_j, j \geq 1.$$

С  $Q_0(z) = 0_p$  and  $Q_1(z) = B_0^{-1}$ . Матричные функции  $P_j(z)$  и  $Q_j(z)$  являются полиномами от комплексной переменной  $z$  степени  $j$  и  $j-1$ , соответственно, с матричными коэффициентами. Отметим, что  $(P_j(z))$  и  $(Q_j(z))$  называются матричными многочленами первого и второго рода, соответственно.

Следуя [5], определим граничную тройку  $\Pi = \{H, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  для  $T_{max}$ , полагая

$$H = C^p, \Gamma_1 u = (Q(0))^* T_{max} u - P_0 u, \Gamma_0 u = (P(0))^* T_{max} u,$$

где  $u \in dom(T_{max})$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Pi = \{H, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  граничная тройка  $T_{max}$ , определенная выше. Тогда Крейнское расширение  $T_K$  совпадает с  $T_0$ , т.е.  $dom(T_K) = dom(T_{max}) / \ker(\Gamma_0) = \{u \in dom(T_{max}) : (P(0))^* T_{max} u = 0\}$ .

Оператор  $T_{min}$  является самосопряженным тогда и только тогда, когда ассоциированная проблема моментов Стильтеса детерминирована, т.е. имеет единственное решение. Поскольку  $n_{\pm}(T_{min})=1$ , детерминированность не имеет места и, следовательно, последовательность  $Q_j(0)$  сходится (см. [1, теорема 0.4, с. 293] или [4, Раздел 3]). Существование этого предела является ключевым фактом для описания расширения Фридрихса, которое мы собираемся представить. В частности, предел  $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(0)}{P_j(0)}$  отрицателен.

**Теорема 1.** Пусть  $\Pi = \{H, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  граничная тройка  $T_{max}$ , определенная выше. Область определения расширения по Фридрихсу задается формулой

$$dom(T_F) = \{u \in dom(T_{max}) : (\Gamma_1 - \alpha \Gamma_0) u = 0\}.$$

### Список литературы

1. Akhiezer N.I. The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis, Transl. by N. Kemmer, Hafner Publishing Co., New York, 1965.
2. Arlinskii Yu., Tsekanovskii E. The von Neumann Problem for Nonnegative Symmetric Operators // Integr. Equ. Oper. Theory, 2005. – V. 51. – P. 319–356.
3. Berezansky Yu.M. Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators/ Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
4. Berg C. Markov's theorem revisited // J. Approx. Theory, 1994. – V. 78, № 2. – P. 260–275.
5. Derkach V.A., Malamud M.M. Generalized resolvent and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – V. 95, № 1. – P. 1–95.
6. Derkach V.A., Malamud M.M. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem // J. Math. Sci. (New York). – 1995. – V. 73. – P. 141–242.
7. Krein M.G. The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian transformations and its applications // I. Sb. Math. – 1947. – V. 20, № 3. – P. 431–495.

## ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО В СРЕДНЕМ ПРОДОЛЖЕНИЯ

**Волчков В.В.**, д-р физ.-мат. наук, проф.,

**Волчков Вит.В.**, д-р физ.-мат. наук, проф.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com

Пусть  $\mathbb{R}^n$  – вещественное евклидово пространство размерности  $n$  с евклидовой нормой  $|\cdot|$ . Обозначим  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$  (соответственно,  $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ ) пространство распределений (соответственно, распределений с компактными носителями) в области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  – пространство финитных бесконечно дифференцируемых в  $\mathcal{O}$  функций,  $\mathcal{E}(\mathcal{O}) = C^\infty(\mathcal{O})$ . Пусть  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $T \neq 0$ ,  $\text{supp } T$  – носитель  $T$ ,  $\mathcal{O}^T = \{x \in \mathbb{R}^n : x - y \in \mathcal{O} \text{ для любого } y \in \text{supp } T\}$ . Предположим, что множество  $\mathcal{O}^T$  является непустым. Тогда для всякого  $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$  свертка  $f * T$  определяется равенством  $\langle f * T, \varphi \rangle = \langle f_y, \langle T_x, \varphi(x + y) \rangle \rangle$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}^T)$ , как распределение в  $\mathcal{D}'(\mathcal{O}^T)$  (индекс внизу у распределений  $f$  и  $T$  означает действие по указанной переменной). Распределения из класса  $\mathcal{D}'_T(\mathcal{O}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}) : f * T = 0 \text{ в } \mathcal{O}^T\}$  называются периодическими в среднем в области  $\mathcal{O}$  относительно  $T$ . Если  $\mathfrak{M}(\mathcal{O})$  – некоторое подмножество в  $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ , то для пересечения  $\mathcal{D}'_T(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{M}(\mathcal{O})$  будем использовать символ  $\mathfrak{M}_T(\mathcal{O})$ . Например,  $C^\infty_T(\mathcal{O}) = \mathcal{D}'_T(\mathcal{O}) \cap C^\infty(\mathcal{O})$ .

В работе [1] исследовался следующий вопрос: при каких условиях на измеримое множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  произвольная функция  $f \in L^2(E)$  может быть продолжена до функции класса  $(L^2_{loc} \cap \mathcal{D}'_T)(\mathbb{R}^n)$ ? Было показано [1, теорема 1], что указанное продолжение возможно, если  $T$  имеет вид

$$T(x) = \begin{cases} (r^2 - |x|^2)^s \varphi(|x|^2), & |x| < r, \\ 0, & |x| \geq r, \end{cases}$$

где  $r > 0$ ,  $s > -1$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(r^2) \neq 0$ , а множество  $E$  имеет диаметр, меньший чем  $2r$ . Для множеств  $E$  с диаметром  $2r$  и более данное утверждение, вообще говоря, неверно. Распространение этого результата на другие классы функций и исследование свойств возможных продолжений представляет большой интерес. Сформулируем одну из соответствующих проблем для непрерывного периодического в среднем продолжения.

**Проблема 1.** (i) Пусть  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $T \neq 0$  и  $E$  – непустое замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Пусть также  $f \in C(E)$ . При каких условиях существует  $F \in C_T(\mathbb{R}^n)$ , совпадающая с  $f$  на  $E$  ?

(ii) Если такое продолжение  $F$  существует, то что можно сказать о его росте на бесконечности?

Известно, что при  $n = 1$  в проблеме 1 существует продолжение не выше экспоненциального роста, если  $E \subset (-r, r)$  и  $T$  имеет вид

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-r}^r \varphi(t) d\sigma(t), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \quad (1)$$

где  $\sigma$  – функция ограниченной вариации со скачками в точках  $\pm r$  (см. [1, теорема 5.1.9]). Для множества  $E = [-r, r]$  справедлив аналогичный результат, если продолжаемая функция  $f \in \mathcal{C}([-r, r])$  удовлетворяет дополнительному необходимому условию

$$\int_{-r}^r f(t) d\sigma(t) = 0. \quad (2)$$

Можно показать также, что существуют распределение  $T$  вида (1) и функция  $f \in C^\infty([-r, r])$ , удовлетворяющая (2), которая не продолжается даже до распределения класса  $\mathcal{D}'_T$  на некотором интервале, содержащем  $[-r, r]$  (см. [3, следствие 1]).

В случае произвольной размерности единственным из известных результатов по проблеме 1 является следующая теорема, полученная в [1]: если  $E \subset \mathbb{R}^n$  – произвольное ограниченное множество, содержащее две внутренние точки  $a, b$  с расстоянием  $2r$  между ними, то существует непрерывная функция  $f$  на  $E$ , которую нельзя продолжить даже до распределения класса  $\mathcal{D}'_T(B)$ , где  $B$  – произвольный открытый шар с центром в точке  $(a + b)/2$ , содержащий  $E$ .

В данной работе исследуется проблема 1 в случае, когда  $E$  является отрезком в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Оказалось, что, в отличие от результатов работы [1], для широкого класса распределений  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  и для непрерывных по Дини функций на  $E$  возможно продолжение до функции класса  $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}^n)$  независимо от длины отрезка  $E$ . Более того, для некоторых  $T$  аналогичный результат справедлив и для любой непрерывной функции на  $E$ . Получены также оценки скорости роста продолжений, которые в общем случае неулучшаемы. Одним из промежуточных результатов работы, представляющих самостоятельный интерес, является теорема о периодическом в среднем продолжении некоторых функций, вещественно аналитических на прямой. Из неё следует, в частности, результат о разрешимости интерполяционной задачи для решений уравнения свёртки с узлами интерполяции, лежащими на произвольном луче в  $\mathbb{R}^n$ .

### Список литературы

1. Зарайский Д.А. О множествах, на которых решения уравнения свертки допускают произвольное поведение / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ. – 2017. – Т. 31. – С. 90–96.
2. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Волчков В.В. О задаче продолжения решений однородных уравнений свертки / В.В. Волчков В.В., Вит.В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2011. – Т. 75, № 3. – С. 65–96.

## СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ

*Зарайский Д.А.*

ГУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, ДНР  
*d.zaraisky@gmail.com*

Обозначим  $B_R$  – открытый шар радиуса  $R$  с центром в начале координат в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^n$ ;  $B_{a,b}$  – открытый шаровой слой (в двумерном случае – кольцо) с внутренним и внешним радиусами  $a$  и  $b$  и центром в начале координат:  $B_{a,b} = \{x \in \mathbf{R}^n : a < |x| < b\}$ .

Для открытой области  $U$  в  $\mathbf{R}^n$  через  $V_r(U)$  будем обозначать класс локально-интегрируемых функций на  $U$ , имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса  $r$ , целиком лежащим в  $U$ .

Подмножество  $A$  области  $U$  будем называть *множеством единственности* для  $V_r(U)$ , если функции из  $V_r(U)$  однозначно определяются по своим ограничениям на  $A$  (т. е. если для  $f \in V_r(U)$  из  $f=0$  на  $A$  следует, что  $f=0$  на всём  $U$ ).

Известно [1], что шар  $B_{r+\varepsilon}$ ,  $r + \varepsilon < R$ , является множеством единственности для  $V_r(B_R)$ , а шар  $B_r$  – нет. См. [1-3] по поводу различных условий на гладкость функции  $f \in V_r(B_R)$  вблизи границы  $B_r$ , всё же обеспечивающих единственность в последнем случае.

В настоящей работе при чётном  $n$  мы даём пример множества единственности, являющегося объединением двух концентрических шаровых слоёв произвольно малой толщины. В отличие от известных ранее примеров, в нашем случае множество единственности может иметь сколь угодно малый объём (при фиксированном  $r$ ).

**Теорема.** Пусть размерность пространства –  $n$  – чётна и  $A$  – подмножество  $B_{a,b}$ , состоящее из двух шаровых слоёв:  $B_{\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon}$  и  $B_{\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon}$ , где  $\beta - \alpha = 2r$ , и  $0 < \varepsilon < \alpha$ .

Тогда если функция  $f \in V_r(B_{a,b})$  равна 0 на  $A$ , то  $f=0$  на всём  $B_{a,b}$ .

Отметим, что в случае нечётномерного пространства аналогичная теорема не имеет места.

### Список литературы

1. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 672 p.
2. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group. // J. Anal. Math. – 2008. – Vol. 105. – P. 43-124.

3. Зарайский Д.А. Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ. – 2012. – Т. 25. – С. 77-83.

УДК 517.5+519.213

## НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ЯДЕР

**Заставный В.П.**, д-р физ.-мат. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*zastavn@rambler.ru*

Пусть  $G$  – некоторое множество. Функция  $K : G \times G \rightarrow C$  называется положительно определенным ядром на  $G \times G$ , если для любого натурального  $n \in N$ , для каждого набора точек  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$  и чисел

$\{c_k\}_{k=1}^n \subset C$  выполняется неравенство 
$$\sum_{k,p=1}^n c_k \bar{c}_p K(x_k, x_p) \geq 0.$$

Множество всех таких ядер обозначим символом  $\Phi(G \times G)$ . В следующей теореме 1 получено не только простое доказательство известного основного неравенства для положительно определенных ядер, но и по-видимому впервые указан критерий, когда это неравенство обращается в равенство.

**Теорема 1.** Пусть  $K \in \Phi(G \times G)$ . Тогда для любых натуральных  $n, m \in N$ , для произвольных наборов точек  $\{x_k\}_{k=1}^n, \{y_p\}_{p=1}^m \subset G$ ,  $x \in G$ , и чисел  $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_p\}_{p=1}^m \subset C$  выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m K(x_k, y_p) a_k \bar{b}_p \right|^2 \leq \sum_{k,p=1}^n K(x_k, x_p) a_k \bar{a}_p \sum_{k,p=1}^m K(y_k, y_p) b_k \bar{b}_p. \quad (1)$$

Неравенство (1) обращается в равенство для некоторых натуральных  $n, m \in N$ , наборов точек  $\{x_k\}_{k=1}^n, \{y_p\}_{p=1}^m \subset G$ ,  $x \in G$ , и чисел  $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_p\}_{p=1}^m \subset C$ , тогда и только тогда, когда для всех  $t \in G$  выполняется равенство

$$\sum_{k,p=1}^m K(y_k, y_p) b_k \bar{b}_p \sum_{k=1}^n a_k K(x_k, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m K(x_k, y_p) a_k \bar{b}_p \sum_{p=1}^m b_p K(y_p, t).$$

В частности, неравенство  $|K(x, y)|^2 \leq K(x, x) K(y, y)$  обращается в равенство при некоторых  $x, y \in G$  тогда и только тогда, когда для всех  $t \in G$  выполняется равенство  $K(y, y) K(x, t) = K(x, y) K(y, t)$ .

Из теоремы 1 вытекает, что если  $G$  – группа и  $f \in \Phi(G)$ , то неравенство  $|f(x)| \leq f(0)$  обращается в равенство при некотором  $x \in G$  тогда и только тогда, когда для всех  $t \in G$  выполняется равенство  $f(0)f(x+t) = f(x)f(t)$ . В частности, если  $f \in \Phi(G)$  и  $f(x) = \varepsilon f(0)$  для некоторых  $x \in G$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{C}$ ,  $|\varepsilon| = 1$ , то для любых  $t \in G$  и  $n \in \mathbb{Z}$  выполняется равенство  $f(nx+t) = \varepsilon^n f(t)$  (см., например, [1; Лемма 1], [2; Следствие 1]).

Из неравенства (1) при  $n = 2, m = 1, y_1 = x, a_1 = \alpha, a_2 = -\beta, b_1 = 1$ , сразу получается неравенство (2), которое при  $\alpha = \beta = 1$  является неравенством М.Г. Крейна.

**Следствие 1.** Пусть  $K \in \Phi(G \times G)$ . Тогда для любых  $x_1, x_2, x \in G$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  справедливо неравенство

$$|\alpha K(x_1, x) - \beta K(x_2, x)|^2 \leq K(x, x) \operatorname{Re} \left( |\alpha|^2 K(x_1, x_1) + |\beta|^2 K(x_2, x_2) - \alpha \bar{\beta} K(x_1, x_2) \right). \quad (2)$$

Неравенство (2) обращается в равенство для некоторых  $x_1, x_2, x \in G$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , тогда и только тогда, когда для всех  $t \in G$  выполняется равенство

$$K(x, x) (\alpha K(x_1, t) - \beta K(x_2, t)) = (\alpha K(x_1, x) - \beta K(x_2, x)) K(x, t).$$

**Следствие 2.** Пусть  $K \in \Phi(G \times G)$ . Тогда для любых  $x, y, u \in G$  справедливо неравенство

$$|K(u, u)K(x, y) - K(x, u)K(u, y)|^2 \leq \left( K(u, u)K(x, x) - |K(x, u)|^2 \right) \left( K(u, u)K(y, y) - |K(u, y)|^2 \right). \quad (3)$$

Неравенство (3) обращается в равенство для некоторых  $x, y, u \in G$  тогда и только тогда, когда для всех  $t \in G$  выполняется равенство

$$(K(y, y)K(u, u) - K(y, u)K(u, y)) \cdot (K(x, u)K(u, t) - K(u, u)K(x, t)) = (K(x, y)K(u, u) - K(x, u)K(u, y)) \cdot (K(y, u)K(u, t) - K(u, u)K(y, t)).$$

Если  $K(x, y) = f(x - y)$ , где  $f \in \Phi(G)$ , а  $G$  – группа (не обязательно абелева), то неравенство (3) – это неравенство Вейля.

### Список литературы

1. Горин Е.А. Положительно определенные функции как инструмент математического анализа // Фундамент. и прикл. матем. – 2012. – Т. 17, № 7. – С. 67–95.
2. Певный А.Б., Ситник С.М. Обобщения неравенств М. Г. Крейна, Е. А. Горина и Ю. В. Линника для положительно определенных функций на многоточечный случай, Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 263–270.

## МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ И ИХ ПОСТРОЕНИЕ

*Иванов А.Ю.*, канд. физ.-мат. наук,

*Мельник А.-В.В.*, канд. техн. наук

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*o.ivanov@donnu.ru*

Классическим магическим квадратом порядка  $n$ , где  $n$  — некоторое натуральное число, называют матрицу  $n \times n$ , заполненную числами от 1 до  $n^2$  так, что их суммы в каждой строке, столбце, а также по главной и побочной диагоналям равны некоторому значению  $\Sigma(n)$ , называемому магическим числом [1].

Появление первых артефактов связанных с магическими квадратами относят еще к 2200 г. до н.э. Особенную популярность данное понятие приобретает в XVI–XVIII веках. В этот период магические квадраты можно встретить не только в произведениях искусств (например, гравюра А. Дюрера «Меланхолия» [2]), при построении астрологических таблиц и т.п., но также начинается формирование математической теории магических квадратов. Исследования в рамках данной тематики постепенно переходят от вопроса построения новых квадратов различных порядков к систематическому изучению их структуры и свойств, формулируется задача о вычислении количества различных квадратов заданного порядка.

Не трудно видеть, что классических магических квадратов порядка 2 не существует, порядка 3 — единственный (с точностью до поворотов и отражений) [3]. В 1693 Б. Френикл де Бюсси применив метод исчерпаний, основанный во многом на прямом переборе всех возможных вариантов, построил 880 различных магических квадратов порядка 4, показав при этом, что других квадратов данного порядка не существует [4]. Однако, ввиду сложности проверки его результатов многие, авторы не стали доверять им — первое аналитическое доказательство, подтвердившее результат Б. Френикла, было получено только в 1982 г. К.Оллереншоу и Г. Бонди [2]. Вычисления количества магических квадратов больших порядков столкнулось с тем, что прямой перебор всех вариантов в до компьютерную эпоху стал фактически невозможен.

С появлением компьютеров в данном направлении исследований удалось несколько продвинуться. Так, используя вычислительные средства, в 1976 г. В. Бенсон совместно с О. Якоби подтвердили результат Б. Френикла для квадратов порядка 4 [5], а Р. Шроппель вычислил количество различных магических квадратов 5 на 5, установив, что их 275 305 224 [6]. В обоих этих случаях использовался тот же метод исчерпаний Френикла, то есть, по сути, при помощи вычислительной техники провели большое количество вычислений, близкое по своему

значению к прямому перебору, но подобный подход преодолеть  $36!$  вариантов полного перебора квадратов порядка 6 не может и по сей день.

Дальнейшее исследование количества магических квадратов порядка больше 5 связано с применением метода Монте Карло. Подобный подход дает статистическую оценку, так, например, в 1998 г. К. Пинн и Ц. Вейцерковски показали, что различных магических квадратов порядка 6 —  $(0.17745 \pm 0.00016) \times 10^{20}$  [7].

Ввиду выше означенных сложностей с вычислением количества различных магических квадратов старших порядков, значительное место в развитии математической теории магических квадратов заняли алгоритмы построения магических квадратов заданного порядка. В целом можно выделить 3 основных типа алгоритмов конструирования: методы окаймления, при которых к уже заданному магическому квадрату по некоторому правилу добавляют дополнительные строки и столбцы так, чтобы получить новый магический квадрат большего порядка; методы составления магического квадрата и методы, использующие один или два вспомогательных квадрата [3]. Важно отметить, что все известные алгоритмы построения позволяют конструировать лишь незначительное число (относительно общего числа квадратов заданного порядка) различных магических квадратов.

Авторам удалось сконструировать и обосновать новый алгоритм построения полумагических квадратов произвольного нечетного порядка. Для формулировки данного результата нам необходимо ввести несколько следующих понятий.

Множество квадратных матриц  $n \times n$ , элементами которых являются числа от 1 до  $n^2$  без повторений, будем обозначать  $M(n)$ .

**Определение 1.** Матрицу  $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$  такую, что  $b_{i,j} = (i-1)n + j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  будем называть базовой.

**Определение 2.** Матрица  $A \in M(n)$  называется полумагическим квадратом, если суммы элементов по всем ее столбцам и строкам совпадают между собой.

**Определение 3.** Набор  $\alpha = \{b_{1,j_1}, b_{2,j_2}, \dots, b_{n,j_n}\}$  из  $n$  элементов базовой матрицы  $B_n$ , где  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  является перестановкой  $(1, 2, \dots, n)$ , будем называть подходящим набором.

**Определение 4.** Совокупность  $\Omega$  из  $n$  подходящих наборов называется покрывающей, если не существует элемента базовой матрицы, принадлежащего сразу двум различным подходящим наборам данной совокупности.

**Определение 5.** Две покрывающие совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$  называются совместимыми, если для каждой пары подходящих наборов  $\alpha \in \Omega, \beta \in \Pi$  существует единственный элемент  $b_{i,j} \in B_n$  такой, что  $\alpha \cap \beta = b_{i,j}$ .



Сформулируем алгоритм построения полумагических квадратов.

**Алгоритм.** Для построения матрицы  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$ , являющейся полумагическим квадратом нечетного порядка  $n$ , достаточно выполнить следующую последовательность действий:

- (i) Построить две совместимые покрывающие совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$ .
- (ii) Пронумеровать подходящие наборы в каждой из покрывающих совокупностей от 1 до  $n$ :  $\alpha_i \in \Omega, i = \overline{1, n}, \beta_j \in \Pi, j = \overline{1, n}$ .
- (iii) Взять две произвольные перестановки  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  и  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  набора  $(1, 2, \dots, n)$ .
- (iv) Заполнить ячейки конструируемой матрицы так, что каждый ее элемент  $a_{t,p}$  определяется следующим соотношением:  $a_{t,p} = \alpha_{i_t} \cap \beta_{j_p}$ .

Следует отметить, что ограничение на четность  $n$  в условиях применимости приведенного выше алгоритма связано лишь с возможностью построения совместимых покрывающих совокупностей в общем виде.

Учитывая, что магический квадрат отличается от полумагического дополнительными условиями на главную и побочную диагонали, то конструкция алгоритма, построенного в данном параграфе, позволяет рассчитывать на получение нового метода конструирования магических квадратов при дальнейших исследованиях в данной тематике. Тем не менее, уже на данном этапе используя лишь две дополнительные проверки на сумму элементов по диагоналям можно легко получить значительное количество магических квадратов произвольного порядка.

### Список литературы

1. Гутерман А. Э. Алгебра полумагических матриц и ее длина / А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, С. Д. Сочнев // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2013. – Т. 419. – С. 52–76.
2. Ollerenshaw K. Magic Squares of Order Four/ K. Ollerenshaw, H. Bondi // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Mathematical and Physical Sciences. Royal Society. – 1982. – V. 306, № 1495. – P. 443–532.
3. Постников М. М. Магические квадраты / М. М. Постников. – Москва: издательство "Наука", математическая библиотечка, 1964 – 84 с.
4. B.F.de Bessey. Des quarez ou tables magiques / Bernard Frenicle de Bessey. – Imp. Royale, 1693
5. Benson W. H. New Recreations With Magic Squares / W. H. Benson, O. Jacoby // Dover Pubns. – 1976 – 198 pp.
6. Gardner M. Mathematical Games / M. Gardner // Scientific American – January 1976 – V. 234. – P. 118–122
7. Pinn K. Number of magic squares from parallel tempering Monte Carlo / K. Pinn, C. Wierczkowski // International Journal of Modern Physics C. – 1998 – V. 09, № 04 – P. 541–546.

## ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЕ ВСЮДУ-ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ В ЯВНОМ ВИДЕ

*Клово А.Г.*, канд. физ.-мат. наук, доц.,

*Куповых Г.В.*, д-р физ.-мат. наук, проф.,

*Ляпунова И.А.*, канд. техн. наук, доц., *Гончаров А.В.*

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Таганрог, РФ

*klovo\_ag@mail.ru*

**Введение.** Рассматривается задача управления свободными колебаниями струны с заданными условиями на ее границах. Подобные задачи рассматривались в работе [1]. В работах [2–3], в частности, показана зависимость возможности синтеза оптимального управления от выбора минимизируемого функционала. В данной работе приводится пример нахождения всюду-оптимального управления в явном виде.

**1. Постановка задачи.** Если  $u(t, x)$  является отклонением струны  $[0;1]$  в точке  $x$  в момент времени  $t$ , то для свободных колебаний струны мы приходим в области  $D = [0;1] \times [0;1]$  к задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = p(t), \quad u|_{x=1} = q(t). \quad (3)$$

Здесь условие (2) определяет начальный профиль и начальные скорости точек струны. Требуется выбрать управляющие движения на концах струны функции  $p(t)$  и  $q(t)$  таким образом, чтобы в заданный момент времени  $t = \tau \in [0;1]$  привести струну в положение, наиболее

близкое к состоянию покоя:  $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$  при  $t = \tau$ . Важным является выбор критерия такой близости, т.е. функционала, который необходимо минимизировать. Мы предполагаем, что в поставленной задаче выполнены условия согласования  $p(0) = \varphi(0)$ ,  $q(0) = \varphi(1)$ .

**2. Понятие всюду оптимальности управления.** Пусть управляющие функции  $p_1(t)$  и  $q_1(t)$  обеспечивают оптимальность по заданному критерию на временном отрезке  $t \in [0; \tau_1]$ , а функции  $p_2(t)$  и  $q_2(t)$  обеспечивают такую оптимальность на временном отрезке  $t \in [0; \tau_2]$ . Совместно заданные таким образом функции будем называть вектором управления или просто управлением. Управление  $\{p(t); q(t)\}$  мы будем

называть всюду-оптимальным, если при любых  $\tau_2 > \tau_1$  оно будет совпадать на общем участке  $t \in [0; \tau_1]$  с управлениями  $\{p_1(t); q_1(t)\}$  и  $\{p_2(t); q_2(t)\}$ . Также, как и в работах [2–3], доказывается, что оптимальное управление, минимизирующее

$$J(p) = \int_0^1 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t=\tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \right)^2 \right) dx, \quad (4)$$

является всюду-оптимальным.

**3. Построение всюду-оптимального управления.** Несложно показать, что при значениях времени управления  $t = \tau$ , меньшем 1, найдутся начальные условия (2), при которых струна не может быть приведена в нулевое состояние. Следовательно, если мы построим в явном виде управление, переводящее произвольные начальные условия (2) в нулевые за время  $\tau = 1$ , полученное управление будет всюду оптимальным для функционала (4).

Для поиска такого управления представим искомое решение поставленной задачи в виде суммы двух функций  $u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x)$ . При этом  $u_1(t, x)$  является решением задачи (1)–(3) с нулевым управлением, т.е. с управляющими функциями, для которых выполнены условия  $p'(t) = q'(t) \equiv 0$ . Функция  $u_2(t, x)$  является решением задачи (1)–(3) с нулевыми начальными условиями и одновременно управлением, согласованным с нулевыми начальными условиями.

Для нахождения  $u_1(t, x)$  продолжим начальные условия следующим образом:

$$u|_{t=0} = \bar{\varphi}(x) = \begin{cases} -(\varphi(-x) - \varphi(0)), & -1 \leq x < 0, \\ \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ -(\varphi(2-x) - \varphi(1)), & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \bar{\psi}(x) = \begin{cases} -\psi(-x), & -1 \leq x < 0, \\ \psi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ -\psi(2-x), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad (6)$$

Применив формулу Даламбера к начальным условиям, получим

$$u_1(t, x) = \frac{\bar{\varphi}(x-t) + \bar{\varphi}(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \bar{\psi}(\xi) d\xi \quad (7)$$

и при этом  $u_1(t, 0) = \varphi(0)$ ,  $u_1(t, 1) = \varphi(1)$ .

Вычислив  $\frac{\partial u_1}{\partial t}$  в формуле (7), найдем при  $(t; x) \in (0; 1) \times [0; 1]$

производную  $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{-\bar{\varphi}'(x-t) + \bar{\varphi}'(x+t) + \bar{\psi}(x+t) + \bar{\psi}(x-t)}{2}$ . Теперь

$$u_1(1, x) = \frac{\bar{\varphi}(x-1) + \bar{\varphi}(x+1)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \bar{\psi}(\xi) d\xi = -\varphi(1-x), \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=1} = \frac{-\bar{\varphi}'(x-1) + \bar{\varphi}'(x+1) + \bar{\psi}(x+1) + \bar{\psi}(x-1)}{2} = -\psi(1-x). \quad (9)$$

Функция  $u_2(t, x)$  представляется в виде  $u_2(t, x) = u_{2p}(t, x) + u_{2q}(t, x)$ , где

$$u_{2p}(t, x) = \begin{cases} p(t-x), & t \geq x, \\ 0, & t < x, \end{cases} \quad u_{2q}(t, x) = \begin{cases} q(t+x-1), & t \geq 1-x, \\ 0, & t < 1-x. \end{cases}$$

Поэтому для обеспечения равенства  $u|_{t=1} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=1} = 0$  необходимо

выполнение условий  $\begin{cases} p'(1-x) + q'(1-x) = \psi(1-x), \\ p'(1-x) - q'(1-x) = -\varphi'(1-x). \end{cases}$  Отсюда найдем

$$p'(t) = \frac{\psi(t) - \varphi'(t)}{2}, \quad q'(t) = \frac{\psi(1-t) + \varphi'(1-t)}{2},$$

что позволяет написать искомое оптимальное управление в явном виде

$$p(t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^t \psi(\xi) d\xi - \varphi'(t) \right) + \varphi(0), \quad q(t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^t \psi(1-\xi) d\xi + \varphi'(1-t) \right) + \varphi(0).$$

**Заключение.** Показана возможность построения всюду-оптимального управления в конкретной ситуации. Представляет интерес обобщение этих результатов на более сложные случаи и создание численных методов построения всюду-оптимального управления.

#### Список литературы

1. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН. – 2005. – Т. 60, № 6. – С. 89–114; Russian Math. Surveys. – 2005. – V. 60, N 6. – P. 1093–1119.
2. Клово А.Г., Гончаров А.В. Условия всюду-оптимальности управления одной системой с распределенными параметрами // Материалы IV Международной научной конференции «Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Том 1 Физико-математические и технические науки. Часть 1 – Донецк: ДонНУ, 2019. – С. 27-30.
3. Клово А.Г., Куповых Г.В., Ляпунова И.А. О возможности синтеза оптимального управления колебаниями струны // Международная научная конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов, Владимир, изд. ВлГУ 2020. – 163 с. – С. 72-73.

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

*Клово А.Г.*, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
*Куповых Г.В.*, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
*Ляпунова И.А.*, канд. техн. наук, доц.,  
*Чистякова Т.А.*, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
*Кузнецов А.Е., Кузнецов Р.Е.*

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Таганрог, РФ  
*klovo\_ag@mail.ru*

**Введение.** В работе изучаются свойства обобщенных тригонометрических систем (ОТС) функций, производные которых, взятые последовательно, переходят друг в друга. При этом последняя функция основной части системы переходит в функцию, модуль которой совпадает с модулем первой функции системы, а значения функций в начале координат однозначно определяют эти ОТС. В работах [1–4] исследованы свойства таких систем функций четных и нечетных порядков. Показано, что в рассмотренных случаях свойства систем четного порядка существенно отличаются от свойств систем нечетного порядка. ОТС второго порядка являются тригонометрические и гиперболические функции. В данной работе показаны в общем виде некоторые свойства таких ОТС четного и нечетного порядка.

**1. Основные определения.** Рассмотрим 4 типа ОТС. Пусть для основной части системы функций  $K_1(x), K_2(x), \dots, K_{2n}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  выполнены условия  $(K_i(x))' = K_{i+1}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ ,  $(K_{2n}(x))' = K_1(x)$ . При этом все функции  $\{K_i(x)\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , доопределяемые условиями  $K_{i+2n}(x) \equiv K_i(x)$ , мы будем называть ОТС четного порядка  $2n$  первого типа.

Пусть для основной части системы функций  $L_1(x), L_2(x), \dots, L_{2n-1}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  выполнены условия  $(L_i(x))' = L_{i+1}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ ,  $(L_{2n-1}(x))' = L_1(x)$ . При этом все функции  $\{L_i(x)\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , доопределяемые условиями  $L_{i+2n-1}(x) \equiv L_i(x)$ , мы будем называть ОТС нечетного порядка  $2n-1$  первого типа.

Пусть для основной части системы функций  $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_{2n}(x)$  выполнены условия  $(\Phi_i(x))' = \Phi_{i+1}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ ,

$(\Phi_{2n}(x))' = -\Phi_1(x)$ . При этом все функции  $\{\Phi_i(x)\}$ ,  $i \in Z$ , доопределяемые условиями  $\Phi_{i+2n}(x) \equiv -\Phi_i(x)$ , мы будем называть ОТС четного порядка  $2n$  второго типа.

Пусть для основной части системы функций  $G_1(x), G_2(x), \dots, G_{2n-1}(x)$ ,  $n \in N$  выполнены условия  $(G_i(x))' = G_{i+1}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ ,  $(G_{2n-1}(x))' = -G_1(x)$ . При этом все функции  $\{G_i(x)\}$ ,  $i \in Z$ , доопределяемые условиями  $G_{i+2n-1}(x) \equiv G_i(x)$ , мы будем называть ОТС нечетного порядка  $2n-1$  второго типа.

**2. Результаты исследований.** Для ОТС порядка 2 известны основные тригонометрическое и гиперболическое тождества  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ . Их можно рассматривать как квадратичные формы функций соответствующих систем, равные константе. В работе [2] показано, что для ОТС порядков 3 и 5 такие тождества, которые названы первыми интегралами ОТС, не существуют. Теперь мы можем утверждать, что это верно для всех ОТС нечетного порядка. И наоборот, для каждой обобщенной тригонометрической системы четного порядка  $2n$  существует ровно  $n$  различных первых интегралов. Например, для систем порядка 4 такими являются тождества:

$$K_1^2(x) + K_3^2(x) = 2K_2(x)K_4(x), \quad K_4^2(x) + K_2^2(x) = 1 + 2K_1(x)K_3(x),$$

$$\Phi_3^2(x) - \Phi_1^2(x) = 2\Phi_2(x)\Phi_4(x), \quad \Phi_4^2(x) - \Phi_2^2(x) = 1 - 2\Phi_1(x)\Phi_3(x).$$

Также установлено, что для всех систем четного порядка функции ОТС с четными номерами являются четными функциями, а функции с нечетными номерами – нечетными. Что касается систем нечетного порядка, то при смене знака у аргумента этих функций систем первого и второго типов взаимно переходят друг в друга. Для ОТС всех порядков могут быть вычислены вторые интегралы, т.е. несобственные интегралы от квадратов этих функций.

**3. Матричный аппарат решения проблем.** Для получения указанных результатов были изучены и использованы свойства квадратичных форм, порождаемые функциями соответствующих ОТС.

Рассмотрим, например, квадратичную форму ОТС порядка  $2n$  первого типа  $A(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2n} a_{ij} K_i(x) K_j(x)$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  и соответствующую ей квадратную матрицу  $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 2n$  размерности  $2n$ . Очевидно, что производная от квадратичной функции является квадратичной функцией. Решение поставленных задач связано с исследованием, как меняется матрица квадратичной формы  $A$  при взятии от нее производной.

Если существует ненулевая квадратичная форма  $A(x)$  с матрицей  $A$ , производной которой  $A'(x)$  соответствует нулевой матрице  $A^1$ , то квадратичная форма  $A(x)$  равна константе, т.е. первый интеграл ОТС существует.

Для решения этого вопроса отметим, как меняется матрица квадратичной формы при взятии от нее производной. Рассмотрим вектор  $\bar{K} = (K_1, K_2, \dots, K_{2n})$ , тогда  $A(x) = \bar{K}A\bar{K}^T$  и  $A'(x) = \bar{K}'A\bar{K}^T + \bar{K}A(\bar{K}^T)'$ .

Введем оператор дифференцирования

$$\left[ \frac{d}{dx} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(x) = \bar{K} \left( \left[ \frac{d}{dx} \right] A + A \left[ \frac{d}{dx} \right]^T \right) (\bar{K})^T \quad (1)$$

Следовательно,

$$A^1 = \left[ \frac{d}{dx} \right] A + A \left[ \frac{d}{dx} \right]^T. \quad (2)$$

Формула (2) позволяет построить в явном виде матрицы, соответствующие производным квадратичной формы, и обосновать формулировки в п. 2.

**Заключение.** Получены в общем виде некоторые результаты для ОТС различных типов четных и нечетных порядков. Представляет интерес развитие этих результатов.

### Список литературы

1. Клово А.Г. Некоторые свойства обобщенных тригонометрических систем // Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности. Материалы III Международной научной конференции 25 октября 2018 года, г. Донецк. – Том 1. Физико-математические и технические науки. – С. 349-350.
2. Клово А.Г., Кузнецов А.Е., Кузнецов Р.Е., Чистякова Т.А. Построение и свойства обобщенных тригонометрических систем нечетного порядка. Материалы X Международной научно-технической конференции в рамках V Международного научного форума Донецкой Народной Республики 22-24 мая 2019 г. – Донецк, ДОННТУ, 2019. – С. 25-29.
3. Клово А.Г., Куповых Г.В., Чистякова Т.А. Обобщенные тригонометрические системы и некоторые приложения. Материалы VI Международной научно-технической конференции «Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях» СИТОНИ-2019 26 ноября 2019 г. – Донецк, 2019. – С. 53-63.
4. Клово А.Г., Куповых Г.В., Чистякова Т.А. Об одном подходе к тригонометрии. Материалы Всероссийской научно-методической конференции «Актуальные проблемы преподавания математических и естественно-научных дисциплин в образовательных организациях высшего образования» (Кострома, 16 февраля 2020 года). – Кострома 2020. – С. 72-82.

## ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛИГОНОВ НАД ПОЛУГРУППАМИ

**Кожухов И.Б.**<sup>1</sup>, д-р физ.-мат. наук, проф.,

**Михалёв А.В.**<sup>2</sup>, д-р физ.-мат. наук, проф.

<sup>1</sup>НИУ «Московский институт электронной техники», г. Москва, РФ

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Московский государственный университет», г. Москва, РФ  
*kozhuhov\_i\_b@mail.ru, aamikhalev@mail.ru*

*Полигон над полугруппой* [1, 2] – это множество  $X$ , на котором действует полугруппа  $S$ , т.е. определено отображение  $X \times S \rightarrow X$ ,  $(x, s) \mapsto xs$  такое, что  $x(st) = (xs)t$  при всех  $x \in X$ ,  $s \in S$ . Полигон может рассматриваться как *автомат Мура* (автомат без выхода), где  $X$  – множество состояний, а  $S$  – полугруппа входных сигналов. Кроме того, полигон – это *унарная алгебра*: отображения  $\varphi_a : X \rightarrow X$ ,  $x\varphi_a = xa$  ( $x \in X$ ,  $a \in S$ ) – унарные операции на  $X$ .

Для произвольного множества  $X$  обозначим через  $T(X)$  полугруппу всех преобразований  $\alpha : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto x\alpha$  с умножением слева направо, т.е.  $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ . Если  $X$  – полигон над полугруппой  $S$ , то мы имеем гомоморфизм  $S \rightarrow T(X)$ ,  $a \mapsto \varphi_a$ , который называется *представлением полугруппы  $S$  преобразованиями* множества  $X$ . Наряду с представлениями преобразованиями исследуются *линейные представления* полугрупп, т.е. представления линейными операторами в конечномерном линейном пространстве [3] или непрерывными линейными операторами в банаховом пространстве.

Примеры полигонов многочисленны Приведём наиболее яркие из них.

1. Всякое множество  $X$  является полигоном над полугруппой  $T(X)$ .
2. Сама полугруппа  $S$  является полигоном над  $S$ .
3. Любая алгебра  $A$  является полигоном над полугруппой эндоморфизмов  $\text{End } A$ .
4. Если  $X$  – объект, наделённый некоторой математической структурой, то  $X$  является полигоном над полугруппой  $\text{End } X$  всех преобразований  $X \rightarrow X$ , сохраняющих эту структуру.
5. Всякий (полу)модуль  $M$  над (полу)кольцом  $R$  является полигоном над мультипликативной полугруппой  $(R, \cdot)$  (полу)кольца  $R$ .

Теория полигонов над полугруппами развивалась под сильным влиянием более развитой теории модулей над кольцами, черпая из этой теории не только определения ключевых понятий, но также формулировки многих утверждений.



Исследования по полигонам можно условно разделить на несколько направлений. К *структурной теории* относятся работы, в которых выясняется строение тех или иных полигонов, их подполигонов, конгруэнций и т.д. Так, например, все полигоны над вполне простой полугруппой  $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$  и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой  $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$  были описаны в работе [4]. Это описание позволило ответить на многие вопросы, относящиеся к полигонам над вполне (0-)простыми полугруппами. В частности, были описаны инъективные и проективные полигоны над этими полугруппами, построены инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов [5, 6]. В работе [7] был доказан ряд утверждений о строении полигонов над полурешётками (коммутативными полугруппами идемпотентов), а полигоны над конечными цепями получили исчерпывающее описание.

*Гомологическая теория* полугрупп и полигонов над ними имеет дело с категорией Act- $S$  всех полигонов над полугруппой  $S$  и их гомоморфизмов. Как правило, при этом предполагается, что полугруппа  $S$  является моноидом (т.е. имеет единицу), а полигоны над ней – унитарные (т.е.  $x \cdot 1 = x$  для всех элементов  $x$  полигона). Гомологической теории посвящена значительная часть монографии [1]. Составной частью этой теории является гомологическая классификация моноидов, во многом схожая с гомологической классификацией колец. Конструкции гомологической теории (такие, как тензорное произведение, прямые и обратные пределы и т.д.) широко используются в разных разделах теории полигонов.

Одно из направлений теории полигонов – изучение полигонов с теми или иными *условиями на решётку* конгруэнций  $\text{Con } X$ . Это условия максимальности и минимальности, приводящие к понятиям нётерова и артинова полигона, дистрибутивность или модулярность решётки конгруэнций; кроме того, свойство полигона «быть подпрямо неразложимым» также определяется с помощью условиями на его решётку конгруэнций. Результаты по нётеровым полугруппам (другими словами, полугруппам с условием максимальности на правые конгруэнции) собраны в обстоятельной статье [8]. Дистрибутивным и модулярным полигонам над произвольными полугруппами посвящена работа [9] (полное описание таких полигонов над прямоугольной связкой получено в [10]). Подпрямо неразложимые полигоны охарактеризованы в [11].

Как и в других разделах алгебры, в теории полигонов заметную роль играют *условия конечности*, т.е. условия, которым удовлетворяют все конечные полигоны. Это уже упоминавшиеся артиновость и нётеровость, а также локальная конечность, хопфовость и кохопфовость и т.д. Известно, что любая конечная решётка удовлетворяет какому-нибудь нетривиальному решёточному тождеству. Поэтому свойство полигона «иметь решётку конгруэнций, удовлетворяющую нетривиальному тождеству», также является условием конечности.

Отметим также некоторые *обобщения понятия полигона*. Так, наряду с множеством, на котором действует одна полугруппа, рассматриваются множества с действием на них двух полугрупп (*биполигон*) и, вообще, множества, на которых действует некоторое семейство полугрупп (*мультиполигоны*). *Частичный полигон*  $X$  над полугруппой  $S$  допускает, что произведение  $xs$  определено не для всех  $x \in X$ ,  $s \in S$ . В большинстве работ по частичным полигонам центральное место занимает вопрос о возможности продолжения операции  $x \cdot s$  с частичной до полной.

Более подробный обзор теории полигонов над полугруппами изложен в работе авторов [12].

#### Список литературы

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., Skorniyakov L.A. Acts over monoids. – Oldenburg Univ., Oldenburg, 1982. – 42 p.
2. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Acts, monoids and categories. – W. de Gruyter, Berlin – N.Y., 2000. – xvii + 529 p.
3. Steinberg B. Representation theory of finite monoids. – Springer International Publishing Switzerland, 2016. – 317 p.
4. Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. – 2000. – V. 14, N 4. – P. 523–531.
5. Кожухов И.Б., Петриков А.О. Инъективные и проективные полигоны над вполне простыми полугруппами // Фундам. и прикл. матем. – 2016. – Т. 21, № 1. – С. 123–133.
6. Кожухов И.Б., Петриков А.О. Инъективные и проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой. Чебышёвский сб. – 2016. – Т. 17, № 4. – С. 65–78.
7. Апраксина Т.В., Максимовский М.Ю. Полигоны и частичные полигоны над полурешётками // Изв. Саратовского ун-та. Нов. Серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, вып. 1. – С. 3-7.
8. Miller C., Ruškuc N. Right noetherian semigroups // International Journal of Algebra and Computation. – 2020. – Vol. 30, No. 1. – P. 13–48.
9. Птахов Д.О., Степанова А.А. Решетки конгруэнций полигонов // Дальневост. матем. ж. – 2013. – Т. 13, № 1. – С. 107–115.
10. Кожухов И.Б., Пряничников А.М., Симакова А.Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой // Изв. РАН. Сер. матем. – 2020. – Т. 84, вып. 2. – С. 90–125.
11. Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р. Характеризация подпрямо неразложимых полигонов // Прикл. дискретн. матем. – 2015. – Т. 27, № 1. – С. 5–16.
12. Кожухов И.Б., Михалёв А.В. Полигоны над полугруппами // Фундам. и прикл. матем.

## О МНОЖЕСТВЕ НУЛЕЙ СИМВОЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫХ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

*Лиманский Д.В.*, канд. физ.-мат. наук, доц.  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР,  
*d.limanskiy@donnu.ru*

Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $|\alpha: l| = \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n}$ .  
Рассмотрим в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  дифференциальный полином вида

$$P(D) = \sum_{|\alpha: l| \leq 1} a_{j\alpha} D^\alpha, \quad a_{j\alpha} \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Обозначим через  $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha: l|=1} a_{j\alpha} \xi^\alpha$  главный  $l$ -квазиоднородный символ оператора  $P(D)$ . Здесь  $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ;  $D = (D_1, \dots, D_n)$ ,  
 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ .

**Определение 1.** [1] Дифференциальный оператор  $P(D)$  вида (1) называется *-квазиэллиптическим*, если  $P^l(\xi) \neq 0$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Определение 2.** [1] Дифференциальный оператор  $P(D)$  вида (1) называется *слабо коэрцитивным* в анизотропном пространстве Соболева  $W_\infty^{0,l}(\mathbb{R}^n)$ , если для всех дифференциальных мономов  $D^\alpha$  с показателями  $\alpha$ , удовлетворяющими неравенству  $|\alpha: l| < 1$ , справедливы априорные оценки  $\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ,  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Известно, что  $l$ -квазиэллиптический оператор (1) слабо коэрцитивен в  $W_\infty^{0,l}(\mathbb{R}^n)$ . Обратное верно при некоторых дополнительных условиях [2].

Пусть  $l_1 \geq \dots \geq l_n$ . Разобьем числа  $l_1, \dots, l_n$  на  $m$  групп, отнеся в  $k$ -ю группу  $n_k$  равных между собой чисел,  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Тогда  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$ , где координатное подпространство  $E_k$  соответствует  $k$ -й группе равных друг другу чисел, причем  $\dim E_k = n_k$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

**Теорема.** Пусть оператор  $P(D)$  вида (1) слабо коэрцитивен в  $W_\infty^{0,l}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда:

- 1) множество нулей его полного символа  $P(\xi)$  компактно;
- 2) его главный  $l$ -квазиоднородный символ  $P^l(\xi)$  может обращаться в нуль лишь в точках  $n_m$ -мерного подпространства  $E_m$ .

### Список литературы

1. Лиманский Д.В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д.В. Лиманский, М.М. Маламуд // Матем. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75–112.
2. Лиманский Д.В. Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева / Д.В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 68-76.

## ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ РАДИУС ПОМПЕЙЮ ДЛЯ КУБА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Машаров П.А.*, канд. физ.-мат. наук,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*p.masharov@donnu.ru*

**Введение и постановка задачи.** Пусть  $\mathbb{R}^n$  – вещественное евклидово пространство размерности  $n \geq 2$  с евклидовой нормой  $|\cdot|$ ,  $M(n)$  – группа движений  $\mathbb{R}^n$ . Компактное множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется множеством Помпейю в открытом множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ , если всякая локально суммируемая функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

при всех  $\lambda \in M(n)$  таких, что  $\lambda A \subset B$ , равна нулю почти всюду. Совокупность всех множеств Помпейю в открытом множестве  $B$  будем обозначать  $\mathcal{P}(B)$ . Классическая проблема Помпейю состоит в описании  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . Она была поставлена румынским математиком Помпейю в 1929 году и в настоящее время достаточно хорошо изучена (см. обзоры [1-2] с обширной библиографией), но не решена полностью. В [3] было получено, что если  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , то  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$ , где  $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R\}$ ,  $R \geq 2r^*(A)$ ,  $r^*(A) = \inf\{R > 0: \lambda A \subset \mathbb{B}_R, \lambda \in M(n)\}$ . В связи с этим, в [3] поставлена

**Проблема.** Для данного компактного  $A \subset \mathbb{R}^n$  найти значение

$$\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)\},$$

которое естественно называть радиусом Помпейю множества  $A$ .

Кроме случая, когда компактное множество  $A$  имеет такую же размерность, что и пространство, можно рассматривать случаи, когда размерность множества  $A$  равна  $m \leq n$ . Тогда интеграл в (1) понимается как  $m$ -кратный, условие локальной суммируемости функции  $f$  естественно заменить на непрерывность. В таком случае будем рассматривать совокупность  $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)$  всех  $m$ -мерных множеств Помпейю в  $\mathbb{B}_R^n$ . Аналогично сформулированной, возникает

**Проблема.** Для данного  $m$ -мерного компактного  $A \subset \mathbb{R}^n$  найти значение

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Достаточно полное описание множеств, для которых решена указанная проблема или получены оценки искомой величины, уточняющие ранее известные, содержится в [3-5]. В данной работе для каждого  $n \geq 4$  получено явное значение  $\mathcal{R}_{m,n}(A)$ , где

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, 0, \dots, 0) : |x_j| \leq 1, j = 1, 2, 3\}$$

представляет из себя трехмерный куб со стороной 2. Основным результатом работы является такое утверждение.

**Теорема.** Для любого натурального  $n \geq 4$  имеет место равенство

$$\mathcal{R}_{3,n}(A) = \frac{\sqrt{57}}{4}.$$

Для доказательства приведенной теоремы были использованы многомерный анализ и геометрия, современные методы гармонического анализа.

Благодаря подобранным дифференциальным операторам, тройные интегралы по кубу от результатов действия этих операторов на достаточно гладкую функцию удалось свести соответственно к двойному, обычному интегралу Римана, к значению функции в вершинах куба.

Были изучены различные положения куба внутри четырехмерного шара, найдены экстремальные расстояния от центра шара до вершин, ребер, граней, гиперплоскости куба. Решение системы определенных неравенств позволило оценить снизу радиус Помпейю. Методами, традиционными для решения подобных проблем, была найдена оценка сверху искомой величины, которая совпала с оценкой снизу.

**Выводы.** В работе получено явное значение  $\mathcal{R}_{3,n}(A) \approx 1,89$ . Для сравнения заметим, что  $\mathcal{R}_{3,3}(A) = \sqrt{6} \approx 2,45$ . Подобные результаты имеют приложения в комплексном анализе, теории функций, сохраняющих меру, в теории аппроксимации. Этот результат позволит также найти радиус Помпейю для совокупности множеств, включающей трехмерный куб в многомерном пространстве.

### Список литературы

1. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185–194.
2. Zalcman L. Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem'. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
3. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. Volchkov V.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
5. Машаров П.А. О функциях с нулевыми интегралами по отрезкам / П.А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2019. – № 2. – С. 82–90.

## РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ-ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ – КОНВЕКЦИИ

**Сапронов Д.А.**

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,  
г. Макеевка, ДНР  
dmitrijsapronov1974@gmail.com

**Введение.** В области  $G_T = (0, T) \times \Omega$ , где  $\Omega \subset R^n$  - произвольная область с кусочно – гладкой границей, рассматривается задача Коши – Дирихле для широкого класса параболических уравнений, модельным представителем которых является:

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha (|D_x^\alpha u|^{p-1} D_x^\alpha u) + \chi \cdot (|u|^{\lambda-1} u)_{x_1} = 0, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L_2(\Omega), \quad m \geq 1, n \geq 1, p > 1, \lambda > 0, \chi = \text{const} > 0, \quad (2)$$

$$D_x^\alpha u|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leq m-1. \quad (3)$$

Задачи (1)–(3) моделируют различные физические процессы (фильтрация жидкостей, движение плазмы, теплопроводность в движущейся среде и т.д.), в которых в направлении вектора  $(\chi, 0, \dots, 0) \in R^n$  присутствует конвективный перенос. Важнейшим вопросом в их изучении является установление условий разрешимости. Первые результаты в этом направлении были установлены в [1] при изучении существования непрерывных решений уравнений ньютоновской фильтрации (см. [2]). Позже условия разрешимости были найдены в [3, 4] при исследовании задач Коши и Коши – Дирихле для одномерных уравнений диффузии – конвекции. Существование обобщенных решений смешанных задач для многомерных вырождающихся параболических уравнений типа нестационарной диффузии с младшими членами (абсорбцией и конвекцией) в дальнейшем исследовалась многими авторами (см. [5 – 9] и ссылки к ним).

### Основная часть.

**Определение 1.** Энергетическим обобщенным решением задачи (1) – (3) в случае  $0 < \lambda \leq 1$  назовем функцию

$$u(t, x) \in V_T(\Omega, s, \delta) = \left\{ \begin{array}{l} v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega)), \quad \|v\|_{L_{\lambda+1}^{\lambda+1}((0, T) \times K(s, \delta))} \leq c\delta, \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega)) \cap L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}((0, T) \times K(s, \delta)), \\ D_x^\alpha v|_{(0, T) \times \partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leq m-1 \end{array} \right\},$$

$$0 < c = c(m, n, p, \lambda, \|u_0\|_{L_2(\Omega)}) < \infty, \quad K(s, \delta) = \{x \in \Omega : s - \delta < x_1 < s\} \quad \forall 0 < \delta < \infty, \quad \forall s < +\infty,$$

удовлетворяющую условию (2) в смысле пространства  $C(0, T; L_2(\Omega))$ , а также интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle u_t, w \rangle dt + \int_{G_T} \left( \sum_{|\alpha|=m} |D_x^\alpha u|^{p-1} D_x^\alpha u \cdot D_x^\alpha w + \chi \cdot (|u|^{\lambda-1} u)_{x_1} \cdot w \right) dx dt = 0 \quad (4)$$

для произвольной функции  $w(t, x) \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}(G_T)$ .

**Определение 2.** Энергетическим обобщенным решением задачи (1) – (3) при  $\lambda > p$  назовем функцию

$$u(t, x) \in W_T(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}(G_T), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-m}(\Omega)) \cap L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}(G_T), D_x^\alpha v|_{(0, T) \times \partial\Omega} = 0, |\alpha| \leq m-1 \end{array} \right\}$$

удовлетворяющую условию (2) в смысле пространства  $C(0, T; L_2(\Omega))$ , а также интегральному тождеству (4) для произвольной функции  $w \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}(G_T)$ .

**Теорема.** Пусть в уравнении (1) дополнительно выполнено условие  $\lambda \leq p + 2m(p-1)n^{-1}$ . Тогда в области  $G_T$  при всех  $T > 0$  существует энергетическое обобщенное решение задачи (1) – (3).

**Замечание.** Утверждение теоремы справедливо также для задачи Коши (1) – (2).

Все результаты получены на основе интегральных априорных оценок, аналогичных принципу Сен - Венана в теории упругости.

### Список литературы

1. Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, № 8. – С. 667-704.
2. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. – 1987. – Т. 42. N 2. – С. 135-176.
3. Diaz J.I., Kersner R. On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium // J. Differential Equations. – 1987. – V. 69. – P. 368-403.
4. Gilding B.H. Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1989. – V. 16. – P. 165-224.
5. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires // Dynod. Paris. – 1969.
6. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – V. 279. – P. 373-394.
7. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – V. 183. – P. 311-341.
8. Benilan Ph., Wittbold P. On Mild and Weak Solutions of Elliptic-Parabolic Problems // Adv. in Differential Equations. – 1996. – V. 1, N 6. – P. 1053-1073.
9. Сапронов Д.А. Разрешимость задачи Коши для вырождающихся многомерных параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии – конвекции с неограниченной энергией // Труды ИПММ. – Донецк, 2019. – Т. 33. – С. 101-113.

# *Прикладная математика, прикладная информатика и теория систем управления*

УДК 681.332

## **ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ С ПОМОЩЬЮ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМ RC4 И RC6**

*Алексеенко А.С., Рыбалко Л.А.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*andre-alekseenko@rambler.ru, l.rybalko@donnu.ru*

**Введение.** Перевод большинства информационных архивов, денежных средств и коммуникаций в электронную форму создал самостоятельный тип актива – информацию. Как любая ценность, она подвергается посягательствам со стороны различных мошенников. Возникают существенные риски и в области обеспечения государственной безопасности в сфере информации, основные угрозы названы в Доктрине государственной информационной безопасности. Игнорирование возникающих проблем приводит к потере конкурентоспособности, как на государственном, так и на корпоративном уровне. Страдают от преступлений, совершаемых в информационной сфере, и граждане. Целью исследования является создание оконного приложения, реализующего шифры RC4 и RC6 и их модификации.

**Основная часть.** Поточковый шифр RC4 построен на основе генератора псевдослучайных равномерно распределенных битов, параметризованного ключом пользователя [1, 2]. К его преимуществам относят переменный размер ключа и высокую скорость работы. При длине ключа в 128 бит RC4 обеспечивает такой же уровень безопасности, как тройной DES или IDEA.

Блочный параметризованный шифр RC6 (полное название RC6-w/r/b, где w – длина слова в битах, r – количество итерационных циклов шифрования, b – длина ключа в байтах) основан на расширенной сети Фейстеля с использованием четырех регистров длины w бит [2]. При w=32 исходный текст разбивается на блоки длиной 128 бит. При r=20 повторях операции шифрования алгоритм имеет самую высокую скорость среди 5 финалистов AES.

Нами предложена комбинация шифров RC4 и RC6. Она заключается в следующем: поток данных шифруется с помощью алгоритма RC4, затем как только набирается блок нужной длины, он передается в RC6. Если последний блок исходного текста короче нужной длины, то к исходному тексту добавляются пробелы. Расшифровывание происходит в обратном



порядке: сначала считывается блок и расшифровывается с помощью алгоритма RC6, а затем результат проходит через алгоритм RC4.

Поскольку используется быстрый потоковый шифр, то скорость комбинированного шифра значительно не уменьшается, однако такое сочетание сильно повышает защиту от атак типа открытый – закрытый текст.

Проведенные нами тесты на текстах объемом ~1Мб показали, что скорость выполнения такой модификации по сравнению с оригинальным шифром RC6 меньше примерно на секунду, что не критично. Тест проведен на процессоре Fx8320 с 16Гб оперативной памяти 1600Гц.

**Заключение.** Потоковый шифр RC4 – шифр с низким требованием к памяти, что позволяет реализовать алгоритм на устройствах с ограниченной памятью. Так же алгоритм компактен в смысле размера кода, и особо удобен для процессов с побайтно-ориентированной обработкой.

Блочный шифр RC6 имеет солидный запас криптостойкости и плохо поддается большинству атак. Шифр достаточно быстрый при программной реализации. Сходство алгоритмов шифрования и расшифровывания облегчает реализацию. При аппаратной реализации данного шифра не требуются специальные микросхемы. Считается, что он самый быстрый среди 32-битных платформ.

Возможно усовершенствование предложенной комбинации шифров путем использования, например, модификации RC4+ с улучшенным алгоритмом генерации псевдослучайного слова и использованием 3-уровневого скремблирования и модернизированного RC6, использующего шесть регистров длины  $w$  бит.

Модернизированный RC6 призван увеличить скорость работы программы, хоть и требует больших затрат ресурсов в виде памяти и приводит к усложнению алгоритма.

Из сказанного следует, что модификация не всегда приводит только к положительным изменениям, но также влечет за собой и некоторые ограничения.

### Список литературы

1. Аграновский А.В. Практическая криптография: алгоритмы и их программирование / А.В Аграновский, Р.А. Хади. – М.: «Солон-Пресс», 2009. – 256 с.
2. Баричев С.Г. Основы современной криптографии / С.Г. Баричев, Р.Е. Серов. – М.: «Горячая линия – Телеком», 2001. – 176 с.

**T-МОДЕЛИ ОБОБЩЕННЫХ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ШРЕДЕРА****Бондаренко Л.Н.**, канд. техн. наук, доц.

ЧОУ ВО «Московский университет им. С.Ю. Витте», г. Сергиев Посад, РФ

operceva@miiv.ru

**Введение.** При  $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$  большие числа Шредера  $S_n$  задаются с помощью алгебраической производящей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} u^n = \frac{1-u-\sqrt{1-6u+u^2}}{2u} \quad (1)$$

и встречаются в различных задачах комбинаторики, информатики и т. п. [1; 2, A006318]. В частности, большие числа Шредера появляются при рассмотрении специальных конфигураций в работе [3], в которой также были введены новые числа: 1, 2, 8, 38, 200, 1124, 6608, 40142. Эти числа размещены в [2, A234939] без описания их производящей функции и других свойств, так как в [3] они не были получены. Использование  $T$ -моделей, являющихся последовательностями специального вида таблиц целых положительных чисел [4, 5], позволяет включить как эти числа, так и большие числа Шредера в один двухпараметрический класс числовых последовательностей, а также исследовать некоторые его свойства.

 **$T$ -модели обобщенных больших чисел Шредера и их свойства.**

Для моделирования, классификации и стандартизации целочисленных последовательностей положительных чисел в [4, 5] были разработаны  $T$ -модели и основные методы их применения.

**Определение.**  $T$ -модель – это тройка  $(S, \theta, T_1)$  с алфавитом  $S \subseteq \mathbf{N}$ , отображением  $\theta: s \rightarrow j_1 j_2 \dots j_s$ , где  $s, j_1, \dots, j_s \in S$ ,  $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s$ , и начальной таблицей  $T_1$ , а  $\theta$  преобразует каждый элемент  $s \in T_n$  в неубывающую последовательность (строку)  $j_1 j_2 \dots j_s$  длины  $|\theta(s)| = s$  последующей таблицы  $T_{n+1}$ , которая находится рекурсивно по простой формуле:  $T_{n+1} = \theta(T_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

Количества элементов (веса) таблиц  $|T_n|$   $T$ -модели при  $n \in \mathbf{N}$  задают отвечающую ей целочисленную последовательность, которой, вообще говоря, могут соответствовать много  $T$ -моделей. Каждой таблице  $T_n$  сопоставляется производящий многочлен  $\sum_{s \in T_n} t^s$  или его модификация  $U_n(t)$ , полученная с помощью преобразований, сохраняющих его значение при  $t = 1$ , так как  $|T_n| = U_n(1)$ .

Зададим двухпараметрический класс  $T$ -моделей  $(S^{(m,r)}, \theta^{(m,r)}, T_1^{(m,r)})$ , где параметры  $m, r \in \mathbf{N}$ , алфавитом  $S^{(m,r)} = \{mr+1, (m+1)r+1, \dots\}$ , многозначным отображением  $\theta^{(m,r)}: s \rightarrow ((m+1)r+1)^{r+1}$ , если  $s = mr+1$ , и  $\theta: s \rightarrow ((m+1)r+1)^r ((m+2)r+1)^r \dots s^r (s+r)^{mr+1}$ , если  $s \in S^{(m,r)} - \{mr+1\}$ , а также начальной таблицей  $T_1^{(m,r)} = (mr+1)$ . Отметим, что введенный класс целиком удовлетворяет определению  $T$ -модели, начиная с таблицы  $T_2^{(m,r)}$ .

Для этого двухпараметрического класса  $T$ -моделей легко находятся многочлены  $U_n^{(m,r)}(t)$ , которые получаются умножением производящих многочленов таблиц  $T_n^{(m,r)}$  на  $t^{-1}$  и последующей заменой  $t$  на  $t^{1/r}$ . Многочлены  $U_n^{(m,r)}(t)$  при начальных условиях  $U_1^{(m,r)}(t) = t^m$  и  $U_2^{(m,r)}(t) = (r+1)t^{m+1}$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(1-t)U_{n+1}^{(m,r)}(t) + t((mr+1)t - (m-1)r - 1)U_n^{(m,r)}(t) = rt^{m+1}U_n^{(m,r)}(1), \quad n \geq 2 \quad (2)$$

Вводя производящую функцию  $F^{(m,r)}(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+2}^{(m,r)}(t)u^n$ , найдем для нее с помощью формулы (2) аналогично [4, 5] следующее выражение:

$$F^{(m,r)}(t, u) = \frac{t^{m+1}((r+1)(1-t) + ruF^{(m,r)}(1, u))}{1-t + t((mr+1)t - (m-1)r - 1)u}, \quad (3)$$

в правой части которого при замене переменной  $t$  на корень уравнения  $rF^{(m,r)}(1, u) = (r+1)t((mr+1)t - (m-1)r - 1)$  приходим к неопределенности вида  $0/0$ . Поэтому, исключая переменную  $t$  в знаменателе формулы (3), получим для производящей функции  $F^{(m,r)}(1, u)$  квадратное уравнение

$$r(mr+1)u^2 F^{(m,r)}(1, u)^2 + (r+1)((m+1)r+1)u F^{(m,r)}(1, u) + (r+1)^2 = 0. \quad (4)$$

**Теорема.** При  $n \in \mathbf{N}$  целочисленная последовательность  $U_n^{(m,r)}(1)$ , отвечающая рассматриваемому двухпараметрическому классу  $T$ -моделей  $(S^{(m,r)}, \theta^{(m,r)}, T_1^{(m,r)})$ , определяется производящей функцией

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(m,r)}(1)u^n = \frac{((m-1)r^2 - mr - 1)u + (r+1)(1-R)}{2ru(mr+1)}, \quad (5)$$

где  $R = \sqrt{(((m-1)r+1)u - 1)^2 - 4ru}$ .

Для доказательства этой теоремы достаточно выбрать необходимый корень  $F^{(m,r)}(1, u)$  уравнения (5) и вычислить сумму  $1 + uF^{(m,r)}(1, u)$ .

**Следствие 1.** При значениях параметров  $m=r=1$  производящая функция (5) совпадает с формулой (1), т. е. при  $n \in \mathbf{N}$  числа  $U_n^{(1,1)}(1)$  совпадают с большими числами Шредера  $S_n$ .

**Следствие 2.** При значениях параметров  $m=1, r \geq 1$  производящая функция (5) принимает следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(1,r)}(1)u^n = \frac{1-u-\sqrt{u^2-2(2r+1)u+1}}{2ru}$$

и определяет числа, обобщающие большие числа Шредера и описанные в [2, A006318, A103209 – A103211, A133305 – A133309].

**Следствие 3.** При значениях параметров  $m=2, r=1$  производящая функция (5) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^{(2,1)}(1)u^n = \frac{1-u-\sqrt{4u^2-8u+1}}{3u}$$

и задает целочисленную последовательность, начальный отрезок которой из 8 элементов вычислен в [3] и описан в [2, A234939]. Поэтому эту последовательность также можно рассматривать как надлежащее обобщение последовательности больших чисел Шредера.

**Заключение.** Рассмотренный двухпараметрический класс  $T$ -моделей наряду с аналогичными классами, описанными в [5], иллюстрирует возможности использования  $T$ -моделей для целей моделирования, классификации и стандартизации целочисленных последовательностей.

$T$ -модели позволяют находить новые свойства ряда целочисленных последовательностей из [2]. Для этого в [4, 5] была введена нумерация элементов таблиц  $T_n$ , и на ее основе получены частично упорядоченные множества, описываемые диаграммами Хассе, а также многочлены  $V_n(x)$ . Эти многочлены при  $n \in \mathbf{N}$  задают двухиндексную последовательность, отвечающую числовой последовательности  $V_n(1) = U_n(1)$ .

В частности, в дополнение к следствию 2 такие многочлены задаются производящей функцией

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{n+1}^{(1,r)}(x)u^n = \frac{1-u-\sqrt{(u-1)^2-4rxu}}{2rxu}.$$

На основе  $T$ -моделей также легко строятся  $q$ -аналоги различных целочисленных последовательностей [4].

### Список литературы

1. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции / Р. Стенли. – Москва : Мир, 2009. – Т. 2. – 768 с.
2. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences / N.J.A. Sloane. – 2020. – URL: <http://oeis.org> (дата обращения: 26.09.2020).
3. Chapoton F. Enveloping operads and bicoloured noncrossing configurations / F. Chapoton, S. Giraud // ArXiv:1310.4521v2 [math CO]. – 2014. – P. 1-27.
4. Бондаренко Л. Н. Модели комбинаторного анализа : Монография / Л. Н. Бондаренко. – Москва : изд. «МУ им. С. Ю. Витте», 2019. – 248 с.
5. Бондаренко Л. Н. Систематизация комбинаторных последовательностей с использованием  $T$ -моделей и  $T$ -диаграмм / Л. Н. Бондаренко // Образовательные ресурсы и технологии. (Электронный научный журнал). – 2020. – №2 (31). – С. 58–68.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ КАК ФОРМА КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

*Горбачева О.И., Григорьев С.В., канд. техн. наук, доц., Шевцова Е.В.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк

*o.gorbacheva@donnu.ru, shelenav@yandex.ru*

**Введение.** В статье рассматривается использование компьютерного тестирования на этапе контроля сформированности умений и навыков студентов в процессе изучения информационно-коммуникационных технологий в области физической культуры и спорта. Компьютерное тестирование реализует регулярный контроль знаний студентов на основе принципа обратной связи. Преимуществами компьютерного тестирования являются наличие внушительного количества тестовых заданий, возможности их выбора, регулярное обновление и пополнение тестов, самоконтроль. Одной из актуальных проблем является оценка уровня подготовленности студентов по дисциплинам, в частности по информационно-коммуникационным технологиям в области физической культуры и спорта.

**Цель работы.** Основная задача тестирования студентов по различным дисциплинам это определение качества усвоения студентами учебного материала, уровня овладения знаниями, умениями и способностями, предусмотренными Государственным образовательным стандартом. Реализация цели это определение меры ответственности каждого студента за итоги своего обучения, уровня его возможностей получать знания самостоятельно, а также, повышение объективности проведения экзаменов и зачетов.

**Основная часть.** В настоящее время на базе института физической культуры и спорта широко используются электронные методические разработки для проведения практических и лабораторных занятий по информационно-коммуникационным технологиям. Это способствует развитию у студентов практических навыков самостоятельной работы с электронными документами. Кроме того, преподаватель имеет возможность использовать освободившееся время для индивидуальной работы с каждым студентом, уделять больше внимания компьютерному тестированию студентов, анализировать результаты обучения.

Для любого образовательного учреждения высшего профессионального образования, оценивание студентов является одной из приоритетных и сложных задач. Методом исследования подготовленности студентов является такая форма контроля как тест. В последнее время тестирование, как метод оценки знаний, приобретает всё большую

популярность [1]. Таким образом, компьютерное тестирование по своей многогранности и скорости получения результата лучше, чем многие другие формы контроля. Внедрение инновационных и компьютерных технологий в образовании предполагает плавный переход от традиционных форм контроля знаний к автоматизированным. Анализ научно-педагогической литературы и современной образовательной практики показал, что в настоящее время идет процесс становления системы компьютерного тестирования в области образования, а тестовые технологии рассматриваются как одно из средств контроля качества подготовки и уровня знаний студентов. В связи с этим, компьютерное тестирование по проверке остаточных знаний студентов является предметом исследований многих педагогов и специалистов в любой области знаний. Одной из самых распространенных и востребованных на данный момент компьютерных систем организации контроля знаний считается тестовая система.

Универсальная сетевая тестовая оболочка MultiTester используется с целью подготовки и проведения тестирования знаний через локальную сеть с возможностью наблюдать за процессом деятельности тестируемых в режиме настоящего времени и с автоматическим выставлением оценок, в соответствии с установленными критериями. В состав системы входят: MultiTester Professor (Программа преподавателя), MultiTester QuEditor (Редактор вопросов) и MultiTester Student (Программа учащегося). Вся система работает по принципу "Клиент/Сервер", где клиентом является MultiTester Student, а сервером – MultiTester Professor. Все без исключения сведения находятся в базе данных программы MultiTester Professor (Программа преподавателя), которые хранятся на компьютере преподавателя и при начале тестирования передаются по сети на компьютер студента. Связь между компьютером студента и преподавателя настраивается автоматически, хотя есть возможность и ручной настройки [2]. Так как данные тестирования не хранятся в компьютерах, за которыми работают студенты, это позволяет полностью исключить вмешательство студентов в программу (т.е., изменить формулировку вопросов, прочитать правильные ответы, а также – изменить результаты прохождения тестирования). Также невозможно запустить программу Student дважды, закрыть студентом эту программу самостоятельно (это может сделать только преподаватель со своего компьютера). Есть возможность проводить тестирование потоком (т.е. когда на место закончившего тестирование студента садится следующий, получает вопросы и начинает работать независимо от остальных). Это дает возможность использовать компьютеры продуктивно при малом их количестве.

Основные возможности системы: Составление тестовых заданий по любой теме любого предмета; добавление рисунков, как к вопросу, так и к вариантам ответов; определение баллов вопроса; проведение

компьютерного тестирования не только посредством локальной сети, но и в автономном режиме; просмотр ответов студентов в режиме реального времени; автоматическое выставление предварительных оценок согласно установленной системе; установка необходимого процента правильных ответов для каждого балла; засчитывание неполных ответов (или засчитывание только полностью правильных ответов); сохранение результатов тестирования в базу архива; просмотр сохранённых результатов с фильтрацией и подсчётом статистики; отправка сохранённых результатов на печать; экспорт сохранённых результатов в MS Word и MS Excel; экспорт списка вопросов в MS Word [3].

**Заключение.** Таким образом, значительную роль в достижении требований к результатам обучения студентов и в совершенствовании учебного процесса играет проверка знаний и умений. Компьютерная система контроля знаний дает возможность не только преподавателям, но и студентам, оценить, насколько эффективно была изучена данная тематика предмета. Данная тестирующая система MultiTester System проста в использовании и настройке. Из личного опыта применения (компьютерное тестирование используется на базе института физической культуры и спорта) можно сделать вывод, что тестирующая программа MultiTester System – одна из лучших программ для создания тестов, которая обладает большими возможностями для эффективной организации процесса освоения учебной дисциплины. Можно сделать вывод, что компьютерное тестирование это практичный, современный способ получения результатов остаточных знаний студентов, сокращающий затраты времени на проверку этих результатов. Компьютерное тестирование позволяет максимально конструктивно организовать процесс обучения, определить пробелы в знаниях при изучении данной дисциплины. Таким образом, компьютерное тестирование является одной из наиболее эффективных форм и методов проведения автоматизированного контроля, что является аргументом для дальнейшего исследования и использования этого метода контроля в вузах.

### **Список литературы**

1. Чурина К. В., Зимина Е. К. Тестирование как форма контроля результатов обучения // Молодой ученый. – 2015. – №9. – С. 1214-1217.
2. Использование тестов в учебном процессе // [Электронный ресурс] URL: <http://testobr.narod.ru/3.htm>
3. MultiTester System // [Электронный ресурс] URL: <http://rowi.org.ua/index.php/4-multitester>

## ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПОВ КОЛОНОЧНОГО («COLUMNAR STORAGE») ХРАНЕНИЯ В БАЗАХ ДАННЫХ

*Дмитренко Н.А., Владимиров А.М., Ткачев Н.Ю., Перепелов И.С.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*n.dmitrenko@donnu.ru*

**Введение.** Технические ограничения способов хранения информации второй половины XX века сформировали одну из архитектурных особенностей систем управления базами данных (СУБД) – строчное (кортежное) хранение данных, которое реализовано и до сих пор широко используется в современных реляционных СУБД (РСУБД).

Однако, в настоящее время в научных и бизнес-системах накоплено и обрабатывается колоссальное количество информации, в том числе – в виде сложных и неструктурированных данных, на основе которых приходится решать разнообразные аналитические и управленческие задачи. Всё более возрастающие требования к скорости исполнения запросов на фоне растущих объёмов обрабатываемых данных диктуют необходимость пересмотра традиционной концепции развития современных баз данных.

**Цель** настоящей работы состоит в теоретическом анализе и практической апробации прогрессивных идей внедрения принципов колоночного метода хранения данных в РСУБД. Методами исследования выступает теоретический анализ литературы и практическая апробация.

**Теоретическая база исследования.** Концепция развития современных БД направлена на увеличение скорости доступа к данным. Авторы работ [1, 2] отмечают, что современные РСУБД, построенные с учетом ограничений прошлого века на технологиях строчного («row-store») хранилища, на аналитических рабочих нагрузках, возникающих в хранилищах данных, не отвечают в полной мере современным требованиям. Одним из перспективных архитектурных решений в области хранилищ данных является параллельное колоночное («столбцовое», «column-store») хранение данных (КСУБД), позволяющее на имеющемся оборудовании повысить быстродействие процесса обработки запросов за счет уменьшения времени их выполнения в десятки раз. В этом направлении движутся как исследовательские проекты MonetDB, MonetDB\X100 и C-Store, так и промышленные СУБД Sybase IQ, Ingres VectorWise, Vertica [3]. И если в начале XXI века, когда был разработан один из первых исследовательских прототипов аналитической массивно-параллельной КСУБД C-Store [4], сообщество исследователей БД скептически относилось к этим подходам, то уже через несколько лет изменили своё мнение – проект C-Store был коммерциализирован, и на его основе была организована компания Vertica (в 2011 г. перекупленная Hewlett-Packard). Уже к концу 2013 г. большинство основных разработчиков СУБД – IBM, Microsoft, SAP, Oracle – примкнули к



этому тренду и добавили в свои СУБД методы колоночного хранения, что еще больше подчеркивает важность и влияние этой технологии в области хранения информации [3].

Большой потенциал колоночных систем подтверждают аналитические исследования и прогнозы аналитиков [5–9]. Ещё в [6] была задекларирована важность академических исследований колоночного типа хранения данных, а в [9] отмечено, что во всех системах, осуществляющих анализ больших данных, уже внедрено колоночное хранение данных. При этом в работе [8] анализ результатов экспериментов по производительности колоночных систем показывает превосходство колоночной системы над классической в 4÷10 раз в зависимости от запроса. В то же время автор работы [5] приходит к выводу, что при хорошем сжатии столбцов время выполнения запроса в КСУБД меньше, чем в строчной СУБД даже при использовании в запросе 100% атрибутов, при этом наблюдается существенная экономия вычислительных ресурсов. В работе [7] показано 200-кратное сокращение объема ввода-вывода по сравнению с аналогичной РСУБД, которое достигается за счёт уменьшения чтений атрибутов и эффективного метода сжатия столбцов.

Немаловажную роль к интенсификации внедрения КСУБД даёт развитие нативных архитектур СУБД на основе энергонезависимой основной памяти (Non-Volatile Main Memory, NVM). Всё более улучшающиеся ценовые и скоростные характеристики разных видов NVM позволяют рассчитывать на переход к КСУБД с одноуровневой системой хранения [10].

Строчные и колоночные СУБД очень схожи на логическом уровне и способны обрабатывать одинаковые SQL-запросы, но на физическом уровне они существенно отличаются, что влияет на план выполнения запросов и их реализации. На рис.1 представлена принципиальные схемы колоночного и строчного типов хранения информации.

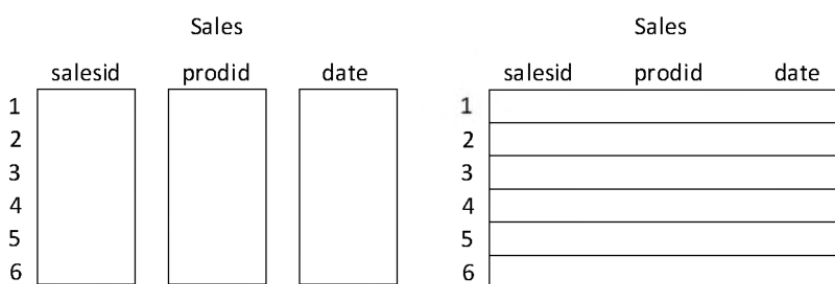


Рис.1. Схема колоночного (слева) и строчного (справа) хранения информации [11]

Строчное хранение данных – это хранение в виде записи (строки), в которой значения атрибутов идут последовательно, и за последним атрибутом начинается следующая запись. Колоночное хранение данных – это хранение значений атрибутов одно за другим: по сути, каждой колонкой является отдельная таблица из одного столбца. Колоночные базы

данных призваны решить две проблемы: ускорение сложных запросов и изменение структур таблиц с большим количеством атрибутов и записей.

Следует отметить, что колоночная система не лишена недостатков. КСУБД заняли нишу OLAP-систем. Исполнение OLTP-запросов не даёт выигрыша производительности по сравнению с классическими РСУБД [8].

**Заключение.** Внедрение принципов колоночного хранения позволяет перейти на новый, отвечающий последним требованиям уровень работы с большими объёмами данных, и, как следствие, повысить эффективность сложных выборок в больших массивах данных. Тенденция развития концепций современных баз данных диктует необходимость изучения и развития принципов КСУБД в вузах.

### Список литературы

1. Ермаков Е.Ю. Операторный метод оценки времени выполнения запросов в параллельной колоночной системе баз данных: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.13.17 / Ермаков Евгений Юрьевич. – М: МГТУ им. Н.Э. Баумана, – 2015. – 22 с.
2. ColumnStores vs. RowStores: How Different Are They Really? / Daniel J. Abadi, Samuel Madden, Nabil Hachem. – Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, Vancouver, BC, Canada, June 2008 / пер.: С.Д. Кузнецов // Citforum. 2008. URL: [http://www.citforum.ck.ua/database/articles/column\\_vs\\_row\\_store/](http://www.citforum.ck.ua/database/articles/column_vs_row_store/) (дата обращения: 20.10.2020).
3. Григорьев Ю.А. Теория и практика анализа параллельных систем баз данных : монография / Ю.А. Григорьев, А.Д. Плутенко, В.Л. Плужников, Е.Ю. Ермаков, Е.В. Цвященко, В.А. Пролетарская. – Владивосток: Дальнаука, – 2015. – 336 с.
4. Кузнецов С.Д. Управление данными: 25 лет прогнозов // Труды ИСП РАН. – 2017. – Т. 29, вып. 2. – С. 117-160.
5. Ермаков Е.Ю. Анализ и сравнение процессов обработки запроса к таблице в параллельных колоночных и строчных хранилищах данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – М., 2012. – № 8. – С. 545-555.
6. The Beckman Database Research Self-Assessment Meeting, Beckman Center of the National Academies of Sciences & Engineering, Irvine, CA, USA, October 14-15, 2013. URL: <https://beckman.cs.wisc.edu> (дата обращения: 20.10.2020).
7. Stonebraker M. One Size Fits All? – Part 2: Benchmarking Results / Michael Stonebraker, Chuck Bear, Uğur Çetintemel, Mitch Cherniack, Tingjian Ge, Nabil Hachem, Stavros Harizopoulos, John Lifter, Jennie Rogers, and Stan Zdonik // 3rd Biennial Conference on Innovative Data Systems Research (CIDR). Asilomar, California, USA. January 2007.
8. Чернышев Г.А. Организация физического уровня колоночных СУБД // Труды СПИИРАН: SPIRAS Proceedings. – Санкт-Петербург, – № 7 (30). – 2013. – С. 204-222.
9. The Seattle Report on Database Research / Daniel Abadi, Anastasia Ailamaki, David Andersen, et al. / ACM SIGMOD Record, vol. 48, no. 4, December 2019, pp. 44-53 // Citforum. 2020. URL: [http://citforum.ru/database/articles/seattle\\_report/](http://citforum.ru/database/articles/seattle_report/) (дата обращения: 20.10.2020).
10. Кузнецов С.Д. В ожидании нативных архитектур СУБД на основе энергонезависимой основной памяти // Труды ИСП РАН. – 2020. – Т. 32, вып. 1. – С. 153-180.
11. Григорьев Ю.А. Реляционные базы данных и системы NoSQL: учебное пособие / Ю.А. Григорьев, А.Д. Плутенко, О.Ю. Плужникова. Благовещенск: Амурский гос. ун-т. – 2018. – 424 с.

## УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА КАК МОДЕЛЬ ПЕРЕГРУЗКИ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ

*Едемская Е.Н., Бельков Д.В.*, канд. техн. наук

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, ДНР  
*belkovdv@list.ru*

**Введение.** В компьютерных сетях важной проблемой является перегрузка. Это состояние, при котором сетевые ресурсы на протяжении достаточно длительного интервала времени не способны обрабатывать поступающие задания [1]. В сетях на основе протокола TCP/IP перегрузки возникают из-за отсутствия централизованного управления сетевыми ресурсами. Так как пакеты обрабатываются последовательно, то в случае одновременного поступления нескольких пакетов необходимо применение механизма, определяющего порядок их обработки и передачи.

Известно [2], что при передаче трафика в сети можно выделить три фазы: фаза без перегрузки, фаза управляемой перегрузки, фаза серьезной перегрузки.

Целью данной статьи является уменьшение времени доставки пакетов за счет регулирования ширины фазы управляемой перегрузки. Задачи работы:

- 1) разработка математической модели перегрузки компьютерной сети на основе волнового процесса;
- 2) определение ширины фазы управляемой перегрузки с использованием уравнения Бюргерса.

**Основная часть.** В случае низкой нагрузки трафик и коэффициент обслуживания сети возрастает с увеличением нагрузки. Количество доставленных пакетов пропорционально количеству посланных. Сеть работает в равновесном режиме. При повышении нагрузки достигается точка А, показанная на рисунке 1, после которой сетевой трафик растет медленнее, чем нагрузка на входе. Это связано с тем, что сеть входит в состояние управляемой перегрузки, когда она справляется с нагрузкой с увеличенной задержкой (интервал между точками А и В на рис. 1).

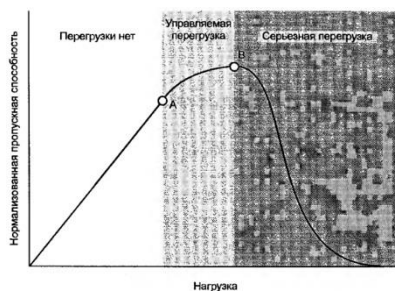


Рис. 1. Перегрузка сети [2]

При дальнейшем увеличении нагрузки очереди в узлах продолжают удлиняться. В точке В на рис. 1 достигается состояние серьезной перегрузки. С ростом нагрузки пропускная способность сети падает. Причиной этого является ограниченный объем буферов в узлах. С увеличением количества переполненных буферов эффективная пропускная способность стремится к нулю [2]. В идеальном случае перегрузки нет. Сеть передает пакеты с максимальной скоростью равной пропускной способности.

В данной работе рассматривается движение среды из невзаимодействующих частиц без потерь и появления новых частиц [3]. Пусть  $n(x,t)$  – плотность частиц в точке  $x$  в момент  $t$ ,  $v$  – скорость среды:  $v = dx/dt$ . В таком случае движение подчиняется уравнению (1).

$$\partial n / \partial t + v \cdot \partial n / \partial x = 0 \quad (1)$$

Если  $v = const = v_0$ , то решение уравнения (1) имеет вид бегущей волны:  $n = n(x - v_0 t)$ , где  $v_0$  – скорость волны. Начальное условие  $n(x,0) = F(x)$  определяет профиль волны, который движется без искажений вдоль  $x$  со скоростью  $v_0$ . Пусть среда является нелинейной и скорость зависит от плотности:  $v = v(n)$ . В таком случае решение имеет вид простой волны:

$$n(x,t) = F(x - v(n)t) \quad (2)$$

В волне (2) скорость движения разных точек профиля неодинакова. Если  $v'(n) > 0$ , то фронт волны становится все более крутым и волна опрокидывается. Момент опрокидывания определяется условиями:

$t_0 = 1 / \max(F'v'), F'v' < 0$ . Для уравнения свободного движения несжимаемой среды (3) эти условия имеют вид:  $t_0 = 1 / \max(v'), v' < 0$ .

$$\partial v / \partial t + v \cdot \partial v / \partial x = 0 \quad (3)$$

Пусть среда является вязкой с коэффициентом вязкости  $\nu$ . В таком случае существует фактор противодействия опрокидыванию волны. Если уравнение (3) дополнить вязким членом, то получим уравнение Бюргерса (4).

$$v_t + v \cdot v_x = \nu v_{xx} \quad (4)$$

В случае, когда значение  $t$  приближается к  $t_0$ , крутизна фронта волны растет и увеличивается производная  $v_x(x,t)$ . В результате вязкий член  $\nu v_{xx}$  станет большим и может компенсировать нелинейный член  $v_x$ . Появляется конкуренция противоположных процессов: увеличения крутизны фронта из-за нелинейности и уменьшения крутизны из-за вязкости. Как следствие конкуренции может возникнуть стационарное движение. При малой вязкости ( $\nu \ll 1$ ) стационарный профиль устанавливается через большое время:  $t \rightarrow \infty$ .

На рис. 2а показано асимптотическое решение уравнения Бюргера в виде треугольной волны при  $\nu \rightarrow 0$ . При конечных значениях вязкости, как показано, на рисунке 4б, имеется переходный слой шириной  $\Delta x$ .

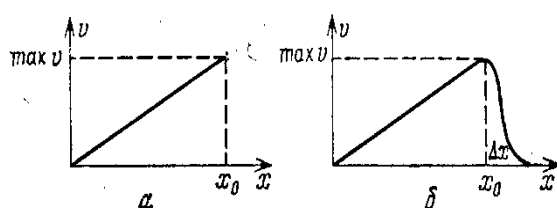


Рис. 2. Решение уравнения Бюргера [3]

Идея данной работы состоит в том, что профиль волны, показанный на рис. 2б, отождествляется с перегрузкой компьютерной сети, показанной на рис. 1. В таком случае переходный слой  $\Delta x$  соответствует фазе управляемой перегрузки, а максимальная скорость волны – максимальной пропускной способности. Решение уравнения Бюргера в котором опрокидывание не происходит, является примером образования ударной волны. Этот случай соответствует идеальной работе компьютерной сети.

Процесс движения волны определяется конкуренцией нелинейности и вязкости. Взаимоотношение этих факторов учитывается с помощью числа Рейнольдса, равного отношению нелинейного члена к вязкому:  $R = \nu v_x / \nu \nu_{xx}$ . Известно [3], что

$$\Delta x / x_0 \sim 1/R \quad (5)$$

Формула (5) имеет практический смысл для предлагаемой аналогии между волновым процессом и перегрузкой компьютерной сети, если параметру  $\Delta x$  имеется аналогия в механизме управления перегрузкой. В данной статье предлагается использовать аналогию между параметром  $\Delta x$  и рабочим интервалом алгоритма RED. В таком случае загрузка сети измеряется средней длиной очереди.

**Заключение.** В работе получены следующие результаты: разработана математическая модель перегрузки компьютерной сети на основе волнового процесса, предложена формула для определения ширины фазы управляемой перегрузки с использованием уравнения Бюргера.

#### Список литературы

1. Олифер В.Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер. – СПб. : Питер, 2010. – 944 с.
2. Столлингс В. Современные компьютерные сети / В. Столлингс. – СПб. : Питер, 2003. – 783 с.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. – 2020. – [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://bookre.org/reader?file=543079>

## АВТОМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ТАБЛИЧНЫХ ДОКУМЕНТОВ

*Киселёв Ф.В., Шевцов Д.В.*, канд. техн. наук, доц.  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*theodoreii@yandex.ru, d.shevtsov@donnu.ru*

**Введение.** Не будет преувеличением сказать, что проблема автоматизации вопросов, связанных с документооборотом, с каждым годом только прибавляет в своей актуальности. Проблемы и задачи, связанные с ним, демонстрируют эффект, противоположный «эффекту масштаба» в экономике: чем больше становится организация, тем сложнее становится ежедневный обмен документами и их обработка, более остро становится вопрос их централизованного хранения и разграничения прав доступа; причём это лишь малая толика проблем, которая неизбежно будет возникать в ходе рабочего процесса.

Мы же выделим такую часть обозначенного дискурса как автоматическая обработка табличных документов.

Без всякого сомнения, таблицы как раньше, так и сейчас – один из самых популярных способов хранения информации. Сложность, однако, состоит в том, что значительная часть из них плохо структурирована. В связи с этим следует строго определить структуру таблицы, чтобы впоследствии добиться корректного извлечения данных из неё.

**Основная часть.** Одним из способов определения структуры является способ, который основан на визуальном подходе. Он базируется на том предположении, что в момент создания и заполнения таблиц они конструируются таким образом, чтобы человек мог без затруднений отличить разные элементы таблицы (строки, столбцы и их заголовки, данные) друг от друга [1].

ГОСТ 2.105-95 определяет таблицу как совокупность таких элементов как головка, боковик и матричное ядро. Заголовки столбцов (возможно многоуровневые) входят в головку, заголовки строк – в боковик. Следует при этом учитывать возможность иерархической вложенности элементов, как-то: разнообразные врезки, разделение внутри категории на подкатегории и прочее. Кроме того, в ГОСТе обозначено, что над таблицей могут (а могут и не) находиться такие элементы как номер и название таблицы, имя автора, единицы измерения, в которых приведены данные, дата создания и другие. Стандарт, однако, регламентирует лишь метаданные таблицы, никак не затрагивая её содержание.

Стоит упомянуть, что это, конечно, не единственный способ описания таблиц. Существует, например, подход, основанный на реляционной модели, который описывает таблицу как совокупность

взаимоотношений между её ячейками. Таблица в такой модели хранит информацию о множестве объектов с некоторыми атрибутами, а каждая запись может быть представлена в виде «значение-атрибут». За счёт возможности объединения некоторых свойств формируются иерархии, которые позволяют добиться разного визуального представления для одних и тех же отношений внутри таблицы. В большинстве случаев таблицы содержат однотипные данные и данные представлены в них построчно. В таком случае имеет место соответствие «строка-объект» [2], в то время как заголовки описывают множество его свойств. Исходя из этого возможно, верно определив расположение данных и заголовков (иными словами, корректно определив структуру таблицы) получить табличные данные в виде множества объектов с набором свойств и соответствующих им значений.

В таком случае алгоритм распознавания будет включать в себя следующие шаги [3]:

1. Определение границ (рабочей области) таблицы. Под рабочей областью следует понимать совокупность ячеек, содержащих полезную информацию, то есть некоторый прямоугольник из ячеек.

2. Определение направления данных. Используя визуальные особенности представления данных в таблицах возможно понять тип рассматриваемой таблицы: столбцовая (где заголовки расположены над столбцами) или строчная (где заголовки расположены в начале строки)

3. Поиск паттернов заголовков и данных, который проходит на основании предположения об однотипности содержащихся в столбцах данных для всех объектов. Анализируя содержания столбцов возможно выделить смысловые блоки таблицы.

4. Обработка заголовков подразумевает уточнение структуры таблицы, поиск врезанных заголовков, шапки таблицы и прочих структурных элементов.

**Заключение.** Методы, подобные описанному (то есть основанные на визуальном восприятии таблицы) показывают высокую точность, которая, однако, может быть повышена за счёт семантического анализа данных таблицы.

### Список литературы

1. Иванов Ю.Н., Емельянов Н.Е., Сотникова Р.А. Документы: типы, описания. Препр. – М.: Изд-во ВНИИСИ, 1987. – 62 с
2. Дегтярева А., Вежнев В. Преобразование Хафа (Hough transform) // Компьютерная графика и мультимедиа. – 2003. – № 1 (2). – URL: <http://cgm.computergraphics.ru/content/view/36> (дата обращения: 09.06.2016).
3. Duda R.O., and Hart P.E. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures // Communications of the ACM 15.1. – 1972. – P. 11–15.

## РАЗРАБОТКА БЛОЧНОГО ШИФРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

*Павлишин К.А., Рыбалко Л.А.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*Blackhawk05@rambler.ru, l.rybalko@donnu.ru*

**Введение.** Современная криптография образует отдельное научное направление на стыке математики и информатики – работы в этой области публикуются в научных журналах, организуются регулярные конференции. Практическое применение криптографии стало неотъемлемой частью жизни современного общества – её используют в таких отраслях как электронная коммерция, электронный документооборот (включая цифровые подписи), телекоммуникации и других. Если раньше криптография была уделом государственных структур, то сейчас криптографические методы защиты используют обычные люди и организации.

Традиционная криптография включает раздел симметричных криптосистем, в которых зашифровывание и расшифровывание проводится с использованием одного и того же секретного ключа. В качестве основного критерия периодизации криптографии можно использовать технологические характеристики методов шифрования. Как правило, симметричные криптосистемы строятся на так называемой сети Фейстеля, при которой шифруемый исходный блок данных делится на два равных по длине подблока. На каждой итерации обработки блока преобразованию подвергается правый подблок, после чего подблоки переставляются местами. Это приводит к необходимости увеличивать число итераций.

Целью работы является создание симметричной криптосистемы с помощью комбинирования шифров Хилла и SAFER+, использующих сеть Фейстеля, а арифметические преобразования по заданному модулю.

**Основная часть.** В 1998 году корпорация Cylic представила свой вариант шифра для участия в конкурсе на стандарт AES. Это был блочный шифр SAFER+, не использующий структуру сети Фейстеля [1]. Шифр работает с блоками длиной 128 бит и с ключами 128, 192 или 256 бит. Процедуры шифрования и расшифровывания представляют собой последовательность из 8, 12 или 16 итераций в зависимости от длины ключа. Каждая итерация состоит из четырех слоев с использованием двух подключей. Блок данных из 16 байт разбивается на два подмножества байтов с номерами 1,4,5,8,9,12,13,16 и 2,3,6,7,10,11,14,15. При шифровании и расшифровывании к байтам каждого из подмножеств применяются



обратные друг к другу операции модулярной арифметики, в том числе на слое нелинейной замены модулярные операции возведения в степень и вычисления дискретного логарифма. При шифровании после всех итераций (а при расшифровывании – перед) производится еще одно подмешивание подключа.

Шифр Хилла – был изобретен американским математиком Лестером Хиллом в 1929 году [2]. Он также основан на модулярной арифметике и линейной алгебре. Этот шифр был первым, который позволял одновременно шифровать сразу несколько символов.

Шифрование происходит по формуле  $Y^j = A * X^j \bmod m$ , где  $X^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_k^j)^T$  –  $j$ -ый блок исходного текста,  $Y^j$  –  $j$ -ый блок шифротекста,  $A$  – квадратная невырожденная матрица размером  $k \times k$ , являющаяся ключом шифра. При этом  $NOD(det(A), m) = 1$ , где  $m$  – мощность алфавита.

Расшифровывание выполняется как  $X^j = A^{-1} * Y^j \bmod m$ , где  $A^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $A$  по  $\bmod m$ .

Данный шифр не нашел практического применения из-за слабой устойчивости к взлому и сложности генерации прямых и обратных матриц большого размера.

Из-за того, что шифр Хилла сильно уязвим для атак по открытому тексту, из-за того, что в нем используются только линейные операции, чтобы усилить его криптостойкость было использовано такое решение. Открытый текст сначала шифруется с помощью SAFER+, который включает в себя нелинейные операции, а уже потом шифром Хилла. Что позволило минимизировать данную уязвимость.

**Заключение.** Реализованы шифры SAFER+ и Хилла, и была предложена реализация комбинированной криптосистемы на их базе, которая позволила убрать основную уязвимость алгоритма Хилла, а именно атаку по открытому тексту. Стоит заметить, что данные шифры имеют недостаточную криптостойкость для использования в государственных делах, однако для небольших организаций и персонального пользования они подходят отлично.

### Список литературы

1. Баричев С.Г. Основы современной криптографии / С.Г. Баричев, Р.Е. Серов. – М.: «Горячая линия – Телеком», 2001. – 176 с.
2. Романец Ю.В. Защита информации в компьютерных системах и сетях / Ю.В. Романец, П.А. Тимофеев, В.Ф. Шаньгин – М.: Радио и связь, 1999. – 328 с.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДРОБИЛЬНОЙ МАШИНЫ

*Тарасенко В.А.*, канд. техн. наук, доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*oktv7@mail.ru*

**Введение.** Вновь создаваемые и модернизируемые горные машины являются новыми и мало исследованными объектами, в следствие чего возникает необходимость разработки имитационных математических моделей процесса их функционирования. При этом, создание математических моделей, позволяющих исследовать сложные процессы функционирования динамических объектов горного машиностроения является важной и актуальной научной задачей [1–3].

**Цель.** Создание имитационных математических моделей процесса функционирования горных машин позволит осуществить выбор их рациональных структуры и параметров, что повысит скорость проектирования и совершенствования, а также снизит стоимость этих работ.

**Основная часть.** Одним из основных элементов механизированного закладочного комплекса, осуществляющего процесс дробления горной породы, является одновалковая гирационная дробилка ДВ, которая предназначена для разрушения в шахтных условиях горных пород с крепостью до 16-18 единиц по шкале профессора М.М. Протодьяконова.

Имитационная модель функционирования одновалковой гирационной дробилки ДВ была представлена следующими взаимосвязанными математическими моделями (ММ):

1) ММ исходного питания [4], учитывающей стохастический характер поступления породы в дробилку;

2) ММ процесса дробления, основанной на представлении процесса в виде совокупности последовательных актов нагружения каждого куса породы, которые при выполнении определенных условий завершаются его хрупким разрушением [5]; 3) ММ динамики дробилки, учитывающей нелинейные связи, обусловленные наличием упругой пальцевой муфты, предохранительных срезных устройств и электродвигателя [2].

Расчетная схема и математическая модель электромеханической системы дробилки ДВ приведена на рис. 1. При составлении дифференциальных уравнений движения механической системы использовались уравнения Лагранжа II рода.

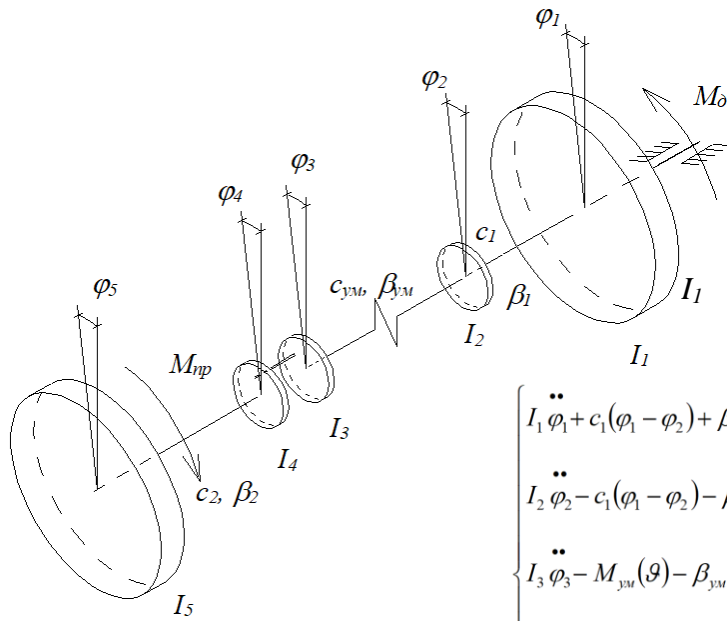


Рис. 1. Расчетная динамическая схема и математическая модель одновалковой дробилки ДВ

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + \beta_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = M_\delta; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - \beta_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + M_{ум}(\vartheta) + \beta_{ум}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) = 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - M_{ум}(\vartheta) - \beta_{ум}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + M_{сн}(\nu) = 0; \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - M_{сн}(\nu) + c_2(\varphi_4 - \varphi_5) + \beta_2(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5) = 0; \\ I_5 \ddot{\varphi}_5 - c_2(\varphi_4 - \varphi_5) - \beta_2(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5) + M_{np} = 0. \end{cases}$$

В качестве обобщенных координат приняты углы поворота  $\varphi_i$ , соответствующие массам с моментами инерции  $I_i$ , упругие и диссипативные свойства трансмиссии для участков 1-2 и 4-5 приняты линейными и характеризуются соответствующими коэффициентами жесткости  $c_i$  и сопротивления  $\beta_i$ ,  $c$  и  $\beta$  для участков 2-3 и 3-4 описываются соответствующими математическими моделями для упругой муфты ( $M_{ум}$ ) и срезного предохранительного устройства ( $M_{сн}$ ),  $M_\delta$  – электромагнитный момент двигателя,  $M_{np}$  – момент сопротивления на исполнительном органе.

Следующим блоком уравнений данной системы являются уравнения динамики электродвигателя, в качестве которых может быть использовано в простейшем случае уравнение И.С. Пинчука или более сложная модель Парка-Горева. Каждая из этих моделей имеет свою область применения. Так, модель И.С. Пинчука может использоваться только в установившихся режимах работы электрохимической системы, а модель Парка-Горева помимо этого и в переходных режимах запуска, опрокидывания, повторного выхода в номинальный режим и отключения двигателя.

Модель И.С. Пинчука:  $S = \nu \cdot (M_\delta - T_\delta \dot{M}_\delta)$ , где:  $S = 1 - \dot{\varphi}_1 \cdot \omega_0^{-1}$  – скольжение двигателя;  $\nu = 0.5 \cdot S_K M_K^{-1}$  – условный коэффициент крутизны статической характеристики;  $S_K$ ,  $M_K$  – соответственно критическое скольжение и момент двигателя;  $T_\delta = (\omega_c S_K)^{-1}$  – электромагнитная постоянная времени;  $\omega_0$  – угловая скорость идеального холостого хода.

Модель Парка-Горева ( $\Psi_{xa}$ ,  $\Psi_{ya}$ ,  $\Psi_{za}$ ,  $\Psi_{x\beta}$ ,  $\Psi_{y\beta}$ ,  $\Psi_{z\beta}$  – обобщенные координаты потокосцеплений статора и ротора,  $p$  – число пар полюсов,  $a$ ,  $b$ ,  $X$ ,  $U$  – другие параметры двигателя):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Psi}_{s\alpha} = \omega_c [(a_s - 1)b_s \Psi_{s\alpha} + a_{r\beta} b_s \Psi_{\beta\alpha} + a_{r\eta} b_s \Psi_{\eta\alpha}] + U_m \cos(\omega_c t) - \Delta U_{s\alpha}; \\ \dot{\Psi}_{\beta\alpha} = \omega_c [a_s b_{r\beta} \Psi_{s\alpha} + (a_{r\beta} - 1)b_{r\beta} \Psi_{\beta\alpha} + a_{r\eta} b_{r\beta} \Psi_{\eta\alpha}] - \dot{\varphi}_1 U \Psi_{\beta\beta} p; \\ \dot{\Psi}_{\eta\alpha} = \omega_c [a_s b_{r\eta} \Psi_{s\alpha} + a_{r\beta} b_{r\eta} \Psi_{\beta\alpha} + (a_{r\eta} - 1)b_{r\eta} \Psi_{\eta\alpha}] - \dot{\varphi}_1 U \Psi_{\eta\beta} p; \\ \dot{\Psi}_{s\beta} = \omega_c [(a_s - 1)b_s \Psi_{s\beta} + a_{r\beta} b_s \Psi_{\beta\beta} + a_{r\eta} b_s \Psi_{\eta\beta}] + U_m \sin(\omega_c t) - \Delta U_{s\beta}; \\ \dot{\Psi}_{\beta\beta} = \omega_c [a_s b_{r\beta} \Psi_{s\beta} + (a_{r\beta} - 1)b_{r\beta} \Psi_{\beta\beta} + a_{r\eta} b_{r\beta} \Psi_{\eta\beta}] + \dot{\varphi}_1 U \Psi_{\beta\alpha} p; \\ \dot{\Psi}_{\eta\beta} = \omega_c [a_s b_{r\eta} \Psi_{s\beta} + a_{r\beta} b_{r\eta} \Psi_{\beta\beta} + (a_{r\eta} - 1)b_{r\eta} \Psi_{\eta\beta}] + \dot{\varphi}_1 U \Psi_{\eta\alpha} p; \\ M_\delta = \frac{3\omega_c p}{2X_s} [\Psi_{s\beta} (a_s \Psi_{s\alpha} + a_{r\beta} \Psi_{\beta\alpha} + a_{r\eta} \Psi_{\eta\alpha}) - \Psi_{s\alpha} (a_s \Psi_{s\beta} + a_{r\beta} \Psi_{\beta\beta} + a_{r\eta} \Psi_{\eta\beta})] \end{array} \right.$$

**Заключение.** Создание сложных имитационных математических моделей процесса функционирования горных машин и соответствующего специализированного программного обеспечения является важной научной и народнохозяйственной задачей. Данное направление позволит перейти к проектированию машин для конкретных условий их эксплуатации с рациональными структурой и параметрами, обеспечивающими наибольшую производительность и наименьшие удельные энергозатраты.

#### Список литературы

1. Использование методов имитационного моделирования и оптимизации при создании и совершенствовании породоразрушающих машин для угольной промышленности Донбасса / В.Г. Гуляев, В.П. Кондрахин, В.А. Тарасенко, А.И. Хиценко // Донбасс-2020: Наука и техника – производству: Материалы научно-практической конференции – Донецк: ДонНТУ, 2002. – С. 148-151
2. Кондрахин В.П. Комплексная имитационная модель функционирования одновалковой гирационной дробилки / В.П. Кондрахин, В.А. Тарасенко // XXI столетие – проблемы и перспективы освоения месторождений полезных ископаемых: сб. науч. трудов НГА Украины. – Днепропетровск: РИК НГА Украины. – 1998. – Том 6. – № 3 – С. 67-71.
3. Тарасенко В.А. Проведение вычислительных экспериментов с использованием сложных имитационных моделей горных машин / В.А. Тарасенко // XXI столетие – проблемы и перспективы освоения месторождений полезных ископаемых: сб. науч. трудов НГА Украины. – Днепропетровск: РИК НГА Украины, – 1998. – Т. 6. – № 3. – С. 71-75.
4. Кондрахин В.П., Математическая модель формирования потока горной массы для закладки выработанного пространства / В.П. Кондрахин, В.А. Тарасенко // Материалы научно-практической конференции «Устойчивое развитие горно-металлургической промышленности». – 2004.
5. Кондрахин В.П. Имитационная модель процесса дробления породы в одновалковой гирационной дробилке / В.П. Кондрахин, В.А. Тарасенко // Известия Донецкого горного института. Донецкий горный институт. – Донецк: ДГИ, – 2001. – № 1.
6. Гуляев В.Г. Структурно-параметрическая оптимизация шахтной одновалковой гирационной дробилки // В.Г. Гуляев, В.П. Кондрахин, В.А. Тарасенко // Горный информационно-аналитический бюллетень. – М.: МГГУ, – 1999. – № 8 – С. 137-139.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ГОРНОМ МАССИВЕ

*Трофимов В.В.*, канд. техн. наук,

*Ходырев Е.Д.*, канд. техн. наук,

ГУ «Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ)», г. Донецк, ДНР

*ranimi@ranimi.org*

**Введение.** Исходя из данных [1] на глубинах до 2 км ресурсы метана угольных месторождений Донецкого бассейна составляют от 12 до 25 трлн. м<sup>3</sup>. Тем не менее их освоение на участках, не подверженных горным работам, проблематично, т.к., как правило, эти запасы связаны с угле вмещающими горными комплексами с проницаемостью на 2-3 порядка ниже, чем на традиционных газовых месторождениях [2]. С другой стороны, освоение геологических объектов закрытых шахт сдерживается отсутствием научно обоснованных методов оценки горно-геологических условий изъятия метана, методов прогнозирования и оценки техногенных изменений газодинамических свойств подработанного горного массива, технологических параметров бурения и добычи газа, принципиально новых средств оценки содержимого метана в угле и горном массиве, его давления и др.

**Цель** – обоснование принципов формирования техногенных коллекторов, в которых происходит скопление метана, что позволит разработать научные основы и практические рекомендации относительно изъятия метана из техногенных коллекторов горного массива подработанных участков действующих и закрытых шахт.

В решении поставленной задачи одним из незаменимых средств является математическое моделирование. При этом математический аппарат моделирования процесса массопереноса должен учитывать, что сеть крупных транспортных каналов (трещин, контактных пластов) окружает структурные блоки, движение в которых также существенным образом влияет на общую картину. По отношению к крупным транспортным каналам-трещинам структурные блоки выполняют роль источников (стоков). Своеобразие таких источников состоит в том, что движение между внешней поверхностью блоков и их внутренними частями изменяется во времени, создавая запаздывание реакции блоков на изменения в окружающих трещинах. Это существенным образом усложняет изучение задач, поскольку необходимо рассматривать процессы переноса и в крупных каналах, и внутри блоков.

Разработанная в РАНИМИ математическая модель и программное обеспечение на ее основе учитывает указанные процессы и позволяет прогнозировать изменения основных характеристик техногенных газовых месторождений на всех этапах его формирования и с учетом всего многообразия действующих факторов. На рисунке 1 показан процесс дифференциации давления в блоках и трещинах при решении нестационарной задачи фильтрации метана в угольном пласте при его дренировании скважиной.

Получаемые результаты моделирования согласуются с основными фундаментальными представлениями о происходящих процессах, а с учетом полученных количественных оценок рассматриваемых явлений, можно сделать вывод о том, что разработанная математическая модель является наиболее приемлемым инструментом для прогноза условий формирования и оценки свойств техногенных месторождений газа на подработанных территориях. При этом следует подчеркнуть, что дальнейшее использование этой модели требует уточнения некоторых параметров по результатам натурных опытно-фильтрационных работ на выбранных участках.

Результаты могут быть использованы как при интерпретации данных опытно-фильтрационных работ, так и при оптимизации дренажных мер в тех или других горнотехнических и горно-геологических условиях.

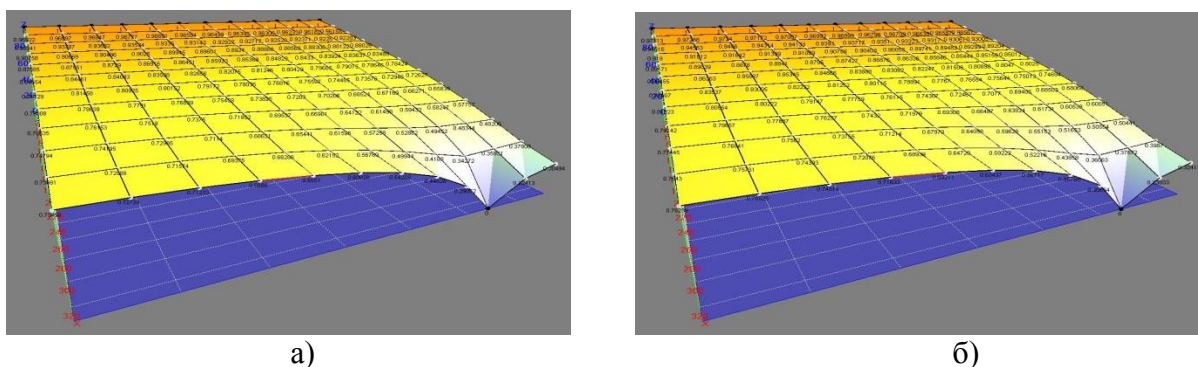


Рис. 1. Распределение давления: а) в блоках; б) в трещинах

### Список литературы

1. Газоносность и ресурсы метана угольных бассейнов Украины [Текст] Т. 1 Геология и газоносность Западного, Юго-Западного и Южного Донбасса / А. В. Анциферов, А. А. Голубев, В. А. Канин, М. Г. Тиркель, Г. З. Задара, В. Ю. Узиюк, В. А. Анциферов, В. Г. Суярко. – Донецк: Вебер, 2009. – 453 с.
2. Лукинов В. В. Фильтрационные параметры коллектора – углепородного массива, подработанного горными выработками [Текст] / В. В. Лукинов, А. П. Клец, В. В. Бобрышев, Д. П. Гуня, Н. Э. Капланец, В. В. Фичев // Межведомст. сб. науч. тр. ИГТМ НАНУ «Геотех. механика». – Днепропетровск, 2002. – Вып. 37. – С. 74-79.

## ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО АВТОМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ, КЛАССИФИКАЦИИ И ИМЕНОВАНИЮ МОДЕЛЕЙ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ АТОМАРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Шевцов Д.В.**, канд. техн. наук, доц., **Шевцова Е.В.**  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк  
*d.shevtsov@donnu.ru, shelenav@yandex.ru*

На основании анализа качественных результатов апробации метода автоматического моделирования знаков бинарных растровых цифровых изображений (РЦИ) определены и обоснованы перспективные направления исследований по усовершенствованию предложенных в [1] методов и информационных технологий аналитической обработки документов электронных информационных ресурсов с повышением показателей точности распознавания. Как следствие, их реализация позволит модернизировать существующие и разработать новые методы и подходы к индексации, систематизации, каталогизации разнообразных информационных ресурсов; снизить загрузку каналов связи за счет отказа от необходимости пересылки больших объемов графической информации; облегчить решение задач по защите авторских и смежных прав; обеспечить возможность своевременного получения специалистами актуальных данных; предоставить доступ широкому кругу пользователей к информации с соблюдением прав и иерархий доступа; уменьшить затраты на обслуживание, обработку и хранение бумажных документов.

Однако, выявленным недостатком предложенных методов и информационных технологий является их невосприимчивость к фрагментам изображений знаков, образы которых на множестве атомарных элементов не могут быть представлены в виде GT-объекта, моделирующего элемент траектории движения регистрирующей части устройства фиксации следа в процессе генерации прообраза изображения [2]. Примеры таких бинарных РЦИ представлены на рисунке 1.

Ë Ä Ì Ü Í ∴ ÷ j ∴ ...

Рис. 1. Примеры изображений знаков, именование которых обусловило снижение точности показателей распознавания

Как следствие, одной из актуальных задач по модернизации и усовершенствованию изложенных в [1, 3] теоретических и прикладных результатов является разработка методов и ИТ моделирования

изображений знаков открытых алфавитов, предполагающих анализ не только GT-знаков как образов объектов исследования, заданных в терминах свойств дискретного множества, но также и границ образующих GT-объектов [4].

Согласно [2, 4], образующая GT-объекта – это результат восстановления образа исходного объекта скелетизации вследствие его утоньшения с учетом определенных значений локальной толщины [5] *D*-знака. На рисунке 2 приведены примеры исходных бинарных РЦИ (а, б), их GT-объектов (в, г) и границ образующих (д, е).

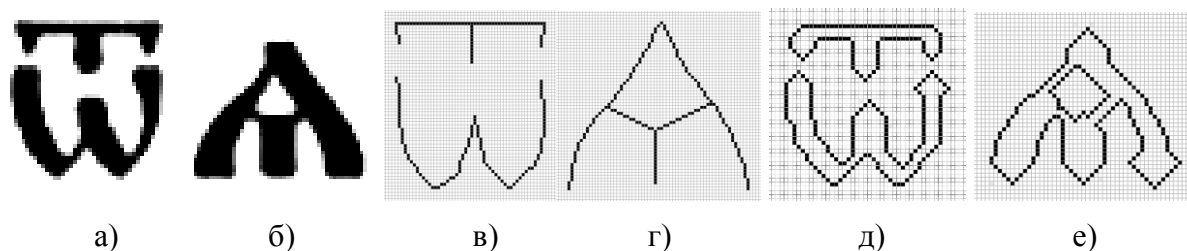


Рис. 2. Исходные бинарные РЦИ (а, б), их GT-объекты (в, г) и границы образующих (д, е)

На основании проведенных рассуждений, рассмотрим представленные на рисунке 3 границы образующих GT-объектов образов изображений знаков с рис. 1, которые не всегда подлежали корректному автоматическому моделированию и именованию, что послужило причиной снижения точности распознавания.

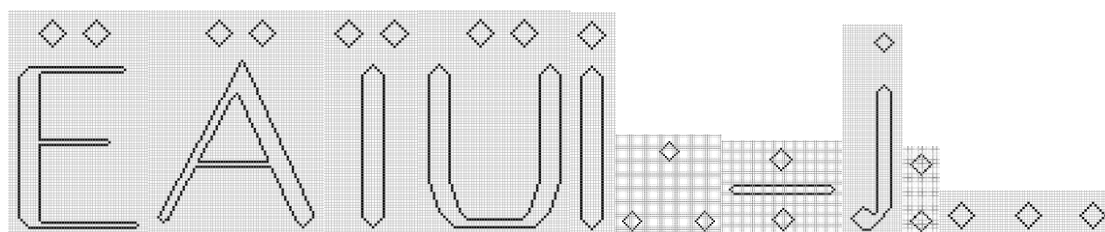


Рис. 3. Границы образующих GT-объектов изображений знаков, представленных на рис. 1

Очевидно, что границы каждой образующей GT-объекта, изображенной на рисунке 3, является замкнутым путем, однозначно представимы в виде объединений кратчайших путей. Из этого следует, что к ним применим метод моделирования, представленный в [6].

Таким образом, одним из основных направлений усовершенствования методов и ИТ, предложенных в [1], является разработка подходов и информационных технологий автоматического анализа, описания, классификации и распознавания образующих GT-объектов бинарных растровых цифровых изображений знаков открытых алфавитов в терминах свойств множеств атомарных элементов, что



позволит повысить точность распознавания и сделает комплекс ИТ универсальным средством преобразования сканированных копий документов электронных информационных ресурсов к редактируемому формату.

Также с целью снижения мощности множества  $\overline{M}$  моделей, генерируемых согласно изложенным в [1] методом для обрабатываемых GT-объектов с целью последующего именованя, классификации и распознавания их прообразов, возможно использование методологии построения валидных моделей на основании использования теории меры неопределенности и множеств минимальной меры неопределенности, изложенной в работе [7]. Однако реализация данного подхода предполагает необходимость определения перечисленных понятий в терминах дискретного множества атомарных элементов для основных измеримых характеристик кратчайших путей и  $D$ -отрезков.

Использование результатов исследований, полученных в рамках данного перспективного направления, позволит повысить показатели быстродействия и надежности процессов именованя и классификации изображений знаков открытых алфавитов за счет применения многоуровневого представления фрагментов GT-знаков, характеризующихся сохранением локально-глобального направления движения.

#### Список литературы

1. Шевцов Д.В. Информационная технология автоматического моделирования GT-объектов образов бинарных растровых цифровых изображений знаков открытых алфавитов / Д.В. Шевцов // Сборник научных трудов ДОНИЖТ. – 2019. – Вып. 55, секция «Автоматика, телемеханика, связь». – С. 4-11.
2. Мельник А.-В.В. Разработка системы автоматической скелетизации бинарных изображений // Вестник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2009. – № 1(34). – С. 225-230.
3. Вайсруб Н.В. Система автоматического моделирования бинарных изображений, сформированных отрезками прямых / Н.В. Вайсруб // Проблемы информационных технологий. – Херсон: ХНТУ, 2009. – № 1 (34). – С. 453-459.
4. Шевцов Д.В. Моделируемость GT-объекта на дискретном множестве атомарных элементов / А.-В.В. Мельник, С.В. Мышко, Д.В. Шевцов // Вестник Херсонского национального технического ун-та. – Херсон: ХНТУ, 2008. – № 3. – С. 223-300.
5. Мельник А.-В.В. Разработка системы автоматической скелетизации бинарных изображений // Вісник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2009. – № 1(34). – С. 225-230.
6. Шевцов Д.В. Способ формирования GT-объектов образов изображений на множестве атомарных элементов / А.-В.В. Мельник, С.В. Мышко, Д.В. Шевцов // Сборник научных трудов Восточноукраинского национального университета имени Владимира Даля. – Луганск: ВНУ им. В. Даля, 2009. – Вып. 2. – С.117-124.
7. Шевцов Д.В. Множество минимальной меры неопределенности для автоматического моделирования бинарных изображений / Н.В. Вайсруб, С.В. Мышко, Д.В. Шевцов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – Донецк: ДонНУ, 2008. – № 2. – С.494-501.

# *Теория вероятностей и математическая статистика*

УДК 519.21

## **АНАЛИЗ АКТУАРНОЙ СТОИМОСТИ ПЕНСИОННОГО РЕЗЕРВА В ПРОИЗВОДСТВЕННОМ ПЕНСИОННОМ ФОНДЕ**

*Бартеньева О.А., Дзундза А.И., д-р пед. наук, проф.*  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*bartenyeva.olga@yandex.ru*

В большинстве развитых стран пенсионное обеспечение осуществляется из трех источников: государственными пенсионными системами (в рамках социального страхования), пенсионными фондами, страховыми компаниями и иными финансовыми организациями. Во многих странах основными институтами, обеспечивающими пенсиями по старости, нетрудоспособности и т.д. значительную часть населения, являются пенсионные фонды персонала предприятий, фирм, профессиональных союзов и международных организаций. Такие фонды обычно называют частными или производственными [1].

В функционировании производственного пенсионного фонда достаточно важным является вопрос о создании пенсионного резерва, который должен обеспечивать обусловленные в контракте выплаты. Рассмотрим следующую задачу. Пусть в момент времени  $n$  существует точный баланс накопленных премий и будущих выплат для участников фонда. Но и в любой момент  $t \in (n+l; w)$  для любого  $l=1; \dots; w-n$  резерв, строго говоря, должен соответствовать будущим выплатам пенсий, здесь  $w$ -предельный срок жизни, обычно  $w \in [80; 90]$ . Поэтому, в общем случае, без учета инвестирования накопленных средств, пенсионный резерв в любой момент времени  $t \in (x; w)$  должен определяться как разность современной стоимости будущих пенсионных выплат и современной стоимости будущих взносов (премий). Обозначим  ${}_T R_x$  – пенсионный резерв в момент  $x+T$  после заключения контракта клиентом в возрасте  $x$  лет ( $0 \leq T < w-x$ ). Тогда если  $T \in [0; m]$ , то есть в периоде  $[x; x+m]$ :

$${}_T R_x = {}_n a_{x+T} - {}_{x+m} P_{x+T} + b_x$$

Последнее слагаемое учитывает тот факт, что оценка резерва производится в начале года и премия за этот год уже уплачена. Если же  $T \in (m; n-x]$ , то есть в периоде  $(x+m; n]$  формула для вычисления резерва имеет вид:  ${}_T R_x = {}_n a_{x+T}$ , и если  $T \in (n-x; w-x]$ :  ${}_T R_x = {}_w a_{x+T}$ .

Актuarное оценивание основных параметров деятельности производственного пенсионного фонда является основой реализации задач реформирования пенсионного обеспечения, что даст возможность перейти к более высоким стандартам материального обеспечения пенсионеров.

#### Список литературы

1. Четыркин Е.М. Актuarные расчеты в негосударственном пенсионном и медицинском страховании / Е.М. Четыркин. – М.: «Дело» АНХ, 2009. –256 с.

УДК 519.21

### БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СТРАХОВОГО ВЗНОСА

*Волков Д.Д., Дзундза А.И.*, д-р пед. наук, проф.  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*volkov.daniel@gmail.com*

Одной из важных проблем в страховании является проблема оценивания доверительного страхового взноса. У страховой компании имеется информация, накопленная другими компаниями о рисках заключенных договоров. В то же время компания имеет и собственные статистические данные по этому риску. Компания может использовать либо только собственный опыт работы с наблюдаемым риском, либо воспользоваться только информацией, полученной другими страховыми компаниями о подобных рисках. Байесовский подход позволяет объединить два вида информации о наблюдаемом риске, чтобы рассчитать наиболее справедливый страховой взнос для группы рисков по портфелю.

В работе обосновывается возможность и эффективность применения байесовского подхода к оценке неизвестных параметров с помощью объединения два видов информации о наблюдаемом риске. Рассчитан оптимальный страховой взнос для группы рисков по портфелю с изменяющимся объемом  $p_j$  с помощью модели Бюльмана- Штрауба. Размер доверительного страхового взноса определяется по выборке наблюдений над случайными совокупными размерами требований о выплате и статистическим данным о размерах требований выплат по одному договору за  $n$  лет. Применяется следующая формула:

$$\text{доверительный взнос} = Z\bar{X} + (1-Z)E[m(\theta)],$$

где величина  $Z = \frac{\sum_{i=1}^N p_i}{\sum_{i=1}^N p_i + \frac{E[s^2(\theta)]}{V[m(\theta)]}}$ ,  $0 < Z < 1$  – коэффициент доверия, который

является мерой того, насколько надежным считает страховая компания собственные статистические данные о риске,  $\bar{X}$  – средневзвешенное значение выборки наблюдений по объему рисков,  $E[m(\theta)]$  – оценка ожидаемого среднего значения совокупных размеров требований выплат,

$$aE[s^2(\theta)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^n \frac{p_{i,j} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}{n-1} \right)$$

и  $V[m(\theta)] = \frac{1}{p^*} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{p_{i,j} (x_{i,j} - \bar{x})^2}{n-1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^n \frac{p_{i,j} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}{n-1} \right) \right]$  – оценки внутри рисков и меж рисков дисперсии соответственно.

#### Список литературы

1. Карри И. Прикладная статистика: Перевод с английского – Кемерово: КузбассВУЗИздат, 1994. – 181 с.

УДК 519.21

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

*Глущенко А.В., Мельничук Н.Ю.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*andreyglushenko1@gmail.com, n.melnichuk@donnu.ru*

**Введение.** Тема гарантированного оценивания является одной из наиболее важных в построении любой стохастической математической модели, что в свою очередь имеет практическую значимость и применяется в прикладных задачах актуарной и финансовой математики, а также военной сфере.

**Основная часть.** Задача исследования состояла в нахождении оценки сверху для вероятности:

$$P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \alpha^2(x + W(s)) ds \leq \varepsilon^2 \right\},$$

где  $W(s)$  – стандартный винеровский процесс, а  $\alpha^2(x)$  – 1 периодическая функция.

Положим, что  $u(t, x) = Me^{-\int_0^t a^2(x+W(s))ds}$ , тогда  $u(t, x)$  является решением уравнения:

$$\frac{du(t, x)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 u(t, x)}{dx^2} - a^2(x) \cdot u(t, x); \quad (1)$$

где  $u(0, x) = 1$ , а  $a^2(x)$  – потенциал. Также существуют условия.

Методом Фурье найдем решение уравнения в виде произведения

$$u(t, x) = T(t) \cdot X_k(x). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим уравнение вида

$$t'(t) \cdot X_k(x) = \frac{1}{2} T(t) \cdot X_k''(x) - a^2(x) \cdot T(t) \cdot X_k(x). \quad (3)$$

После сокращения получим

$$\frac{t'(t)}{T(t)} = \frac{1}{2} \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} - a^2(x) = -\lambda_k.$$

Теперь разобьем уравнение так, чтобы слева остался только  $t$ , а справа только  $x$ . Разбиение может иметь следующий вид:

$$\frac{t'(t)}{T(t)} = -\lambda_k, \quad (4)$$

и

$$\frac{1}{2} \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} - a^2(x) = -\lambda_k. \quad (5)$$

Из уравнения (4) следует, что  $T(t) = Ce^{-\lambda_k t}$ , где  $C$  можно взять равное 1. Из уравнения (5) следует, что  $u(t, x+1) = u(t, x)$  – 1-периодическая и  $X_k(x+1) = X_k(x)$ , т.к.  $X_k$  также 1-периодическая функция. Решением будет собственная функция. Уравнение (5) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2} X_k'' = (-\lambda_k + a^2(x)) \cdot X_k(x). \quad (6)$$

Умножим обе части уравнения на  $X_k(x)$ , тогда

$$\frac{1}{2} X_k''(x) \cdot X_k(x) = (-\lambda_k + a^2(x)) \cdot X_k^2(x). \quad (7)$$

Рассмотрим зависимость первого собственного значения  $\lambda_1$  задачи Штурма-Лиувилля (7) от потенциала  $a^2(x)$ . Обозначим  $R_\beta$  как множество вещественнозначных суммируемых на  $(0,1)$  функций  $a^2(x)$  с положительными значениями и таких, что:

$$\int_0^1 a^2(x)^\beta dx = 1,$$

где  $\beta$  – вещественное число,  $\beta \neq 0$ . Из вариационного принципа следует, что первое собственное значение  $\lambda_1$  может быть найдено как:

$$\lambda_1 = \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} \frac{\int_0^1 X_k'(x)^2 dx}{\int_0^1 a^2(x) \cdot X_k^2(x) dx}.$$

Мы хотим оценить значения

$$m_\beta = \inf_{a^2(x) \in R_\beta} \lambda_1, \quad M_\beta = \sup_{X_k(x) \in R_\beta} \lambda_1.$$

Положим

$$L[a^2(x), X_k(x)] = \frac{\int_0^1 X_k'(x)^2 dx}{\int_0^1 a^2(x) X_k(x) dx}, \quad G[X_k(x)] = \frac{\int_0^1 X_k'(x)^2 dx}{(\int_0^1 |X_k(x)|^p dx)^{2/p}},$$

где

$$p = \frac{2\beta}{\beta-1}.$$

Если  $\beta > 1$ , тогда, в силу неравенства Гёльдера, мы имеем

$$\int_0^1 \alpha^2(x) \cdot X_k^2(x) dx \leq \left( \int_0^1 \alpha^2(x)^\beta dx \right)^{2/\beta} \left( \int_0^1 |X_k(x)|^p dx \right)^{2/p} = \left( \int_0^1 |X_k(x)|^p dx \right)^{2/p},$$

где  $p = 2\beta/(\beta - 1)$ , для любой функции  $X_k(x) \in H_0^1(0,1)$ . Следовательно,  $\lambda_1 \geq m$ , где  $m = \inf_{X_k(x)} G[X_k(x)]$  в классе Соболева  $H_0^1(0,1)$ . Заметим, что однородность функционала позволяет предположить, что

$$\int_0^1 |X_k(x)|^p dx = 1.$$

Решая задачу Штурма-Лиувилля пользуясь свойствами 1-периодичности  $a^2(x)$ , приходим к тому, что поставленная задача сводится к тому, чтобы найти минимальную оценку или значение для первого собственного числа.

Сама функция периодическая, поэтому и вторая производная периодическая.  $\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k T} \cdot X_k(x)$  – решение краевой задачи, где  $X_k(x)$  – общее решение суперпозиции,  $k$  от 0 до  $\infty$ . Можно показать, что  $\lambda_k$  положительная и возрастает. Исходя из рассуждений, изложенных в [1] [2] [3], несложно заметить, что такая оценка существует.

Положим

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k T} \cdot X_k(x) \Rightarrow |u(t, x)| < \sum_{k=0}^{\infty} |C_k e^{-\lambda_k T} \cdot X_k(x)|.$$

Предположим, что

$$X_k(x) = X_k(0) - \int_0^x X_k'(y) dy. \quad (8)$$

Из (8), по неравенству Коши следует, что

$$|X_k(x)| < |X_k(0)| - \left| \int_0^x X_k'(y) dy \right|.$$

Тогда из [1] можно получить, что:

$$P \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \alpha^2(x + W(s)) ds \leq \varepsilon^2 \right\} \leq C_1 \exp \left\{ \frac{-\rho^2 t}{2} \right\},$$

где  $\varepsilon$  – сколь угодно мало, где  $\varepsilon$  – сколь угодно мало,  $C_1 > 0$ , при любых  $-\infty < x < +\infty$ .

**Заключение.** В данной работе были рассмотрены методы нахождения оценок неизвестных параметров в стохастических системах, а также нахождение оценок первого собственного значения в одной задаче Штурма-Лиувилля. Результаты данной работы могут быть полезны студентам и аспирантам математических специальностей стохастического и вероятностного направления.

### Список литературы

1. Анулова С.В. Стохастические исчисление / Анулова С.В., Крылов Н.В., Веретенникв А.Ю., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. – 1989. – Т. 45. – С. 5-257.

2. Ахмедова Д.Д. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу / Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф. // Изв. ВУЗов. Физика. – 2001. – № 1. – С. 25-28.
3. Ахмедова Д.Д. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу / Ахмедова Д.Д., Змеев О.А., А.Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № 275. – С. 181-184.

УДК 519.21

## **ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ НА ФИНАНСОВОМ (B,S) –РЫНКЕ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ЦЕНЫ РИСКОВОГО АКТИВА**

***Жмыхова Т.В.***, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
***Шурко И.Л.***, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
***Никулина А.П., Тимакова В.В.***

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*zhmykhovatanya@mail.ru, i.shurko@donnu.ru,*  
*nikulinaalbina5@gmail.com, timakova\_vika@mail.ru*

**Введение.** Страхование относится к наиболее весомой части рынка финансовых услуг. Его значение растет с каждым днем, поскольку оно защищает интересы физических и юридических лиц. Современная актуарная математика совершенствует старые подходы к оценке платежеспособности страховых компаний при использовании различных финансовых инструментов. Первостепенная проблематика своевременного обеспечения финансовой стабильности функционирующей страховой компании является комплексной. Для достижения определенной экономической устойчивости требует обязательного привлечения специалистов, представляющих различные области (например, экономисты, юристы, менеджеры и пр.). Вопреки этому, основные задачи, составляющие условный механизм стабилизации, носят исключительно математический характер. Таким образом, существует необходимость изучения идей математической теории страхования. Сегодня особую весомость приобретают исследования, посвященные страховым инвестиционным стратегиям, когда компания начинает свою деятельность с высокими показателями стартового капитала.

Таким образом, как теоретическую, так и практическую область страхования необходимо исследовать вместе с инвестированием части капитала в финансовый (B,S)-рынок, то есть не только на банковский счет, но и в рискованные ценные бумаги.

Цель данной работы заключается в нахождении оценки вероятности разорения страховых компаний, функционирующих на финансовом  $(B, S)$  – рынке при различных стохастических моделях цен рискованных активов.

**Основная часть.** Проанализирована модель, описывающая капитал страховой компании, которая инвестирует в финансовый  $(B, S)$  – рынок. В качестве рискованных активов были рассмотрены акции, цены которых описываются уравнениями:

$$S_\varepsilon(t) = S(0) \exp \left\{ \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \mu(W_1(\tau)) d\tau - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma^2(W_1(\tau)) d\tau + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(W_1(\tau)) dW(\tau) \right\}, \quad (1)$$

$$S_\varepsilon(t) = S(0) \exp \left\{ \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \mu(\eta_x(\tau)) d\tau - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma^2(\eta_x(\tau)) d\tau + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(\eta_x(\tau)) dW(\tau) \right\}, \quad (2)$$

где  $t > 0$ ,  $W(t)$ ,  $W_1(t)$  – стандартные винеровские процессы,

$$d\eta_x(t) = \beta(\eta_x(t)) dW_1(t), \quad \eta_x(0) = x.$$

Доказана безарбитражность моделей (1) и (2).

Наряду с моделями (1) и (2) рассмотрены их усредненные модели, где для фиксированных как 1-периодических ограниченных функций – коэффициента локальной доходности  $\mu(y)$ , коэффициента волатильности  $\sigma^2(y)$ , процентной ставки  $r(y)$ , функции  $\beta(y)$  ( $\beta^2(y) > \delta > 0$ ) были выбраны:

$$\bar{\mu}(y) = \int_0^1 \mu(y) \rho(y) dy, \quad \bar{\sigma}^2(y) = \int_0^1 \sigma^2(y) \rho(y) dy, \quad \bar{r}(y) = \int_0^1 r(y) \rho(y) dy,$$

где  $\rho(y)$  выписано в явном виде.

Для каждого из полученных усредненных коэффициентов были построены доверительные интервалы. Полученные новые модели проверены на адекватность.

Для исследования вероятности разорения страховой компании, работающей на  $(B, S)$  – рынке в случае эволюции цены акции при неточно заданных усредненных коэффициентах, может быть использована техника из работы Т. А. Белкиной [1], либо методы оценки вероятности разорения из [2].

На основании анализа близости усредненных и исходных коэффициентов построена оценка для вероятности разорения страховой компании, работающей на финансовом рынке, динамика рискованных активов на котором описываются уравнениями (1) и (2).

**Заключение.** Найденные в работе оценки могут быть использованы страховой компанией при формировании капитала и инвестировании на финансовом  $(B, S)$  – рынке.



## Список литературы

1. Белкина Т.А. Теоремы достаточности для вероятности неразорения в динамических моделях страхования с учетом инвестиций / Т. А. Белкина // Анализ и моделирование экономических процессов. – 2011. – Вып. 8. – С. 61-74
2. Бондарев Б.В. Стохастическое исчисление в задачах финансовой и актуарной математики. Оценка рисков в страховании: монография / Б.В. Бондарев, О.Е. Сосницкий. – Донецк: ДонНУ, 2013. – 227 с.

УДК 519.22

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ УИЛКОКСОНА-МАННА-УИТНИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С АНАЛИЗОМ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ ДАННЫХ

*Золотой А.Л.<sup>1</sup>, Золотая А.В.<sup>2</sup>*, канд. физ.-мат. наук

<sup>1</sup>ГУ «Донецкий ботанический сад», г. Донецк, ДНР

<sup>2</sup>ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР

*aelita.z@mail.ru*

**Введение.** Практические исследования, связанные с задачами из разных научных областей, с каждым годом становятся все более актуальными. Одним из часто используемых аппаратов решения подобного рода задач является математическая статистика и её методы. В работе рассматривается случай использования непараметрического критерия Уилкоксона-Манна-Уитни для анализа геоинформационных данных.

Выборки исследуемых данных достаточно часто имеют распределение значений, не соответствующее нормальному, что обосновывает использование статистических критериев, являющихся непараметрическими. Под непараметрическими критериями подразумеваются статистические методы, не основанные на оценке каких-либо параметров (как, например, стандартное отклонение или среднее) при описании выборочного распределения интересующей величины [2]. В связи с этим их иногда также называют свободными от параметров. Следует отметить, что ранее, для исследуемых данных уже применялся другой статистический метод, относящийся к классу ранговых критериев сдвига, а именно медианный критерий [1].

Существует огромное количество непараметрических критериев, однако исследования с их использованием встречаются не часто, в связи с чем использование данных статистических методов представляет научно-практический интерес.

**Цель работы** – проверить гипотезу о том, что средние значения (медианы) исследуемых выборок равны.

**Основная часть.** В качестве данных для исследуемых выборок были использованы значения площадей участков степей и лесов двух административных районов Донецкой области – Шахтерского и Амвросиевского. Далее данные территории будут обозначены как районы 1 и 2 соответственно. Соответствующими номерами будут обозначены и участки, относящиеся к ним. Для получения значений площадей был использован программный комплекс QGIS 3.10.10 с использованием мультиспектральных изображений, полученных со спутника Sentinel-2. Статистическая обработка данных осуществлялась с помощью свободной среды вычислений R 3.6.0 с использованием пакетов ggplot2 и ggpubr.

На первом этапе исследования была проведена проверка данных выборок на соответствие их нормальному распределению. Для этого был использован статистический тест Шапиро-Уилка. Анализ проводился автоматизировано с помощью стандартной функции R `shapiro.test()`. Результаты представлены в таблице 1. Определили, что для всех исследуемых территорий р-значение меньше значения 0,05, что свидетельствует о несоответствии генеральной совокупности нормальному закону распределения.

Таблица 1

	Р-значения выборок (тест Шапиро-Уилка)
Выборка степных участков (район 1)	2,533128e-25
Выборка степных участков (район 2)	6,631015e-18
Выборка лесных участков (район 1)	2,872118e-27
Выборка лесных участков (район 2)	5,91355e-20

Аналогичные результаты были получены и с помощью графического метода оценки распределения данных, в основе которого лежит использование квантилей нормального распределения и квантилей исследуемых данных (рис. 1). При нормальном распределении проверяемых значений выборки точки на графике квантилей должны выстраиваться в прямую линию, однако в нашем случае, для исследуемых участков, не все имеющиеся значения подчиняются данному условию.

На следующем этапе работы были проведены исследования с помощью непараметрического критерия Уилкоксона-Манна-Уитни. В основе данного метода лежит оценка различий между двумя выборками на основе признака, который измеряется с помощью порядковой или количественной шкалы. Следует отметить, что при использовании данного критерия необходимо соблюдать два условия: 1) одинаковые значения должны быть сведены к минимуму; 2) в каждой из выборок должно быть не менее трех исследований. Исследуемые выборки соответствуют данным условиям. Что касается максимального количества исследований в выборке, то рекомендуется не большое количество значений, однако данное условие не является обязательным. Анализ значений выборок

проводился автоматизировано с помощью стандартной функции `R wilcox.test()`. Результаты представлены в таблице 2.

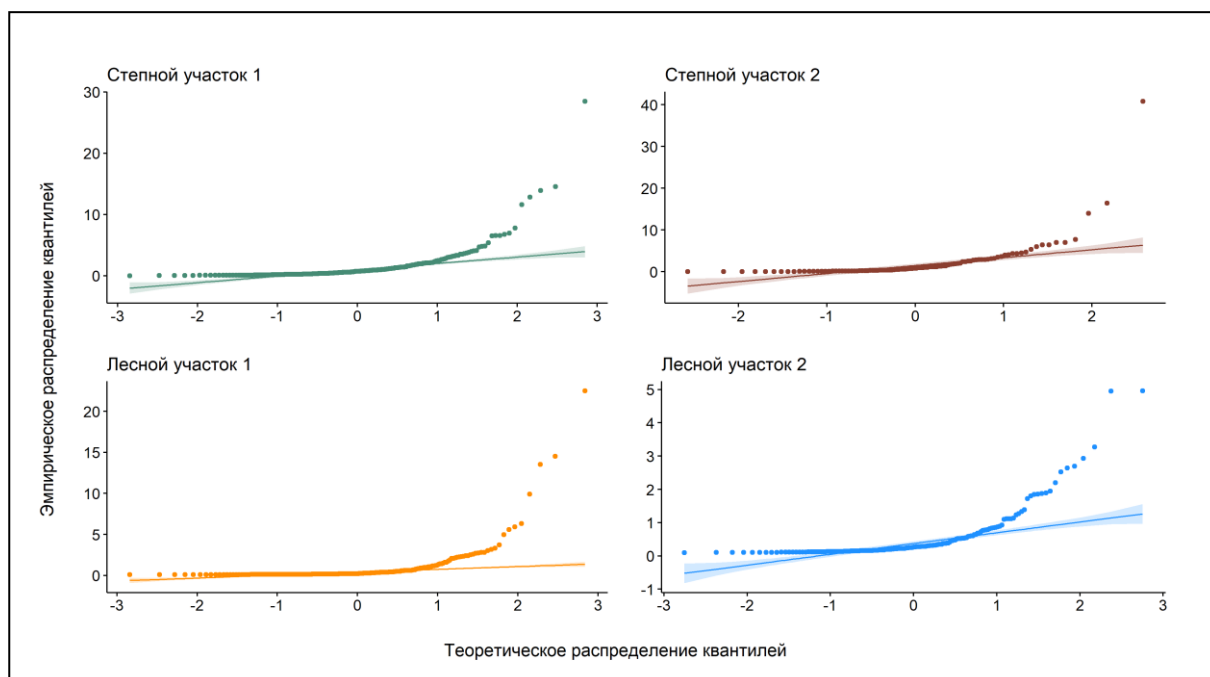


Рис. 1. График квантилей выборок

Таблица 2

	Критические значения	Наблюдаемые значения	Р-значения выборок
Выборки степных участков (район 1 и район 2)	9806	11847	0,5285
Выборки лесных участков (район 1 и район 2)	16613	18556	0.8366

Как видно из таблицы, в обоих случаях наблюдаемые значения превышают критические, что свидетельствует о неравенстве средних (медиан) исследуемых выборок. Полученные результаты идентичны результатам, установленным ранее с помощью медианного критерия [1]. Важным моментом является то, что р-значения в обоих случаях превышают значение 0,05, что свидетельствует о невысокой достоверности исследования. Такая ситуация может связана с достаточно большим объемом исследуемых выборок (а рекомендуется, как уже было сказано ранее, не большое количество значений). Таким образом, рассмотренный в работе метод является подходящим для первичной оценки данных, однако для получения объективных результатов его необходимо использовать в комплексе с другими подобными методами.

**Заключение.** Гипотеза о равенстве средних (медиан) отвергается в обоих случаях.

## Список литературы

1. Золотой А.Л. Использование непараметрического медианного критерия в геоэкологических исследованиях / А.Л. Золотой, А.В. Золотая // Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IV Международной научной конференции (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – с. 192-195.
2. Статистические методы в биологических исследованиях, Часть 1. Теория и практика. Для студентов специальностей “Экология”, “Биофизика” // Сост. О. И. Доценко, Г. В. Тарадина. – Донецк, ДонНУ, 2009. – 91 с.

УДК 622.691

## **АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ ПО ЛИКВИДАЦИИ АВАРИЙ НА ПОДЗЕМНЫХ ГАЗОПРОВОДАХ**

*Иванова С.С., Бурунсус В.Р.*

Бендерский политехнический филиал ГОУ «Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко», г. Бендеры, ПМР  
*ivanova-1976@mail.ru*

Постоянное увеличение объектов газоснабжения Приднестровского региона предусматривает дальнейшее повышение надежности систем, т.е. способности транспортирования газа с соблюдением основных параметров при эксплуатации и не допущения аварийных ситуаций и отказов в работе.

Количество аварийных ситуаций во всех сферах жилищно-бытовой и производственной деятельности при использовании «голубого» топлива встречается и не совсем редко. Это происходит в связи с широким использованием новых технологий и материалов, нетрадиционных источников энергии, массовым применением опасных веществ в быту, промышленности и сельском хозяйстве.

Исходя из вышеизложенного, обеспечение надежности работающих сооружений (объектов) должно стать приоритетной задачей по безопасному функционированию газотранспортных организаций.

Анализ надежности газоснабжающих систем нашего региона включает в себя анализ видов, последствий и критичности отказов каждого технологического объекта и всей системы в целом.

В данной статье будут рассмотрены несколько из основных параметров, обеспечивающих надежность газотранспортной отрасли.

Исследование параметров производим на примере деятельности филиала ООО «Тираспольтрансгаз – Приднестровье» в городе Бендеры участка подземных сетей и сооружений (далее УПСиС).

Основными обязанностями сотрудников УПСиС являются: организация работ по обеспечению безаварийной работы системы,

бесперебойной подачи газа потребителям, организация работ по своевременной ликвидации аварий и отказов в работе системы.

Основные технические показатели функционирования участка подземных сетей и сооружений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Показатели службы подземных сетей и сооружений по городу Бендеры за период 2017-2019 года.

Годы	Длина газопровода по каждому виду давления, км			Число газифицированных квартир	Число котельных	Число КБП	Число ГРП
	Высокое	Среднее	Низкое				
2017	19,315	107,033	186,287	47095	385	353	19
2018	19,315	107,033	187,071	47177	387	359	19
2019	19,315	107,681	187,561	47235	391	365	19

Исходя из данных таблицы 1 видно, что с каждым годом протяженность газопроводов различного давления, количество газифицированных квартир, отопительных котельных, коммунально-бытовых потребителей постоянно растет на 5–10 %. Количество газорегуляторных пунктов за последние 10 лет осталось неизменное – 19 штук. Таким образом, функциональные обязанности сотрудников УПСиС по обеспечению надежности эксплуатации объектов возрастают.

Основные работы выполняют ремонтные бригады (исполнители работ), которые работают только в одну смену, продолжительностью 8 часов (без учета перерыва на обед).

Для определения и обоснования числа исполнителей (бригад) необходимо иметь количество заявок и среднее время их ликвидации.

В течение 2017–2019 годов в УПСиС города Бендеры поступило порядка 4000 заявок, больше всего из них приходится на повреждения, вызванных утечками при вводе в здание и в арматуре, что составляет порядка 89,5 % от общего числа.

Такое большое число аварий необходимо своевременно, в короткие сроки ликвидировать, поэтому одним из основных параметров надежности систем является срок ликвидации отказа в работе- время обслуживания  $t_{обс}$ .

Данный показатель имеет случайный характер, так как он зависит от места расположения, от характера аварий (отказа работы системы) и т.д. Оно охватывает период от момента поступления вызова об аварии до возвращения ремонтной бригады (исполнителей работ) на место их постоянной дислокации в филиал после окончания ремонтных работ. Поэтому среднее время обслуживания  $t_{обс}$  будет равно сумме нескольких средних величин:

$$t'_{обс} = t'_{выезда} + t'_{дв.ав.бр.} + t'_{осм} + t'_{лик.ав.} + t'_{воз}$$

где  $t'_{выезда}$  – среднее время, необходимое для выезда ремонтной бригады,

$t'_{дв.ав.бр.}$  – среднее время движения бригады,

$t'_{осм}$  – среднее время осмотра аварий и повреждений,

$t'_{лик.ав.}$  – среднее время ликвидации аварий,

$t'_{воз}$  – среднее время возвращения бригады.

Учитывая все показатели, входящие в формулу, получим среднее время обслуживания по максимальному параметру ликвидации аварии 2 часа 7 минут.

Среднее время движения и возвращения бригады зависит от места расположения объекта и производимого ремонта. Чем дальше расположен аварийный объект, тем больше будет время для ликвидации аварии. Город Бендеры не является мегаполисом, это сравнительно небольшой населенный пункт, поэтому добраться в любой район города для выполнения ремонтных работ бригада может в течение 5–10 минут.

В результате проведенного исследования был определен еще один показатель надежности – выбор наиболее экономически эффективного состава числа исполнителей по ликвидации аварийных ситуаций в системе. Таким образом, участок подземных сетей и сооружений филиала ООО «Тираспольтрансгаз-Приднестровье» в городе Бендеры в каждой смене имеет 5 бригад, по три человека в бригаде (15 человек). Продолжительность смены 8 часов. Данный количественный состав исполнителей работ сможет своевременно произвести ремонт подземных сетей и сооружений, об этом свидетельствуют и статистические данные по авариям. Квалификационный состав исполнителей должен включать слесарей пятого, четвертого и третьего разрядов.

Времени, отведенного на выполнение работ в течение 15 минут будет достаточно для предотвращения колоссальных последствий аварийных ситуации на подземных газопроводах.

Учитывая выше перечисленные показатели эффективности работы исполнителей по ликвидации аварий на подземных газопроводах, на основе комплексного использования современных технологий прогнозирования, математического моделирования может быть решена проблема повышения надежности систем газоснабжения на длительный период времени.

### Список литературы

1. Ионин А.А., Алибеков К.С., Жила В.А., Затибян С.С. Надежность городских систем газоснабжения. – М.: Стройиздат, 1980. – 231 с.
2. Котляровский В.А., Кочетков К.Е. и др. Аварии и катастрофы. Предупреждение и ликвидация последствий / Книга 1-6. – М.: Издательство АСВ, 2003.
3. Прусенко Б.Е., Мартынюк В.Ф. Анализ аварий и несчастных случаев на трубопроводном транспорте России. – М.: Анализ опасностей, 2003. – 341 с.

## АНАЛИЗ ЗНАЧИМОСТИ ПОПРАВОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ АВТОСТРАХОВАНИЯ

*Мельничук Н.Ю.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*n.melnichuk@donnu.ru*

**Введение.** Страхование – одна из важнейших финансовых операций. В виду того, что сейчас в нашем регионе возобновляется такая сфера финансовой деятельности, как автострахование, актуальным становится вопрос расчетов в этой области. Для того, чтобы просчитать сумму, который должен выплачивать водитель, необходимо учитывать не только базовые тарифы, но и поправочные коэффициенты. Следует отметить, что обязательное автострахование обеспечивает защиту тех людей и того имущества, которым водитель может причинить вред при попадании в аварию. Именно поэтому наличие такой страховки в Российской Федерации является обязательным и с недавнего времени в Донецкой Народной Республике остро стал этот вопрос.

Таким образом, сейчас для владельцев автомобилей в нашем регионе приобрел как теоретическую, так и практическую значимость вопрос правильного расчета стоимости договора по страхованию.

Целью данной работы является доступный для владельцев автомобилей анализ расчета поправочных коэффициентов, благодаря чему они могут сократить цену полиса и быть в курсе всех понижающих факторов.

**Основная часть.** Рассмотрим те позиции, которые должен знать водитель перед заключением договора автострахования.

Первое понятие, с которым должен ознакомиться владелец автомобиля перед заключением договора, – это базовый тариф. Базовым тарифом называют «начальную сумму», которая устанавливается для водителя исходя из категории транспортного средства и вида собственника (юридическое или физическое лицо). Этот показатель раньше был зафиксирован, но теперь страховые компании имеют возможность работать в определенном интервале, регулируемом государством.

Базовые ставки страховых тарифов устанавливаются в зависимости от технических характеристик, конструктивных особенностей и назначения транспортных средств, существенно влияющих на вероятность причинения вреда при их использовании и на потенциальный размер причиненного вреда [1].

Кроме базовой ставки при определении суммы полиса учитываются так называемы поправочные коэффициенты, которые понижают или повышают стоимость в зависимости от значения тех или иных факторов.

Рассмотрим самую обычную формулу для определения цены полиса конкретного водителя:

$$(\text{Цена}) = \text{КБ} * \text{КТ} * \text{КБМ} * \text{КВС} * \text{КО} * \text{КМ} * \text{КП} * \text{КС} * \text{КПр}. \quad (1)$$

Таким образом, стоимость полиса складывается из следующих составляющих:

- КБ – базовый коэффициент (базовый тариф);
- КТ – территориальный коэффициент ОСАГО;
- КБМ – коэффициент бонус-малус;
- КВС – коэффициент ОСАГО по возрасту и стажу;
- КО – коэффициент ограничения количества водителей;
- КМ – коэффициент мощности;
- КП – коэффициент, учитывающий период страхования;
- КС – коэффициент сезонности;
- КПр – коэффициент управления транспортным средством с прицепом.

Для того, чтобы определить, сколько будет стоить личная страховка, нужно знать значение каждого показателя из общей формулы, а также порядок его расчета. В ходе анализа были проведены расчеты для капитала абстрактной страховой компании, учитывалось разное значение вероятности попадания в ДТП и суммы страховой премии.

Отдельно остановимся на схеме поощрения за безаварийную езду – системе «бонус-малус». Согласно этой системе каждому водителю присваивается определенный уровень (1 из 15 возможных) с учетом того, был ли виновен водитель в каких-то аварийных ситуациях за определенный срок. Такая схема позволяет «хорошим» водителям получать скидку на страховой полис, а «плохим» водителей вынуждает оплачивать страховой полис полностью или даже с коэффициентом, например, до 2,45.

В ходе работы были проведены многочисленные расчеты страховых премий по системе «бонус-малус» в зависимости от разных уровней возможных скидок. Эти расчеты используются при проведении практических занятий по курсу «Актуарная математика» для студентов 4-го курса специальности «Прикладная математика и информатика (профиль: Статистика)».

**Заключение.** Автострахование – сложный и интересный механизм, учитывающий множество факторов и обстоятельств. Для того, чтобы застраховать свой автомобиль, нужно не только знать все особенности необходимой документации, но и разбираться в том, как формируется страховой полис. Несмотря на некий экономический вектор исследований, в них используется достаточно сложный математический аппарат, требующий знания дисциплин о теории вероятностей, актуарной математики, математической статистики, что делает результаты в данной сфере практически значимыми для студентов кафедры теории вероятностей и математической статистики.



## Список литературы

1. Об обязательном страховании гражданской ответственности владельцев транспортных средств: закон ДНР № 37-ПНС: принят постановлением Народного Совета 24 мая 2019 г.

УДК 519.21

## АНАЛИЗ АКТУАРНОЙ СТОИМОСТИ СТРАХОВОГО ПЕНСИОННОГО АННУИТЕТА

*Сёмина А.С., Дзундза А.И.*, д-р пед. наук, проф.  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*syomina.a@donnu.ru*

Как известно, пенсионные аннуитеты отличаются от финансовых рент тем, что выплаты пенсий определяются вероятностями дожития пенсионера до определенного возраста. Одной из основных задач деятельности страхового пенсионного фонда является расчет премий участников фонда, основанный на анализе актуарной стоимости страхового аннуитета. Заметим, что страховая надбавка на нетто-премию в пенсионном страховании наибольшая по сравнению с другими видами индивидуального страхования, то есть она должна покрывать расходы, связанные с получением премии и выплатами пенсий, которые производятся в рассрочку [1].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть  $i$  – это годовая ставка сложных процентов, тогда, очевидно, что математическое ожидание последовательности пенсионных выплат в размере 1 гривны в течение  $n$  лет, начиная с  $y$  лет составит:

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} \cdot {}_k P_y ; \quad (1)$$

где  ${}_k P_y$  – вероятность того, что участник фонда возраста  $y$  лет проживет  $k$  лет.

Произведем теперь расчет пенсионного аннуитета. Пусть участником в возрасте  $x$  лет заключается контракт на получение им пенсии начиная с  $n$  ( $n \geq x$ ) лет и до конца его жизни (предположим, что выплаты пенсий в размере  $S$  рублей будут производиться в начале каждого года, начиная с  $n$ -го).

Стоимость такого аннуитета обозначим  ${}_n a_x$ , тогда

$${}_n a_x = S \cdot \sum_{k=0}^{w-n} {}_{n+k} P_x \cdot \frac{1}{(1+i)^{n-x+k}}, \quad (2)$$

здесь  $w$  – предельный срок жизни, обычно  $w \in [80; 90]$ .

Выплата суммы (2) должна быть обеспечена уплатами участником фонду брутто-премий. Нетто-премия определяется как разность между брутто-ставкой и страховой надбавкой. Рассмотрим один из способов учета страховой надбавки. Пусть  $b$  – брутто премия;  $p$  – нетто премия;  $\lambda$  – коэффициент скидки, то есть:  $p = b - \lambda b$  ( $0 < \lambda < 1$ ) или  $b = \alpha p$ , ( $\lambda > 1$ ) где  $\lambda = 1 - \frac{1}{\alpha}$ , тогда  $\alpha$  трактуется как коэффициент нагрузки.

Рассчитаем размер  $b_x$  премии, которую должен выплачивать фонду клиент ежегодно в течение  $m$  лет ( $m \leq n-x$ ), чтобы обеспечить выплату суммы (2). Современная, стоимость такого потока платежей вычисляется в предположении, о том, что выплаты производятся в течение каждого года, следующим образом:

$${}_{m+x}P_x = b_x \sum_{k=0}^m {}_{x+k}P_x \cdot \frac{1}{(1+i)^k} \quad (3)$$

В силу принципа эквивалентности обязательств:  ${}_{x+m}P_x = {}_n a_x$ , откуда и получаем выражение для расчета премии:

$$b_x = \frac{S \cdot \sum_{k=0}^{w-n} {}_{n+k}P_x \cdot \frac{1}{(1+i)^{n-x+k}}}{\sum_{k=0}^m {}_{x+k}P_x \cdot \frac{1}{(1+i)^k}} \quad (4)$$

### Список литературы

1. Четыркин Е.М. Актуарные расчеты в негосударственном пенсионном и медицинском страховании / Е.М. Четыркин. – М.: «Дело» АНХ, 2009. – 256 с.

УДК 622.691

## ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИКО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

*Шумакова И.Д., Гатун А. П.*, канд. физ.-мат. наук, доцент  
 ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР  
*a.gatun@donnu.ru*

В деятельности плановых, аналитических, маркетинговых отделов производственных предприятий и объединений, торговых, страховых компаний, банков все шире используются статистические методы прогнозирования. Основным инструментом соответствующего математического аппарата является эконометрическая модель.

На основе данных четырех факторов, имеющих наибольшее влияние на формирование расхода топлива, был сделан прогноз на 4 месяца с помощью эконометрической модели удельного расхода.

Эконометрическое уравнение имеет вид:

$$y = -72,0627 - \frac{0,3182}{e^{x_1}} + 0,0187x_2 + 77732,3628x_3^{-1} + 14607,5108x_4^{-1}. \quad (1)$$

Здесь:

$Y$  – фактический удельный расход топлива;

$x_1$  – среднемесячная температура воздуха;

$x_2$  – количество потребленного топлива;

$x_3$  – объем производства продукции;

$x_4$  – средний коэффициент полезного действия котла.

При изучении многих экономических показателей и зависимостей либо при анализе их развития во времени в качестве объясняющих переменных используются не только текущие значения переменных, но и некоторые предыдущие по времени значения, а также и само время  $t$ .

Эконометрическая модель с введенным фактором времени имеет вид:

$$y = -74,421 + 0,0721t - \frac{0,3134}{e^{x_1}} + 0,0188x_2 + 78386,81x_3^{-1} + 14703,1436x_4^{-1}. \quad (2)$$

Так как на исследуемый процесс существенное влияние оказывают факторы, не имеющие количественного выражения, то их роль можно отразить через фиктивные переменные, которые отражают два противоположных состояния качественного фактора. Таким образом, кроме моделей, содержащих только количественные объясняющие переменные, в регрессионном анализе рассматриваются также модели, содержащие лишь качественные переменные, либо те и другие одновременно. Регрессионные модели, содержащие лишь качественные объясняющие переменные, называют ANOVA-моделями. Построим такую модель для данного исследуемого процесса удельного расхода топлива. Для этого учтем в модели различие «зимний месяц» / «весенне-осенний месяц», для чего были введены фиктивные переменные  $X_1$  и  $X_2$ .

В таблице 1 представлены результаты построения моделей линейной регрессии с разным вариантом учета в уравнении фиктивной переменной.

Таблица 1

Разный вариант учета фиктивной переменной в модели

Модель	$a_1$	$a_2$	$c$	$R^2$
$Y = a_1 \cdot X_1 + c$	17,4	–	168,9	0,07
$Y = a_2 \cdot X_2 + c$	–	-17,4	186,3	0,07
$Y = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2$	186,3	168,9	–	0,9

Как видно из представленных результатов, модель множественной линейной регрессии, содержащая обе фиктивные переменные имеет высокий коэффициент детерминации, значит является более качественной.

## Список литературы

1. Бородич С.А. Эконометрика. – Беларусь: БГУ, 2000. – 354 с.
2. Вербик Марно. Путеводитель по современной эконометрике. Пер. с англ. В.А. Банникова. Научн. ред. и предисл. С.А. Айвазяна. – М.: Научная книга, 2008. – 616 с.
3. Елисеева И.И. Практикум по эконометрике: Учеб. пособие / И.И. Елисеева. – М.: Финансы и статистика, 2003. — 192 с.
4. Тихомиров Н. Методы эконометрики и многомерного статистического анализа / Н. Тихомиров. – М.: Экономика, 2017. – 989 с.
5. Подкорытова О.А. Анализ временных рядов: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / О.А. Подкорытова, М.В. Соколов.– 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 267 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Механика твердого тела*

<i>Горр Г.В.</i> О новом подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом .....	5
<i>Горр Г.В., Скрыпник С.В.</i> О движении гиростата в одном частном решении уравнений Кирхгофа – Пуассона .....	9
<i>Зыза А.В.</i> Новые частные решения уравнений Кирхгофа-Пуассона .....	12
<i>Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.</i> Математическая модель гиростата с электромотором .....	15
<i>Мазнев А.В., Горбунова Ю.С.</i> Условия существования регулярных прецессий гиростата в главной системе координат .....	18
<i>Платонова Е.С.</i> Инвариантные алгебраические соотношения в решении уравнений Кирхгофа-Пуассона .....	21
<i>Щепин Н.Н.</i> Исследование положения равновесия замкнутой системы твердых тел с учетом растяжения .....	23

### *Механика деформируемых сред*

<i>Алехов Ю.А., Волошанович И.Н., Сагдеева Ф.Н., Шавшина А.Н.</i> Исследование процесса механической обработки порошка железного распыленного в шаровой вибромельнице .....	26
<i>Богачев И.В., Ватульян А.О.</i> Об одной модели отслоения вязкоупругого покрытия .....	29
<i>Богачев И.В.</i> О моделировании мягких биологических тканей с учетом полей предварительных напряжений .....	30
<i>Болнокин В.Е., Зыонг Минь Хай, Карасев Д.С.</i> Эффекты трансформации гидроакустических волн в мембранированном двухслойном экране из анизотропных функционально-градиентных материалов .....	32
<i>Болнокин В.Е., Сторожев В.И., Дубяго Л.В.</i> Моды изгибных упругих волн в окружном направлении изотропной кольцевой пластины на упругом основании .....	35
<i>Бондаренко Н.С.</i> Изгиб трансверсально-изотропной пластины под действием сосредоточенной силы на базе обобщенной теории в варианте {1,2}-аппроксимации .....	38
<i>Ватульян А.О., Нестеров С.А.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольника с покрытием на основе градиентной модели термоупругости .....	41
<i>Ватульян А.О., Нестеров С.А.</i> Коэффициентная обратная задача термоупругости для конечного FGM цилиндра .....	44
<i>Ватульян А.О., Плотников Д.К.</i> Об асимптотическом подходе в смешанных задачах для неоднородной упругой полосы .....	47

<i>Глухов А.А., Пачева М.Н. Сторожев В.И.</i> Локализованные сдвиговые волны в трехслойном поперечно-анизотропном пласте симметричного строения в толще неоднородного геомассива .....	49
<i>Глушанков Е.С.</i> Один подход к решению плоской задачи электромагнитоупругости для многосвязной полуплоскости или полосы .....	52
<i>Гольцев А.С.</i> Компьютерная модель температурного поля в ортотропной пластине при сосредоточенном температурном воздействии .....	56
<i>Занько А.И.</i> Решение задачи линейной вязкоупругости для тонких плит с периодическим рядом отверстий .....	59
<i>Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Глушанков Е.С.</i> Точные решения задач о действии сосредоточенных сил в анизотропной пластинке с эллиптическим отверстием.....	62
<i>Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Ермаков О.Э.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния многосвязной анизотропной полуплоскости с использованием обобщенного метода наименьших квадратов .....	65
<i>Калоеров С.А., Полянский М.А.</i> Электромагнитоупругое состояние пластинки с криволинейными отверстиями .....	68
<i>Калоеров С.А., Сероштанов А.В.</i> Точные аналитические решения задач изгиба тонких электромагнитоупругих односвязных плит .....	71
<i>Комаричев Р.Е., Судаков С.Н.</i> Метод конечных элементов с применением ускоренных вычислений CUDA .....	73
<i>Моисеенко И.А., Мельничук Н.Ю.</i> Вторые гармоники нормальных волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах .	76
<i>Мутин Д.И., Сторожев С.В., Номбре С.Б.</i> Учет разброса значений экзогенных параметров в модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии .....	79
<i>Недин Р.Д.</i> Моделирование и оценка предварительного напряженно-деформированного состояния в плоских областях с неоднородными свойствами	82
<i>Нескородев Р.Н.</i> Об одном способе получения разрешающих уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит .....	84
<i>Старииков Г.П., Мельник Т.Н., Нескреба Д.А.</i> Обоснование экспресс-метода определения прочности горных пород и строительных материалов .....	87
<i>Пачева М.Н.</i> Энергетические характеристики нормальных волн сдвига в составном волноводе из изотропного и ортотропного полуслоев .....	90
<i>Сторожев С.В., Номбре С.Б.</i> Нечетко-множественная методика учета неопределенности экзогенных параметров в модели собственных колебаний предварительно напряженных прямоугольных пластин .....	92
<i>Юров В.О.</i> Задачи для цилиндрического волновода с трещиноподобными дефектами .....	97

### ***Информационные системы управления***

<i>Балдынюк А.И.</i> Информационно-аналитическая система инновационно-активного предприятия .....	98
---	----

<i>Гайдарь Е.В.</i> Инновационные механизмы как инструмент развития информационного общества .....	100
<i>Гизатулин А.М.</i> Роль языков визуального моделирования в объектно-ориентированном анализе и программировании .....	103
<i>Коробейникова К.В.</i> Совершенствование цифрового документооборота на предприятиях малого бизнеса .....	106
<i>Крулькевич М.И.</i> Повышение эффективности обучения с применением цифровых технологий .....	109
<i>Курдюмова И.А.</i> Внедрение систем цифрового документооборота для управления документами .....	112
<i>Мащенко Н.Е.</i> Управление документационно-информационными потоками образовательного учреждения .....	115
<i>Митрохина Е.А.</i> Инновационные решения в системе электронного документооборота организации .....	118
<i>Овчаренко А.С.</i> Место и роль продовольственного комплекса в экономике государства .....	121
<i>Пономаренко Н.Ш.</i> Цифровизация продовольственного комплекса сквозь призму экстерналий .....	124
<i>Рыбаков М.А., Рыбакова Н.С., Киселева Т.Н.</i> Расчет динамических характеристик многоканальных систем управления в веб-сервисе MATH PARTNER .....	127
<i>Филатова Я.В., Харакиоз А.В.</i> Документирование деятельности общественного движения по решению социальных вопросов граждан .....	130
<i>Химич Э.В.</i> Параметры конкурентоспособности рабочей силы в условиях цифровизации .....	133
<i>Хромова М.Н.</i> Проблемы системы управления контентом интернет-ресурсов .....	136

### ***Математический анализ и дифференциальные уравнения***

<i>Агибалова А.В.</i> О разности резольвент некоторых дифференциальных операторов .....	140
<i>Ананьева А.Ю.</i> Расширения неотрицательного оператора Якоби .....	142
<i>Волчков В.В., Волчков Вит.В.</i> Об одной проблеме периодического в среднем продолжения .....	144
<i>Зарайский Д.А.</i> Сферически-симметричные множества единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам .....	146
<i>Заставный В.П.</i> Неравенства для положительно определённых ядер .....	147
<i>Иванов А.Ю., Мельник А.-В.В.</i> Магические квадраты и их построение .....	149
<i>Клово А.Г., Куповых Г.В., Ляпунова И.А., Гончаров А.В.</i> Пример построение всюду-оптимального управления колебаниями струны в явном виде .....	152
<i>Клово А.Г., Куповых Г.В., Ляпунова И.А., Чистякова Т.А., Кузнецов А.Е., Кузнецов Р.Е.</i> Некоторые свойства обобщенных тригонометрических систем произвольного порядка.....	155

<i>Кожухов И.Б., Михалёв А.В.</i> Основные направления теории полигонов над полугруппами.....	158
<i>Лиманский Д.В.</i> О множестве нулей символов дифференциальных операторов, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева .....	161
<i>Машаров П.А.</i> Экстремальный радиус Помпейю для куба в многомерном пространстве .....	162
<i>Сапронов Д.А.</i> Разрешимость задачи Коши-Дирихле для многомерных вырождающихся параболических уравнений высокого порядка типа нестационарной диффузии – конвекции .....	164

### **Прикладная математика, прикладная информатика и теория систем управления**

<i>Алексеев А.С., Рыбалко Л.А.</i> Защита информации с помощью криптографических систем RC4 И RC6 .....	166
<i>Бондаренко Л.Н.</i> Т-модели обобщенных больших чисел Шредера .....	168
<i>Горбачева О.И., Григорьев С.В., Шевцова Е.В.</i> Компьютерное тестирование как форма контроля знаний .....	171
<i>Дмитренко Н.А., Владимиров А.М., Ткачев Н.Ю., Перепелов И.С.</i> Перспективы применения принципов колоночного («COLUMNAR STORAGE») хранения в базах данных .....	174
<i>Едемская Е.Н., Бельков Д.В.</i> Уравнение Бюргерса как модель перегрузки компьютерной сети .....	177
<i>Киселёв Ф.В., Шевцов Д.В.</i> Автоматическая обработка табличных документов ...	180
<i>Павлишин К.А., Рыбалко Л.А.</i> Разработка блочного шифра с использованием модулярной арифметики .....	182
<i>Тарасенко В.А.</i> Математическая модель процесса функционирования дробильной машины .....	184
<i>Трофимов В.В., Ходырев Е.Д.</i> Моделирование нестационарной задачи фильтрации в горном массиве .....	187
<i>Шевцов Д.В., Шевцова Е.В.</i> Перспективные направления исследований по автоматическому моделированию, классификации и именованию моделей растровых изображений на множестве атомарных элементов .....	189

### **Теория вероятностей и математическая статистика**

<i>Бартеньева О.А., Дзундза А.И.</i> Анализ актуарной стоимости пенсионного резерва в производственном пенсионном фонде .....	192
<i>Волков Д.Д., Дзундза А.И., Байесовский подход в теоретических и эмпирических моделях доверительного оценивания страхового взноса .....</i>	193
<i>Глушченко А.В., Мельничук Н.Ю.,</i> Об одной задаче гарантированного оценивания неизвестного параметра в стохастической системе .....	194



<i>Жмыхова Т.В., Шурко И.Л., Никулина А.П., Тимакова В.В.</i> Оценка вероятности разорения страховой компании, функционирующей на финансовом (B,S) – рынке для различных моделей цены рискового актива .....	197
<i>Золотой А.Л., Золотая А.В.</i> Применение непараметрического критерия Уилкоксона-Манна-Уитни в исследованиях, связанных с анализом геоинформационных данных .....	199
<i>Иванова С.С., Бурункус В.Р.</i> Анализ показателей эффективности работы исполнителей по ликвидации аварий на подземных газопроводах .....	202
<i>Мельничук Н.Ю.</i> Анализ значимости поправочных коэффициентов для автострахования .....	205
<i>Сёмина А.С., Дзундза А.И.</i> Анализ актуарной стоимости страхового пенсионного аннуитета .....	207
<i>Шумакова И.Д., Гатун А.П.</i> Эконометрический анализ экономической хозяйственной деятельности предприятия .....	208

*НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ*

**ДОНЕЦКИЕ ЧТЕНИЯ 2020:  
ОБРАЗОВАНИЕ, НАУКА, ИННОВАЦИИ,  
КУЛЬТУРА И ВЫЗОВЫ СОВРЕМЕННОСТИ**

Материалы  
V Международной научной конференции  
17-18 ноября 2020 г.,  
г. Донецк

**ТОМ 1**  
**Физико-математические и технические науки**  
*Часть 1*

под общей редакцией проф. *С.В. Беспаловой*

Ответственный за выпуск проф. *В.И. Сторожев*

Дизайн обложки	<i>Е.Г. Грудева</i>
Технический редактор	<i>М.В. Фоменко</i>
Компьютерная верстка	<i>М.В. Фоменко, Н.Н. Щепин</i>

---

***Адрес оргкомитета:***

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001, ДНР.  
E-mail: *science.prorector@donnu.ru*

---

Подписано в печать 10.11.2020 г.  
Формат 60×84/16. Бумага офисная.  
Печать – цифровая. Усл.-печ. л. 12,6.  
Тираж 300 экз. Заказ № 20ноя155/1.  
Донецкий национальный университет  
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.  
Свидетельство о внесении субъекта  
издательской деятельности в Государственный реестр  
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.