

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 2 (87)

2024

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р физ.-мат. наук, проф. Д.В. Георгиевский, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. Н.Н. Грищенко, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Зыза, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Мазнев, д-р физ.-мат. наук, доц. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р физ.-мат. наук, доц. Р.Н. Нескородев, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Соловьев, д-р техн. наук, доц. С.В. Сторожев, д-р физ.-мат. наук, доц. С.Н. Царенко, д-р техн. наук, проф. В.П. Шамота.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of phys. and math., prof. D.V. Georgievskiy, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. N.N. Grishchenkov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., docent A.V. Zyza, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., docent A.V. Maznev, Dr. of phys. and math., docent I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of phys. and math., docent R.N. Neskoroedev, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of phys. and math., prof. A.N. Soloviev, Dr. of tech., docent S.V. Storozhev, Dr. of phys. and math., docent S.N. Tsarenko, Dr. of tech., prof. V.P. Shamota.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет», 2024

№ 2 (87) / 2024

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

- Зыза А.В., Нескородев Р.Н.* О новых решениях полиномиального класса Коносевича-Поздняковича одной задачи динамики твердого тела с неподвижной точкой 5

Механика деформируемого твердого тела

- Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние конечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах 18
- Глухов А.А.* Анализ модели распространения нормальных Р-SV волн в функционально-градиентном ортотропном слое для специального случая двухфакторной экспоненциальной неоднородности 34
- Калоеров С.А., Сероштанов А.В.* Решение задачи электроупругости об изгибе полуплоскости с произвольными отверстиями и трещинами 41

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Дрибан В.А., Хохлов Б.В., Антипенко А.В.* Предварительная частичная отработка 55
- Голубев Ф.М., Глухов А.А., Анциферов В.А.* О возможности прогноза зоны разуплотнения пород над отработанным пространством сейсмическим методом 66
- Лобков Н.И., Радченко А.Г.* Особенности сдвижения слоистого породного массива в результате выемки угольных пластов 74
- Бардакова Е.А.* К вопросу о гидрогеомеханическом прогнозе активизации процесса сдвижения земной поверхности в результате затопления горных выработок с учетом структуры рельефа 80

Дрибан В.А., Дуброва Н.А. Эволюция деформационных полей много-
кратно подработанного горного массива

88

№ 2 (87) / 2024

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

- Zyza A.V., Neskorodev R.N.* On new Konosevich-Pozdnyakovich polynomial-class solutions of one fixed-point rigid body dynamics problem 5

Solid Mechanics

- Glushankov E.S.* The thermoelastic state of the finite multiply connected anisotropic plate in conditions of non-uniform convective heat transfer under temperature difference action 18

- Glukhov A.A.* Analysis of the propagation model of normal P-SV waves in a functionally gradient orthotropic layer for the special case of two-factor exponential inhomogeneity 34

- Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V.* Solving the electroelasticity problem of bending a half-plane with arbitrary holes and cracks 41

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics

- Driban V.A., Khokhlov B.V., Antypenko A.V.* Preliminary partial processing.. 55

- Golubev Ph.M., Gluhov A.A., Anciferov V.A.* On the possibility of forecasting the zone of rock decompression above the waste space by the seismic method 66

- Lobkov N.I., Radchenko A.G.* Peculiarities of shearing of layered rock massif as a result of excavation of coal seams 74

- Bardakova E.A.* On the issue of hydrogeomechanical prediction of activation of the process of displacement of the Earth's surface as a result of flooding of mine workings, taking into account the complex structure of the relief 80

- Driban V.A., Dubrova N.A.* The evolution of a repeated mining rock mass deformation fields 88

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39
doi:10.24412/0136-4545-2024-2-5-17
EDN:BDPNVF



©2024. А.В. Зыза¹, Р.Н. Нескородев²

О НОВЫХ РЕШЕНИЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО КЛАССА КОНОСЕВИЧА-ПОЗДНЯКОВИЧА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В статье исследованы условия существования частных решений полиномиальной структуры класса Коносевиचा-Поздняковича для дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Найдены новые случаи интегрируемости в указанной задаче.

Ключевые слова: гириостат, эффект Барнетта-Лондона, полиномиальные решения, инвариантные соотношения, первые интегралы.

Введение. Классическая задача о движении твердого тела с одной неподвижной точкой в поле силы тяжести имеет различные обобщения [1, 2]. Одним из них является задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [3]. Исследования в этой области непосредственно обусловлены усовершенствованием бесконтактных подвесов быстровращающихся гироскопов, используемых в современной технике; конструированием высокоскоростных поездов; созданием приборов, работающих в сильных магнитных полях.

Математической моделью указанной задачи о движении гиростата является система, содержащая шесть дифференциальных уравнений с двадцатью

¹Зыза Александр Васильевич – док. физ.-мат. наук, профессор каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: z9125494@mail.ru.

Zyza Alexander Vasilievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

²Нескородев Роман Николаевич – док. физ.-мат. наук, профессор каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: rromn72@mail.ru.

Neskorojev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

параметрами, которая, в отличие от уравнений Эйлера-Пуассона и Кирхгофа-Пуассона, допускает только два первых интеграла [3]. Задача Коши для этих дифференциальных уравнений имеет решение, но получить конструктивное решение для всего множества параметров невозможно, так как при произвольных значениях параметров уравнения такого движения неинтегрируемы в квадратурах [4]. Поэтому изучение свойств движения твердого тела и гиростата с неподвижной точкой может быть основано либо на построении частных решений, либо на численном интегрировании с помощью компьютерных средств [4–6].

Актуальность построения частных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона также заключается в том, что наличие таких решений дает возможность с помощью первого метода Ляпунова проводить анализ их окрестности в фазовом пространстве дифференциальных уравнений динамики гиростата, устанавливая, например, хаотический, либо регулярный характер поведения интегральных кривых [3].

Полиномиальные классы частных решений уравнений движения гиростата в различных силовых полях относятся к наиболее изученным. Так, например, в задачах о движении твердого тела и гиростата под действием силы тяжести полиномиальные решения получены В.А. Стекловым, Н. Ковалевским, Д.Н. Горячевым, С.А. Чаплыгиным, П.В. Харламовым, Е.И. Харламовой, Г.В. Мозалевской, А.И. Докшевичем, Б.И. Коносевичем, Е.В. Поздняковичем [2, 7]. Все они отвечают случаю, когда центры масс твердого тела, имеющего неподвижную точку, и гиростата с неподвижной точкой лежат на главной оси эллипсоида инерции. В таком же предположении построены решения различных полиномиальных классов и для уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [8–11].

В данной статье начато исследование условий существования решений полиномиальной структуры класса Коносевича-Поздняковича в указанной задаче динамики гиростата. Построены новые решения рассматриваемого полиномиального класса, которые описываются эллиптическими и гиперэллиптическими функциями времени.

1. Постановка задачи. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, суть которого состоит в следующем. При вращении первоначально ненамагниченного ферромагнетика в магнитном поле происходит его намагничивание вдоль оси вращения, которая линейно зависит от угловой скорости ω ($\mathbf{B} = B\omega$), где B - симметричный тензор третьего порядка (эффект Барнетта) [12]. Эффект Лондона [13] относится к явлению, имеющему место при вращении ненамагниченного сверхпроводящего твердого тела в магнитном поле. В обоих случаях формулы для магнитного момента одинаковы, несмотря на то, что механизм намагничивания обусловлен различными физическими причинами. В указанных случаях магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем стремится по направлению к вектору напряженности постоянного магнитного поля, что приводит к прецессии векто-

ра кинетического момента тела вокруг вектора поля [14].

При математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле необходимо учитывать магнитный момент, обусловленный эффектом Барнетта-Лондона. Это обстоятельство приводит к тому, что дифференциальные уравнения указанного движения, в отличие от уравнений классической задачи динамики [1, 2] и уравнений класса Кирхгофа [3, 4], не допускают интеграл энергии. Это происходит из-за диссипации энергии – «перекачки» энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движений гиростата. Поэтому введение дополнительного первого интеграла, предложенного в [15, 16], недостаточно для интегрирования уравнений такого движения гиростата, так как к ним не применима теория интегрирующего множителя Якоби [1, 4].

Уравнения движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона и момента ньютоновских сил в векторном виде таковы [3, 15, 16]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Первые интегралы уравнений (1) имеют вид

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0. \quad (2)$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})' = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – орт, характеризующий направление постоянного магнитного поля; $\mathbf{s} = (s_1, 0, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$ – гиростатический момент; $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата в неподвижной точке; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая магнитный момент $\mathbf{B} = B \cdot \boldsymbol{\omega}$; $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, которая характеризует ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную; k_0 – постоянная интеграла площадей.

Если для динамического уравнения из (1) имеет место равенство $B = \delta \cdot E$ (E – единичная матрица, δ – параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда эти уравнения по своей структуре совпадут с уравнениями Кирхгофа-Пуассона задачи о движении гиростата в поле действия потенциальных и гироскопических сил. Поэтому полученные в этом случае результаты для уравнений (1) следует сопоставлять с результатами [3].

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1) решений класса Коносевича-Поздняковича [10]:

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^n b_i \sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^m c_j \sigma^j, \quad (4)$$

$$\nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^l a_i \sigma^i, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) \sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = \kappa(\sigma) \sqrt{R(\sigma)},$$

$$\psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \kappa(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j,$$

где n, m, l, n_1, m_1 – целые неотрицательные числа; коэффициенты b_i, c_j, a_i, g_i, f_j – подлежащие определению параметры. Указанный класс решений (4) характеризуется квадратичным инвариантным соотношением по вспомогательной переменной δ . Этим классом описывается решение Коносевича-Поздняковича классической задачи динамики твердого тела [2] и решение Харламовой-Мозалевской задачи о движении тяжелого гиростата [7].

Преобразуем уравнения (1) и геометрический интеграл из (2) при помощи соотношений (4):

$$\Phi(\sigma) = (\psi(\sigma) - \kappa(\sigma)) (\varphi'(\sigma))^{-1}; \quad (5)$$

$$\dot{\sigma} = \Phi(\sigma) \sqrt{Q(\sigma) R(\sigma)}; \quad (6)$$

$$(Q(\sigma) \psi^2(\sigma))' \Phi(\sigma) = 2\psi(\sigma) (\sigma^2 \kappa(\sigma) - \varphi(\sigma)),$$

$$(R(\sigma) \kappa^2(\sigma))' \Phi(\sigma) = 2\kappa(\sigma) (\varphi(\sigma) - \sigma^2 \varphi(\sigma)); \quad (7)$$

$$2\sigma A_1 \Phi(\sigma) = (C_3 - C_2) \psi(\sigma) \kappa(\sigma) + B_2 \kappa(\sigma) - B_3 \psi(\sigma) + (A_2 - A_3); \quad (8)$$

$$A_2 Q'(\sigma) \Phi(\sigma) = 2[(C_1 - C_3) \kappa(\sigma) \varphi(\sigma) - \kappa(\sigma) (B_1 \sigma^2 + s_1) + B_3 \varphi(\sigma) - \lambda_1 + (A_3 - A_1) \sigma^2], \quad (9)$$

$$A_3 R'(\sigma) \Phi(\sigma) = 2[(C_2 - C_1) \psi(\sigma) \varphi(\sigma) + \psi(\sigma) (B_1 \sigma^2 + s_1) - B_2 \varphi(\sigma) + \lambda_1 + (A_1 - A_2) \sigma^2];$$

$$\varphi^2(\sigma) - 1 + Q(\sigma) \psi^2(\sigma) + R(\sigma) \kappa^2(\sigma) = 0. \quad (10)$$

В уравнениях (5), (7), (9) штрихом обозначено дифференцирование по переменной σ . Если функции $Q(\sigma), R(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma), \kappa(\sigma)$ определены, то зависимость $\sigma = \sigma(t)$ от времени устанавливаем из дифференциального уравнения (6).

2. Варианты значений степеней полиномов решения (4). Общая система условий на параметры задачи и решения (4).

Первостепенной задачей в исследовании условий существования решений различных полиномиальных структур уравнений движения твердого тела и гиростата является задача об определении максимальных значений степеней полиномов. Она решается путем рассмотрения редуцированных уравнений в виде многочленов правой и левой частей этих уравнений и требованием равенства максимальных степеней данных многочленов.

В результате таких действий и дальнейшего анализа, считая линейными по σ алгебраические многочлены $\psi(\sigma), \kappa(\sigma)$ из (4), установлены наиболее важные

для динамики гиростата варианты значений степеней полиномов в решении (4). Полагая $\deg Q = n$, $\deg R = m$, $\deg \varphi = l$, $\deg \psi = n_1$, $\deg \kappa = m_1$, укажем эти варианты:

Таблица 1. Варианты значений степеней многочленов

№ варианта	n	m	l	n_1	m_1
1	2	4	2	1	0
2	3	3	1	1	1
3	2	2	1	1	1

Для дальнейшего изучения вариантов таблицы 1 запишем систему условий на параметры задачи и решения, считая $n = 3$, $m = 4$, $l = 2$, $n_1 = 1$, $m_1 = 1$. Тогда алгебраические многочлены решения (4) таковы:

$$Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \quad R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,$$

$$\varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \psi(\sigma) = g_1\sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0. \quad (11)$$

Подставим полином из (11) в уравнения (7)–(9) и интеграл (10). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по σ , приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (4), (11):

$$a_2d_2 = 0, \quad 2A_1(g_1 - f_1) - 2a_2d_1 - a_1d_2 = 0, \quad 2A_1(g_0 - f_0) - 2a_2d_0 - a_1d_1 = 0,$$

$$a_1d_0 = 0, \quad \gamma_3d_2 = 0, \quad \gamma_3d_1 + \gamma_2d_2 - 4A_1f_1 = 0,$$

$$\gamma_3d_0 + \gamma_2d_1 + \gamma_1d_2 + 4A_1(a_2 - f_0) = 0, \quad \gamma_2d_0 + \gamma_1d_1 + \gamma_0d_2 + 4A_1a_1 = 0,$$

$$\gamma_1d_0 + \gamma_0d_1 + 4A_1a_0 = 0, \quad \gamma_0d_0 = 0, \quad \delta_4d_2 = 0,$$

$$\delta_4d_1 + \delta_3d_2 = 0, \quad \delta_4d_0 + \delta_3d_1 + \delta_2d_2 + 4A_1g_1 = 0,$$

$$\delta_3d_0 + \delta_2d_1 + \delta_1d_2 + 4A_1(a_2 - g_0) = 0, \quad \delta_2d_0 + \delta_1d_1 + \delta_0d_2 - 4A_1a_1 = 0,$$

$$\delta_1d_0 + \delta_0d_1 - 4A_1a_0 = 0, \quad \delta_0d_0 = 0,$$

$$3A_2b_3d_2 - 4A_1(\beta a_2 - B_1)f_1 = 0, \quad (12)$$

$$A_2(2b_2d_2 + 3b_3d_1) - 4A_1((a_2f_0 + a_1f_1)\beta - B_1f_0 + B_3a_2 + A_3 - A_1) = 0,$$

$$A_2(b_1d_2 + 2b_2d_1 + 3b_3d_0) - 4A_1((a_1f_0 + a_0f_1)\beta + B_3a_1 - f_1s_1) = 0,$$

$$A_2(b_1d_1 + 2b_2d_0) - 4A_1((B_3 + f_0\beta)a_0 - f_0s_1 - \lambda_1) = 0, \quad b_1d_0 = 0,$$

$$c_4d_2 = 0, \quad A_3(4c_4d_1 + 3c_3d_2) + 4A_1((\alpha + \beta)a_2 - B_1)g_1 = 0,$$

$$A_3(4c_4d_0 + 3c_3d_1 + 2A_2d_2) +$$

$$+ 4A_1((\alpha + \beta)(a_2g_0 + a_1g_1) - B_1g_0 + B_2a_2 + A_2 - A_1) = 0,$$

$$A_3(3c_3d_0 + 2A_2d_1 + c_1d_2) + 4A_1((\alpha + \beta)(a_1g_0 + a_0g_1) - g_1s_1 + B_2a_1) = 0,$$

$$A_3(2A_2d_0 + c_1d_1) + 4A_1((\alpha + \beta)a_0g_0 - g_0s_1 + B_2a_0 - \lambda_1) = 0, \quad c_1d_0 = 0, \\ a_0^2 + b_0g_0^2 + c_0f_0^2 - 1 = 0.$$

Здесь

$$\alpha = C_3 - C_2, \quad \beta = C_1 - C_3, \\ d_2 = \alpha g_1 f_1, \quad d_1 = \alpha(g_1 f_0 + g_0 f_1) + B_2 f_1 - B_3 g_1, \\ d_0 = \alpha g_0 f_0 + B_2 f_0 - B_3 g_0 + A_2 - A_3, \\ \gamma_3 = 5b_3 g_1, \quad \gamma_2 = 3b_3 g_0 + 4b_2 g_1, \quad \gamma_1 = 2b_2 g_0 + 3b_1 g_1, \quad \gamma_0 = b_1 g_0 + 2b_0 g_1, \\ \delta_4 = 6c_4 f_1, \quad \delta_3 = 4c_4 f_0 + 5c_3 f_1, \quad \delta_2 = 3c_3 f_0 + 4c_2 f_1, \\ \delta_1 = 2c_2 f_0 + 3c_1 f_1, \quad \delta_0 = c_1 f_0 + 2c_0 f_1.$$

3. Первое новое частное решение. Рассмотрим первый вариант из таблицы 1. Для этого варианта алгебраические многочлены решения (4) имеют вид

$$Q(\sigma) = b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \quad R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \psi(\sigma) = g_1\sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_0. \quad (13)$$

Значения коэффициентов указанных в (13) полиномов получим из условия совместности системы уравнений (12) при $b_3 = 0$ и $f_1 = 0$. Считая свободными параметрами $A_2, A_3, B_2, B_3, g_1, f_0$, запишем решение этой системы:

$$A_1 = A_3, \quad \alpha = \frac{3\mu_1 B_3 f_0 + \mu_0 A_3}{3\mu_1 f_0^2}, \\ \beta = -\frac{\mu_0 A_2 A_3 + 6\mu_1 \mu_2 B_3 f_0}{6\mu_1 \mu_2 f_0^2}, \quad B_1 = -\frac{A_2 A_3}{2\mu_2 f_0}, \\ a_2 = \frac{3\mu_1 f_0}{\mu_0}, \quad a_1 = -\frac{6\mu_1 \mu_2 \mu_3 f_0^2}{\mu_0^2 g_1 A_3}, \\ a_0 = -\frac{1}{\mu_0^3 \mu_4 (g_1 A_3)^2} \left[3\mu_1^2 \mu_3 \left((14A_3 - 9A_2) A_2 B_2^2 f_0^2 + 4(9A_2^3 - 50A_2^2 A_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 87A_2 A_3^2 - 48A_3^3) B_2 f_0 + A_2(45A_2^2 - 196A_2^2 A_3 + 285A_2 A_3^2 - 138A_3^3) \right) f_0^3 \right], \\ b_2 = \frac{6\mu_1 \mu_3 f_0^2}{(\mu_0 g_1)^2}, \quad b_1 = \frac{12\mu_1^2 \mu_3 (\mu_3 + 3(2A_2 - 3A_3)) f_0^3}{(\mu_0 g_1)^3 A_3}, \\ b_0 = \frac{1}{(\mu_0^2 g_1^2 A_3)^2 \mu_4} \left[18\mu_1^3 \mu_3 \left(\mu_2 (B_2 f_0)^3 + (15A_2^2 - 40A_2 A_3 + 28A_3^2) (B_2 f_0)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (A_2 - A_3) \times (57A_2^2 - 155A_2 A_3 + 108A_3^2) B_2 f_0 + 45A_2^4 - \right. \right. \\ \left. \left. - 140A_2^3 A_3 + 73(A_2 A_3)^2 + 126A_2 A_3^3 - 108A_3^4 \right) f_0^4 \right],$$

О новых решениях одной задачи динамики твердого тела с неподвижной точкой

$$\begin{aligned}
c_4 &= -\frac{3\mu_1}{\mu_0}, \quad c_3 = \frac{12\mu_1^2\mu_3f_0}{\mu_0^2g_1A_3}, \quad c_2 = -\frac{36\mu_1^2\mu_2\mu_3f_0^2}{\mu_0^3g_1^2A_3}, \\
c_1 &= \frac{12\mu_1A_1a_0}{\mu_0g_1A_3}, \quad c_0 = \frac{1}{f_0^2}(1 - a_0^2 - b_0g_0^2), \quad g_0 = -\frac{3\mu_1(\mu_3 - A_3)f_0}{\mu_0A_3}, \\
s_1 &= -\frac{1}{2\mu_0^2\mu_2\mu_4g_1^2A_3} \left[\mu_1\mu_3 \left((9A_2^2 - 2A_2A_3 - 16A_3^2) A_2 (B_2f_0)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(45A_2^3 - 301A_2^2A_3 + 574A_2A_3^2 - 336A_3^3) A_2B_2f_0 + 225A_2^5 - 2060A_2^4A_3 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 7769A_2^3A_3^2 - 14466A_2^2A_3^3 + 13104A_2A_3^4 - 4608A_3^5 \right) f_0 \right], \\
\lambda_1 &= \frac{3}{\mu_0^2\mu_4g_1^2A_3} \left[\mu_1^2\mu_3 \left(-A_2 (B_2f_0)^2 + 2A_2(7A_3 - 5A_2) B_2f_0 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 15A_2^3 - 94A_2^2A_3 + 171A_2A_3^2 - 96A_3^3 \right) f_0^2 \right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 2B_2f_0 + 5A_2 - 6A_3, \quad \mu_1 = A_2 - 2A_3, \quad \mu_2 = 3A_2 - 4A_3, \\
\mu_3 &= B_2f_0 + A_2, \quad \mu_4 = B_2f_0\mu_2 + 4(2A_2 - 3A_3)A_3.
\end{aligned}$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени получим из дифференциального уравнения (6)

$$\dot{\sigma} = \frac{d_1}{2A_1} \sqrt{(b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0)(c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0)}. \tag{15}$$

Приведем числовой пример решения (4), (13)–(15) уравнений (1). Пусть $a > 0$, $b > 0$ и

$$A_1 = A_3 = a, \quad A_2 = \frac{9}{10}a, \quad B_1 = -\frac{3}{26}b, \quad B_2 = 5b, \quad B_3 = -2b,$$

$$C_3 - C_2 = \frac{19b^2}{11a}, \quad C_1 - C_3 = -\frac{257b^2}{858a},$$

$$\mathbf{s} = \left(\frac{14237663b^2}{187278000a}, 0, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{15019367b}{84035000}, 0, 0 \right), \tag{16}$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = \frac{1034b}{60025a}\sigma^2 + \frac{671066b^{3/2}}{73530625a^{3/2}}\sigma + \frac{105954466761}{2522100437500}\frac{b^2}{a^2}, \tag{17}$$

$$\omega_3^2 = R(\sigma) = -\frac{11}{105}\sigma^4 + \frac{11374b^{1/2}}{128625a^{1/2}}\sigma^3 + \frac{147862b}{31513125a}\sigma^2 +$$

$$+ \frac{2792982379b^{3/2}}{540450093750a^{3/2}}\sigma + \frac{7767837926606418211b^2}{77857240505625 \cdot 10^6 a^2},$$

$$\nu_1 = -\frac{11a}{35b}\sigma^2 + \frac{6721a^{1/2}}{42875b^{1/2}}\sigma + \frac{253907489}{2941225000},$$

$$\nu_2 = \left(\frac{7a^{3/2}}{b^{3/2}}\sigma - \frac{1661a}{350b} \right) \sqrt{Q(\sigma)}, \quad \nu_3 = -\frac{3a}{b} \sqrt{R(\sigma)}.$$

Так как зависимость $\sigma = \sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = -\frac{245a^{1/2}}{22b^{1/2}} \sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}, \quad (18)$$

то действительность решения (17), (18), при значениях параметров задачи (16), вытекает из условия, что подкоренные функции $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$ при $\sigma = 0$ – положительны. При этом $\sigma(t)$ – функция времени, полученная в результате обращения гиперэллиптического интеграла, вытекающего из (18).

Приведенный пример (16)–(18) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a и b . Зависимость всех переменных задачи от времени устанавливается подстановкой $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (17).

Построенное решение (16)–(18) можно характеризовать как решение с одним линейным инвариантным соотношением вида

$$h(\omega_3, \nu_3) = \omega_3 - \nu_3 f_0^{-1} = 0,$$

производная которого в силу уравнений (1) характеризуется условием

$$\left. \frac{dh(\omega_3, \nu_3)}{dt} \right|_{h(\omega_3, \nu_3)=0} \neq 0.$$

4. Второе новое частное решение. Перейдем к исследованию второго варианта из таблицы 1. Для этого варианта многочлен решения (4) таковы

$$Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \quad R(\sigma) = c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \varphi(\sigma) = a_1\sigma + a_0, \quad \psi(\sigma) = g_1\sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_1\sigma + f_0. \quad (19)$$

Для нахождения коэффициентов многочленов (19) решения (4) и параметров рассматриваемой задачи исследуем на совместимость систему алгебраических уравнений (12) при $c_4 = 0$, $a_2 = 0$.

Указанная система разрешима относительно независимых параметров A_1 , B_2 , B_3 , f_0 , и ее решение таково:

$$\alpha = 0, \quad B_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad A_2 = A_3, \quad g_0 = \frac{B_2 f_0}{B_3}, \quad A_3 = \frac{5}{2} A_1, \\ a_1 = \frac{2A_1 f_0}{B_3 g_1}, \quad a_0 = \frac{(B_2 + B_3) A_1 f_0^2}{2(g_1 B_3)^2}, \quad f_1 = g_1, \\ b_3 = \frac{4A_1}{5\eta_0 g_1}, \quad b_2 = -\frac{\eta_1 A_1 f_0}{5\eta_0 g_1^2 B_3}, \\ b_1 = \frac{2(\eta_1 B_2 f_0 - 20A_1 B_3) A_1 f_0}{15\eta_0 g_1^3 B_3^2}, \quad (20)$$

О новых решениях одной задачи динамики твердого тела с неподвижной точкой

$$b_0 = \frac{(-\eta_1 B_2^2 f_0 + 5A_1 B_3 (B_2 - 3B_3)) A_1 f_0^2}{15\eta_0 g_1^4 B_3^3},$$

$$c_3 = -\frac{4A_1}{5\eta_0 g_1}, \quad c_2 = -\frac{\eta_2 A_1 f_0}{5\eta_0 g_1^2 B_3},$$

$$c_1 = \frac{2(\eta_2 f_0 + 20A_1) A_1 f_0}{15\eta_0 g_1^3 B_3}, \quad c_0 = \frac{(-\eta_2 B_3 f_0 + 5A_1 (3B_2 - B_3)) A_1 f_0^2}{15\eta_0 (g_1^2 B_3)^2},$$

$$s_1 = \frac{3(B_2 + B_3) A_1 f_0}{4g_1^2 B_3}, \quad \lambda_1 = -\frac{((3B_2^2 - 2B_2 B_3 + 3B_3^2) f_0 - 20A_1 B_3) A_1 f_0}{12(g_1 B_3)^2},$$

$$g_1 = \left[\frac{5(7B_2^2 - 2B_2 B_3 + 7B_3^2) B_3 (A_1 f_0^2)^2 - 4\eta_0^2 (3B_2^2 + 4B_2 B_3 + 3B_3^2) A_1 f_0^5}{60B_3^5} \right]^{1/4}.$$

Здесь

$$\eta_0 = B_2 - B_3, \quad \eta_1 = 3B_2 - 5B_3, \quad \eta_2 = 5B_2 - 3B_3.$$

Зависимость $\sigma = \sigma(t)$ установим из уравнения (6)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\eta_0 g_1}{2A_1} \sqrt{(c_3 \sigma^3 + c_2 \sigma^2 + c_1 \sigma + c_0) (b_3 \sigma^3 + b_2 \sigma^2 + b_1 \sigma + b_0)}. \quad (21)$$

Приведем числовой пример действительности решения (4), (19), (21) при выполнении условий (20).

Пусть

$$A_1 = a, \quad B_2 = -2b, \quad B_3 = 3b, \quad f_0 = -\frac{5a}{b}, \quad (a > 0, \quad b > 0). \quad (22)$$

Тогда из условий (20) имеем:

$$A_2 = A_3 = \frac{5}{2}a, \quad C_1 = C_2 = C_3, \quad B_1 = 0, \quad (23)$$

$$\mathbf{s} = \left(-\frac{5a^2}{4bg_1^2}, 0, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{175a^3}{12(bg_1)^2}, 0, 0 \right);$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = -\frac{4a}{25bg_1} \sigma^3 + \frac{7a^2}{5(bg_1)^2} \sigma^2 - \frac{4a^3}{(bg_1)^3} \sigma + \frac{65a^4}{(bg_1)^4}, \quad (24)$$

$$\omega_3^2 = R(\sigma) = \frac{4a}{25bg_1} \sigma^3 + \frac{19a^2}{15(bg_1)^2} \sigma^2 + \frac{46a^3}{9(bg_1)^3} \sigma + \frac{110a^4}{9(bg_1)^4},$$

$$\nu_1 = -\frac{10a^2}{3b^2g_1} \sigma + \frac{25a^3}{18b^3g_1^2}, \quad \nu_2 = \left(g_1 \sigma + \frac{10a}{3b} \right) \sqrt{Q(\sigma)},$$

$$\nu_3 = \left(g_1 \sigma - \frac{5a}{b} \right) \sqrt{R(\sigma)}.$$

Здесь

$$g_1 = \sqrt[4]{\frac{41875}{108}} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}.$$

Вспомогательная переменная $\sigma = \sigma(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\sigma} = -\frac{5g_1b}{2a}\sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)} \quad (25)$$

при $\sigma \in \left[-\frac{9a}{2bg_1}; \frac{21a}{4bg_1}\right]$.

Следовательно, согласно (25), решение (24) с параметрами задачи (22), (23), представимо в виде квадратур. Оно содержит два свободных положительных параметра a , b и описывается гиперэллиптическими функциями времени.

5. Третье новое частное решение. Для изучения третьего варианта таблицы 1 запишем решение (4) дифференциальных уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (5)–(9)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, & \omega_2^2 &= Q(\sigma) = b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, & \omega_3^2 &= R(\sigma) = c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \nu_1 &= a_1\sigma + a_0, & \nu_2 &= (g_1\sigma + g_0)\sqrt{Q(\sigma)}, & \nu_3 &= (f_1\sigma + f_0)\sqrt{R(\sigma)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Значения коэффициентов многочленов в решении (26) и параметров исследуемой задачи получим из системы алгебраических уравнений (12), в качестве свободных параметров которой выберем A_1 , A_3 , α , f_0 . Считая $b_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_3 = 0$, $a_2 = 0$, запишем решение указанной системы

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\xi_1}{\alpha f_1}, & a_0 &= 0, & g_1 &= -\frac{2A_1 f_1}{\xi_0}, & g_0 &= f_0, \\ b_2 &= \frac{\xi_0^2}{4\alpha A_1 f_1^2}, & b_1 &= \frac{\xi_0^2 \xi_3 f_0}{4\alpha A_1^2 f_1^3}, & b_0 &= \frac{(\xi_0 \xi_3 \alpha f_0^2 - 8\xi_1 A_1^2) \xi_0^2}{16\alpha^2 A_1^3 f_1^4}, \\ c_2 &= -\frac{A_1}{\alpha f_1^2}, & c_1 &= \frac{2(\xi_2 + A_1) f_0}{\alpha f_1^3}, & c_0 &= -\frac{\xi_0 \xi_1 + (\xi_2 + A_1) \alpha f_0^2}{(\alpha f_1^2)^2}, \\ \beta &= -\frac{\xi_3 \alpha}{\xi_1}, & B_1 &= 0, & B_2 &= -\frac{\xi_0^2 \alpha f_0^2 + 2\xi_1 \xi_2 A_1}{\xi_0 \xi_1 f_0}, \\ B_3 &= \frac{2A_1 \alpha f_0^2 + \xi_1 \xi_2}{\xi_1 f_0}, & A_2 &= \frac{4(5A_1 - 2A_3) A_1}{\xi_0}, \\ s_1 &= \frac{(16A_1^2 - 11A_1 A_3 + 2A_3^2) \alpha f_0^2 + 2\xi_1 \xi_2 A_1}{2\alpha A_1 f_1^2 f_0}, & \lambda_1 &= -s_1 f_0, \\ f_1 &= \left[\left(\frac{(\xi_0 \xi_3 \alpha f_0^2 - 8\xi_1 A_1^2) \xi_0^2}{16\alpha^2 A_1^3} - \frac{\xi_0 \xi_1 + (\xi_2 + A_1) \alpha f_0^2}{\alpha^2} \right) f_0^2 \right]^{1/4}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$\xi_0 = 8A_1 - 3A_3, \quad \xi_1 = 10A_1 - 3A_3, \quad \xi_2 = 2A_1 - A_3, \quad \xi_3 = 4A_1 - A_3.$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени в решении (26) устанавливаем используя дифференциальное уравнение, полученное из (6):

$$\dot{\sigma} = \frac{d_2\sigma}{2A_1} \sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)}, \quad d_2 = -\frac{2\alpha A_1 f_1^2}{\xi_0}. \quad (28)$$

Приведем численный пример действительности решения (26), (28) при выполнении условий (27).

Пусть

$$A_1 = a, \quad A_3 = \frac{3}{2}a, \quad \alpha = \frac{2b^2}{a}, \quad f_0 = -\frac{5a}{b}, \quad (a > 0, b > 0). \quad (29)$$

Тогда из условий (27) получим

$$A_2 = \frac{16}{7}a, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{2472}{385}b, \quad B_3 = -\frac{411}{110}b, \quad \beta = -\frac{10b^2}{11a}, \quad (30)$$

$$\mathbf{s} = \left(-\frac{411a^2}{40f^2b}, 0, 0 \right), \quad \boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{411a^3}{8(fb)^2}, 0, 0 \right),$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = \sqrt{Q(\sigma)}, \quad \omega_3 = \sqrt{R(\sigma)},$$

$$Q(\sigma) = \frac{49a^2}{32(fb)^2}\sigma^2 - \frac{1225a^3}{64(fb)^3}\sigma + \frac{38563a^4}{512(fb)^4},$$

$$R(\sigma) = -\frac{a^2}{2(fb)^2}\sigma^2 - \frac{15a^3}{2(fb)^3}\sigma - \frac{377a^4}{16(fb)^4}, \quad (31)$$

$$\nu_1 = \frac{11a^2}{4fb^2}\sigma, \quad \nu_2 = \left(-\frac{4}{7}f\sigma - \frac{5a}{b} \right) \omega_2, \quad \nu_3 = \left(f\sigma - \frac{5a}{b} \right) \omega_3.$$

В (30), (31) введено обозначение

$$f = \sqrt[4]{\frac{662475}{512} \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}}.$$

Функцию $\sigma = \sigma(t)$ получим обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из уравнения

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{4(fb)^2}{7a^2}\sigma \sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)} \quad (32)$$

при $\sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$,

$$\sigma_1 = -\frac{(30 + \sqrt{146})a}{4fb}, \quad \sigma_2 = \frac{(\sqrt{146} - 30)a}{4fb}.$$

На указанном в (32) отрезке изменения σ , при исключении граничных точек, подкоренные функции $Q(\sigma)$ и $R(\sigma)$ имеют полиномиальные представления. Следовательно, действительность решения (29)–(32) установлена.

Заключение. Построенные в статье три частных решения дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона не имеют аналогов в классической задаче динамики твердого тела и в задаче о движении тяжелого гиростата, то есть они не являются тривиальными обобщениями решения Б.И.Коносевича-Е.В.Поздняковича.

Информация о финансовой поддержке:

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, тема № 1023020900001-4-1.1.2; 1.1.1.

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2012. – 401 с.
3. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
4. Борисов А.В. Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
5. Klein F. Über die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld. – New York: Johnson reprint corp., 1965. – 966 s.
6. Харламов П.В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–13.
7. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2013. – 408 с.
8. Зыза А.В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата / А.В. Зыза // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 7–25.
9. Зыза А.В. Об обобщенных уравнениях Н. Ковалевского в двух задачах динамики твердого тела / А.В. Зыза // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019. – Т. 29, вып. 1. – С. 73–83.
10. Зыза А.В. Классификация полиномиальных решений уравнений динамики гиростата, имеющего неподвижную точку / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 90–108.
11. Зыза А.В. Новые классы частных решений одной задачи о движении гиростата / А.В. Зыза, Т.В. Хомяк, Е.С. Платонова // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2022. – Т. 32, вып. 2. – С. 298–318.
12. Barnett S.I. Gyromagnetic and Electron – Inertia Effects / S.I. Barnett // Rev. Modern. Phys. – 1935. – 7(2). – P. 129–166.
13. London F. Superfluids / F. London, N. London. – N.Y: Wiley Inc., 1950. – 372 p.
14. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном поле / Ю.Н. Урман // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 6. – С. 1402–1404.
15. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле / В.А. Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
16. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В. Козлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.

A.V. Zyza, R.N. Neskorohev

On new Konosevich-Pozdnyakovich polynomial-class solutions of one fixed-point rigid body dynamics problem.

The article investigates the existence conditions for the partial solutions of the polynomial structure of the Konosevich-Pozdnyakovitch class of differential equations describing the gyrostat motion problem in a magnetic field, taking into account the Barnett-London effect. New cases of integrability in this problem are found.

Keywords: *gyrostat, Barnett-London effect, polynomial solutions, invariance relations, first integrals.*

*Статья поступила в редакцию 02.09.2024;
доработана 11.10.2024;
рекомендована к печати 24.10.2024.*

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-2-18-33

EDN:BEVMNB



©2024. Е.С. Глушанков¹

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗНОСТИ ТЕМПЕРАТУР НА КОНТУРАХ

В работе представлено решение задачи о действии разности температур в конечной многосвязной пластинке из анизотропного материала для случая, когда на ее контурах происходит неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. Решение построено с применением конформных отображений, функций обобщенных комплексных переменных и метода наименьших квадратов. С помощью численных исследований установлено влияние геометрических особенностей пластинки и свойств ее материала, а также распределения коэффициента теплообмена на поле напряжений в пластинке.

Ключевые слова: многосвязная анизотропная пластинка, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В современной науке и технике широко применяются конструкции с элементами в виде пластинок из анизотропных материалов. Эти пластинки могут иметь отверстия или трещины, вблизи которых под воздействием температурных полей могут возникать высокие концентрации напряжений. К настоящему времени решено множество задач о влиянии температурных полей на термонапряженное состояние (ТНС) различных упругих тел [1–5]. В частности, решено большое количество задач о влиянии конвективного теплообмена на ТНС упругих тел [6–9], в т.ч. неравномерного конвективного теплообмена [10, 11].

В данной работе приведено решение задачи определения ТНС конечной многосвязной пластинки из анизотропного материала, когда на ее контурах имеет

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

место конвективный теплообмен с неравномерно изменяющимся вдоль контура коэффициентом теплообмена с внешней средой. Решение задачи получено с использованием конформных отображений, функций обобщенных комплексных переменных и метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования ТНС пластинки в форме концентрического кольца. Показано влияние геометрических характеристик пластинки, свойств материала пластинки и коэффициента теплообмена на распределение напряжений в пластинке.

6. Постановка задачи. Рассмотрим конечную многосвязную пластинку из анизотропного материала, занимающую область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Будем считать, что контур L_0 целиком лежит внутри формального эллиптического контура L_0^+ . Центры эллипсов L_0^+ и L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) находятся в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$); полуоси эллипсов равны a_l, b_l ; углы поворота – φ_l . Контур L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) могут располагаться произвольно относительно друг друга. Через них имеет место конвективный теплообмен с переменным коэффициентом $h_l(\tau)$ с внешней средой температуры \mathfrak{T}_l . Контур L_0 не подкреплён либо жестко подкреплён.

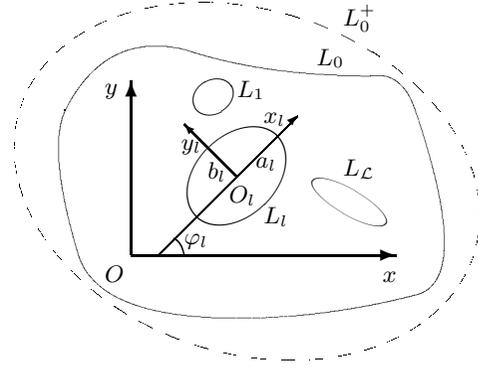


Рис. 1

Будем решать общую несвязанную задачу термоупругости для анизотропной пластинки как последовательность из двух задач – задачи теплопроводности и задачи термоупругости. Тогда общая задача сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$, а затем комплексных потенциалов термоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из соответствующих граничных условий.

После этого значения основных характеристик температурного поля (температуры T , компонент вектора плотности потока тепла q_x, q_y) в любой точке пластинки можно определять по формулам [4, 5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (33)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa(\mu_3, -1) F_3'(z_3). \quad (34)$$

Здесь μ_3 – корень характеристического уравнения теплопроводности [4, 5]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0. \quad (35)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки; $\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$.

Значения основных характеристик ТНС (напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, перемещения u, v) в любой точке пластинки можно определять по формулам [4, 5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k), \quad (36)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k). \quad (37)$$

Здесь μ_k ($k = \overline{1, 2}$) – корни характеристического уравнения плоской задачи теории упругости [4, 5]

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (38)$$

где $l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 + 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + 2a_{26}\mu + a_{22}$;

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3}, \quad q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3};$$

$$r_3 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4a}(\mu_3)}; \quad l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2; \quad \Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3;$$

a_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; α_i – коэффициенты линейного теплового расширения материала пластинки; δ_{ij} – символ Кронекера.

Функции $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) определены в многосвязных областях S_3 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [4, 5]

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (39)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (40)$$

В общем случае функции $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) будут иметь вид [4, 5]

$$F_3(z_3) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3); \quad (41)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (42)$$

Здесь D_{3l} – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$; z_{3l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (39) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{3ln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности;

$$\varphi_{30n}(z_3) = \left(\frac{z_3 - z_{30}}{R_{30}} \right)^n; \quad \varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{3l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k);$$

A_{kl}, B_{kl} ($k = \overline{1, 2}$) – комплексные постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) iA_{kl} = (0, 0, 0, 0),$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) iB_{kl} = (0, 0, 0, 0),$$

где $A_{3l} = r_3 D_{3l}$, $B_{3l} = r_3 (c_{31l} R_{3l} - D_{3l} z_{3l})$; $w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (40) произвольным точкам внутри контуров L_l ; a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоупругости;

$$\varphi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n; \quad \varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловой параметр уравнения контура.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 3}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4, 5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (43)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \quad R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функция $F_3(z_3)$ должна удовлетворять граничному условию [4, 5]

$$2\operatorname{Re} (h_l(\tau) F_3(\tau_3) + ik \delta_{3,s}(\tau_3) F_3'(\tau_3)) = h_l(\tau) \mathfrak{T}_l, \quad (44)$$

где $\delta_{3,s}(\tau_3) = d\tau_3/ds$, s – дуга контура отверстия; τ – аффикс граничной точки; τ_3 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (39).

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоупругости [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{kl1}, d_{kl2}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi'_k(\tau_k) = \left(\frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds} \right), \quad (45)$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; τ_k ($k = \overline{1, 2}$) – точки, получаемые из граничных точек при аффинных преобразованиях (40). Для неподкрепленных контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}) = (u_l(\tau), v_l(\tau));$$

c_{lj} – неизвестные постоянные интегрирования, $u_l(\tau), v_l(\tau)$ – заданные значения перемещений на контурах.

7. Решение задачи. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные D_{3l}, c_{3ln}, a_{kln} , входящие в функции (41) и (42), определяются из граничных условий (44) и (45) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{0, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых следует удовлетворять граничным условиям задач теплопроводности и термоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (41) в граничное условие (44), для определения неизвестных постоянных D_{3l}, c_{3ln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l(\tau_{im}) w_{3l}(\tau_{3im}) + i\kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) w'_{3l}(\tau_{3im})) D_{3l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} (h_l(\tau_{im}) \varphi_{3ln}(\tau_{3im}) + i\kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) \varphi'_{3ln}(\tau_{3im})) c_{3ln} = h_l(\tau_{im}) \mathfrak{T}_l \end{aligned} \quad (46)$$

$$(i = \overline{0, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}),$$

где $\tau_{3im} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$, τ_{im} – аффикс точки M_{im} . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [12] постоянные c_3, D_{3l}, c_{3ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (41), будут известны. По известной функции (41) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (33), (34) [4, 5].

Задача термоупругости. При подстановке функций (41) и (42) в граничные условия (45) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{3ip} \delta_{3,s}(\tau_{3im}) r_3 F_3(\tau_{3im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \quad (i = \overline{0, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (47)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [12] постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (42) будут известны. По известным функциям (42) можно в любой точке пластинки находить значения напряжений и перемещений по формулам (36)–(37) [4, 5].

8. Численные исследования. Численные исследования были проведены для пластинок из следующих материалов:

– текстолит КАСТ-В изотропный [3] модифицированный (материал М1):

$$a_{11} = 74,92a_0, \quad a_{22} = 74,92a_0, \quad a_{12} = -8,99a_0, \quad a_{66} = 167,79a_0, \\ \alpha_1 = 3,0\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,0\alpha_0, \quad k_{11} = 144,00k_0, \quad k_{22} = 144,00k_0.$$

– стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [3] модифицированный (материал М2):

$$a_{11} = 272,17a_0, \quad a_{22} = 1019,37a_0, \quad a_{12} = -76,15a_0, \quad a_{66} = 2548,42a_0, \\ \alpha_1 = 0,7\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,8\alpha_0, \quad k_{11} = 2,79k_0, \quad k_{22} = 1,21k_0.$$

Здесь $a_0 = 10^{-6}$ МПа⁻¹, $\alpha_0 = 10^{-5}$ К⁻¹, $k_0 = 10^{-2}$ Вт · (м · К)⁻¹.

При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (41), (42) и количество точек M_{im} на контурах L_i , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (46) и (47), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали расчеты, необходимо было в рядах Лорана сохранять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1200 «коллокационных» точек.

В таблицах 1 и 2 для концентрического кольца из материала М1 с внешним радиусом r_0 и внутренним радиусом r_1 ($a_0 = b_0 = r_0$, $a_1 = b_1 = r_1$) (рис. 2), через неподкрепленные контуры которого действует конвективный теплообмен с внешними средами температур \mathfrak{T}_0 и \mathfrak{T}_1 с коэффициентом $h_0 = h_1 = H(1 + \cos \theta)$ (таблица 1) и $h_0 = h_1 = H(1 + \sin \theta)$ (таблица 2) соответственно, с точностью до множителя $\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{T}_1$ приведены значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках контура отверстия с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения Ha для некоторых значений толщины кольца $(r_0 - r_1)/r_1$.

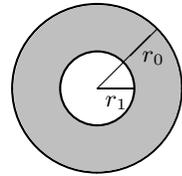


Рис. 2

В таблицах 3 и 4 приведены аналогичные значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках контура отверстия для случая кольца из материала М2.

В таблицах 5–8 для всех вышеописанных случаев приведены значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках внешнего контура с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру.

Таблица 1. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0,000	-0,001	-0,002	-0,003	-0,007	-0,014
	$\pi/6$	0,000	-0,001	-0,001	-0,003	-0,007	-0,013
	$\pi/3$	0,000	-0,001	-0,001	-0,002	-0,006	-0,012
	$\pi/2$	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,005	-0,011
	$2\pi/3$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,010
	$5\pi/6$	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,003	-0,009
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,003	-0,008
10^{-1}	0	-0,001	-0,007	-0,015	-0,026	-0,060	-0,103
	$\pi/6$	-0,001	-0,007	-0,014	-0,024	-0,057	-0,100
	$\pi/3$	-0,001	-0,006	-0,011	-0,020	-0,050	-0,093
	$\pi/2$	-0,001	-0,004	-0,008	-0,014	-0,041	-0,083
	$2\pi/3$	0,000	-0,002	-0,004	-0,008	-0,031	-0,073
	$5\pi/6$	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,024	-0,066
	π	0,000	0,000	0,000	-0,003	-0,022	-0,064
10^0	0	-0,014	-0,060	-0,101	-0,149	-0,238	-0,301
	$\pi/6$	-0,013	-0,056	-0,095	-0,140	-0,229	-0,294
	$\pi/3$	-0,010	-0,045	-0,078	-0,117	-0,205	-0,277
	$\pi/2$	-0,007	-0,031	-0,054	-0,086	-0,172	-0,253
	$2\pi/3$	-0,003	-0,016	-0,030	-0,055	-0,139	-0,230
	$5\pi/6$	-0,001	-0,005	-0,013	-0,032	-0,114	-0,212
	π	0,000	-0,001	-0,007	-0,024	-0,106	-0,206
10^1	0	-0,090	-0,198	-0,241	-0,275	-0,327	-0,361
	$\pi/6$	-0,084	-0,188	-0,229	-0,264	-0,320	-0,357
	$\pi/3$	-0,069	-0,158	-0,198	-0,235	-0,302	-0,347
	$\pi/2$	-0,048	-0,119	-0,156	-0,196	-0,277	-0,333
	$2\pi/3$	-0,027	-0,079	-0,114	-0,157	-0,252	-0,319
	$5\pi/6$	-0,011	-0,050	-0,084	-0,129	-0,234	-0,309
	π	-0,006	-0,039	-0,072	-0,118	-0,227	-0,305
10^2	0	-0,204	-0,245	-0,262	-0,281	-0,327	-0,361
	$\pi/6$	-0,195	-0,237	-0,256	-0,277	-0,324	-0,359
	$\pi/3$	-0,169	-0,217	-0,239	-0,265	-0,318	-0,356
	$\pi/2$	-0,133	-0,189	-0,217	-0,248	-0,310	-0,352
	$2\pi/3$	-0,098	-0,162	-0,195	-0,231	-0,302	-0,347
	$5\pi/6$	-0,072	-0,142	-0,179	-0,219	-0,296	-0,344
	π	-0,062	-0,134	-0,173	-0,215	-0,294	-0,343
10^3	0	-0,221	-0,236	-0,252	-0,273	-0,322	-0,358
	$\pi/6$	-0,216	-0,233	-0,250	-0,271	-0,322	-0,358
	$\pi/3$	-0,202	-0,226	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/2$	-0,182	-0,216	-0,238	-0,263	-0,318	-0,356
	$2\pi/3$	-0,162	-0,206	-0,231	-0,259	-0,316	-0,355
	$5\pi/6$	-0,148	-0,199	-0,226	-0,255	-0,314	-0,354
	π	-0,143	-0,196	-0,224	-0,254	-0,314	-0,354
∞	0	-0,207	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/6$	-0,207	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/3$	-0,207	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/2$	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$2\pi/3$	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$5\pi/6$	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	π	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357

Термонапряженное состояние конечной анизотропной пластинки

Таблица 2. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,003	-0,008
	$-\pi/3$	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,003	-0,009
	$-\pi/6$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,010
	0	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,005	-0,011
	$\pi/6$	0,000	-0,001	-0,001	-0,002	-0,006	-0,012
	$\pi/3$	0,000	-0,001	-0,001	-0,003	-0,007	-0,013
	$\pi/2$	0,000	-0,001	-0,002	-0,003	-0,007	-0,014
10^{-1}	$-\pi/2$	0,000	0,000	0,000	-0,003	-0,022	-0,064
	$-\pi/3$	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,024	-0,066
	$-\pi/6$	0,000	-0,002	-0,004	-0,008	-0,031	-0,073
	0	-0,001	-0,004	-0,008	-0,014	-0,041	-0,083
	$\pi/6$	-0,001	-0,006	-0,011	-0,020	-0,050	-0,093
	$\pi/3$	-0,001	-0,007	-0,014	-0,024	-0,057	-0,100
	$\pi/2$	-0,001	-0,007	-0,015	-0,026	-0,060	-0,103
10^0	$-\pi/2$	0,000	-0,001	-0,007	-0,024	-0,106	-0,206
	$-\pi/3$	-0,001	-0,005	-0,013	-0,032	-0,114	-0,212
	$-\pi/6$	-0,003	-0,016	-0,030	-0,055	-0,139	-0,230
	0	-0,007	-0,031	-0,054	-0,086	-0,172	-0,253
	$\pi/6$	-0,010	-0,045	-0,078	-0,117	-0,205	-0,277
	$\pi/3$	-0,013	-0,056	-0,095	-0,140	-0,229	-0,294
	$\pi/2$	-0,014	-0,060	-0,101	-0,149	-0,238	-0,301
10^1	$-\pi/2$	-0,006	-0,039	-0,072	-0,118	-0,227	-0,305
	$-\pi/3$	-0,011	-0,050	-0,084	-0,129	-0,234	-0,309
	$-\pi/6$	-0,027	-0,079	-0,114	-0,157	-0,252	-0,319
	0	-0,048	-0,119	-0,156	-0,196	-0,277	-0,333
	$\pi/6$	-0,069	-0,158	-0,198	-0,235	-0,302	-0,347
	$\pi/3$	-0,084	-0,188	-0,229	-0,264	-0,320	-0,357
	$\pi/2$	-0,090	-0,198	-0,241	-0,275	-0,327	-0,361
10^2	$-\pi/2$	-0,062	-0,134	-0,173	-0,215	-0,294	-0,343
	$-\pi/3$	-0,072	-0,142	-0,179	-0,219	-0,296	-0,344
	$-\pi/6$	-0,098	-0,162	-0,195	-0,231	-0,302	-0,347
	0	-0,133	-0,189	-0,217	-0,248	-0,310	-0,352
	$\pi/6$	-0,169	-0,217	-0,239	-0,265	-0,318	-0,356
	$\pi/3$	-0,195	-0,237	-0,256	-0,277	-0,324	-0,359
	$\pi/2$	-0,204	-0,245	-0,262	-0,281	-0,327	-0,361
10^3	$-\pi/2$	-0,143	-0,196	-0,224	-0,254	-0,314	-0,354
	$-\pi/3$	-0,148	-0,199	-0,226	-0,255	-0,314	-0,354
	$-\pi/6$	-0,162	-0,206	-0,231	-0,259	-0,316	-0,355
	0	-0,182	-0,216	-0,238	-0,263	-0,318	-0,356
	$\pi/6$	-0,202	-0,226	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/3$	-0,216	-0,233	-0,250	-0,271	-0,322	-0,358
	$\pi/2$	-0,221	-0,236	-0,252	-0,273	-0,322	-0,358
∞	$-\pi/2$	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$-\pi/3$	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$-\pi/6$	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	0	-0,206	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/6$	-0,207	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/3$	-0,207	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357
	$\pi/2$	-0,207	-0,227	-0,245	-0,268	-0,320	-0,357

Таблица 3. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	-0,001	-0,003	-0,006	-0,009	-0,015	-0,019
	$\pi/6$	-0,001	-0,003	-0,005	-0,007	-0,012	-0,016
	$\pi/3$	0,000	-0,002	-0,004	-0,006	-0,011	-0,015
	$\pi/2$	0,000	-0,002	-0,004	-0,007	-0,015	-0,024
	$2\pi/3$	0,000	-0,001	-0,001	-0,002	-0,006	-0,012
	$5\pi/6$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,005	-0,010
	π	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,006	-0,012
10^{-1}	0	-0,005	-0,013	-0,016	-0,019	-0,023	-0,025
	$\pi/6$	-0,004	-0,011	-0,014	-0,015	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,004	-0,009	-0,012	-0,014	-0,017	-0,020
	$\pi/2$	-0,003	-0,008	-0,012	-0,016	-0,026	-0,034
	$2\pi/3$	-0,001	-0,004	-0,005	-0,007	-0,013	-0,018
	$5\pi/6$	-0,001	-0,002	-0,004	-0,006	-0,012	-0,017
	π	0,000	-0,001	-0,003	-0,006	-0,014	-0,020
10^0	0	-0,014	-0,018	-0,020	-0,021	-0,023	-0,025
	$\pi/6$	-0,013	-0,016	-0,017	-0,017	-0,019	-0,021
	$\pi/3$	-0,011	-0,014	-0,015	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,008	-0,014	-0,018	-0,023	-0,030	-0,037
	$2\pi/3$	-0,005	-0,008	-0,010	-0,012	-0,017	-0,020
	$5\pi/6$	-0,003	-0,007	-0,010	-0,012	-0,017	-0,019
	π	-0,002	-0,007	-0,010	-0,013	-0,020	-0,023
10^1	0	-0,016	-0,018	-0,019	-0,021	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,015	-0,016	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,014	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,012	-0,018	-0,022	-0,026	-0,032	-0,037
	$2\pi/3$	-0,009	-0,012	-0,013	-0,015	-0,018	-0,021
	$5\pi/6$	-0,008	-0,012	-0,014	-0,016	-0,018	-0,020
	π	-0,008	-0,012	-0,015	-0,018	-0,022	-0,024
10^2	0	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,015	-0,016	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,014	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,015	-0,020	-0,024	-0,027	-0,033	-0,037
	$2\pi/3$	-0,013	-0,014	-0,015	-0,016	-0,019	-0,021
	$5\pi/6$	-0,012	-0,014	-0,015	-0,017	-0,019	-0,020
	π	-0,012	-0,015	-0,017	-0,020	-0,023	-0,024
10^3	0	-0,015	-0,017	-0,019	-0,020	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,015	-0,016	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,016	-0,020	-0,024	-0,027	-0,033	-0,037
	$2\pi/3$	-0,014	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$5\pi/6$	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	π	-0,014	-0,017	-0,018	-0,020	-0,023	-0,024
∞	0	-0,015	-0,017	-0,019	-0,020	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,024	-0,027	-0,033	-0,037
	$2\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$5\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	π	-0,015	-0,017	-0,019	-0,020	-0,023	-0,024

Термонапряженное состояние конечной анизотропной пластинки

Таблица 4. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,010	-0,021
	$-\pi/3$	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,006	-0,012
	$-\pi/6$	0,000	-0,001	-0,001	-0,003	-0,007	-0,012
	0	0,000	-0,002	-0,003	-0,005	-0,011	-0,016
	$\pi/6$	0,000	-0,002	-0,004	-0,006	-0,011	-0,015
	$\pi/3$	-0,001	-0,003	-0,004	-0,007	-0,012	-0,016
	$\pi/2$	-0,001	-0,004	-0,007	-0,012	-0,021	-0,029
10^{-1}	$-\pi/2$	0,000	-0,004	-0,008	-0,013	-0,024	-0,032
	$-\pi/3$	-0,001	-0,003	-0,005	-0,007	-0,013	-0,018
	$-\pi/6$	-0,001	-0,005	-0,007	-0,010	-0,015	-0,018
	0	-0,003	-0,008	-0,011	-0,015	-0,020	-0,023
	$\pi/6$	-0,004	-0,009	-0,012	-0,014	-0,017	-0,019
	$\pi/3$	-0,005	-0,011	-0,013	-0,015	-0,018	-0,020
	$\pi/2$	-0,005	-0,015	-0,021	-0,027	-0,033	-0,037
10^0	$-\pi/2$	-0,006	-0,015	-0,020	-0,024	-0,031	-0,036
	$-\pi/3$	-0,005	-0,010	-0,011	-0,013	-0,017	-0,020
	$-\pi/6$	-0,007	-0,012	-0,013	-0,015	-0,018	-0,020
	0	-0,009	-0,014	-0,017	-0,019	-0,022	-0,024
	$\pi/6$	-0,011	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,012	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,014	-0,021	-0,025	-0,029	-0,033	-0,038
10^1	$-\pi/2$	-0,013	-0,020	-0,024	-0,027	-0,033	-0,037
	$-\pi/3$	-0,012	-0,014	-0,015	-0,015	-0,018	-0,021
	$-\pi/6$	-0,012	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,020
	0	-0,014	-0,017	-0,018	-0,020	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,025	-0,028	-0,033	-0,038
10^2	$-\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,025	-0,028	-0,033	-0,038
	$-\pi/3$	-0,014	-0,015	-0,015	-0,016	-0,019	-0,021
	$-\pi/6$	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	0	-0,015	-0,017	-0,019	-0,020	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,024	-0,028	-0,033	-0,038
10^3	$-\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,024	-0,028	-0,033	-0,037
	$-\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$-\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	0	-0,015	-0,017	-0,019	-0,020	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,024	-0,027	-0,033	-0,037
∞	$-\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,024	-0,027	-0,033	-0,037
	$-\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$-\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	0	-0,015	-0,017	-0,019	-0,020	-0,023	-0,024
	$\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,017	-0,019	-0,020
	$\pi/3$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,019	-0,021
	$\pi/2$	-0,016	-0,021	-0,024	-0,027	-0,033	-0,037

Таблица 5. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/6$	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/3$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001
	$2\pi/3$	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001
	$5\pi/6$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
10^{-1}	0	0,001	0,005	0,008	0,011	0,012	0,010
	$\pi/6$	0,001	0,005	0,008	0,010	0,012	0,010
	$\pi/3$	0,001	0,004	0,007	0,009	0,011	0,010
	$\pi/2$	0,001	0,003	0,005	0,007	0,010	0,010
	$2\pi/3$	0,000	0,002	0,003	0,005	0,009	0,010
	$5\pi/6$	0,000	0,001	0,002	0,004	0,009	0,010
	π	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,010
10^0	0	0,013	0,043	0,058	0,063	0,049	0,031
	$\pi/6$	0,012	0,040	0,055	0,061	0,048	0,031
	$\pi/3$	0,009	0,033	0,046	0,053	0,046	0,031
	$\pi/2$	0,006	0,024	0,034	0,042	0,043	0,031
	$2\pi/3$	0,003	0,014	0,022	0,032	0,040	0,031
	$5\pi/6$	0,001	0,007	0,014	0,024	0,038	0,030
	π	0,000	0,004	0,011	0,022	0,037	0,030
10^1	0	0,083	0,144	0,141	0,123	0,074	0,041
	$\pi/6$	0,078	0,137	0,136	0,119	0,073	0,041
	$\pi/3$	0,064	0,117	0,120	0,110	0,072	0,041
	$\pi/2$	0,045	0,091	0,099	0,097	0,069	0,040
	$2\pi/3$	0,026	0,064	0,078	0,084	0,067	0,040
	$5\pi/6$	0,012	0,045	0,063	0,074	0,065	0,040
	π	0,007	0,038	0,057	0,071	0,065	0,040
10^2	0	0,189	0,182	0,160	0,133	0,079	0,043
	$\pi/6$	0,181	0,177	0,157	0,132	0,079	0,043
	$\pi/3$	0,157	0,163	0,149	0,128	0,078	0,043
	$\pi/2$	0,125	0,145	0,138	0,122	0,078	0,043
	$2\pi/3$	0,093	0,126	0,127	0,117	0,077	0,043
	$5\pi/6$	0,069	0,113	0,119	0,113	0,076	0,043
	π	0,061	0,108	0,116	0,111	0,076	0,043
10^3	0	0,206	0,179	0,158	0,133	0,080	0,043
	$\pi/6$	0,202	0,177	0,157	0,132	0,080	0,043
	$\pi/3$	0,189	0,172	0,154	0,131	0,080	0,043
	$\pi/2$	0,171	0,165	0,151	0,130	0,080	0,043
	$2\pi/3$	0,153	0,158	0,147	0,128	0,079	0,043
	$5\pi/6$	0,140	0,153	0,145	0,127	0,079	0,043
	π	0,135	0,152	0,144	0,127	0,079	0,043
∞	0	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$\pi/6$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$\pi/3$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$\pi/2$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$2\pi/3$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$5\pi/6$	0,193	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
π	0,193	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043	

Термонапряженное состояние конечной анизотропной пластинки

Таблица 6. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Na	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
	$-\pi/3$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
	$-\pi/6$	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001
	0	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001
	$\pi/6$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/3$	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/2$	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
10^{-1}	$-\pi/2$	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,010
	$-\pi/3$	0,000	0,001	0,002	0,004	0,009	0,010
	$-\pi/6$	0,000	0,002	0,003	0,005	0,009	0,010
	0	0,001	0,003	0,005	0,007	0,010	0,010
	$\pi/6$	0,001	0,004	0,007	0,009	0,011	0,010
	$\pi/3$	0,001	0,005	0,008	0,010	0,012	0,010
	$\pi/2$	0,001	0,005	0,008	0,011	0,012	0,010
10^0	$-\pi/2$	0,000	0,004	0,011	0,022	0,037	0,030
	$-\pi/3$	0,001	0,007	0,014	0,024	0,038	0,030
	$-\pi/6$	0,003	0,014	0,022	0,032	0,040	0,031
	0	0,006	0,024	0,034	0,042	0,043	0,031
	$\pi/6$	0,009	0,033	0,046	0,053	0,046	0,031
	$\pi/3$	0,012	0,040	0,055	0,061	0,048	0,031
	$\pi/2$	0,013	0,043	0,058	0,063	0,049	0,031
10^1	$-\pi/2$	0,007	0,038	0,057	0,071	0,065	0,040
	$-\pi/3$	0,012	0,045	0,063	0,074	0,065	0,040
	$-\pi/6$	0,026	0,064	0,078	0,084	0,067	0,040
	0	0,045	0,091	0,099	0,097	0,069	0,040
	$\pi/6$	0,064	0,117	0,120	0,110	0,072	0,041
	$\pi/3$	0,078	0,137	0,136	0,119	0,073	0,041
	$\pi/2$	0,083	0,144	0,141	0,123	0,074	0,041
10^2	$-\pi/2$	0,061	0,108	0,116	0,111	0,076	0,043
	$-\pi/3$	0,069	0,113	0,119	0,113	0,076	0,043
	$-\pi/6$	0,093	0,126	0,127	0,117	0,077	0,043
	0	0,125	0,145	0,138	0,122	0,078	0,043
	$\pi/6$	0,157	0,163	0,149	0,128	0,078	0,043
	$\pi/3$	0,181	0,177	0,157	0,132	0,079	0,043
	$\pi/2$	0,189	0,182	0,160	0,133	0,079	0,043
10^3	$-\pi/2$	0,135	0,152	0,144	0,127	0,079	0,043
	$-\pi/3$	0,140	0,153	0,145	0,127	0,079	0,043
	$-\pi/6$	0,153	0,158	0,147	0,128	0,079	0,043
	0	0,171	0,165	0,151	0,130	0,080	0,043
	$\pi/6$	0,189	0,172	0,154	0,131	0,080	0,043
	$\pi/3$	0,202	0,177	0,157	0,132	0,080	0,043
	$\pi/2$	0,206	0,179	0,158	0,133	0,080	0,043
∞	$-\pi/2$	0,193	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$-\pi/3$	0,193	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$-\pi/6$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	0	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$\pi/6$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$\pi/3$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043
	$\pi/2$	0,194	0,173	0,155	0,132	0,080	0,043

Таблица 7. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0,001	0,002	0,003	0,003	0,003	0,002
	$\pi/6$	0,001	0,002	0,003	0,003	0,003	0,002
	$\pi/3$	0,000	0,002	0,002	0,003	0,002	0,002
	$\pi/2$	0,000	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002
	$2\pi/3$	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
	$5\pi/6$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,002
	π	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002
10^{-1}	0	0,004	0,009	0,009	0,008	0,005	0,003
	$\pi/6$	0,004	0,009	0,009	0,008	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,003	0,007	0,007	0,006	0,004	0,002
	$\pi/2$	0,002	0,005	0,005	0,005	0,004	0,003
	$2\pi/3$	0,001	0,004	0,004	0,005	0,004	0,002
	$5\pi/6$	0,001	0,002	0,003	0,004	0,004	0,003
	π	0,000	0,002	0,003	0,003	0,004	0,003
10^0	0	0,012	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,012	0,013	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,010	0,011	0,010	0,008	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,007	0,008	0,007	0,007	0,005	0,003
	$2\pi/3$	0,005	0,008	0,008	0,007	0,005	0,003
	$5\pi/6$	0,003	0,006	0,007	0,007	0,005	0,003
	π	0,002	0,005	0,006	0,006	0,005	0,003
10^1	0	0,015	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,013	0,012	0,010	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,010	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003
	$2\pi/3$	0,009	0,011	0,010	0,008	0,005	0,003
	$5\pi/6$	0,008	0,010	0,010	0,009	0,005	0,003
	π	0,007	0,009	0,009	0,008	0,006	0,003
10^2	0	0,014	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,012	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003
	$2\pi/3$	0,012	0,012	0,010	0,009	0,005	0,003
	$5\pi/6$	0,011	0,012	0,011	0,010	0,005	0,003
	π	0,011	0,011	0,010	0,009	0,006	0,003
10^3	0	0,014	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,013	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003
	$2\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$5\pi/6$	0,013	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	π	0,013	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
∞	0	0,014	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,013	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003
	$2\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$5\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	π	0,014	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003

Термонапряженное состояние конечной анизотропной пластинки

Таблица 8. Значения напряжений σ_s в точках внешнего контура

Знач. Ha	θ , рад.	Значения $(r_0 - r_1)/r_1$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	$-\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002
	$-\pi/3$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,002
	$-\pi/6$	0,000	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002
	0	0,000	0,001	0,002	0,002	0,003	0,002
	$\pi/6$	0,000	0,002	0,003	0,003	0,003	0,002
	$\pi/3$	0,001	0,002	0,003	0,003	0,003	0,002
	$\pi/2$	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,002
10^{-1}	$-\pi/2$	0,000	0,002	0,003	0,004	0,004	0,003
	$-\pi/3$	0,001	0,003	0,004	0,005	0,004	0,003
	$-\pi/6$	0,001	0,004	0,006	0,006	0,005	0,003
	0	0,002	0,005	0,006	0,006	0,005	0,003
	$\pi/6$	0,003	0,008	0,008	0,008	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,004	0,009	0,009	0,008	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,004	0,008	0,007	0,007	0,005	0,003
10^0	$-\pi/2$	0,004	0,007	0,007	0,007	0,005	0,003
	$-\pi/3$	0,005	0,009	0,009	0,008	0,005	0,003
	$-\pi/6$	0,007	0,010	0,010	0,009	0,005	0,003
	0	0,008	0,010	0,010	0,008	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,010	0,012	0,011	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,012	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,012	0,011	0,009	0,008	0,005	0,003
10^1	$-\pi/2$	0,010	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003
	$-\pi/3$	0,011	0,012	0,010	0,009	0,005	0,003
	$-\pi/6$	0,012	0,012	0,011	0,010	0,005	0,003
	0	0,013	0,012	0,010	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,014	0,013	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,013	0,011	0,009	0,008	0,005	0,003
10^2	$-\pi/2$	0,013	0,011	0,009	0,008	0,005	0,003
	$-\pi/3$	0,013	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$-\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	0	0,014	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,013	0,011	0,009	0,008	0,005	0,003
10^3	$-\pi/2$	0,013	0,011	0,009	0,008	0,005	0,003
	$-\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$-\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	0	0,014	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,013	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003
∞	$-\pi/2$	0,013	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003
	$-\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$-\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	0	0,014	0,012	0,011	0,009	0,006	0,003
	$\pi/6$	0,014	0,013	0,012	0,010	0,005	0,003
	$\pi/3$	0,014	0,012	0,011	0,009	0,005	0,003
	$\pi/2$	0,013	0,010	0,009	0,008	0,005	0,003

Во всех таблицах случай $Ha = \infty$ соответствует случаю, когда на контурах пластинки задана температура, равная температуре внешней среды.

9. Выводы. Из представленных данных следует, что коэффициент теплообмена оказывает очень существенное влияние на значения напряжений в окрестности контуров пластинки. Для вышеуказанных зависимостей коэффициента теплообмена вдоль контура отверстия, часть этого контура плохо поддерживает теплообмен (практически теплоизолирована) при любых значениях параметра Ha .

При значениях $Ha < 0,01$ контуры пластинки можно считать практически теплоизолированными; в пластинке устанавливается близкое к однородному температурное поле и вследствие этого возникающие температурные напряжения довольно малы. При увеличении значения Ha температурные напряжения в пластинке возрастают, особенно вблизи отверстия. При значениях $Ha > 100$ теплоизолированная зона является достаточно малой, чтобы оказывать существенное влияние на ТНС пластинки, и можно полагать, что на ее контурах задана температура, равная температуре внешней среды.

При этом, более высокие значения напряжений по контурам возникают в зонах с улучшенным теплообменом.

В отличие от случая действия линейного потока тепла в бесконечной пластинке [10], но в согласовании со случаем действия разности температур в бесконечной пластинке [11], более высокая концентрация напряжений наблюдается в пластинке из материала М1, обладающего более высокими коэффициентами теплопроводности (лучшей теплопроводностью) и меньшими значениями коэффициентов деформации (большей жесткостью).

Заключение. Исследования проводились в Донецком государственном университете в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4-1.1.2;2.3.1).

1. *Мотовиловец И.А.* Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров // К.–Донецк: Вища шк. 1983. – 160 с.
4. *Калоеров С.А.* Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
5. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
6. *Karwa R.* Heat and mass transfer / R. Karwa // Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2020. – 1147 p.
7. *Parihar K.S.* Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
8. *Gaikwad K.R.* Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.

9. *Nguyen T.D.* Frequency dependence of the magnitude of thermal stresses in a flat plate subjected to rapid thermal cycling by convective heating and cooling / T.D. Nguyen, J.R. Thomas Jr., D.P.H. Hasselman // *J. Therm. Stress.* – 1987. – Vol. 10, № 3. – P. 163–175.
10. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // *Журн. теорет. и прикладной механики.* – 2023. – № 2 (83). – С. 39–47. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-2-39-47. – EDN:FLTAHT.
11. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах / Е.С. Глушанков // *Журн. теорет. и прикладной механики.* – 2024. – № 1 (86). – С. 15–26. – DOI:10.24412/0136-4545-2024-1-15-26. – EDN:FYBPPC.
12. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

E.S. Glushankov

The thermoelastic state of the finite multiply connected anisotropic plate in conditions of non-uniform convective heat transfer under temperature difference action.

A solution is presented for the problem of temperature difference acting in the finite multiply connected anisotropic plate, when a non-uniform convective heat transfer with external environment occurs on its contours. The solution was obtained with using the conformal mappings, the complex potentials and the least squares. The effect of plates's geometric features, the properties of its material, and the distribution of heat transfer coefficient on the values of stresses in the plate was brought out with the numerical studies.

Keywords: *multiply connected anisotropic plate, convective heat transfer, thermal stresses, complex potentials.*

*Статья поступила в редакцию 23.08.2024;
доработана 26.09.2024;
рекомендована к печати 08.10.2024.*

УДК 539.3:534.1
doi:10.24412/0136-4545-2024-2-34-40
EDN:VIAPOE



©2024. А.А. Глухов¹

АНАЛИЗ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ P-SV ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ОРТОТРОПНОМ СЛОЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО СЛУЧАЯ ДВУХФАКТОРНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Работа посвящена получению модифицированного варианта численно-аналитического итерационного алгоритма построения векторных базисных частных решений для системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение нормальных продольно-сдвиговых волн в функционально-градиентном ортотропном слое, у материала которого двухфакторная поперечная неоднородность описывается особой экспоненциальной зависимостью для одного из параметров упругих свойств и вторым типом экспоненциальных зависимостей для всех оставшихся физико-механических характеристик.

Ключевые слова: функционально-градиентный ортотропный слой, двухфакторная экспоненциальная неоднородность, особый закон изменения одного из параметров упругости, амплитудное волновое уравнение, итерационный векторно-матричный алгоритм интегрирования, векторные базисные решения.

Введение. Исследование процессов распространения нормальных упругих волн в анизотропных неоднородных волноводах, ввиду высокого уровня фундаментальной значимости и обширных приложений результатов, относится к числу наиболее актуальных задач в динамике деформируемого твердого тела [1–4]. Результаты в данной области находят применение в таких отраслях как приборостроение, акустоэлектроника, ультразвука, а также в технологиях неразрушающего контроля. С развитием аддитивных технологий и широким их применением в производстве, теоретический анализ закономерностей распространения различных типов нормальных волн в волноводах в виде слоя из нанокompозитных функционально-градиентных материалов в рамках различных моделей описания свойств непрерывной неоднородности физико-механических характеристик является одним из передовых современных разделов этого направления исследований. На данный момент, большинство результатов предполагает решение задач о распространении нормальных упругих волн в неоднородном по толщине слое из материала, при описании физико-механических параметров

¹Глухов Антон Александрович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

которого для каждой из характеристик задается однотипный экспоненциальный закон изменения по толщине [5]. Также выполнены отдельные исследования в рамках изучения процессов распространения нормальных горизонтально-поляризованных сдвиговых волн в слое-волноводе из функционально-градиентных материалов с некоторыми видами двухфакторной поперечной неоднородности, под которой подразумевается введение двух разнотипных законов изменения по толщине слоя для характеристик упругих свойств и плотности, либо отличающихся законов неоднородности для одного из деформационных параметров и прочих физико-механических характеристик [6–8]. В данном контексте, представляемая работа посвящена разработке модификации численно-аналитического векторно-матричного итерационного алгоритма для получения векторных базисных частных решений системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение нормальных продольно-сдвиговых волн в функционально-градиентном ортотропном слое, для материала которого двухфакторная поперечная неоднородность описывается особой экспоненциальной зависимостью для одного из параметров упругих свойств и вторым типом экспоненциальных зависимостей для всех оставшихся физико-механических характеристик.

1. Формулировка основных соотношений рассматриваемой задачи.

Рассматривается волновод в виде занимающего в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область $V = \{x_3 \in [-h, h], (x_1, x_2) \in R^2\}$ плоскопараллельного слоя из функционально-градиентного ортотропного упругого материала с переменными вдоль координаты Ox_3 физико-механическими свойствами, описываемыми зависимостями вида

$$\begin{aligned} c_{13}(x_3) &= c_{130} \exp(\lambda x_3), & c_{33}(x_3) &= c_{330} \exp(\lambda x_3), \\ c_{55}(x_3) &= c_{550} \exp(\lambda x_3), & \rho(x_3) &= \rho_0 \exp(\lambda x_3), \\ c_{11}(x_3) &= c_{110} \exp(\mu x_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Для функций динамических упругих перемещений в нормальных P-SV волнах, распространяющихся в рассматриваемом слое вдоль координатного упруго-эквивалентного направления Ox_1 , вводятся комплексными представлениями

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3, t) &= u_{10}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ u_3(x_1, x_3, t) &= u_{30}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ u_2(x_1, x_3, t) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а определяющие соотношения для материала слоя с учетом (1) и (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{13}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{22} &= c_{12}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{23}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{33} &= c_{13}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{33}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_{13} = c_{55}(x_3)(\partial_1 u_3(x_1, x_3) + \partial_3 u_1(x_1, x_3)).$$

При подстановке (3) в уравнения движения сплошной среды, система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных компонентов динамических перемещений в исследуемых волнах может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} &(-k^2 c_{11}(x_3) + c_{55}(x_3)\partial_3^2 + \lambda c_{55}(x_3)\partial_3 + \rho(x_3)\omega^2)u_{10} + \\ &+(ik(c_{13}(x_3) + c_{55}(x_3))\partial_3 + ik\lambda c_{55}(x_3))u_{30} = 0, \\ &(ik(c_{13}(x_3) + c_{55}(x_3))\partial_3 + ik\lambda c_{13}(x_3))u_{10} + \\ &+(-k^2 c_{55}(x_3) + c_{33}(x_3)\partial_3^2 + \lambda c_{33}(x_3)\partial_3 + \rho(x_3)\omega^2)u_{30} = 0, \\ &\partial_j = \partial/\partial x_j, \end{aligned} \quad (4)$$

и далее представлена в матричной форме

$$\begin{aligned} \exp(\lambda x_3) \begin{pmatrix} c_{550}\partial_3^2 + \lambda c_{550}\partial_3 + \rho\omega^2 & ik(c_{130} + c_{550})\partial_3 + ik\lambda c_{550} \\ ik(c_{130} + c_{550})\partial_3 + ik\lambda c_{130} & -k^2 c_{550} + c_{330}\partial_3^2 + \lambda c_{330}\partial_3 + \rho\omega^2 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} u_{10}(x_3) \\ u_{30}(x_3) \end{pmatrix} = \exp(\mu x_3) \begin{pmatrix} k^2 c_{110} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{10}(x_3) \\ u_{20}(x_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}(x_3) = \exp(\gamma x_3) \underline{B} \underline{\Phi}(x_3), \quad \underline{\Phi}(x_3) = (u_{10}(x_3), u_{30}(x_3))^T, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \begin{pmatrix} c_{550} & 0 \\ 0 & c_{330} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda c_{550} & ik(c_{130} + c_{550}) \\ ik(c_{130} + c_{550}) & \lambda c_{330} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3 &= \begin{pmatrix} \rho\omega^2 & ik\lambda c_{550} \\ ik\lambda c_{130} & \rho\omega^2 - c_{550}k^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} k^2 c_{110} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \mu - \lambda. \end{aligned}$$

2. Итерационный векторно-матричный алгоритм интегрирования амплитудных волновых уравнений. Согласно применявшейся в работах [7, 8] итерационной схеме интегрирования векторно-матричных уравнений со структурой вида (6), для искомой вектор-функции $\underline{\Phi}(x_3)$ вводится представление

$$\underline{\Phi}(x_3) = \underline{\Phi}_0(x_3) + \underline{\Phi}_1(x_3) + \dots + \underline{\Phi}_n(x_3) + \dots, \quad (7)$$

в котором

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_0(x_3) = 0, \quad (8)$$

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_1(x_3) = \exp(\gamma x_3) \underline{B} \underline{\Phi}_0(x_3), \dots, \quad (9)$$

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_n(x_3) = \exp(\gamma x_3) \underline{B} \underline{\Phi}_{n-1}(x_3), \dots$$

Представления для базисных частных решений задачи начального приближения (8), получаемые методом Эйлера, записываются в виде

$$\underline{\Phi}_{0j}(x_3) = \underline{\zeta}_{0j} \exp(\delta_j x_3), \quad (10)$$

$$\underline{\zeta}_{0j} = (ik((c_{130} + c_{550})\delta_j + \lambda c_{550}), -(c_{550}\delta_j^2 + \lambda c_{550}\delta_j - c_{110}k^2))^T \quad (j = \overline{1, 4}),$$

где δ_j – корни алгебраического характеристического уравнения

$$\det \|\underline{A}_1 \delta^2 + \underline{A}_2 \delta + \underline{A}_3\| = 0. \quad (11)$$

После получения четырех базисных решений (8) в форме (10), отвечающие им приближения $\underline{\Phi}_{nj}(x_3)$ отыскиваются в виде

$$\underline{\Phi}_{1j}(x_1) = \underline{\zeta}_{1j} \exp((\delta_j + \gamma)x_1), \quad \underline{\Phi}_{2j}(x_1) = \underline{\zeta}_{2j} \exp((\delta_j + 2\gamma)x_1), \dots, \quad (12)$$

$$\underline{\Phi}_{nj}(x_1) = \underline{\zeta}_{nj} \exp((\delta_j + n\gamma)x_1),$$

где

$$\underline{\zeta}_{nj} = \underline{Q}_{nj}^{-1} \underline{B} \underline{\zeta}_{n-1,j}, \quad \underline{Q}_{nj} = \underline{A}_1(\delta_j + n\gamma)^2 + \underline{A}_2(\delta_j + n\gamma) + \underline{A}_3. \quad (13)$$

В итоге, получаемые на базе описанного итерационного алгоритма базисные решения уравнения (6) могут быть записаны в виде аналитических представлений

$$\underline{\Phi}_j(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\zeta}_{nj} \exp((\delta_j + n\gamma)x_3) \quad (j = \overline{1, 4}), \quad (14)$$

$$\underline{\zeta}_{nj} = \underline{Q}_{nj}^{-1} \underline{B} \underline{Q}_{n-1,j}^{-1} \underline{B} \cdot \dots \cdot \underline{Q}_{1j}^{-1} \underline{B} \underline{\zeta}_{0j}.$$

3. Формулировка отдельных вариантов дисперсионных уравнений.

Векторную амплитудную функцию перемещений, которая является решением системы уравнений (6), можно записать в виде

$$\underline{\Phi}(x_3) = \sum_{j=1}^4 C_j \underline{\Phi}_j(x_3), \quad \underline{\Phi}_j(x_3) = \left(u_{10}^{(j)}(x_3), u_{30}^{(j)}(x_3) \right)^T, \quad (15)$$

из чего следует

$$u_{10}(x_3) = \sum_{j=1}^4 C_j u_{10}^{(j)}, \quad u_{30}(x_3) = \sum_{j=1}^4 C_j u_{30}^{(j)}. \quad (16)$$

Распределения комплексных амплитудных характеристик напряжений по толщине слоя, в свою очередь, описываются соотношениями

$$\sigma_{130} = ikc_{550}u_{30}(x_3) + c_{550}u'_{10}(x_3), \quad (17)$$

$$\sigma_{330} = ikc_{130}u_{10}(x_3) + c_{330}u'_{30}(x_3),$$

$$\underline{\Phi}'_j(x_3) = (u'_{10}(x_3), u'_{30}(x_3))^T = \quad (18)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_j + n\gamma) \underline{\zeta}_{nj} \exp((\delta_j + n\gamma)x_3) \quad (j = \overline{1, 4}).$$

Применительно к исследуемому волновому процессу могут быть рассмотрены следующие варианты граничных условий на гранях слоя $x_3 = h$ и $x_3 = -h$: жесткое закрепление обеих граней

$$u_{10}(h) = u_{30}(h) = u_{10}(-h) = u_{30}(-h); \quad (19)$$

обе грани свободны

$$\sigma_{130}(h) = \sigma_{330}(h) = \sigma_{130}(-h) = \sigma_{330}(-h) = 0; \quad (20)$$

грань $x_3 = h$ свободна, а грань $x_3 = -h$ жестко закреплена

$$\sigma_{130}(h) = \sigma_{330}(h) = u_{10}(-h) = u_{30}(-h) = 0; \quad (21)$$

грань $x_3 = h$ жестко закреплена, а грань $x_3 = -h$ свободна

$$u_{10}(h) = u_{30}(h) = \sigma_{130}(-h) = \sigma_{330}(-h). \quad (22)$$

Подстановка выражений (16) и (17) в краевые условия (19)–(22) приводит к однородным системам линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов C_j . Равенства нулю определителей полученных систем и являются формулируемыми в аналитической форме дисперсионными уравнениями

$$\begin{vmatrix} u_{10}^{(1)}(h) & u_{10}^{(2)}(h) & u_{10}^{(3)}(h) & u_{10}^{(4)}(h) \\ u_{30}^{(1)}(h) & u_{30}^{(2)}(h) & u_{30}^{(3)}(h) & u_{30}^{(4)}(h) \\ u_{10}^{(1)}(-h) & u_{10}^{(2)}(-h) & u_{10}^{(3)}(-h) & u_{10}^{(4)}(-h) \\ u_{30}^{(1)}(-h) & u_{30}^{(2)}(-h) & u_{30}^{(3)}(-h) & u_{30}^{(4)}(-h) \end{vmatrix} = 0, \quad (23)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{130}^{(1)}(h) & \sigma_{130}^{(2)}(h) & \sigma_{130}^{(3)}(h) & \sigma_{130}^{(4)}(h) \\ \sigma_{330}^{(1)}(h) & \sigma_{330}^{(2)}(h) & \sigma_{330}^{(3)}(h) & \sigma_{330}^{(4)}(h) \\ \sigma_{130}^{(1)}(-h) & \sigma_{130}^{(2)}(-h) & \sigma_{130}^{(3)}(-h) & \sigma_{130}^{(4)}(-h) \\ \sigma_{330}^{(1)}(-h) & \sigma_{330}^{(2)}(-h) & \sigma_{330}^{(3)}(-h) & \sigma_{330}^{(4)}(-h) \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{130}^{(1)}(h) & \sigma_{130}^{(2)}(h) & \sigma_{130}^{(3)}(h) & \sigma_{130}^{(4)}(h) \\ \sigma_{330}^{(1)}(h) & \sigma_{330}^{(2)}(h) & \sigma_{330}^{(3)}(h) & \sigma_{330}^{(4)}(h) \\ u_{10}^{(1)}(-h) & u_{10}^{(2)}(-h) & u_{10}^{(3)}(-h) & u_{10}^{(4)}(-h) \\ u_{30}^{(1)}(-h) & u_{30}^{(2)}(-h) & u_{30}^{(3)}(-h) & u_{30}^{(4)}(-h) \end{vmatrix} = 0, \quad (25)$$

$$\begin{vmatrix} u_{10}^{(1)}(h) & u_{10}^{(2)}(h) & u_{10}^{(3)}(h) & u_{10}^{(4)}(h) \\ u_{30}^{(1)}(h) & u_{30}^{(2)}(h) & u_{30}^{(3)}(h) & u_{30}^{(4)}(h) \\ \sigma_{130}^{(1)}(-h) & \sigma_{130}^{(2)}(-h) & \sigma_{130}^{(3)}(-h) & \sigma_{130}^{(4)}(-h) \\ \sigma_{330}^{(1)}(-h) & \sigma_{330}^{(2)}(-h) & \sigma_{330}^{(3)}(-h) & \sigma_{330}^{(4)}(-h) \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

где

$$\sigma_{130}^{(j)}(x_3) = ikc_{550}u_{30}^{(j)}(x_3) + c_{550}u_{10}^{\prime(j)}(x_3), \quad (27)$$

$$\sigma_{330}^{(j)}(x_3) = ikc_{130}u_{10}^{(j)}(x_3) + c_{330}u_{30}^{\prime(j)}(x_3)$$

$$(j = \overline{1, 4}).$$

Выводы. В данной работе представлен численно-аналитический векторно-матричный итерационный алгоритм получения векторных базисных частных решений системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение нормальных продольно-сдвиговых волн в функционально-градиентном ортотропном слое, для материала которого двухфакторная поперечная неоднородность описывается особой экспоненциальной зависимостью для одного из параметров упругих свойств и вторым типом экспоненциальных зависимостей для всех оставшихся физико-механических характеристик. На базе полученного решения и различных вариаций граничных условий сформулированы дисперсионные соотношения, описывающие волновые движения данного типа в рассматриваемом волноводе.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Мелешко В.В. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104..
2. Datta S.K. Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
3. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 227–260. – DOI 10.33113/mkkm.ras.2021.27.02.227260.06.
4. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть II / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 36–86. – DOI 10.33113/mkkm.ras.2022.28.01.036086.03.
5. Yang Y.H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. – 2010. – V. 29. – P. 233–240. – DOI:10.1007/s 10921-010-0081-5.
6. Majhi S. Propagation of SH waves in a visco-elastic layer overlying an inhomogeneous isotropic half-space / S. Majhi, P.S. Pal, S. Kumar // Ain Shams Engineering Journal. – 2018. – Vol. 9, No. 4. – P. 675–680. – DOI:10.1016/j.asej.2016.03.011.
7. Карасев Д.С. Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с разнотипной экспоненциальной неоднородностью механических и электрических свойств / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – 4 (85). – С. 23–30. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN: SPYOBС.
8. Сторожев В.И. Дисперсия нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое / В.И. Сторожев, А.А. Глухов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2024. – № 1. – С. 58–64. – DOI: 10.5281/zenodo.12531960. – EDN: GCZGRS.

A.A. Glukhov

Analysis of the propagation model of normal P-SV waves in a functionally gradient orthotropic layer for the special case of two-factor exponential inhomogeneity.

The work is devoted to obtaining a modified version of a numerically analytical iterative algorithm for constructing vector basic partial solutions for a system of differential equations describing the propagation of normal longitudinal shear waves in a functionally gradient orthotropic layer, whose material has a two-factor transverse inhomogeneity described by a special exponential dependence for one of the parameters of elastic properties and a second type of exponential dependence for all remaining physical and mechanical characteristics.

Keywords: *functional gradient orthotropic layer, two-factor exponential inhomogeneity, special law of variation of one of the elasticity parameters, amplitude wave equation, iterative vector-matrix integration algorithm, vector basic solutions.*

*Статья поступила в редакцию 30.08.2024;
доработана 02.10.2024;
рекомендована к печати 15.10.2024.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-2-41-54

EDN:ELCONA

©2024. С.А. Калоеров¹, А.В. Сероштанов²

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ОБ ИЗГИБЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электроупругих плит решена задача об изгибе полуплоскости с произвольно расположенными относительно друг друга и относительно прямолинейной границы отверстиями. При этом функции, голоморфные вне отверстий разложены в ряды Лорана, а функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, выбраны в виде функций, голоморфных вне воображаемых симметричных контуров в верхних полуплоскостях. Определение коэффициентов рядов при использовании обобщенного метода наименьших квадратов сведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Численные исследования проведены для полуплоскости с круговым отверстием, в том числе выходящим на прямолинейную границу; для полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной из его контура, в том числе выходящей на прямолинейную границу. Исследованы закономерности изменения электроупругого состояния плиты в зависимости от геометрических характеристик отверстий и трещин.

Ключевые слова: тонкая пьезополуплоскость, отверстия, трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, концентрация изгибающих моментов, коэффициенты интенсивности моментов.

Введение. Тонкие пластинки из пьезоэлектрических материалов получили широкое применение в различных элементах конструкций современной науки и техники [1–6]. Зачастую эти элементы имеют отверстия и трещины, около которых возникает высокая концентрация напряжений, приводящая к их разрушению, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. В работах [7–9] предложены различные методы определения электроупругого

¹Калоеров Стефан Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Сероштанов Александр Владимирович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: aleks.serosht@gmail.com

Seroshtanov Aleksandr Vladimirovich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

состояния (ЭУС) пьезоплит простой геометрической формы из материалов простейшей микроструктуры. Решение же общей задачи электроупругости предложено в работах [10, 11], где для решения использовались комплексные потенциалы [12]. Использование последних функций особенно эффективно для случая многосвязной полуплоскости, когда при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе используется метод интегралов типа Коши [13–15]. Но такой подход можно применять, если отверстия не выходят на прямолинейную границу. В общем же случае, при определении комплексных потенциалов наиболее оптимальным оказывается использование обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК) [16]. В этом случае отверстия и трещины могут располагаться произвольно относительно друг друга и границы полуплоскости.

В данной работе с использованием комплексных потенциалов и ОМНК для их определения решена задача электроупругости об изгибе многосвязной полуплоскости с отверстиями и трещинами, произвольно расположенными относительно друг друга и границы полуплоскости. Описаны результаты численных исследований ЭУС плиты для случаев полуплоскости с круговым отверстием, с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке, рассмотрены случаи полуплоскости с круговым выемом, с круговым отверстием и разрезом между ним и границей полуплоскости.

1. Постановка и решение задачи.

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy пьезоэлектрическую плиту в виде нижней полуплоскости S с эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Прямолинейная граница L^+ не нагружена; на контурах L_l действуют непрерывно распределенные механические изгибающие моменты $m_l(s)$, поперечные силы $p_l(s)$ и моменты электрической индукции $m_{dl}(s)$ так, что их главные векторы и главные моменты на каждом из контуров равны нулю. На бесконечности полуплоскость изгибается механическими моментами M_x^∞ и моментами электрической индукции M_{dx}^∞ , моменты M_y^∞ , H_{xy}^∞ , M_{dy}^∞ в силу незагруженности прямолинейной границы равны нулю. Задачу теории упругости будем рассматривать как частный случай задачи электроупругости, когда пьезоэффект не учитывается.

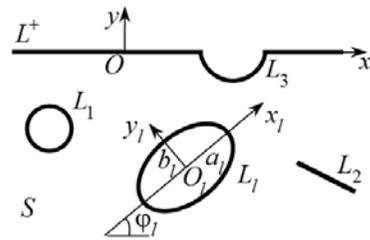


Рис. 1

Если рассматриваемую задачу электроупругости решать с использованием комплексных потенциалов электроупругости [10, 11], то она сводится к нахождению функций $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1)$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения 6-го порядка [11], из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} W'_k(t_k) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

в которых

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}, g_{3kl}) &= (p_k/\mu_k, q_k, d_{yk}), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t), f_{3l}(t)) &= \left(\int_0^s (m_l(s) dy + f_l(s) dx) - c_l x + c_{1l}, \right. \\ &\left. \int_0^s (m_l(s) dx - f_l(s) dy) + c_l y + c_{2l}, \quad - \int_0^s m_{dl}(s) ds + c_{3l} \right); \\ f_l(s) &= \int_0^s p_l(s) ds; \end{aligned}$$

p_k, q_k, d_{yk} – известные постоянные [10, 11]; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки; c_l – неизвестные вещественные постоянные; c_{il} – неизвестные комплексные постоянные, причем для прямолинейной границы $m_l(s) = p_l(s) = m_{dl}(s) = c_l = 0$.

Комплексные потенциалы $W'_k(z_k)$ определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (1) и ограниченных прямолинейными границами L_k^+ и контурами L_{kl} , соответствующими границе L^+ и контурам отверстий L_l при этих аффинных преобразованиях. В общем случае эти функции представим в виде

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) + b_{kln} \varphi_{kln}^+(z_k)], \quad (3)$$

в котором Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = (-M_x^\infty, 0, 0, -M_{dx}^\infty, 0, 0);$$

r_k, d_{xk} – известные постоянные [10, 11], зависящие от коэффициентов деформации материала и пьезоэлектрических модулей деформации и напряженности, коэффициентов диэлектрической восприимчивостей; a_{kln}, b_{kln} – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана;

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \varphi_{kln}^+(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{kl}^+)^n};$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений [17]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right)$$

внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}},$$

ζ_{kl}^+ – переменные, определяемые из конформных отображений [13, 14]

$$z_k = \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left(\zeta_{kl}^+ + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^+} \right)$$

внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}^+| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl}^+ верхней (относительно границы L_k^+) полуплоскости S_k^+ , симметричных относительно прямолинейных границ L_k^+ контурам L_{kl} ; a_l, b_l – полуоси эллипса L_l ; φ_l – угол между положительными направлениями оси Ox и оси $O_l x_l$ локальной системы координат $O_l x_l y_l$ с началом в центре эллипса L_l и осью $O_l x_l$ вдоль полуоси a_l , отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки, причем в этой системе координат уравнение эллипса L_l имеет вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (4)$$

а в основной системе Oxy записываются в виде

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (5)$$

x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся в интервале от 0 до 2π .

Содержащиеся в комплексных потенциалах (3) неизвестные постоянные a_{kln}, b_{kln} ($k = \overline{1, 3}; l = \overline{1, \mathcal{L} + 1}, n = 1, 2, \dots$) определим из граничных условий на прямолинейной границе L^+ и на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) обобщенным методом наименьших квадратов. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать комплексные постоянные c_{il} . При дифференцировании по дуге контуров области на основе (2) эти условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} \delta_{k,s} W_k''(t_k) = \frac{df_{il}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (6)$$

где $\delta_{k,s} = dt_k/ds = (x' + \mu_k y')/\sqrt{x'^2 + y'^2}$; x' , y' – производные переменных (5) по параметру параметрического задания эллипсов, причем для прямолинейной границы L^+ производная $\delta_{k,s} = 1$ и правая часть уравнений $df_{il}(t)/ds = 0$.

Граничным условиям (6) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [18, 19]. Для этого выберем на прямолинейной границе L^+ и контурах отверстий L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) заданной области S систему точек M_{p+1m} (x_{p+1m}, y_{p+1m}) ($m = \overline{1, M_{p+1}}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (3). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} и b_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikl} \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} + \varphi'^+_{kln}(t_{kpm}) b_{kln} \right] = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (7)$$

$$(i = \overline{1, 3}; \quad m = \overline{1, M_{p+1}}).$$

Кроме уравнений (7) для каждого контура отверстия должно выполняться уравнение

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (8)$$

следующее из однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_p .

Систему (7), дополненную уравнениями (8), будем решать с использованием метода сингулярных разложений [20, 21]. После нахождения псевдорешений этой системы, постоянные a_{kln} и b_{kln} , а, следовательно, и функции $W'_k(z_k)$, будут известными, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (изгибающие и крутящий механические моменты, моменты индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, для механических моментов и моментов индукций (векторов индукций) имеют место формулы [10, 15]

$$(M_x, M_y, H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k, -d_{xk}, -d_{yk}) W''_k(z_k).$$

При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) на основе известных формул [22].

Как частные случаи из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следует решение задачи теории упругости (ТУ). Это решение получается из приведенного решения, если в нем принять равными нулю пьезоэлектрические модули деформации и индукции g_{ij} . Но для проведения численных исследований можно пользоваться программой решения задачи электроупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij},$$

где λ_g – пьезопараметр модельного материала. При этом для задач ЭУ нужно принять $\lambda_g = 1$, а для задачи ТУ, как следует из вычислительных экспериментов, этот параметр нужно принять $\lambda_g \leq 10^{-3}$.

2. Описание результатов численных исследований. Были проведены исследования для плит из материалов: 1) монокристалл селенида кадмия CdSe (материал ЭМ1) [30]; 2) пьезокерамика PZT-4 (материал ЭМ2) [23]. Физико-механические постоянные этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Физико-механические постоянные материалов

Величина	Материалы	
	ЭМ1	ЭМ2
s_{11}/s_0	22,260	10,745
s_{22}/s_0	14,984	7,398
s_{66}/s_0	47,481	7,637
s_{12}/s_0	-6,437	-2,542
g_{16}/g_0	109,22	2,054
g_{21}/g_0	-4,333	-1,159
g_{22}/g_0	8,016	2,458
β_{11}/β_0	19,612	0,106
β_{22}/β_0	10,612	0,090

$$s_o = 10^{-6} \text{МПа}^{-1}, \quad g_o = 10^{-2} \text{МКл}^{-1} \text{м}^{-2}, \quad \beta_o = 10^3 \text{МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}.$$

При проведении исследований количество членов в бесконечных рядах (3) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этих контурах и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы, для которых составлялись уравнения (7), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах отверстий и однородные граничные условия на прямолинейной границе не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы брать от 100 до 500 «коллокационных точек». В качестве «коллокационного отрезка» прямолинейной границы выбирался отрезок длины от 2 до 7 диаметров отверстия (длины трещины) по каждую сторону от точки перемычки. Как показывают исследования, за этим отрезком не наблюдаются существенные изменения концентрации моментов (следовательно, и напряжений), то есть значения этих величин здесь практически такие же, как в полуплоскости без отверстий и трещин.

В таблице 2 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из различных материалов с внутренним круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/a_1 , где c – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. При этом характерными были точки $A(0, -c - 2a_1)$, $B(a_1, -c - a_1)$, $C(0, -c)$, $D(0, -c/2)$, $O(0, 0)$, $L(a_1, 0)$, $M(2a_1, 0)$. Вариант $c/a_1 = 0$ соответствует случаю, когда контур отверстия выходит на границу полуплоскости (касается прямолинейной границы); при $c/a_1 < 0$ контур отверстия пересекает границу полуплоскости, то есть рассматривается полуплоскость с круговой выемкой различной глубины; например, при $c/a_1 = -1$ центр круговой выемки оказывается на прямолинейной границе и выемкой является полукруг.

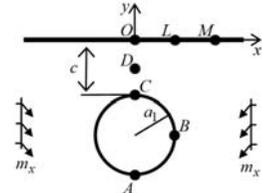


Рис. 2

Таблица 2. Значения изгибающих моментов в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от c/a_1

Материал	Точка	Момент	c/a_1							
			2	1	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5	-1
ЭМ1	A	M_x/m_x	1,798	1,837	1,994	2,077	2,118	2,089	1,952	1,760
	B	M_y/m_x	0,388	0,380	0,335	0,310	0,299	0,295	0,270	0,007
	C	M_x/m_x	1,837	1,992	4,264	12,327	–	–	–	–
	D	M_x/m_x	1,334	1,656	4,185	12,292	–	–	–	–
	O	M_x/m_x	1,283	1,588	4,155	12,272	–	–	–	–
	L	M_x/m_x	1,141	1,173	0,700	0,276	0,066	0,060	0,032	0,007
ЭМ2	M	M_x/m_x	1,013	0,945	0,708	0,619	0,579	0,596	0,684	0,816
	A	M_x/m_x	1,458	1,487	1,575	1,614	1,631	1,614	1,533	1,421
	B	M_y/m_x	-0,057	-0,056	-0,053	-0,051	-0,057	-0,050	-0,048	0,002
	C	M_x/m_x	1,526	1,699	3,490	9,474	–	–	–	–
	D	M_x/m_x	1,343	1,592	3,468	9,468	–	–	–	–
	O	M_x/m_x	1,290	1,556	3,459	9,466	–	–	–	–
	L	M_x/m_x	1,094	1,053	0,540	0,235	0,100	0,093	0,065	0,002
	M	M_x/m_x	0,960	0,901	0,799	0,768	0,754	0,769	0,834	0,911

На рисунке 3 для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения M_s/m_x по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, а на рисунке 4 для некоторых значений c/a_1 даны графики распределения M_s/m_x вдоль границы полуплоскости. Здесь и далее сплошные линии относятся к материалу ЭМ1, штриховые – к материалу ЭМ2.

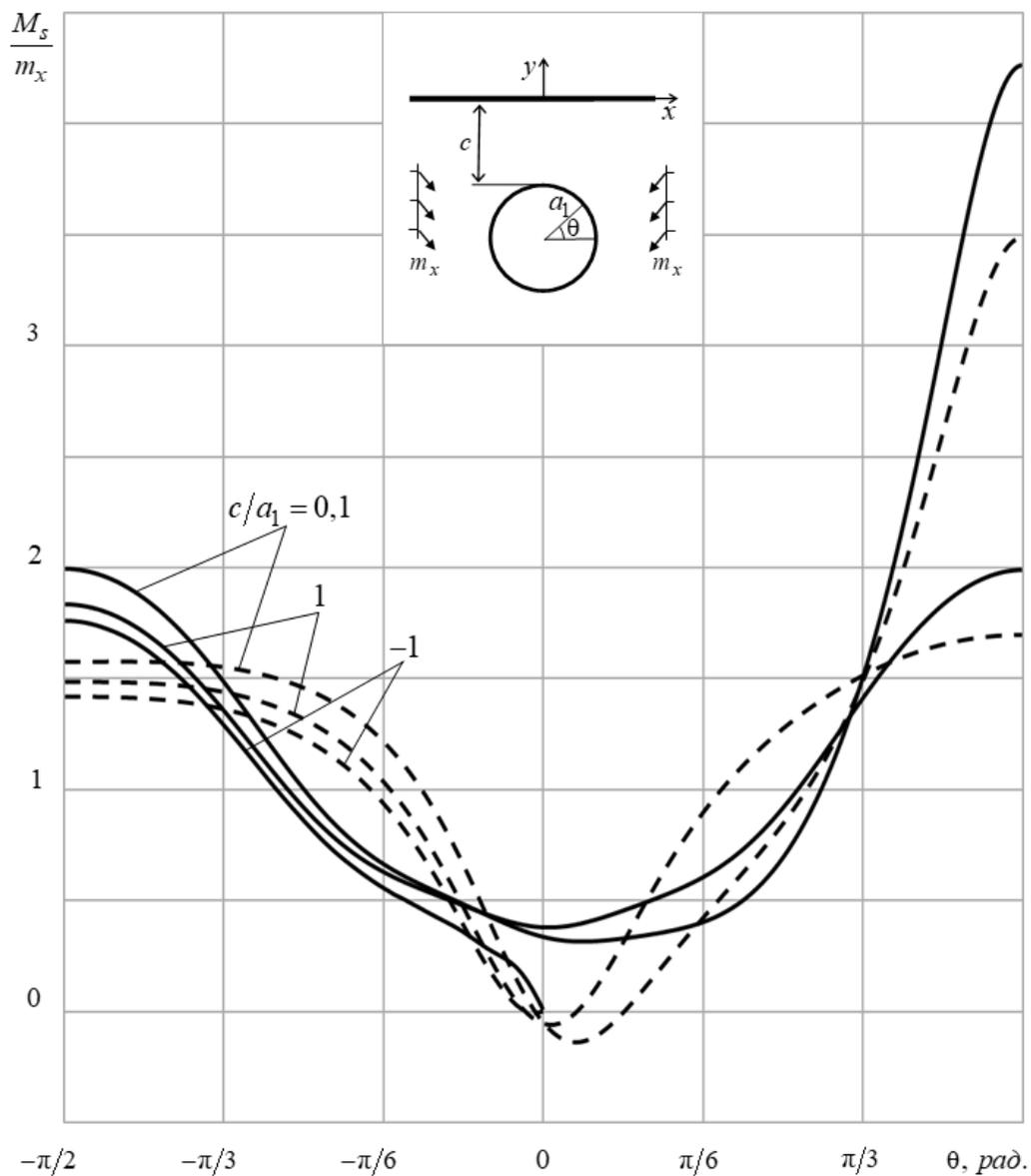


Рис. 3. Графики распределения моментов M_s/m_x около контура кругового отверстия в полуплоскости для некоторых значений c/a_1 . Сплошные линии относятся к материалу ЭМ1, штриховые – к материалу ЭМ2

Как следует из данных таблицы 2 и рисунка 3, с приближением отверстия к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычки и прямолинейной границы вблизи перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в остальных точках. Выход отверстия на границу полуплоскости резко снижает значения моментов около прямолинейной границы в зоне выхода.

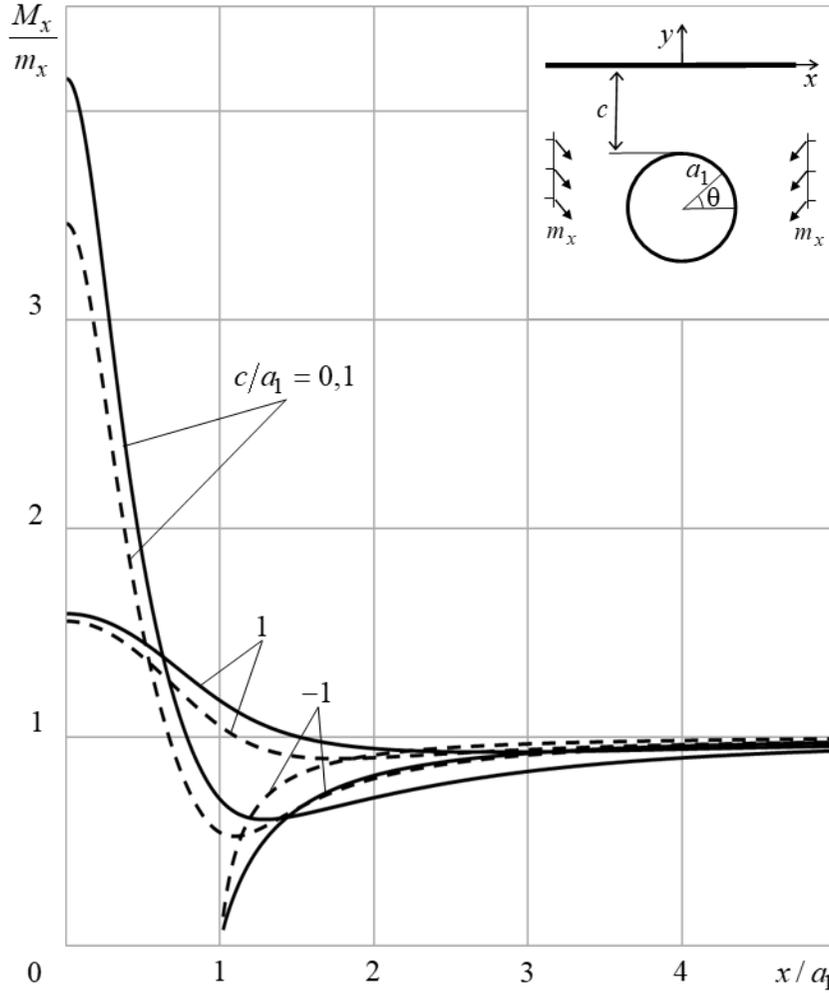


Рис. 4. Графики распределения M_x/m_x по отрезку прямойлинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений c/a_1 . Сплошные и штриховые линии относятся к полуплоскости из материалов M1 и M2 соответственно

В таблице 3 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из различных материалов с круговым отверстием радиуса a_1 и вертикальной краевой трещиной из контура отверстия длины $l_2 = a_1$ в перемычке (рис. 5), с точностью до множителя m_x в зависимости от c/a_1 , где c – длина перемычки между вершиной трещины и границей полуплоскости, приведены значения КИМ для вершины трещины и изгибающих моментов M_x/m_x и M_y/m_x в некоторых характерных точках полуплоскости.

При этом характерными точками были $A(0, -c - 3a_1)$, $B(a_1, -c - a_1)$, $F(0, -c)$,

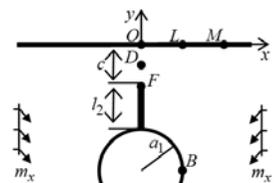


Рис. 5

$D(0, -c/2)$, $O(0, 0)$, $L(a_1, 0)$, $M(2a_1, 0)$. Вариант $c/a_1 = 0$ соответствует случаю, когда вершина трещины выходит на границу полуплоскости (касается прямолинейной границы); при $c/a_1 < 0$ трещина пересекает границу полуплоскости, то есть имеет место разрез между контуром отверстия и границей полуплоскости, например, при $c/a_1 = -0,5$ имеем разрез длины $0,5a_1$.

Таблица 3.

Значения КИМ k_1 для конца трещины и моментов M_x/m_x в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от c/a_1

Материал	Точка	Величина	c/a_1						
			0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0	-0,5
ЭМ1	F	k_1^+	1,445	1,497	1,587	1,768	2,391	–	–
	A	M_x/m_x	1,915	1,928	1,948	1,977	2,035	2,407	2,240
	B	M_y/m_x	0,395	0,392	0,387	0,380	0,369	0,303	0,134
	D	M_x/m_x	1,985	2,269	2,770	3,886	8,935	–	–
	O	M_x/m_x	1,879	2,130	2,590	3,614	8,233	–	–
	L	M_x/m_x	1,188	1,159	1,104	1,037	0,882	0,130	0,192
	M	M_x/m_x	0,952	0,936	0,903	0,860	0,788	0,457	0,543
ЭМ2	F	k_1^+	1,466	1,528	1,629	1,833	2,517	–	–
	A	M_x/m_x	1,509	1,518	1,529	1,546	1,577	1,819	1,725
	B	M_y/m_x	-0,056	-0,056	-0,057	-0,057	-0,056	-0,053	-0,053
	D	M_x/m_x	2,011	2,300	2,809	3,954	9,225	–	–
	O	M_x/m_x	1,802	2,045	2,474	3,448	7,962	–	–
	L	M_x/m_x	1,037	1,010	0,974	0,919	0,816	0,115	0,121
	M	M_x/m_x	0,916	0,901	0,883	0,861	0,825	0,606	0,677

На рисунке 6 для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения моментов M_s/m_x по контуру отверстия для полуплоскости из различных материалов, а на рисунке 7 для некоторых значений c/a_1 даны графики распределения M_x/m_x вдоль границы полуплоскости.

Как следует из данных таблицы 3, рисунка 6 и рисунка 7, приближение кругового отверстия с краевой трещиной к границе полуплоскости ведет к весьма существенному росту концентрации изгибающих моментов в точках перемычки, около контура отверстия и около прямолинейной границы вблизи перемычки, причем значения моментов в точках перемычки и на прямолинейной границе вблизи перемычки здесь вдвое больше, чем для случая приближения кругового отверстия к границе полуплоскости. Выход трещины на прямолинейную границу (случай разреза между контуром отверстия и границей полуплоскости) резко снижает значения моментов в точках перемычки и на прямолинейной границе вблизи перемычки, незначительно изменяя их в остальных точках. Незначи-

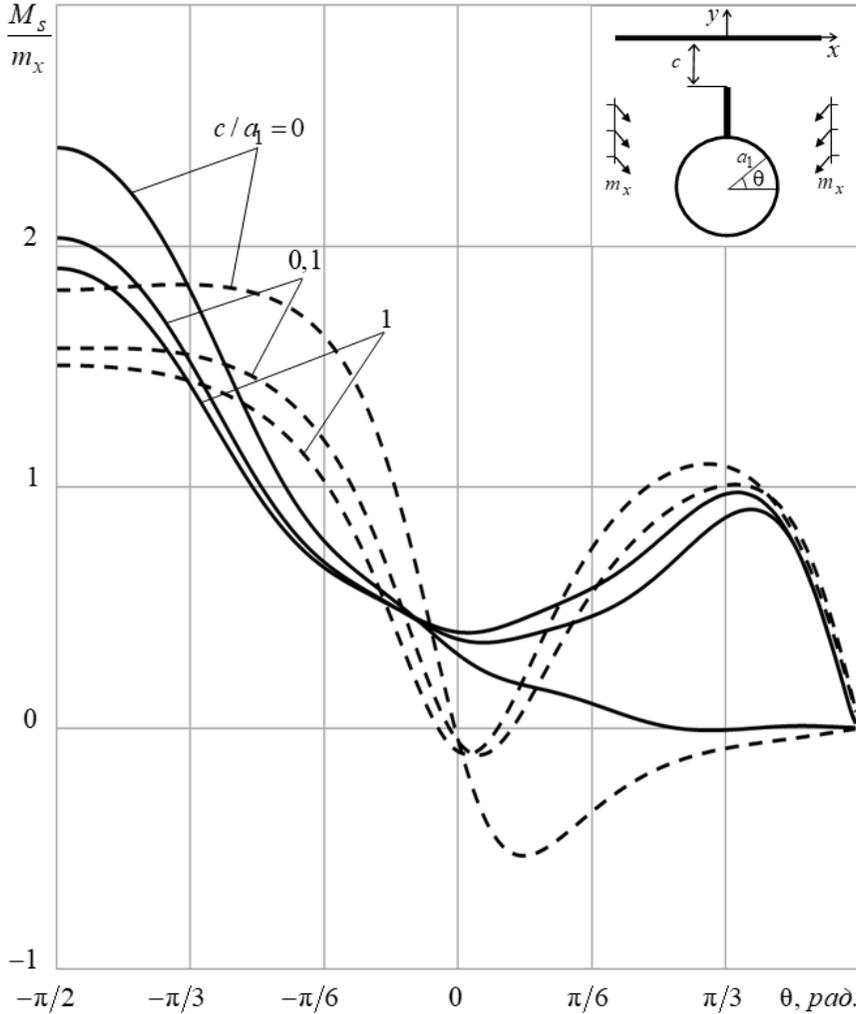


Рис. 6. Графики распределения моментов M_s/m_x около контура кругового отверстия в полуплоскости с краевой трещиной для некоторых значений отношения c/a_1 . Сплошные линии относятся к материалу ЭМ1, штриховые – к материалу ЭМ2

тельное уменьшение значений моментов по контуру отверстия и незначительное увеличение значений моментов вдоль границы полуплоскости наблюдается с уменьшением длины разреза.

Выводы. Таким образом, дано решение задачи электроупругости об изгибе многосвязной тонкой полуплоскости с произвольно расположенными относительно друг друга и относительно прямолинейной границы отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на прямолинейную границу. Для решения задачи использованы комплексные потенциалы теории изгиба электроупругих плит [12], их разложение в ряды Лорана, удовлетворение граничным условиям на контурах отверстий и на прямолинейной границе обобщенным методом

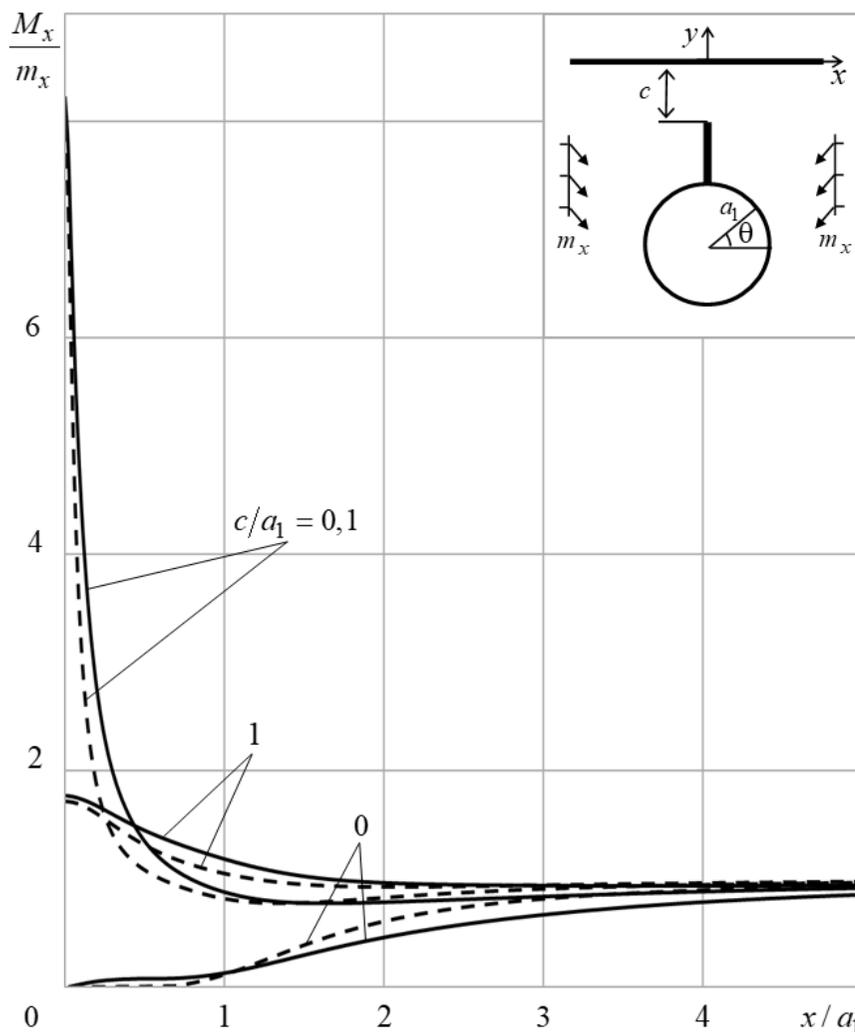


Рис. 7. Графики распределения M_x/m_x по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной для некоторых значений c/a_1 . Сплошные и штриховые линии относятся к полуплоскости из материалов M1 и M2 соответственно

наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым отверстием, в том числе выходящим на прямолинейную границу; с круговым отверстием и краевой трещиной, в том числе выходящей на прямолинейную границу (случай полуплоскости с круговым отверстием и щелью между отверстием и прямолинейной границей). Для полуплоскости с внутренними отверстиями получаемые результаты с высокой точностью совпадают с аналогичными результатами [15], найденными при решении задачи методом, в рамках которого граничные условия на прямолинейной границе удовлетворяются точно с использованием метода интегралов типа Коши.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4-1.1.2;2.3.1).

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 720 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Бичурин М.И. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов, Г. Сринивасан, С.В. Нан. – М.: Акад. естествознания, 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Nan C.-W. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions / C.-W. Nan, M.I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan // J. Appl. Phys. – 2008. – V. 103, N 3. – P. 031101.
6. Tian R. Magnetolectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers / R. Tian, J. Liu, X. Liu // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2020. – V. 33. – P. 368–380.
7. Eringen A.C. Electrodynamics of Continua I / A.C. Eringen, G.A. Maugin. – New York: Springer, 1990. – 436 p.
8. Iesan D. On the bending of piezoelectric plates with microstructure / D. Iesan // Acta Mech. – 2008. – V. 198, N. 3. – P. 191–208.
9. Xu S.-P. Bending of piezoelectric plates with a circular hole / S.-P. Xu, W. Wang // Acta Mech. – 2009. – V. 203. – P. 127–135.
10. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
11. Калоеров С.А. Исследование электромагнитоупругого состояния тонкой многоугольной плиты с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов, А.Б. Мироненко // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 1(82). – С. 5–20. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-1-5-20. – EDN:APLKBS.
12. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 37–57.
13. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
14. Калоеров С.А. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37. – DOI:10.31857/S0572329922600438. – EDN:JLIYSC.
15. Калоеров С.А. Изгиб тонкой электроупругой многосвязной полуплоскости / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов, А.Б. Мироненко // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 3(84). – С. 44–60. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-3-44-60. – EDN:JHSYGU.
16. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
17. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
18. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
19. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
20. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J.

- Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1322–1342.
21. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1343–1362.
 22. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т.43, №6. – С.56–62.
 23. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – V. 41. – P. 329–338.

S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov

Solving the electroelasticity problem of bending a half-plane with arbitrary holes and cracks.

Using the complex potentials of the bending theory of thin electroelastic plates, the problem of bending a half-plane with holes arbitrarily positioned relative to each other and relative to a rectilinear boundary is solved. In this case, the functions holomorphic outside the holes are decomposed into Laurent series, and the functions holomorphic in the lower half-planes are selected as functions holomorphic outside the imaginary symmetric contours in the upper half-planes. The determination of the coefficients of the series using the generalized least squares method is reduced to solving an overridden system of linear algebraic equations. Numerical studies have been carried out for a half-plane with a circular hole, including one outputting to a rectilinear boundary, for a half-plane with a circular hole and an edge crack from its contour, including one outputting to a rectilinear boundary. The regularities of changes in the electroelastic state of the plate depending on the geometric characteristics of holes and cracks are investigated.

Keywords: *thin piezo half-plane, holes, cracks, complex potentials, generalized least squares method, bending moment concentration, moment intensity factors.*

*Статья поступила в редакцию 05.09.2024;
доработана 14.10.2024;
рекомендована к печати 29.10.2024.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.83:622.268

doi:10.24412/0136-4545-2024-2-55-65

EDN:FEC CNW



©2024. В.А. Дрибан¹, Б.В. Хохлов², А.В. Антипенко³

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ЧАСТИЧНАЯ ОТРАБОТКА

В данной работе рассматривается предварительная частичная отработка, как один из наиболее рациональных способов управления состоянием и свойствами горного массива с точки зрения полной выемки угля и обеспечения устойчивости подземных сооружений, с размещением последних в разгруженных от горного давления зонах.

Ключевые слова: горное давление, подработанный массив, устойчивость горных выработок, управление состоянием и свойствами горного массива.

Введение. Наибольшее влияние на состояние породного массива, в область которого попадают подземные сооружения, в частности, различные горные выработки шахт (вскрывающие, подготавливающие и подготовительные), имеет сам процесс угледобычи. Характер и степень этого влияния зависят от ряда горно-геологических условий разработки, основными из которых являются глубина, угол падения, физико-механические свойства породных слоев, мощности разрабатываемых угольных пластов, а также от характеристик самих объектов воздействия – их способности к восприятию деформаций вмещающего массива

¹ Дрибан Виктор Александрович – доктор техн. наук, директор РАНИМИ, Донецк, e-mail: viktor-driban@yandex.ru.

Driban Victor Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Director, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

² Хохлов Борис Валентинович – канд. техн. наук, зав. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: hbv@bk.ru.

Khohlov Boris Valentinovich – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

³ Антипенко Антон Викторович – мл. науч. сотр. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: ministrxp@mail.ru.

Antypenko Anton Victorovich – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

горных пород. Основное внимание исследователей уделяется вопросам обеспечения эксплуатационной способности горных выработок в процессе всего срока их службы. Для этого существуют различные способы управления состоянием и свойствами горного массива (УССГМ) – напряженно-деформированным, газодинамическим, гидрогеологическим и т.д. состоянием, и прочностными, деформационными, структурными и др. свойствами, которые заключаются в искусственном их изменении в соответствующих направлениях [1–9]. УССГМ включает широкий комплекс мероприятий по воздействию на угленородный массив с целью достижения определенных результатов, а именно:

- обеспечение безопасных условий ведения очистных работ и поддержания горных выработок;
- предотвращение газодинамических явлений (ГДЯ);
- снижение влияния горных работ на состояние подземных сооружений и объектов земной поверхности;
- дегазацию и дренаж горных работ и т.д.

1. Предварительная частичная отработка. Реализация этого метода возможна при использовании частичной или полной предварительной отработки предохранительных целиков в местах проведения горных выработок. В то же время, становится ясно, что в будущем по мере развития очистных работ выработки будут находиться в деформирующемся массиве, что может привести к их повреждению во время эксплуатации. Эти опасения и неразвитость идеи формирования полей напряжений и деформаций, привели к ошибочной практике расположения объектов в области остаточного опорного давления, что негативно влияет на их эксплуатационное состояние. В качестве примера можно привести ствол № 10 шахты им. А.Г. Димитрова, который был расположен в двусторонней зоне опорного давления и за последние 30 лет потребовал семь капитальных перекреплений. Второй отрицательный момент: согласно традиционным представлениям и действующим нормативам в случае полной предварительной отработки предохранительного целика поддержание выработок относится к условиям недеформированного массива.

Проведенные исследования показывают, что это не полностью отражает картину явления. В качестве примера упомянем воздухоподающий ствол (ВПС) № 2 шахты. А.Ф. Засядько, пройденный в 2001 году на глубине 1184 м через выработанное пространство пласта *m*₃. В дальнейшем работа 16-ой восточной лавы, расположенной за пределами отработанного предохранительного целика на расстоянии от оси ствола больше, чем 350 м, вызвала нарушение крепления в интервале глубин 1176–1188 м.

Таким образом, использование предложенного метода требует четких и определенных знаний о формировании поля напряжений и деформаций в массиве горных пород в области влияния очистных выработок от поверхности земли до максимальных глубин расположения объектов.

Способ предварительной отработки проводится в три этапа:

- 1) проведение лавы, которая разгружает от горного давления массив пород,

Предварительная частичная отработка

в котором, в дальнейшем, будет проводиться выработка (рис. 1а);

2) проведение выработок в разгруженной зоне;

3) ведение очистных работ вблизи отработанной площади в зоне их влияния на ствол (рис. 1б).

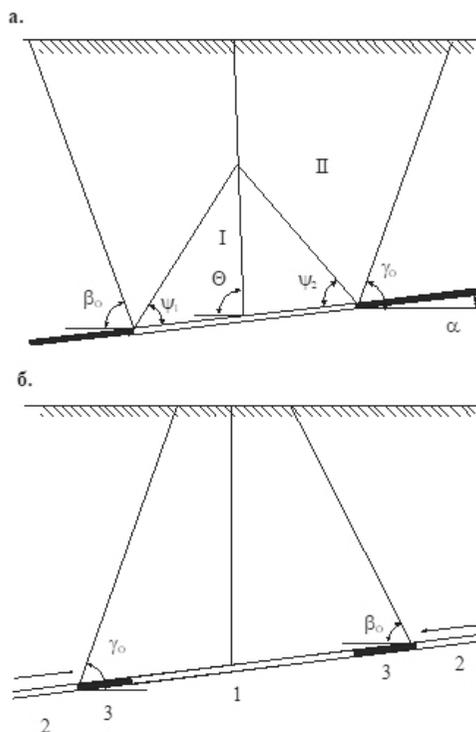


Рис. 1. Этапы осуществления предварительной отработки целиков

Указанные этапы имеют свои особенности с точки зрения проведения геомеханических исследований, т. е. изучение процесса сдвижений и деформаций подработанного массива горных пород на первом этапе предыдущей отработки имеет целью определение характера и величин сдвижений, которые не реализовались (по сравнению с полной подработкой), и деформаций, а также их воздействие в будущем.

Кроме того, проведение всего комплекса исследований по одному объекту затруднено из-за значительной продолжительности предыдущей отработки. Поэтому желательно, чтобы исследования проводились в соответствии с выделенными этапами.

Полнота изучения геомеханических процессов также различается на отдельных этапах предыдущих отработок пластов: наиболее исследована на первом этапе отработки и наименее – на третьем.

Подработанный массив в месте дальнейшего проведения выработки в ходе первого этапа предварительной отработки пласта, согласно современным геоме-

ханическим представлениям, находится в области полных сдвижений I и зависаний (наибольшего прогиба) II (рис. 1а). В случае полной подработки массива (при развитии зоны полных сдвижений до земной поверхности) выработка находится лишь в I зоне. При современных глубинах разработки в Донбассе, протяженные объекты (например, стволы) обычно находятся в двух областях сдвижения.

При второй схеме отработки (рис. 1б) между разгрузочной лавой 1 и последующими очистительными выработками 2 остаются опорные целики 3 в пределах общего предохранительного целика, построенного по действующим нормативам.

Эффективность предварительной отработки пластов (при любой схеме ее осуществления) определяется оптимальностью выбранных параметров. Поэтому основной целью исследований при предыдущей отработке предохранительных целиков является определение оптимального соотношения размеров заранее отработанных площадей, остающихся в целиках, и объема конструктивных мер защиты выработок от влияния последующих очистных работ.

Основой решения поставленной задачи с позиций геомеханики является расчет сдвижений и напряженно-деформированного состояния (НДС) массива пород на разных этапах предварительной отработки. Возможны три пути решения указанных задач:

- 1) аналитический;
- 2) экспериментальный;
- 3) на основе нормативно-методических документов.

Основным принципом должна быть комплексность методов исследований. Учитывая сложность, многоплановость и продолжительность осуществления всех этапов частичной отработки предохранительных целиков, за основу исследований целесообразно принять аналитический метод на базе разработанной модели формирования НДС массива горных пород.

Возможны две схемы частичной предварительной подработки:

- 1) с последующей полной отработкой целика;
- 2) с последующей неполной отработкой.

При первой схеме отработки проводится разгрузочная лава, и после проведения выработки полностью обрабатывается оставшаяся часть целика.

2. Постановка задачи. Для определения оптимальных параметров предварительной частичной отработки предохранительных целиков необходимо знать разницу между НДС массива, возникающую при отработке разгрузочной лавы, и НДС массива при отработке лав после проведения ствола.

Разработанная аналитико-экспериментальная модель [10–18] позволяет решить эту сложную задачу.

Задача сводится к поиску НДС при соприкосновении двух упругих полуплоскостей при условии, что на общей границе есть шесть щелей $(-a_3, -b_3)$, $(-a_2, -b_2)$, $(-a_1, -b_1)$, (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) (в дальнейшем это множество обозначим M); трение на границе отсутствует и при этом для краев щелей имеется тенденция к нормальному растяжению γH как в верхней, так и в нижней полу-

плоскостях.

Величины b_1 определяются ниже исходя из геометрических размеров разреза, величины давления и деформационных характеристик массива.

Группа граничных условий следующая:

- $\tau_{xy1} = \tau_{xy2} = 0$ на всей оси OX ;
- $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = -\gamma H$ на M ;
- $\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$, $U_{y1} = U_{y2}$ на всей оси OX за M .

Используя граничные условия для определения напряжений в массиве при решении первой задачи, получаем такие выражения:

$$\begin{cases} \sigma_{yy}(xx) = \gamma H \operatorname{Re} \left[(1 \pm A) \sqrt{\prod_{i=1}^3 \frac{z^2 - b_i^2}{z^2 - a_i^2} - 1} \right] \\ \tau_{xy} = \gamma H J m \left[A \sqrt{\prod_{i=1}^3 \frac{z^2 - b_i^2}{z^2 - a_i^2} - 1} \right] \end{cases}, \quad (1)$$

где

$$A = \frac{z(z - \bar{z})}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{z^2 - b_i^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{z^2 - a_i^2} \right),$$

а значения b_i находятся из решения системы интегральных уравнений

$$(-1)^{i-1} \int_{b_i}^{a_i} \sqrt{-\prod_{i=1}^3 \frac{t^2 - b_i^2}{t^2 - a_i^2}} dt = \frac{E m K_{im}}{4(1 - \nu^2)^2 \gamma H K_0}. \quad (2)$$

Чтобы получить распределение НДС во всем подработанном массиве достаточно, как показывают расчеты, однократного применения цикла алгоритма Шварца согласно граничным значениям на земной поверхности.

Обозначая через $P(x)$ и $t(x)$ нормальные и касательные напряжения, возникающие на поверхности при решении (1), можно определить напряжения, которые необходимо отнять:

$$\begin{cases} \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{P}(z) + y (|z| \bar{P}(z) - i \bar{t}(z))] e^{-|z|y - izx} dx \\ \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |z|y) \left[\bar{P}(z) - \frac{i \bar{t}(z) |z| (|z|y - 2)}{z} \right] e^{-|z|y - izx} dx, \\ \tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [i \bar{P}(z) y z + \bar{t}(z) (1 - |z|y)] e^{-|z|y - izx} dx \end{cases}, \quad (3)$$

где \bar{P} , \bar{t} – трансформанты преобразований Фурье нормальных и касательных напряжений $P(x)$ и $t(x)$.

Итак, разница между НДС массива для случая одиночной разгрузочной лавы и дальнейшего проведения лав после проходки ствола даст искомое НДС.

3. НДС массива горных пород после отработки повторных лав. Если после проходки выработок в заранее разгруженном массиве обеспечить полную подработку земной поверхности, то, вероятнее всего, массив горных пород будет находиться, в основном, в области деформаций вертикального сжатия. Однако, по мере достижения этого конечного положения, массив испытает ряд изменений НДС в процессе ведения очистных работ. При этом, в ряде случаев, вертикальные деформации, как растяжения, так и сжатия, могут достичь весьма больших значений, что требует применения конструктивных мер защиты крепи. Для оценки этих изменений и выявления оптимальных размеров разгрузочных лав была проведена серия расчетов для следующих условий:

- длина разгрузочной лавы – 200; 300; 400 м;
- глубина очистных выработок – 600; 800; 1000 м;
- мощность пласта 1 м;
- усредненный модуль упругости массива равен 18 ГПа; коэффициент Пуассона 0,25.

Рассмотрены следующие схемы:

- отработка разгрузочной лавы с длиной выемочного столба, обеспечивающего полную отработку;
- симметричное относительно центральной оси ведение очистных работ двумя лавами длиной 200 м каждая.

На рисунке 2 представлены вертикальные деформации при реализации указанных схем.

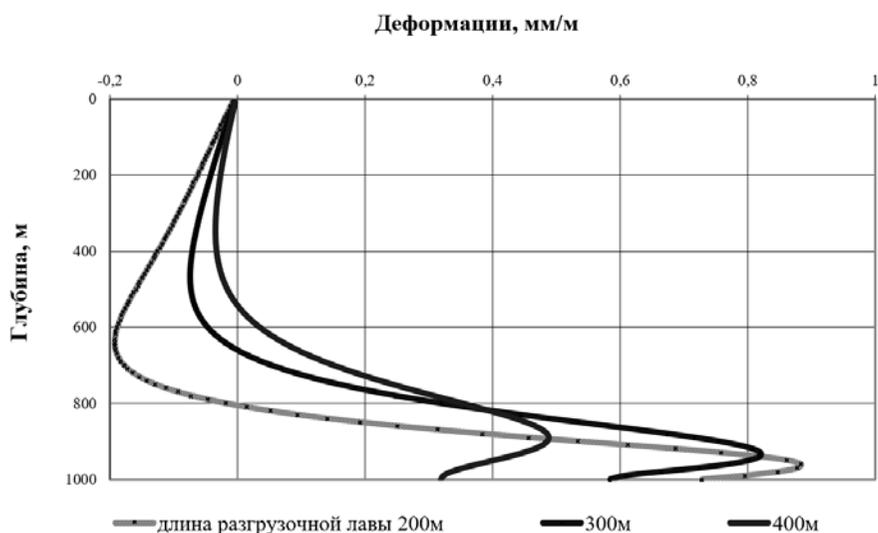


Рис. 2. Графики вертикальных деформаций в зависимости от длины разгрузочной лавы при первичном оконтуривании (1000 м)

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

Вертикальные деформации распределяются с большой неравномерностью. Для глубины 1000 м и двухсотметровой разгрузочной лавы деформации изменяются от минус $0,89 \cdot 10^{-3}$ до плюс $0,22 \cdot 10^{-3}$, тогда как средние вертикальные деформации по стволу равны минус $0,12 \cdot 10^{-3}$, то есть в этих условиях массив в целом сожмется всего на 11 мм. Максимальные деформации растяжения примерно равны для различных глубин разработки и составляют плюс $0,22 \cdot 10^{-3}$; $0,09 \cdot 10^{-3}$; $0,025 \cdot 10^{-3}$ при длине разгрузочной лавы 200; 300; 400 м соответственно. Максимальные деформации сжатия при варьировании длин разгрузочных рядов и глубин изменяются от $0,4 \cdot 10^{-3}$ до $0,9 \cdot 10^{-3}$. Однако, при разгрузочной лаве длиной 400 м эти значения стабилизируются и составляют примерно $0,5 \cdot 10^{-3}$ для всех глубин.

При реализации всех этапов предварительной отработки большая часть массива испытывает деформации растяжения, возникновение которых обусловлено значительной неравномерностью процесса деформации по глубине. Ниже будут приведены результаты шахтных и инструментальных наблюдений, подтверждающие этот вывод. Возникновение существенной области растяжения описать не удастся, ни исходя из общих представлений о процессе сдвижения массива над отработанным пространством, ни опираясь на действующие нормативные документы.

Анализируя распределение вертикальных деформаций, массив можно разбить на две области – растяжения и сжатия. Размеры этих областей зависят как от длины разгрузочной лавы, так и от глубины. Однако, при длине разгрузочной лавы 400 м наступает некоторая стабилизация – формируется область сжатия 450–480 м от пласта вверх. При этом наиболее опасным участком является двухсотметровый интервал выше разрабатываемого пласта.

При дальнейшем ведении работ вторичными лавами графики распределения вертикальных деформаций постепенно смещаются в область сжатия. На рисунке 3 представлены распределения деформаций в массиве ($E = 18$ ГПа, коэффициент Пуассона 0,3) при длине разгрузочной лавы 200 м и ширине отработанного пространства 600, 1000 и 1800 м.

Как показывают расчеты, влияние лав, оконтуривающих целики, ощущается на расстоянии существенно большем, чем предполагалось действующими нормативными документами, основанными на имеющихся представлениях о формировании НДС массива горных пород. Так, даже при размерах выработанного пространства 1800 м при километровой глубине, что соответствуют условиям полной подработки, еще присутствуют дополнительные сжимающие деформации. Это свидетельствует о гораздо большем «дальнодействии» очистных выработок по сравнению с существующими представлениями.

Например, восточный воздухоподающий ствол № 2 шахты им. А.Ф. Засядько глубиной 1245 м пройден буровзрывным способом в 2000 - 2001 гг. Ствол охраняется предохранительным целиком, построенным согласно действующим «Правилам охраны ...». В пересекаемых осью ствола угольных пластах есть ста-

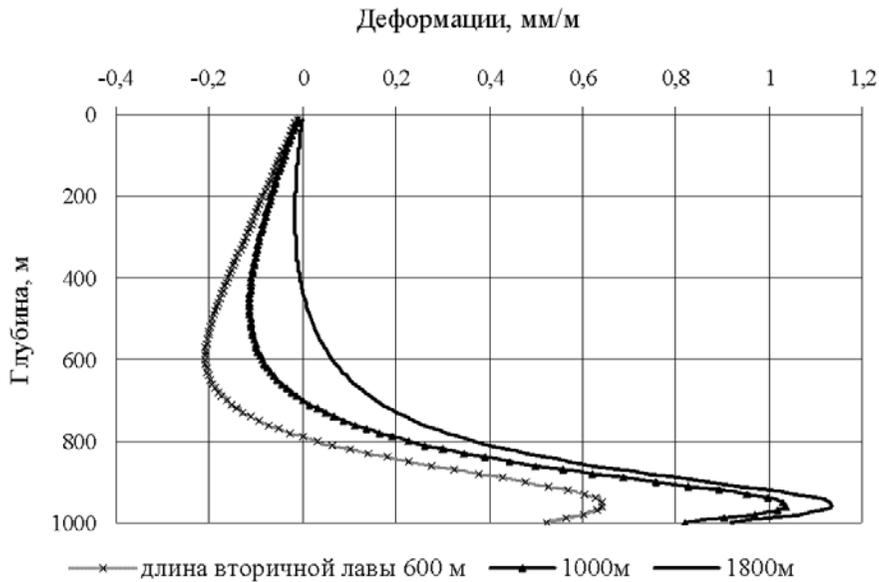


Рис. 3. Графики вертикальных деформаций до глубины 1000 м при развитии очистных работ

рые очистные работы: по пласту n_1 работы проводились в 1960 - 64 гг. шахтой «Бутовская» ПО Макеевуголь, а по пласту m_3 в 1997 - 2000 гг. шахтой им. А.Ф. Засядько (12-я - 15-я восточные лавы). Выкопировка из плана горных работ по пласту m_3 представлена на рисунке 4.

В 2002 г., после завершения строительства восточного ствола № 2 шахты им. А.Ф. Засядько, со стороны падения пласта m_3 на расстоянии 350 м от оси ствола была отработана 16-я восточная лава шахты им. А.Ф. Засядько, которая вызвала активизацию геомеханических процессов в массиве горных пород над старыми очистными выработками, что противоречило действующим представлениям. Характер выявленных нарушений свидетельствует о значительных радиальных и вертикальных нагрузках на крепление ствола, превышающих предел ее прочности. Анализ геомеханической ситуации позволил установить, что причиной нарушений стало влияние очистных выработок, проводимых по пласту m_3 .

Расчеты изменения напряженного состояния приствольного массива при ведении очистных выработок по пласту m_3 (рис. 5), выполненные на базе разработанной выше модели, показали следующее. При работе 16-ой восточной лавы в районе пересечения ствола с выработанным пространством (глубина 1185,5 м) в массиве возникли дополнительные напряжения сжатия приблизительно 0,6 - 0,8 МПа, что не могло не привести к нарушениям установленного крепления (несущая способность порядка 0,5 МПа). В то же время, в районе пересечения с выработанным пространством пласта n_1 (глубина 463,5 м), массив подвергается незначительным растягивающим напряжениям (менее 0,1 МПа) и осадочные швы легко справляются со своей задачей.

Предварительная частичная обработка

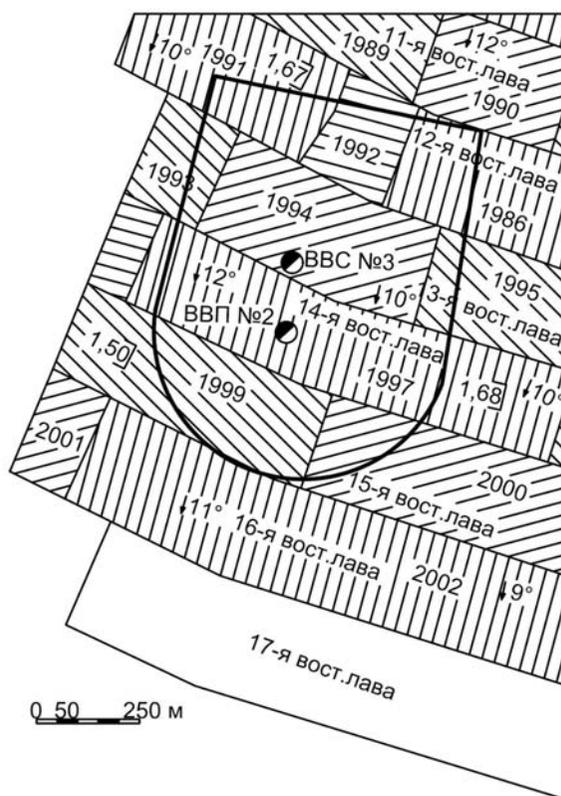


Рис. 4. Выкопировка из плана горных работ по пласту тз

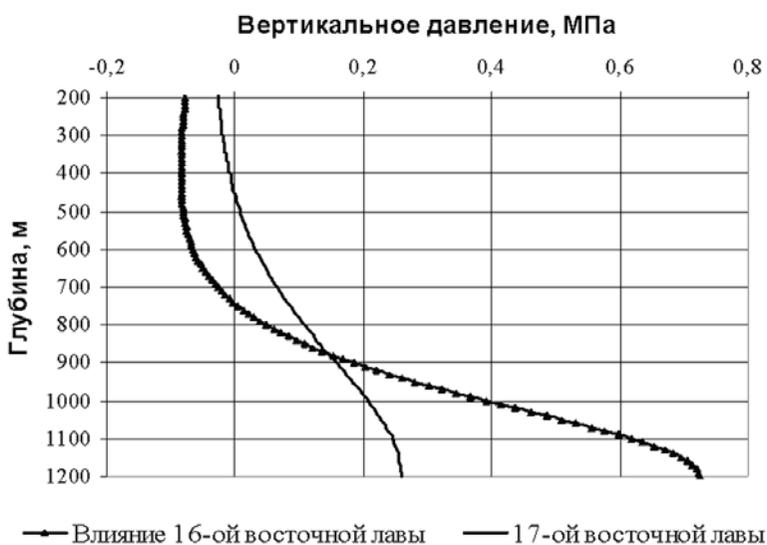


Рис. 5. Распределение дополнительных вертикальных напряжений вдоль оси ствола

Выводы. Таким образом, в результате проведенных исследований:

1. Дано аналитическое решение задачи о распределении сдвижений и деформаций при предыдущей отработке угольных пластов.

2. Предварительная отработка может осуществляться по двум схемам: с дальнейшей полной выемкой и с оставлением опорных целиков. Целесообразность применения той или иной схемы диктуется как горно-геологическими, так и технико-экономическими условиями.

3. Разработан метод расчета НДС массива горных пород при обеих схемах и установлены их оптимальные параметры. В частности, для широкого диапазона глубин (600–1400 м) при использовании схемы с полной выемкой, оптимальной является длина лавы 400 м, которая обеспечивает минимальность конструктивных мер защиты.

4. При проведении предварительной отработки и последующей выемки угля массив деформируется неоднородно. При этом верхняя часть массива над пластом подвергается деформациям растяжения в пределах от $0,2 \cdot 10^{-4}$ до $0,2 \cdot 10^{-3}$, а нижняя часть (от 200 до 400 м выше отработанного пласта) – деформациям сжатия до минус $1,4 \cdot 10^{-3}$ в зависимости от параметров отработки, деформационных и физико-механических свойств массива.

5. Разработанный метод расчета позволяет целенаправленно управлять НДС массива и определять объемы и места введения необходимых конструктивных мер защиты.

Исследования проведены в рамках выполнения фундаментальной научно-исследовательской работы FRSR – 2023-0006 «Исследование устойчивости и трансформации напряженно-деформированного состояния обводненных массивов горных пород».

1. *Driban V.* On optimal parameters of room-mining technique of coal seams / V. Driban // New Mine Surveying Law Regulations. – Sunny Beach, Bulgaria. – 2001. – P. 245–259.
2. *Дрибан В.А.* Обеспечение устойчивости глубоких вертикальных стволов в районах геологических нарушений / В.А. Дрибан, А.О. Севрюков // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2012. – № 11. – С. 288–295.
3. *Кулибаба С.Б.* Натурные исследования вертикальных сдвижений подрабатываемого горного массива / С.Б. Кулибаба // Маркшейдерский вестник. – 2019. – № 1 (128). – С. 46–51.
4. *Голдин С.В.* Аварийные ситуации в районе расположения устьев вертикальных стволов / С.В. Голдин // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2010. – № 6. – С. 313–322.
5. *Дрибан В.А.* Активизация проявлений горного давления в капитальных и магистральных выработках в условиях слабых вмещающих пород / В.А. Дрибан, В.С. Пиховкин, С.В. Голдин, В.А. Чемакин // Уголь Украины. – 2004. – № 9. – С. 17–20.
6. *Кулибаба С.Б.* Оседание земной поверхности над междулавными целиками / С.Б. Кулибаба, С.А. Бузмакова // Труды РАНИМИ. – 2019. – № 8 (23). – С. 242–248.
7. *Дрибан В.А.* Определение оптимальных параметров камерной отработки угольных пластов / В.А. Дрибан // Проблеми гірського тиску. – 2001. – № 5. – С. 90–108.
8. *Кулибаба С.Б.* Мониторинг состояния вертикальных горных выработок / С.Б. Кулибаба, В.Ф. Филатов, Б.В. Хохлов // Уголь Украины. – 2013. – № 5. – С. 25–27.
9. *Канин В.А.* Расширение границ защитного действия опережающей отработки угольных пластов / В.А. Канин, Е.Д. Ходырев, П.В. Галемский // Маркшейдерский вестник. – 2010. – № 6. – С. 9–13.

10. Дрибан В.А. О напряженно-деформированном состоянии массива горных пород / В.А. Дрибан // Проблемы гірського тиску: зб. наук. праць. – 1999. – № 2. – С. 89–103.
11. Дрибан В.А. Общие закономерности формирования напряженно-деформированного состояния массива / В.А. Дрибан // Проблемы гірського тиску. – 2003. – № 10. – С. 198–210.
12. Хохлов Б.В. История развития представлений о мерах охраны и поддержания технических скважин / Б.В. Хохлов // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2011. – № 9 (1). – С. 37–48.
13. Кузнецов Г.Н. Экспериментальные методы исследования вопросов горного давления / Г.Н. Кузнецов // Труды совещания по управлению горным давлением. – М.: Углетехиздат, 1948. – С. 90–149.
14. Канин В.А. Определение размеров зон ПГД при подработке или надработке источников их формирования / В.А. Канин, Ю.А. Пивень, А.А. Пашенко // Труды РАНМИ. – 2018. – № 5 (20). – С. 44–54.
15. Дрибан В.А. Напряженно-деформированное состояние массива горных пород при ведении очистных работ / В.А. Дрибан // A Guide to international Society for mine surveying (ISM) XII international congress, Fuxin-Beijing, China. – Fuxin-Beijing, 2004.
16. Driban V. On the stability of structurally heterogeneous rock mass / V. Driban // 5-th Anniversary International Scientific Conference Modern Management of Mine Producing, Geology and Environmental Protection SGEM 2005. – P. 559–567.
17. Driban V. Shaft massif and shaft lining stability // 20th World Mining Congress Mining and Sustainable Development. – Tehran, Iran. – 2005. – P. 669–672.
18. Driban V. Mine working stability criterion / V. Driban // 6-th International Scientific Conference Modern Management of Mine Producing, Geology and Environmental Protection SGEM. – Albena, Bulgaria. – 2006. – P. 151–160.

V.A. Driban, B.V. Khokhlov, A.V. Antypenko

Preliminary partial processing.

This paper examines preliminary partial mining as one of the most rational methods of managing the state and properties of a rock massif in terms of complete coal extraction and ensuring the stability of underground structures, with the latter being placed in zones relieved from rock pressure.

Keywords: *rock pressure, underworked massif, stability of mine workings, management of the state and properties of the rock massif.*

*Статья поступила в редакцию 15.08.2024;
доработана 25.09.2024;
рекомендована к печати 08.10.2024.*

УДК 622.831, 622.23.02
doi:10.24412/0136-4545-2024-2-66-73
EDN:FREIRZ



©2024. Ф.М. Голубев¹, А.А. Глухов², В.А. Анциферов³

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГНОЗА ЗОНЫ РАЗУПЛОТНЕНИЯ ПОРОД НАД ОТРАБОТАННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СЕЙСМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В статье рассмотрены признаки детектирования зон разуплотнения при выполнении обработки результатов сейсморазведки различными методами. Определены особенности интерпретации результатов сейсморазведки участков техногенно измененного массива как на сейсмических разрезах, полученных методом общей глубинной точки, так и на изображениях среды, полученных методом дифрагированных волн.

Ключевые слова: деформации горного массива, добыча угля подземным способом, зона разуплотнения, математическая модель, сейсморазведка.

Введение. Добыча угля подземным способом приводит к изменению прочностных свойств горного массива, и, как следствие, к активизации геомеханических и геодинамических процессов [1], которые, в свою очередь, представляют опасность как для действующих угледобывающих предприятий, так и для объектов поверхности. Прогноз развития данных процессов требует определения параметров изменения горного массива, что может быть реализовано с использованием сейсморазведки. Для возможности качественного анализа результатов сейсморазведки, необходимо определить признаки детектирования зон разуплотнения, сформировавшихся в результате отработки очистных горных выработок, при выполнении обработки результатов сейсморазведки различными ме-

¹Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

²Глухов Александр Александрович – доктор техн. наук, зам. директора по науч. работе РАНМИ, Донецк, e-mail: glukhov1964@yandex.ru.

Glukhov Aleksandr Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Deputy Director for Science, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

³Анциферов Вадим Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. эколого-геофизических исследований РАНМИ, Донецк, e-mail: antsiferov_a@mail.ru.

Antsiferov Vadim Andreevich – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Ecological and Geophysical Research.

тодами. Данная задача может быть решена при помощи математического моделирования.

1. Положения теории и постановка задачи. Для получения адекватных результатов моделирования необходимо, чтобы при имитации процессов, происходящих после отработки пласта лавой, над ней предполагалось формирование геомеханических зон с соответствующими действительности геометрическими и физическими параметрами. Проведем анализ существующих представлений о формировании сдвижений над одиночной лавой. Одной из базовых гипотез разрушения горного массива является гипотеза Г.Н. Кузнецова, в которой утверждается, что при управлении кровлей полным обрушением непосредственно над выработанным пространством образуются две зоны: первая – прилегающая к выработанному пространству зона беспорядочного обрушения пород, вторая – зона упорядоченного обрушения. Во второй зоне блоки слоев образуют многозвенную шарнирную систему.

На рисунке 1 представлена схема сдвижений толщи пород вокруг отработываемой лавы, автором которой является Зоря Н.М. [1]. На схеме предложены следующие обозначения: 1 – линия максимальных оседаний; 2 – граница зоны опорного давления; 3 – линия максимальных давлений; θ – угол максимального оседания пород; I – зона обрушенных и уплотненных пород; II – зона полных сдвижений; III – зона наибольших прогибов слоев с возможным образованием полостей и раскрытых трещин; IV – зона плавного прогиба без нарушения сплошности слоев; V – зона опорных давлений в кровле пласта; VII – зона разгрузки [1].

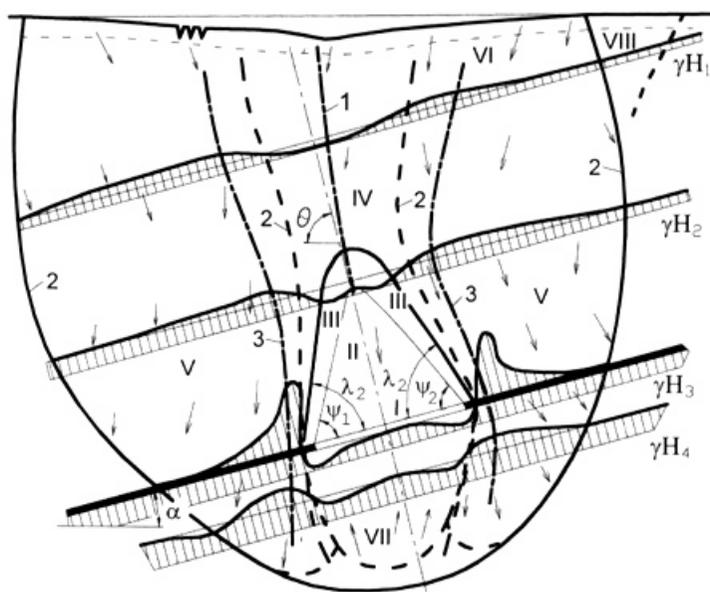


Рис. 1. Схема сдвижения толщи горных пород [1]

Согласно исследованиям А.А. Борисова [2], при выемке пологопадающих и наклонных угольных пластов с обрушением кровли в сдвигающемся массиве по характеру обрушения можно выделить три основные зоны:

- зона беспорядочных обрушений, в которой происходит интенсивное дробление горных пород;
- зона прогибов с разрывом сплошности, которая расположена над зоной беспорядочных обрушений и где происходит образование разломов без нарушения упорядоченности блоков;
- зона прогибов без разрыва сплошности, которая расположена над зоной прогибов с разрывом сплошности и где отсутствует разрушение целостности покрывающей толщи.

В пределах первых двух указанных зон, под углами полных сдвижений формируется область, в которой расположен участок массива, претерпевший наибольшие изменения в результате подработки. Размеры такой зоны зависят от ряда факторов, таких как вынимаемая мощность пласта, свойства основной и непосредственной кровли, глубина ведения горных работ, угол падения и др. Учитывая исследования С.А. Черниковой, Е.И. Питаленко, Д.А. Илюхина и др. [3–5] с удалением от очистной выработки количество разломов снижается, и на расстоянии 60–70 мощностей пласта в условиях Донбасса трещины практически исчезают.

В результате анализа литературных источников можно сделать вывод, что в сечении по вертикали участок массива над лавой, претерпевший наибольшие изменения упругих свойств, возможно рассматривать, как имеющий форму трапеции. Верхнее основание трапеции ограничивается областью распространения зоны водопроводящих трещин, а боковые стороны формируются под углами полных сдвижений.

Для условий Донбасса при отработке типовой лавы длиной 200 метров и мощностью пласта 1 метр, высота описанной зоны составит 70 метров. В таком случае, площадь сечения зоны разломов, описываемой в форме трапеции, будет составлять 10570м^2 .

2. Метод моделирования и обработки полученных результатов. Модели угленородного массива представляют собой наборы породных слоев (рис. 2). В верхней части разреза до глубины 120 м размещается алевролит, в котором скорости распространения продольных (V_p) и поперечных (V_s) волн составляют, соответственно, 3250 м/с и 1800 м/с. Ниже залегает более плотный слой алевролита мощностью 300 м ($V_p = 3500$ м/с, $V_s = 1900$ м/с). На глубине 610 м от свободной поверхности размещается плотный песчаник ($V_p = 3700$ м/с, $V_s = 2200$ м/с).

Модель № 1 не содержит зоны разуплотнения над отработанным пластом. Она используется в качестве эталонной. В моделях № 2 и № 3 зоны разуплотнения имеют протяженность 200 м и высоту 70 м, и, соответственно, размещаются на глубинах 540 м и 250 м от поверхности. Скорости распространения сейсмических волн в них на 10 % ниже, чем во вмещающей породе. При разработке

моделей использованы значения скоростей распространения сейсмических волн в породах на участке «Кальмиусский рудник» шахты им. А.Ф. Засядько [6].

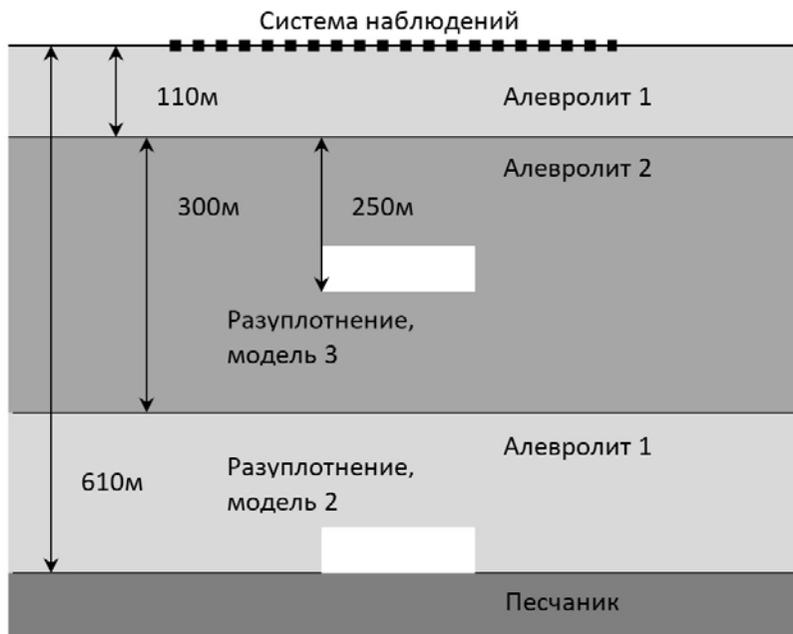


Рис. 2. Схема моделирования углепородного массива

При выполнении исследований моделировалась центральная система наблюдений, в которой расстановка сейсмоприемников (СП) не перемещается в процессе съемки (рис. 3). Система предназначена для наиболее полной и достоверной разведки нарушений с неизвестным направлением простирания и рекомендуется при использовании аппаратуры с неограниченным числом каналов для прослеживания нарушений любой дальности и во всем диапазоне углов простирания нарушений. Она характеризуется повышенной кратностью, обладает свойствами как правосторонней, так и левосторонней системы наблюдений, позволяет распознавать регулярные помехи за счет большой протяженности профиля.

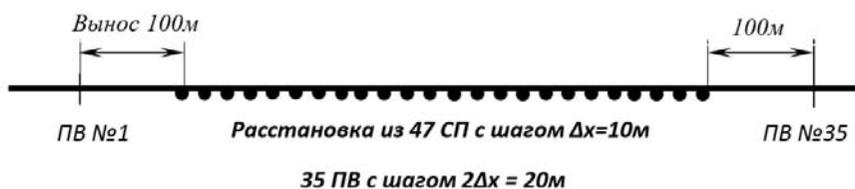


Рис. 3. Используемый профиль с центральной системой наблюдений

В зависимости от дальности прогноза шаг расстановки сейсмоприемников Δx может варьироваться. В рассматриваемом случае для уверенного прогноза на глубину до 600 м он принят равным 10 м. Используется 47 каналов. Применяется вынос 100 м. Шаг перемещения пункта возбуждения (ПВ) принят равным 20 м. Всего моделируется 35 ПВ. Такая конфигурация системы наблюдений обладает симметричностью, которая желательна при проведении реальных экспериментов.

Для расчета сейсмограмм используется программный модуль моделирования сейсмических волновых полей [7].

Подобно тому, как на практике выполняется последовательное возбуждение сейсмических волн в точках расположения ПВ, при моделировании выполняется последовательный расчет сейсмограмм для соответствующих положений источников. Каждая сейсмограмма состоит из 47 сейсмотрасс (по числу СП). Затем сейсмограммы обрабатываются. Используется метод общей глубинной точки (ОГТ) [8] и метод дифрагированных волн (МДВ) [9]. В результате обработки выделяются области разуплотнения, положения которых затем сравниваются с данными модели.

Граф обработки по методу отраженных волн по классической схеме ОГТ в данном случае не включал расчет распределения скоростей распространения сейсмических волн по глубине, поскольку данное распределение известно из модели. Поскольку в модели не присутствовала зона малых скоростей, то не было необходимости в вводе статических поправок. Расчет кинематической поправки, выполнение суммирования по ОГТ и получение сейсмических разрезов выполнялось по стандартной схеме [8]. При обработке МДВ выполнялась нормировка сейсмических записей и последующий расчет сейсмических изображений на основе использования метода суммирования [9].

3. Полученные результаты и их обсуждение. На рисунке 4 представлены временные сейсмические разрезы ОГТ, полученные на эталонной модели и на моделях с различным положением зоны разуплотнения. Использованы SH волны. Перед суммированием выполнялась нормировка сейсмотрасс без автоматической регулировки уровня записи. Используемое при суммировании значение скорости составляет 1850 м/с.

На сейсмических разрезах четко прослеживаются три отражающие границы, соответствующие расположению пород модели. Зоны разуплотнения имеют локальный характер, поэтому генерируют характерные дифрагированные волны на разрезах ОГТ, годографы которых представляют собой гиперболы. Вершина первой из них располагается на расстоянии $R = V_{\text{ОГТ}} \times t$ от соответствующей средней точки профиля наблюдений. Хорошо прослеживаются и отраженные от аномалии волны. Кроме этого, на модельных сейсмических разрезах наблюдается целый набор волн с гиперболическими годографами, располагающимися за наблюдаемой первой дифрагированной волной.

Рассмотрим подробнее их происхождение. На рисунке 5 представлены картины распределения колебаний волнового поля, рассчитанные для модели № 3 для

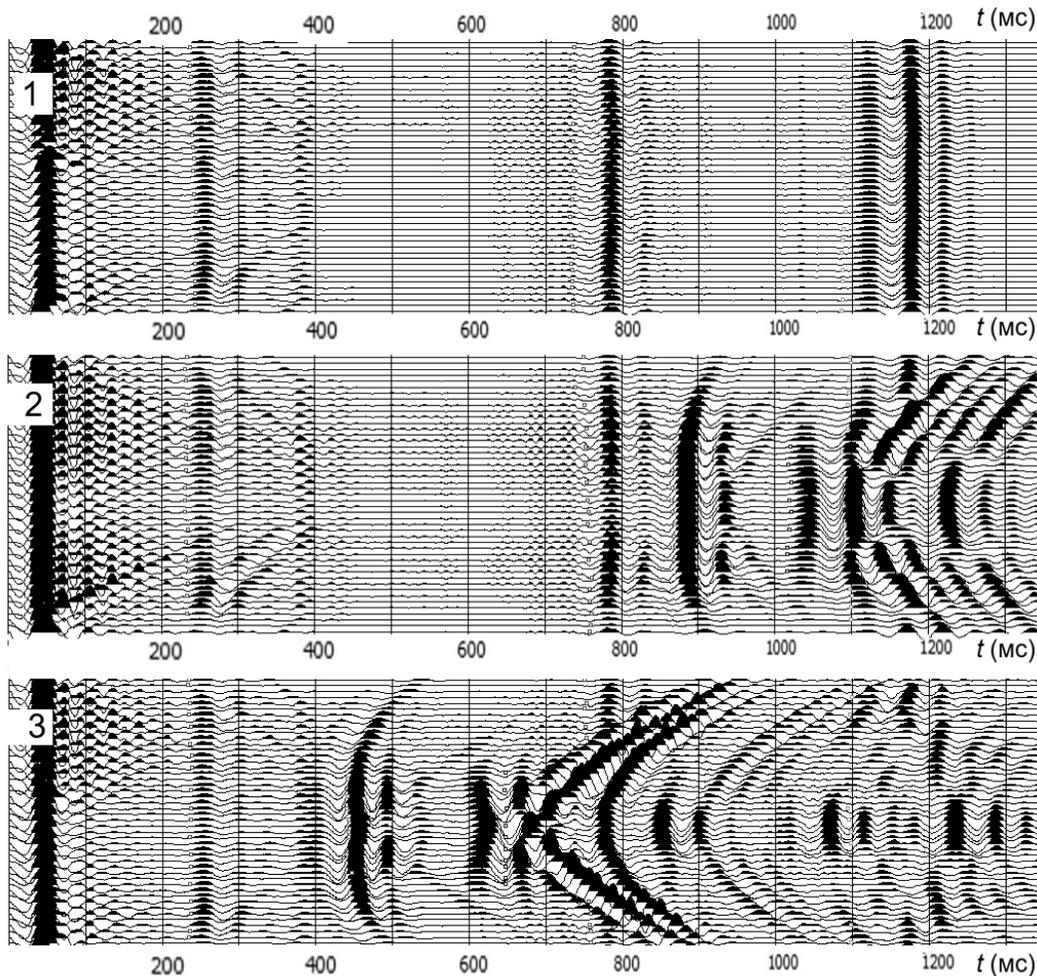


Рис. 4. Временные сейсмические разрезы ОГТ для модели №1(1), №2 (2) и №3(3).

SH и P-SV волн в момент времени 250 мс. На картины схематически нанесены границы породных слоев и зона разуплотнения. Размеры зоны разуплотнения таковы, что на данных картинах наблюдается формирование как дифрагированных, так и отраженных волн. Причем следует отметить, что, данную зону, ввиду ее пониженной плотности, можно рассматривать как участок волновода в более плотных породах. Попадая в область разуплотнения, волны порождают сложную интерференционную картину. В итоге, образуется система кратных отраженных и дифрагированных волн. Используемая схема моделирования [7] не учитывает в полной мере фактор затухания, поэтому на модельных сейсмических разрезах ОГТ данная система кратных волн проявляется со значительной амплитудой.

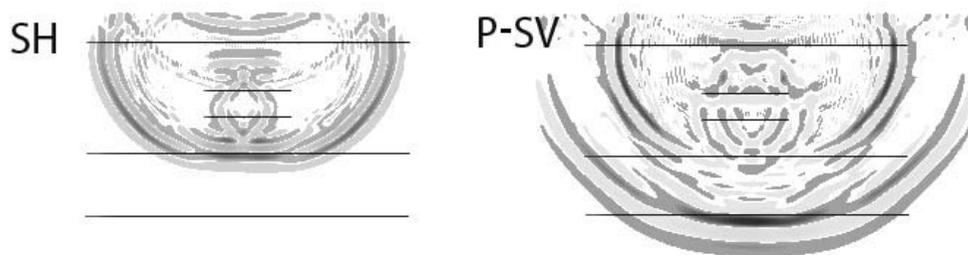


Рис. 5. Картины распределения колебаний волнового поля, рассчитанные для модели №3 для SH и P-SV волн в момент времени 250мс.

На рисунке 6 представлены сейсмические изображения, полученные методом дифрагированных волн. Используемое при построении изображения значение скорости составляет 1850 м/с. Шаг сетки составляет 50 м. Разделы породных слоев представлены характерными наборами полос, которые, согласно критериям МДВ, свидетельствуют о наличии отражающих границ.

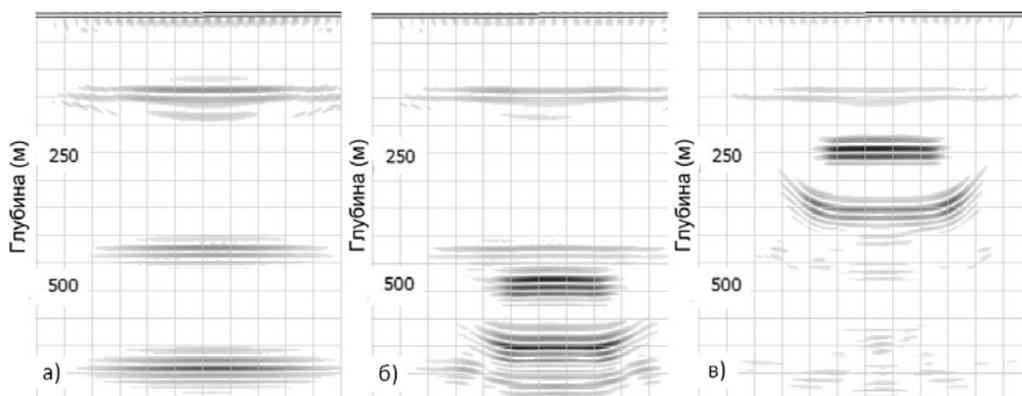


Рис. 6. Сейсмические изображения, полученные для моделей № 1 (а), № 2 (б) и № 3 (в) методом дифрагированных волн.

Как видно из рисунка 6, в случае наличия зоны разуплотнения появляются дополнительные характерные системы полос, формируемые как первичными, так и кратными дифрагированными и отраженными волнами.

Выводы. Таким образом, математическое моделирование позволяет обосновать возможность использования сейсмических наблюдений для выявления зон разуплотнения углепородного массива, образующихся в процессе выемки угля. Такие области проявляются на сейсмических разрезах ОГТ как зоны дифракции и отражающие границы. Проявляются такие зоны и на изображениях среды, полученных методом дифрагированных волн. Представленные результаты являются основой для моделирования изменений в подработанном массиве со сложными горнотехническими условиями, что необходимо для дальнейшей интерпретации натуральных исследований.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124061700022-3).

1. Зоря Н.М. Схема механизма сдвижений толщи пород при выемке пологих пластов угля одиночной лавы / Н.М. Зоря, Ф.И. Музафаров // Уголь Украины. – 1966. – № 12. – С. 5–7.
2. Борисов А.А. Основы геомеханики горных массивов / А.А. Борисов – Л.: ЛГИ, 1989. – 294 с.
3. Черникова С.А. Разработка методики прогноза уровня подземных вод по данным маркшейдерского мониторинга затопливаемых шахт Алмазно-Марьевского региона Донбасса / С.А. Черникова // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Гірничо-геологічна. – 2002. – № 45. – С. 36–40.
4. Илюхин Д.А. Прогноз развития зоны водопроводящих трещин при разработке яковлевского месторождения богатых железных руд / Д.А. Илюхин // Специальность 25.00.16. Горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика, маркшейдерское дело и геометрия недр: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Санкт-Петербург, 2014. – 125 с.
5. Гавриленко Ю.Н. Техногенные последствия закрытия угольных шахт Украины: Монография / Ю.Н. Гавриленко и др. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 631 с.
6. Глухов А.А. Анализ информативности методов сейсморазведки для прогноза расположения зон вероятного скопления метана / А.А. Глухов // Труды РАНИМИ. – 2023. – № 23. – С. 9–20.
7. Анциферов А.В. Математическое моделирование в шахтной сейсморазведке / А.В. Анциферов, А.А. Глухов. – К.: Наукова думка, 2012. – 255 с.
8. Анциферов А.В. Об автоматизации обработки сейсмических данных при прогнозе геологических нарушений угольных пластов методами отраженных волн и сейсмической локации / А.В. Анциферов, А.А. Глухов // Сб. научн. тр. РАНИМИ. – 2018. – Т. 1, № 21. – С. 99–106.
9. Глухов А.А. Об использовании миграции до суммирования при построении сейсмических изображений угленосных массивов методами пластовой сейсморазведки / А.А. Глухов // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2012. – № 14. – С. 209–216.

Ph.M. Golubev, A.A. Gluhov, V.A. Anciferov

On the possibility of forecasting the zone of rock decompression above the waste space by the seismic method.

The article discusses the signs of detection of decompression zones when processing the results of seismic exploration using various methods. The features of interpretation of the results of seismic exploration of sections of a technogenically altered massif both on seismic sections obtained by the common depth point method and on images of the medium obtained by the diffracted wave method are determined.

Keywords: *deformations of the mountain range, underground coal mining, decompression zone, mathematical model, seismic exploration.*

*Стаття поступила в редакцію 21.08.2024;
доработана 29.09.2024;
рекомендована к печати 08.10.2024.*

УДК 622.831.24

doi:10.24412/0136-4545-2024-2-74-79

EDN:IQLLRS



©2024. Н.И. Лобков¹, А.Г. Радченко²

ОСОБЕННОСТИ СДВИЖЕНИЯ СЛОИСТОГО ПОРОДНОГО МАССИВА В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЫЕМКИ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

В статье показана важность и необходимость расчета смещений вмещающего угольные пласты породного массива с учетом слоистости осадочных пород. Выполнен анализ недостатков при представлении в расчетных схемах горного массива, как однородного от угольного пласта до поверхности. В результате физического моделирования показана очередность смещения породных слоев. Обоснована необходимость и разработан алгоритм деления породного массива на группы слоев для формулировки граничных условий при аналитических расчетах.

Ключевые слова: слоистый массив, породные слои, физическое моделирование, предельный пролет, изгиб слоя, выработанное пространство.

Введение. В процессе разработки угольных пластов подземным способом над выработанным пространством происходят смещения пород кровли, приводящие к завалам лав (рис. 1).

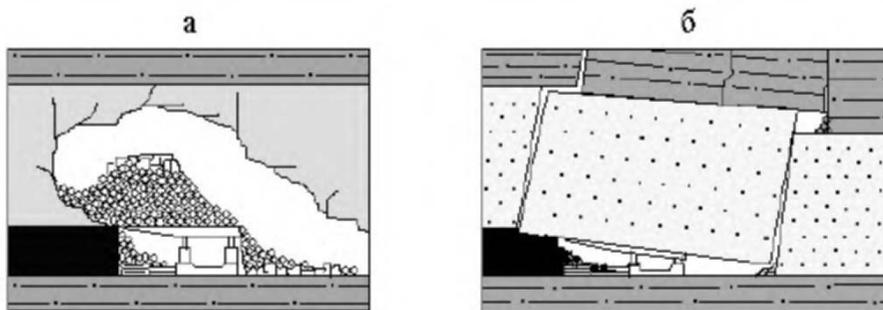


Рис. 1. Сдвигение пород в призабойном пространстве: а – обрушение породы мелкими фракциями; б – обрушение породы крупными блоками.

¹Лобков Николай Иванович – доктор техн. наук, зав. отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: nilobkov@mail.ru.

Lobkov Nikolay Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

²Радченко Александр Григорьевич – вед. инженер отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: aradov2022@yandex.ru.

Radchenko Aleksandr Grigor'evich – Leading Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

Исследования сдвижения породного массива над выработанным пространством лавы в натуральных условиях [1] позволили предложить представленную на рисунке 2 общую схему сдвижения подработанного породного массива.

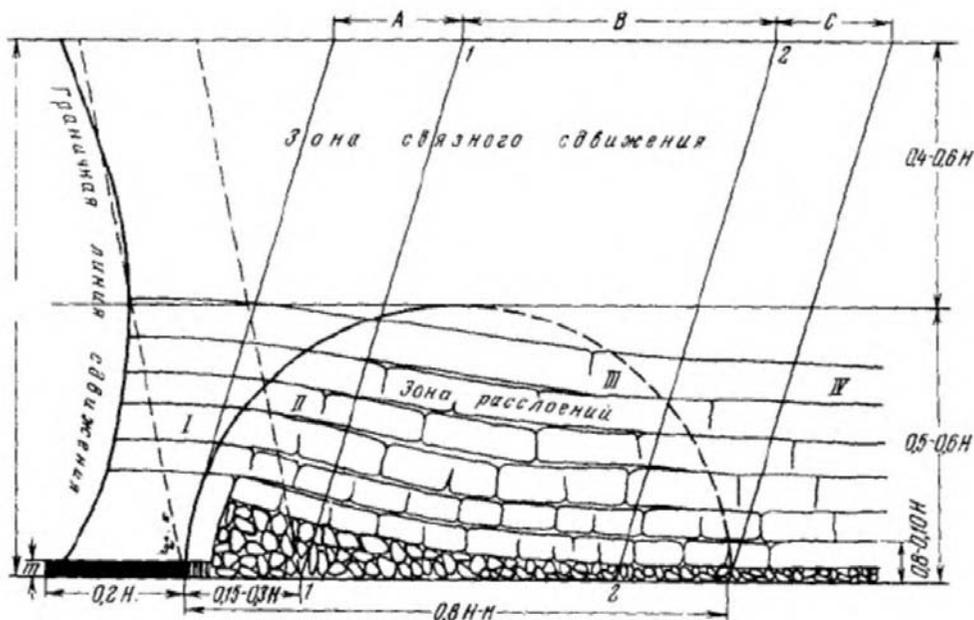


Рис. 2. Общая схема сдвижения подработанного массива.

На схеме видно, что залегающие непосредственно над пластом породы беспорядочно обрушаются над выработанным пространством, образуя зону № 1 беспорядочного обрушения. Над ней расположена зона № 2 упорядоченного обрушения и изгиба слоев с потерей несущей способности. Выше этой зоны залегают породные слои, изгибающиеся над выработанным пространством без потери несущей способности, представляющие собой зону № 3. Поскольку основные сдвижения пород происходят в процессе подвигания очистного забоя, эта область, состоящая из трех характерных зон, представляет собой область интенсивных сдвижений кровли (рис. 3).

На рисунке 3 зоны (1) и (2) ограничены линиями, проведенными под углом обрушения пород ψ к плоскости залегания пласта, а зона (3) ограничена линиями, проведенными под углом изгиба пород φ . При ведении добычных работ на большой глубине и с развитием области интенсивных сдвижений кровли, деформируются большое количество породных слоев над выработанным пространством. Очевидно, что наличие мощных, устойчивых породных слоев в массиве (пород-мостов), будет ограничивать высоту и скорость формирования области интенсивных сдвижений пород (2). Высота области интенсивных сдвижений пород, в свою очередь, определяет число породных слоев, участвующих в сдвижении над выработанным пространством. Целью данной работы является уста-

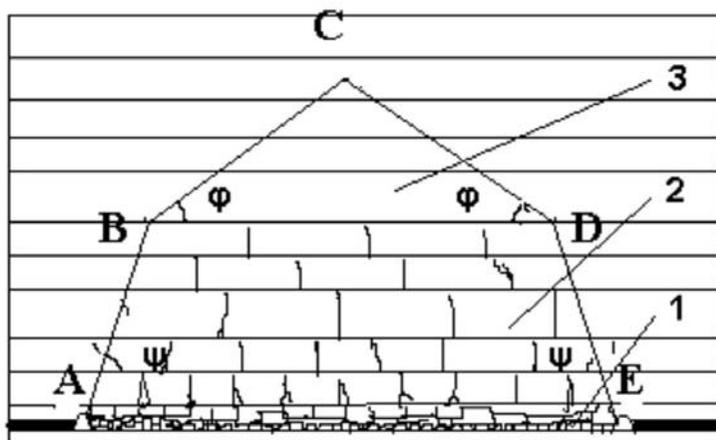


Рис. 3. Область сдвижения пород над выработанным пространством действующей лавы: ABCDE – область сдвижения породного массива в выемочном поле действующей лавы; 1; 2; 3 – соответственно зоны беспорядочного обрушения, упорядоченного обрушения и прогиба слоев без потери несущей способности.

новление области интенсивных сдвижений кровли в процессе ведения очистных работ на основе изучения закономерностей деформирования породных слоев над выработанным пространством.

1. Результаты исследований и их обсуждение. Для исследований процесса и закономерностей сдвижения породных слоев над выработанным пространством применен метод физического моделирования на моделях из эквивалентных материалов, как наиболее приемлемый для визуального восприятия [2]. На рисунке 4 показана модель из эквивалентных материалов в масштабе 1 : 300 к натуре. Строение породного массива в модели соответствует разрезу по геологоразведочной скважине.

После выемки слоя модели, имитирующего угольный пласт, и достижении кровлей предельного перед обрушением пролета, в породном слое кровли зарождается и развивается по всей мощности слоя разрушающая трещина (рис. 4). Разрушающая трещина, представленная на рисунке 4, изображена линией АБ.

Угол наклона линии разрушения к горизонтальной плоскости (плоскости залегания пласта) составляет 78° . После пересечения разрушающей трещиной породного слоя по всей его мощности слой обрушается. Породные слои, залегающие выше обрушенного, изгибаются над выработанным пространством. Угол наклона линии изгиба слоя находится в пределах 45° – 50° . Аналогичные явления происходят в каждом породном массиве кровли. Таким образом, зоны изгиба и обрушения породных слоев ограничиваются линиями изгиба и обрушения соответственно. Используя полученные результаты исследований, представляется возможным построение области интенсивных сдвижений кровли в процессе ведения очистных работ.

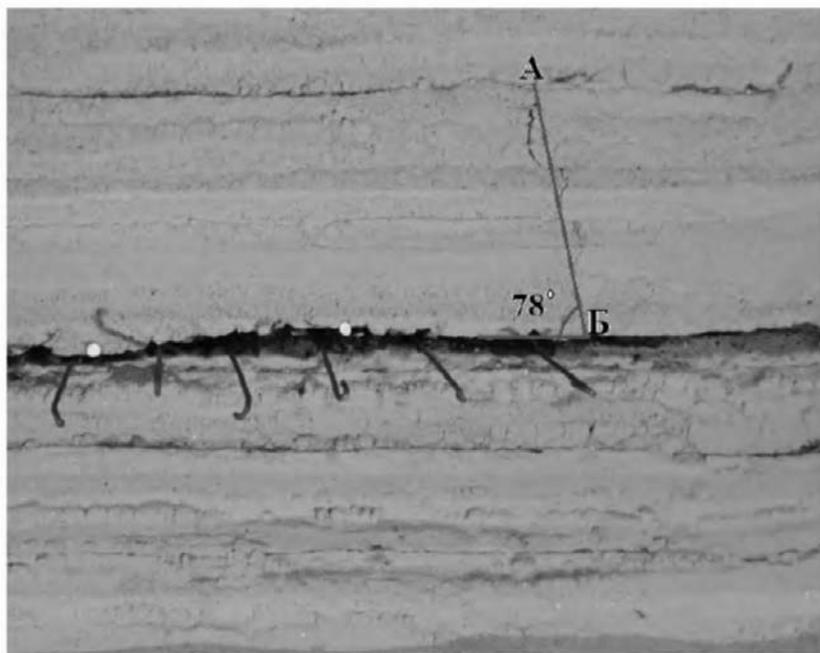


Рис. 4. Развитие разрушающей трещины при изгибе породного слоя

На рисунке 4 приведена область сдвижения пород одиночной лавы над выработанным пространством для условий шахты «Прогресс» производственного объединения (ПО) «Торезантрацит». Для построения области интенсивных сдвижений породный массив кровли пласта необходимо разделить на группы породных слоев. Каждая группа состоит из несущего слоя (порода-мост) и залегающих выше него более слабых породных слоев. Эти более слабые породные слои изгибаются вместе с несущим слоем, разрушаются и обрушаются ранее несущего слоя, и служат несущему дополнительной пригрузкой. После обрушения первой группы слоев вторая группа слоев зависает над выработанным пространством.

Для примера, рассмотрим формирование области полных сдвижений пород при работе одиночной лавы в массиве угля в условиях шахты «Прогресс» ПО «Торезантрацит» (рис. 5).

В приведенном на рисунке 5 положении, слой № 2 зависает над выработанным пространством лавы. Линия изгиба слоя наклонена под углом φ к плоскости залегания пласта. Слой № 3 и № 4 деформируются вместе со слоем № 2 и, обрушаясь, служат ему пригрузкой. Линия обрушения слоев № 3 и № 4 наклонена к плоскости залегания пласта под углом ψ . Залегающие выше вторая и третья группы слоев изгибаются над выработанным пространством. Угол наклона линии изгиба равен φ . Таким образом, формируется область интенсивных сдвижений пород кровли на момент первичной посадки АБВГДЕЖ. Дальнейшее

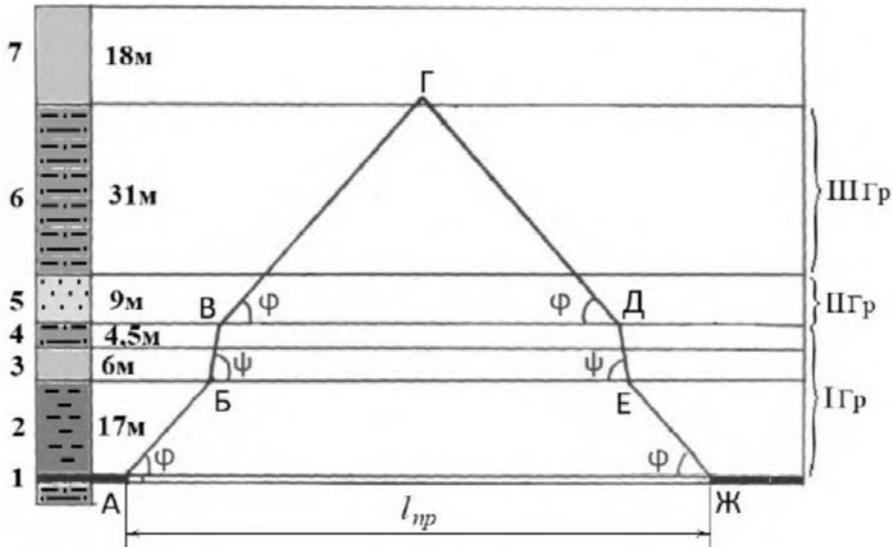


Рис. 5. Область сдвижения пород АБВГДЕЖ при работе одиночной лавы над выработанным пространством: 1...7 – породные слои в кровле пласта; I Gr...III Gr – группы породных слоев; φ и ψ – соответственно углы наклона линий изгиба и обрушения к плоскости пласта; $l_{нр}$ – предельный пролет первой группы слоев.

подвигание лавы будет приводить к увеличению области интенсивных сдвижений кровли до отхода лавы от разрезной печи на расстояние, равное длине лавы ($l = 230$ м). При этом выработанное пространство представляет собой так называемый «квадрат». В случае дальнейшего подвигания лавы высота области полных сдвижений пород кровли и число деформирующихся породных слоев остаются постоянными. Для расчета опорного давления необходимо определить число групп породных слоев, входящих в область интенсивных сдвижений кровли. По данным геологоразведочных скважин для каждого породного слоя определяется предельный пролет перед обрушением из выражения [3]:

$$l_{нр} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0 h}{7\sigma_p}\right)^2 + \frac{h}{\gamma}(\sigma_0 - 2\lambda\gamma H)} - \frac{\sigma_0 h}{7\sigma_p}, \text{ м,}$$

где σ_0 – предел прочности на сжатие в массиве, МПа; σ_p – предел прочности на растяжение в массиве, МПа; h – мощность слоя, м; γ – объемный вес породы, кН/м³; λ – коэффициент бокового распора; H – глубина ведения работ, м.

Если $l_{нр} > l_{нрi}$ рассчитывается предельный пролет следующего слоя $l_{нр,i+1}$, где i изменяется от 1 до n . Слой с большим предельным пролетом $l_{нр}$ является несущим, а слои с меньшими предельными пролетами, изгибаясь, разрушаясь и обрушаясь вместе с несущим, служат ему дополнительной пригрузкой. Несущий слой вместе со слоями пригрузки образуют первую группу слоев.

Если $l_{np} < l_{npi}$, то несущим слоем является слой с большим предельным пролетом, и вместе с рассчитанными вышележащими породными слоями он образует вторую группу слоев в области интенсивных сдвижений.

Выводы.

1. Во вмещающем угольные пласты породном массиве обнаруживаются прочные породные слои (породы-мосты) с предельным, перед обрушением пролетом, превышающим предельные пролеты вышележащих менее прочных слоев. Эти породные слои являются несущими. Слои с меньшим предельным пролетом зависают, разрушаются и обрушаются вместе с несущим слоем, и служат ему дополнительной пригрузкой.

2. Под действием дополнительной пригрузки предельный пролет несущего слоя уменьшается, что влияет на размеры области интенсивных сдвижений.

3. Несущие слои со слоями пригрузки представляют собой группы слоев, формирующих область интенсивных сдвижений кровли над выработанным пространством.

4. Для расчета величины опорного давления впереди лавы необходимо определять количество групп слоев, входящих в область интенсивных сдвижений.

Исследования проведены в рамках выполнения фундаментальной научно-исследовательской работы FRSR – 2023-0002 «Разработка геомеханических основ защиты объектов поверхности в условиях сложной структуры рельефа подрабатываемых территорий и исследование формирования зон интенсивных деформаций горного массива».

1. *Канлыбаева Ж.М.* Закономерности сдвижения горных пород в массиве / Ж.М. Канлыбаева. – М.: Наука, 1968. – 108 с.
2. *Клочко И.И.* Управление сложной кровлей в лаве. Монография / И.И. Клочко. – Рига: Lambert Academic Publishing, 2018. – 111 с.
3. *Носач В.К.* Процессы подземных горных работ в очистных забоях. Учебное пособие / В.К. Носач, Н.И. Лобков. – Донецк: РВА ДонНТУ, 2001. – 180 с.

N.I. Lobkov, A.G. Radchenko

Peculiarities of shearing of layered rock massif as a result of excavation of coal seams.

The article shows the importance and necessity of calculating the shear of the rock mass containing coal seams, taking into account the layering of sedimentary rocks. The article analyses the disadvantages of representing the rock massif as homogeneous from the coal seam to the surface in the calculation schemes. As a result of physical modelling the order of displacement of rock layers is shown. The necessity of rock massif division into groups of layers as boundary conditions in analytical calculations is justified and an algorithm is developed.

Keywords: *layered massif, rock layers, physical modelling, limiting span, layer bending, mined-out space.*

*Статья поступила в редакцию 27.08.2024;
доработана 03.10.2024;
рекомендована к печати 15.10.2024.*

УДК 622.837:550.82
doi:10.24412/0136-4545-2024-2-80-87
EDN:SJWHFE



©2024. Е.А. Бардакова¹

К ВОПРОСУ О ГИДРОГЕОМЕХАНИЧЕСКОМ ПРОГНОЗЕ АКТИВИЗАЦИИ ПРОЦЕССА СДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РЕЗУЛЬТАТЕ ЗАТОПЛЕНИЯ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК С УЧЕТОМ СТРУКТУРЫ РЕЛЬЕФА

В статье описан подход к прогнозу изменения скорости затопления горных выработок, основанный на анализе натуральных наблюдений, обобщении известных закономерностей и использовании методов регрессионно-корреляционного анализа. Описанные зависимости являются основой для выявления базовых закономерностей изменения величины активизации сдвижений земной поверхности от параметров затопления горного массива.

Ключевые слова: активизация процесса сдвижения, техногенный процесс, ликвидация угольных шахт, рельеф местности, шахтные воды.

Введение. На территории Донбасса несколько десятков лет происходит мокрая консервация угледобывающих предприятий, вызванная реструктуризацией всей угольной промышленности региона. Стоит отметить, что несмотря на более чем двадцатилетнюю практику ликвидации шахт, на сегодняшний день существующие механизмы прогноза деформаций земной поверхности, недостаточно эффективны и имеют слабое экспериментальное обоснование. Нормативные документы [1–3] включают общие описания методик прогноза, однако недостаточно четко регламентируют граничные условия расчетов. Четкое представление о качественном изменении скорости затопления с течением времени позволяют получить наблюдения за характером затопления горного массива, однако ввиду большого количества влияющих на процесс затопления факторов, прогноз параметров затопления остается крайне трудоемкой задачей.

Опыт ликвидации угольных шахт [4], который накоплен на сегодняшний день, говорит о том, что под воздействием затопления в шахте зачастую формируется опасный техногенный процесс, сопровождающийся прорывами шахтных вод, а также загрязнением поверхностных и подземных вод.

Мониторинг затопления шахт является сложной задачей, которая обусловлена трудностями прогноза гидродинамических процессов, а также недостатком необходимого объема информации об изменении режима природно-техногенных

¹ Бардакова Елена Александровна – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru.

Bardakova Elena Aleksandrovna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

водоносных комплексов по мере затопления горных выработок, влияние которых по-разному проявляется в период эксплуатации и ликвидации шахт.

Чтобы в полном объеме проанализировать факторы, влияющие на протекание гидрогеологического процесса, проводится гидрогеологический расчет, который позволяет определить изменение динамических показателей шахтных вод во времени. Базовые методики расчета параметров распространения грунтовых вод в техногенно-нарушенном массиве основываются на законе фильтрации Дарси. Расчеты, полученные из уравнений Дарси, показывают средние по водоносному горизонту значения, характеризующие водопроницаемость и водоприток, используемые в практике [5]. В связи с большим количеством факторов, определяющих параметры фильтрации, достоверное аналитическое решение сложной гидрогеологической задачи крайне затруднительно, поэтому качественный гидрогеологический прогноз должен включать не только аналитические решения, но и анализ процессов разгрузки подземных вод и последующую экстраполяцию установленных закономерностей в пространстве и во времени [6].

1. Методика исследования. Основным методом закрытия шахт является метод «мокрой консервации», при котором горные выработки ликвидируемой шахты затапливаются до некоторого безопасного уровня вследствие восстановления гидрогеологического баланса и ликвидации депрессионной воронки после остановки шахтного водоотлива. Уровни затопления выработок часто достигают приповерхностной зоны. Рельеф местности в Донбассе обладает достаточно сложной структурой; на участках менее одного километра перепад высот достигает нескольких десятков метров, что может являться причиной водоизлива шахтных вод на поверхность. Результаты анализа отметок поверхности и уровней затопления для шести шахт Центрального района Донбасса (ЦРД) приведены в таблице 1. Трехмерная модель земной поверхности и шахтных вод для данного участка, а также информация об уровнях затопления, м и расположении стволов некоторых шахт города Енакиево, приведены на рисунке 1 (легенда справа наглядно отображает абсолютные отметки над уровнем моря).

Таблица 1. Отметка поверхности и уровня затопления

Наименование шахты	«Кондратьевская»	«Угледгорская»	«Александровская №3»	«Александровская №4»	«Булавинская»	«Красный октябрь»
Отметки поверхности устья стволов, м	279,8	273	225,5	232,9	250,5	194
Отметки затопления, м	105	11	-74	43	119	29

К настоящему моменту в архивах специализированных организаций, занимающихся мониторингом подъема шахтных вод и прогнозом затопления горных выработок, накоплен достаточно большой объем материалов наблюдений за затоплением десятков угледобывающих предприятий Донбасса (рис. 2). Анализ

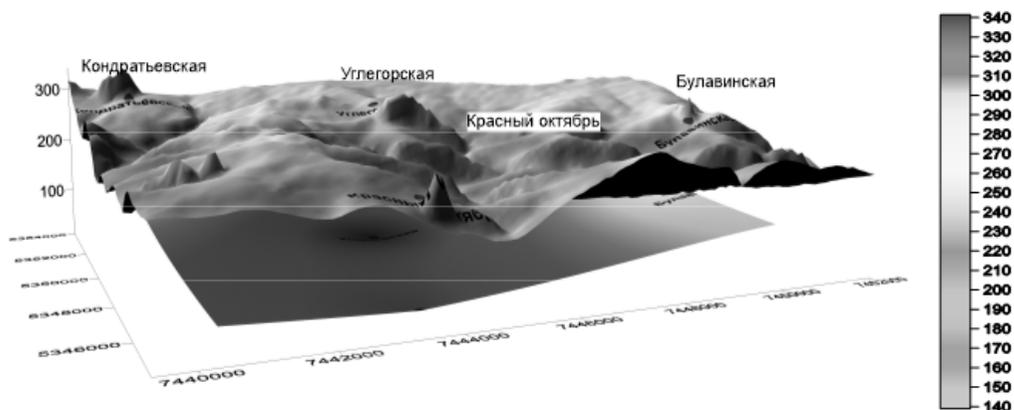


Рис. 1. Уровни затопления и расположение стволов некоторых шахт города Енакиево

наблюдений позволяет сделать вывод, что график изменения подъема шахтных вод во времени имеет вид нелинейной отрицательной полиномиальной функции 2-го порядка.

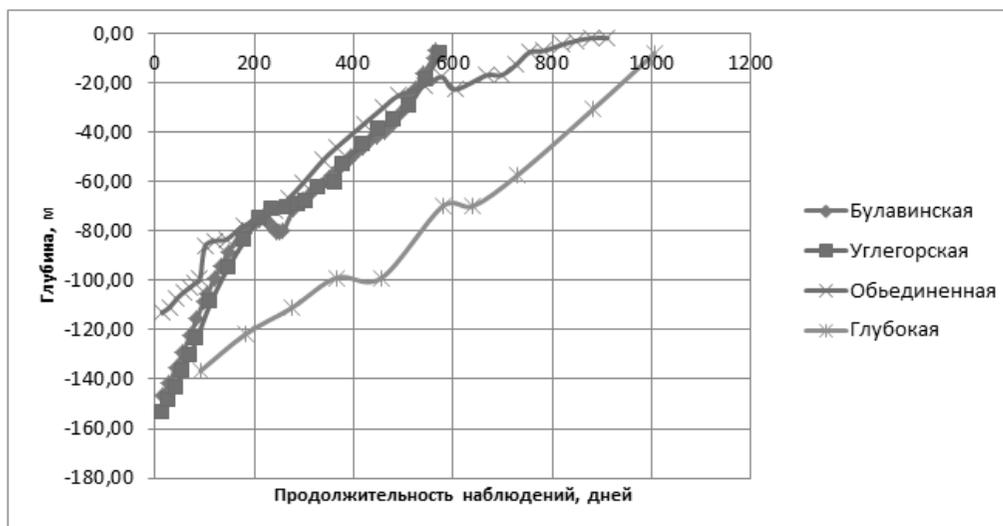


Рис. 2. Характер прироста абсолютной отметки затопления с течением времени

Как видно из приведенного на рисунке 2 графика, скорость прироста воды с течением времени на различных шахтах отличается на одних и тех же глубинах в несколько раз. На шахте «Булавинская» уровень воды поднялся с отметки -150 м до отметки -5 м за 598 дней. На шахте «Объединенная» уровень воды с отметки -118 м до отметки -1 м поднялся за 911 дней. На шахте «Глубокая» уровень воды с отметки -137 м до отметки -8 м поднялся за 1000 дней.

Согласно существующим исследованиям, на характер затопления могут оказывать влияние следующие основные факторы:

- величина водопритока;
- коэффициент фильтрации техногенно-нарушенного массива;
- наличие тектонических нарушений;
- степень «подработанности» угленосной толщи.

Стоит отметить, что если влияние таких параметров, как наличие тектонических нарушений и изменение коэффициента фильтрации в техногенно-нарушенном массиве, требуют ряда дополнительных исследований, то влияние величины водопритока и степени «подработанности» угленосной толщи возможно зафиксировать в результате анализа параметров затопления шахт с течением времени. Анализ динамики затопления пяти шахт, проведенный за период с 2014 по 2020 годы, приведен в таблице 2.

Таблица 2. Показатели подъема воды на различных шахтах Донбасса

№ п/п	Название шахты	Интервалы затопления, м	Период времени затопления, мес., год	Среднесуточный подъем воды с отметки -160 до 0, м	Средний водоприток, м ³ /сут.
1	«Объединенная»	с -120 до +60	08.2015 – 02.2018	0.167	170
2	«Булавинская»	с -200 до 0	02.2017 – 12.2020	0.222	327
3	«Углегорская»	с -300 до 0	02.2016 – 02.2020	0.248	402
4	«Моспинская»	с -150 до +75	08.2014 – 12.2016	0.186	230
5	«Глубокая»	с -160 до 0	01.2017 – 05.2020	0.101	60

Анализ параметров затопления по шахтам Донбасса, приведенных в таблице 2 по отметкам от -160 м до 0 м, позволяет сделать вывод о возможности установления устойчивой зависимости среднесуточного подъема воды от среднего водопритока (рис. 3).

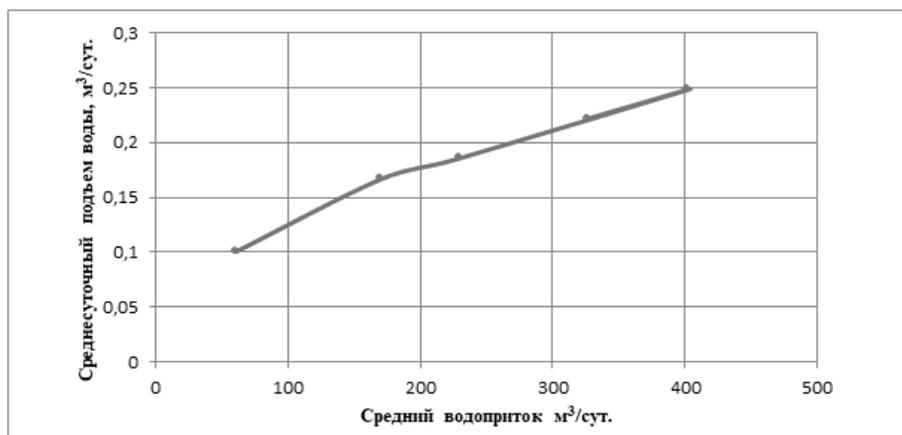


Рис. 3. Зависимость среднесуточного подъема воды от среднего водопритока

Анализ динамики подъема шахтных вод различных угледобывающих предприятий позволяет сделать вывод о том, что возможно описание изменения абсолютной отметки с течением времени при помощи использования регрессионной модели. Применение подобного подхода позволяет разработать базовый алгоритм прогнозирования изменения направления перетоков во времени.

Объем перетоков через разделяющий выработки массив в предлагаемой модели, согласно [7], следует определять по следующей формуле:

$$q_i = k_{\text{ф}} \cdot m \cdot B_i \cdot \frac{\Delta H_i}{L_i}, \quad (1)$$

где q_i – объем перетоков через разделяющий выработки массив, м³/сут; $k_{\text{ф}}$ – коэффициент фильтрации водоносного горизонта (слоев песчаников или известняков, участвующих в обводнении горных выработок), м/сут; m – мощность водоносного горизонта, м; B_i и L_i – соответственно ширина фронта перетока и длина пути фильтрации (размер целика), определяемые для каждого расчетного интервала по планам горных работ, м; ΔH_i – среднее значение перепада напоров, равное разности отметок уровня затопления и горных выработок смежной шахты в рассматриваемом расчетном интервале глубины, м.

При этом стоит отметить, что шахтные поля зачастую связаны также сетью горных выработок. Согласно [7], в таких случаях величина перетока должна определяться на основе зависимости

$$Q = 4 \cdot 10^3 \cdot b^2 \sqrt{\frac{Kg}{0,03L}}, \quad (2)$$

где Q – расход воды, поступающей через скважину, м³/сут; b – диаметр выработки, м; K – напор под устьем выработки, м; g – ускорение свободного падения, м/с²; L – длина скважины от устья до затопленной выработки, м.

Применение зависимости (2) исключает применение зависимости (1) и наоборот. В результате подобного подхода возможно формирование автоматизированной схемы перетоков, основанной на принципе ориентированного графа, в котором в качестве вершины могут выступать скважины или стволы, в качестве ребер выступают направления перетоков, а в качестве веса ребра выступает величина перетока. В случае изменения соотношения отметок в гидравлически связанных выработках происходит изменение направления перетока на противоположное. В таком случае ребра графа автоматически изменяют свое направление (рис. 4).

Данный подход может лечь в основу решения задачи определения сроков активизации процессов сдвижения от затопления горных выработок закрывающихся угольных шахт. В частности, возможность адекватного прогноза сроков затопления выемочных горизонтов позволяет определить интервалы времени, за которые должна произойти активизация процессов сдвижения. В таком случае

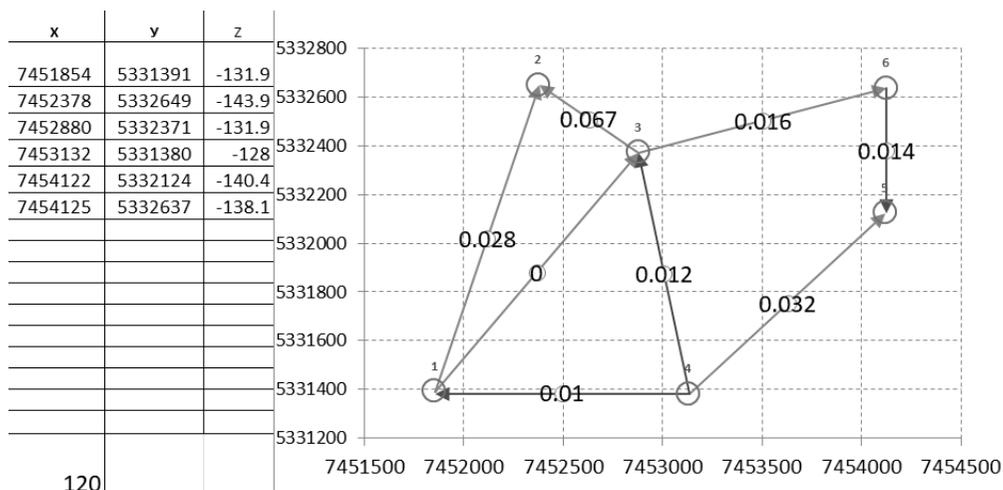


Рис. 4. Схема перетока шахтных вод

продолжительность процесса сдвижения может быть вычислена с использованием зависимости, приведенной в [3], с подстановкой в качестве параметра C среднемесячной скорости подъема шахтных вод и учета времени затопления участка горного массива над лавой, необходимого для проявления процесса сдвижения

$$T = k_T \cdot \frac{H}{C} \cdot \left(\frac{\cos \gamma_0}{\sin (\gamma_0 - \alpha)} + \frac{\cos (\psi_2 - \alpha)}{\sin \psi_2} \right), \quad (3)$$

где T – общая продолжительность процесса сдвижения, сут.; k_T – коэффициент, учитывающий влияние глубины горных работ на продолжительность процесса сдвижения; γ_0 – граничный угол, град.; ψ_2 – угол полных сдвижений, определяемый по рекомендациям разд.7 работы [3], град.; H – глубина затопления, м; C – средняя скорость подвигания очистного забоя, м/мес; α – угол падения пласта, град. Коэффициент k_T определяется согласно таблице 3, основой для которой выступает таблица 2.3 из источника [3] в зависимости от средней глубины горных работ H_p .

Таблица 3. Зависимость коэффициента k_T от глубины отработки

Глубина горных работ H_p , м	до 100	до 300	≥ 500
Коэффициент k_T , учитывающий влияние глубины горных работ на продолжительность процесса сдвижения, безразмерная величина	1,5	1,2	1,1

Средняя скорость подъема шахтных вод с изменением глубины также будет

изменяться, согласно [8], по следующей зависимости

$$q = q_{\text{ф}} \cdot \sqrt{\frac{H_{\text{ф}}}{H_{\text{пр}}}}, \quad (4)$$

где q и $q_{\text{ф}}$ – проектный и фактический водоприток, $\text{м}^3/\text{сут}$; $H_{\text{ф}}$ – фактическая глубина затопления, м ; $H_{\text{пр}}$ – проектная глубина затопления, м .

Применение данного подхода позволяет прогнозировать момент времени, в который сдвигения земной поверхности от затопления горных выработок активизируются, и определить продолжительность процесса сдвига вплоть до момента его окончания. Полученные закономерности дают возможность существенно оптимизировать закладку наблюдательных станций с учетом времени проявления процессов активизации.

Приведенный алгоритм также является основой для совершенствования методики прогноза величины деформаций земной поверхности. Введение учета последовательности затопления горных выработок при прогнозе сдвижений земной поверхности позволит существенно уточнить величину сдвижений и обосновать граничные условия влияния глубоких горных выработок, которое установлено в работах ФГБНУ «РАНИМИ» и зафиксировано на наблюдательных станциях. Для решения данного вопроса необходимо учитывать влияние горных выработок на земную поверхность не как отдельных объектов, а как единой системы [9].

Выводы. Описан новый подход к прогнозу затопления горных выработок и продолжительности деформаций земной поверхности при затоплении горных выработок. Применение описанного в статье подхода для анализа изменения уровня шахтных вод в пределах шахтного поля позволяет обеспечивать вполне достоверный прогноз изменений в ближайшей перспективе и уточнить закономерности формирования и компенсации депрессионных воронок в различных горнотехнических условиях. Описанный подход является базисом для усовершенствования методики прогноза деформаций земной поверхности при затоплении горных выработок закрывающихся угольных шахт.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 123092600006-9).

1. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев, 2004. – 127 с.
2. КД 12-12.004-98. Ликвидация угольных шахт, защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации. – Донецк: УкрНИМИ, 1998. – 46 с.
3. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. Утв. постановлением госгортехнадзора России от 16 марта 1998 г. № 13. Межотраслевой научный центр ВНИМИ. – 203 с.
4. Молев М.Д. Оценка воздействия процессов ликвидации угольных шахт на экологическую ситуацию в Российском Донбассе / М.Д. Молев, С.А. Масленников // Известия Томского политехнического университета. – 2018. – № 7. – С. 148–156.
5. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации / Н.Е. Леонтьев. – М.: МАКС Пресс, 2017. – 88 с.

6. Руководство по гидрологическим прогнозам. Утв. председателем государственного комитета СССР по гидрометеорологии Ю.А. Израэлем 03.04.1988. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 358 с.
7. *Гавриленко Ю.Н.* Техногенные последствия закрытия угольных шахт: Монография / Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермакова. – Донецк, 2004. – 631 с.
8. Методические положения по решению гидрогеологических задач при разработке проекта ликвидации шахты. – Донецк, 1995. – 17 с.
9. *Голубев Ф.М.* Особенности параметров сдвижения многократно подработанной очистными выработками земной поверхности при ликвидации угледобывающих предприятий / Ф.М. Голубев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 4 (73). – С. 62–69.

E.A. Bardakova

On the issue of hydrogeomechanical prediction of activation of the process of displacement of the Earth's surface as a result of flooding of mine workings, taking into account the complex structure of the relief.

The article describes an approach to forecasting changes in the rate of flooding of mine workings based on the analysis of field observations, generalization of known patterns and the use of regression and correlation analysis methods. The described dependencies are the basis for the formation of basic patterns of changes in the magnitude of activation of movements of the earth's surface from the parameters of flooding of the mountain range.

Keywords: *activation of the displacement process, man-made process, liquidation of coal mines, terrain, mine waters.*

*Статья поступила в редакцию 03.09.2024;
доработана 11.10.2024;
рекомендована к печати 24.10.2024.*

УДК 622.847

doi:10.24412/0136-4545-2024-2-88-95

EDN:WTNFIV



©2024. В.А. Дрибан¹, Н.А. Дуброва²

ЭВОЛЮЦИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ МНОГОКРАТНО ПОДРАБОТАННОГО ГОРНОГО МАССИВА

В статье выполнена динамическая оценка степени нарушенности массива горных пород вследствие многократного поэтапного воздействия очистных выработок. Разработан методический подход для расчета полей деформаций и сдвижений массива горных пород с учетом влияния старых выработок, позволяющий учитывать многократность подработки. Установлено, что в процессе многократной подработки в условиях крутого падения в массиве формируется квазирегулярная сеть вертикально ориентированных зон повышенной проницаемости.

Ключевые слова: многократная подработка, крутое падение, динамика изменения деформационных полей, знакопеременные разнонаправленные деформации, предельные значений деформаций, тегногенные коллекторы.

Введение. Многократная долгосрочная подработка приводит к изменению природной структуры и фильтрационных свойств вмещающих массив горных пород. Анализ современных представлений о деформировании массивов горных пород в результате ведения горных работ показал, что недостаточно изучено влияние многократной подработки на процесс формирования и эволюции деформационных полей, особенно в части образования деструктивных зон с учетом порядка ведения множественных очистных работ, которые оказывают решающее влияние на фильтрационные свойства массивов шахтных полей в целом. А влияние разнонаправленных деформаций является, как количественно, так и качественно, решающим фактором при оценке фильтрационных свойств вмещающих горных пород.

Подчеркнем, что именно многократная подработка массивов в условиях Центрального района Донбасса (ЦРД), ведущаяся более 130 лет по десяткам угольных пластов, является одним из наиболее значимых факторов, определяющих кардинальное изменение фильтрационных характеристик вмещающих пород.

¹ Дрибан Виктор Александрович – доктор техн. наук, директор РАНИМИ, Донецк, e-mail: viktor-driban@yandex.ru.

Driban Victor Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Director, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

² Дуброва Наталья Александровна – канд. техн. наук, зав. отдела проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНИМИ, Донецк, e-mail: dubrovan@mail.ru.

Dubrova Natalia Alexandrovna – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

Поэтому, целью данной работы является оценка степени нарушенности массива горных пород вследствие многократного поэтапного воздействия знакопеременных разнонаправленных деформаций, возникающих в процессе эксплуатации месторождения.

1. Методический подход к учету многократной подработки. В качестве тестовой модели для получения оценочных характеристик полей деформаций в произвольной точке массива горных пород, были выбраны три угольных пласта (k_5^2 , k_7 , k_7^1) шахты им. М.И. Калинина. Пласты k_5^2 , k_7 , k_7^1 отработывались на протяжении 80 лет с 20 по 90 гг. прошлого столетия и имеют углы падения от 52° до 56° .

Для проведения расчетов был использован следующий подход. Все лавы в пределах каждого пласта были объединены по временным периодам отработки. В качестве шага был установлен интервал 10 лет. В результате аппроксимации около 1000 лав выделено 125 контуров горных работ по трем угольным пластам, которые разбиты на группы, соответствующие восьми временным интервалам отработки – 1920-е, 1930-е, 1940-е, 1950-е, 1960-е, 1970-е, 1980-е и 1990-е годы. Для определения значений деформаций в произвольной точке массива исходные данные о глубине отработки всех аппроксимированных контуров очистных горных выработок приведены к значениям, соответствующим глубинам «-250», «-450» и «-650» метров, и из расчета исключены контуры, которые фактически расположены выше обозначенного горизонта.

Горно-геологические условия отработки исследуемой территории, большое количество отрабатываемых пластов, крутое падение и малое межпластовое расстояние требуют учета многократности подработки для получения достоверной оценки напряженно-деформированного состояния массива. Поэтому, при расчете параметров деформаций точки массива необходимо учитывать влияние множественных вышележащих старых горных работ на каждом этапе последующей отработки.

Максимальное оседание земной поверхности η_m , м определяется по формуле [1]:

$$\eta_m = q_0 m \cos \alpha N_1 N_2, \quad (1)$$

где q_0 – относительная величина максимального оседания, безразмерная величина; m – вынимаемая мощность пласта, или эффективная мощность пласта при работе с закладкой выработанного пространства, м; α – угол падения пласта в пределах очистной выработки, градус; N_1 , N_2 – безразмерные условные коэффициенты, характеризующие степень подработанности земной поверхности, соответственно вкрест простирания и по простиранию, безразмерные величины.

Сдвигения и деформации в расчетных точках от старой выработки рассчитываются как от проектируемых (действующих), но максимальное оседание от старой выработки η_m^{CB} в миллиметрах определяется по формуле:

$$\eta_m^{CB} = \Delta q m \cos \alpha N_1 N_2, \quad (2)$$

где Δq – разность между относительными максимальными оседаниями при повторной и первичной подработках (для условий Донбасса равна 0,15).

Для расчета максимальных оседаний от текущих горных работ с учетом влияния старых выработок, авторами предложено использовать рекуррентное соотношение вида:

$$\eta_{t_n}^{\text{общ}} = \eta_{t_n}^{\text{нов}} + \frac{\Delta q}{q_0} \eta_{t_{n-1}}^{\text{общ}}, \quad (3)$$

где t_n – расчетный период; n – количество расчетных периодов.

Используя данный методический подход, были рассчитаны оседания земной поверхности для каждой из условных глубин «0», «-250», «-450» и «-650» м. Пример визуализации зон влияния горных работ по пласту k_5^2 приведен на рисунке 1.

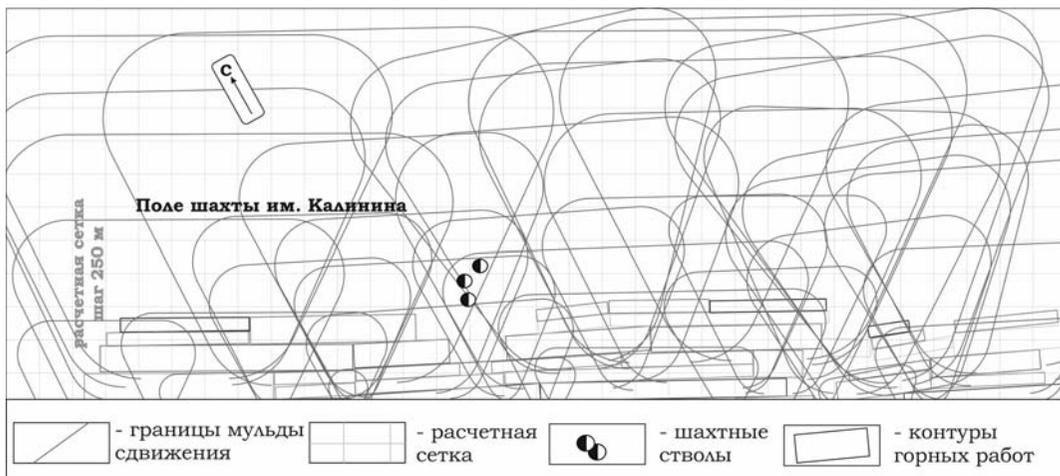


Рис. 1. Зоны влияния горных работ по пласту k_5^2 .

2. Динамическая оценка изменения деформационных полей при многократной подработке. Расчет деформаций массива горных пород от каждой группы контуров позволяет отобразить динамику изменения напряженно-деформированного состояния массива с шагом в десять лет для произвольной точки массива. На рисунке 2 приведен пример карты распределения значений горизонтальных деформаций ϵ_p по глубине в направлении простирания горных пород в пределах исследуемого участка по десятилетиям.

Распределение значений горизонтальных деформаций в пределах исследуемой площади характеризуется чередующимися пространственно-сопряженными зонами сжатия и растяжения, которые прослеживаются на всех этапах отработки. Зоны сжатий и растяжений представляют собой приблизительно равные по площади области, характеризующиеся близкими по абсолютной величине значениями и приблизительно равным пространственным шагом чередования в пределах каждого рассматриваемого временного периода.

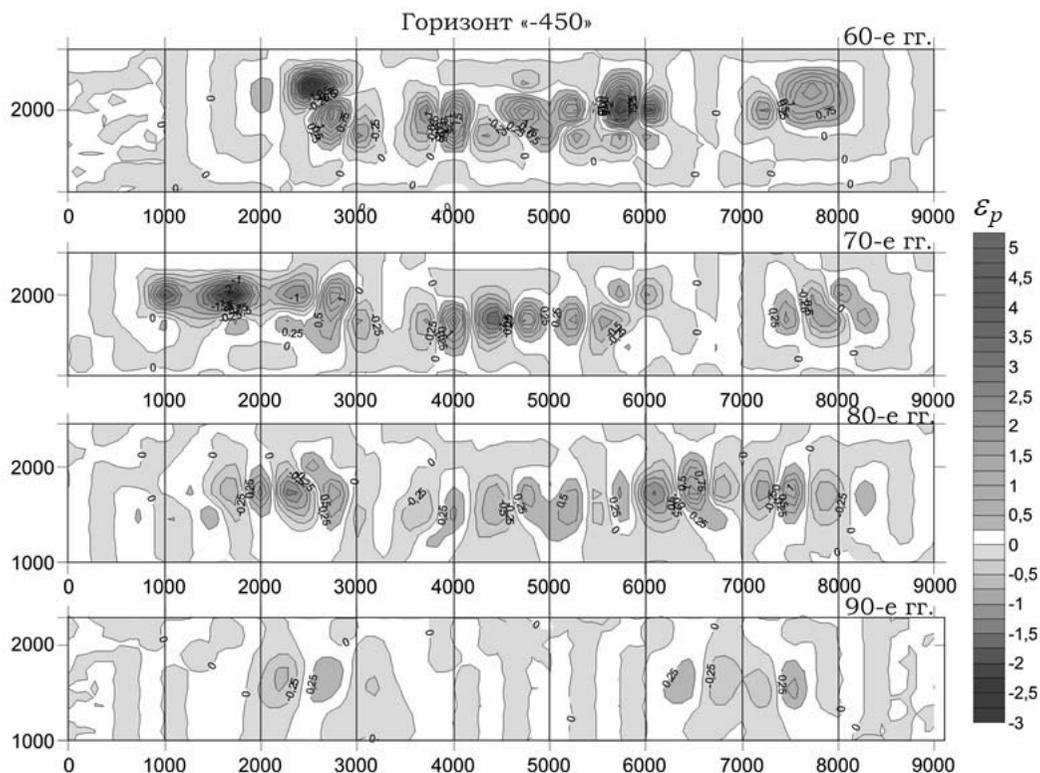


Рис. 2. Динамика изменения деформационных полей массива горных пород на глубине «-450» по десятилетиям.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что области массива, испытывают деформации растяжения на протяжении двух первых десятилетий отработки, которые затем трансформируются в зоны сжатия, что наблюдается во всех областях исследуемого массива. Это говорит о том, что в процессе ведения горных работ массив горных пород находился под воздействием горизонтальных знакопеременные деформаций с многократным поэтапным замещением зон сжатия зонами растяжения и наоборот. Подобное чередование зон сжатия и растяжения выявлено на всех глубинах, что позволяет говорить о подверженности всего массива влиянию знакопеременных деформаций, которые, в процессе многократных смен зон сжатия и растяжения, приводят к увеличению их трещиноватости и, соответственно, к значительному изменению фильтрационных характеристик массива в целом.

Поэтапное (по периодам ведения очистных работ) рассмотрение деформаций массива дает возможность отследить трансформации деформированного состояния массива во времени. На рисунке 3 представлены векторные диаграммы пошагового изменения деформированного состояния подрабатываемого массива во времени.

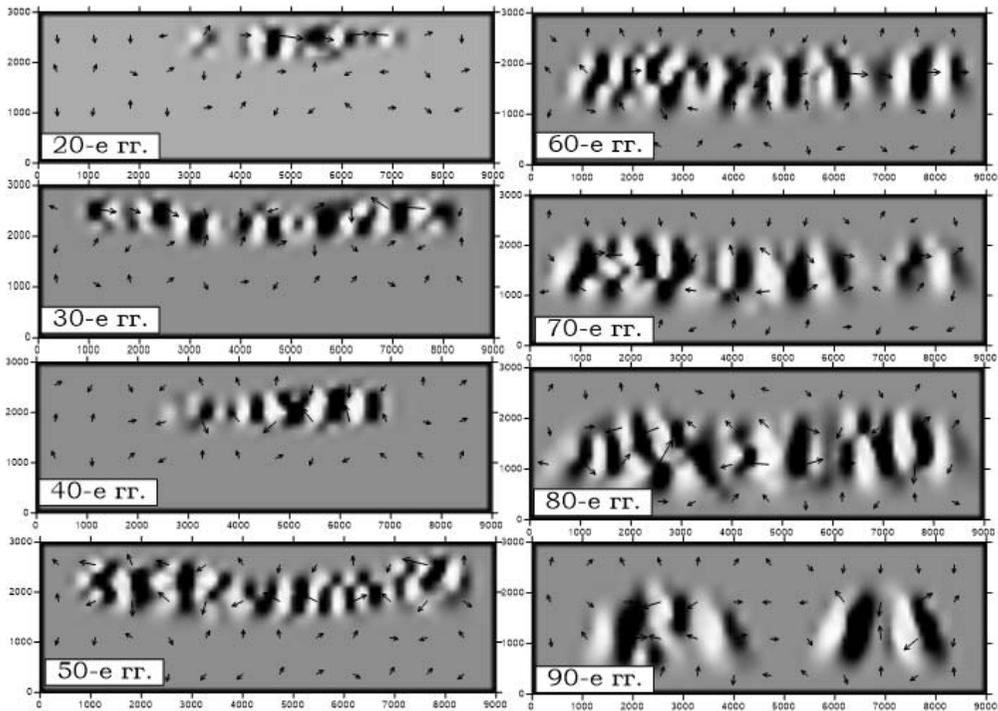


Рис. 3. Векторные диаграммы пошагового изменения деформированного состояния подрабатываемого массива во времени.

Основываясь на полученных результатах, можно сделать вывод, что долгосрочная многократная подработка угольных пластов в условиях крутого падения приводит к образованию в массиве горных пород чередующихся пространственно-сопряженных зон сжатий и растяжений, замещающих друг друга в процессе ведения горных работ и генерирующих квазирегулярную сеть вертикально ориентированных техногенных коллекторов. Под техногенными коллекторами будем понимать вертикально сопряженные зоны предельных и запредельных горизонтальных деформаций растяжения, в границах которых происходит разрушение горных пород с образованием новых систем трещин, которые образуют области повышенной проницаемости.

На рисунке 4 приведен пример поэтапного, по временному параметру, изменения НДС массива на рассматриваемых глубинах с визуализацией зон запредельных растяжений, образующих вертикально ориентированные зоны повышенной проницаемости. При оконтуривании данных зон, граничным значением было предельное значение деформаций растяжения (при которых происходит разрушение и образование трещин) для пород исследуемого района – 0,25 мм/м [2, 3].

Для отображения финального деформационного состояния массива построена сводная картограмма областей запредельных горизонтальных деформаций в направлении простирания пород за весь период отработки (рис. 5).

Эволюция деформационных полей многократно подработанного горного массива

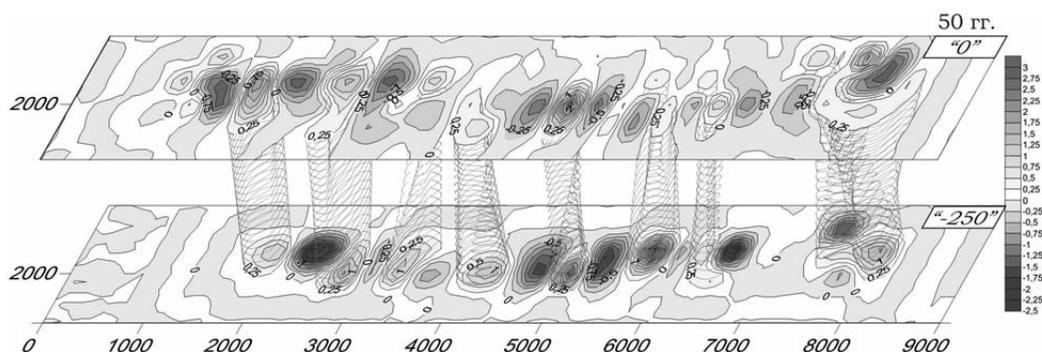


Рис. 4. Вертикально ориентированные техногенные коллекторы (состояние массива в 1950-е годы).

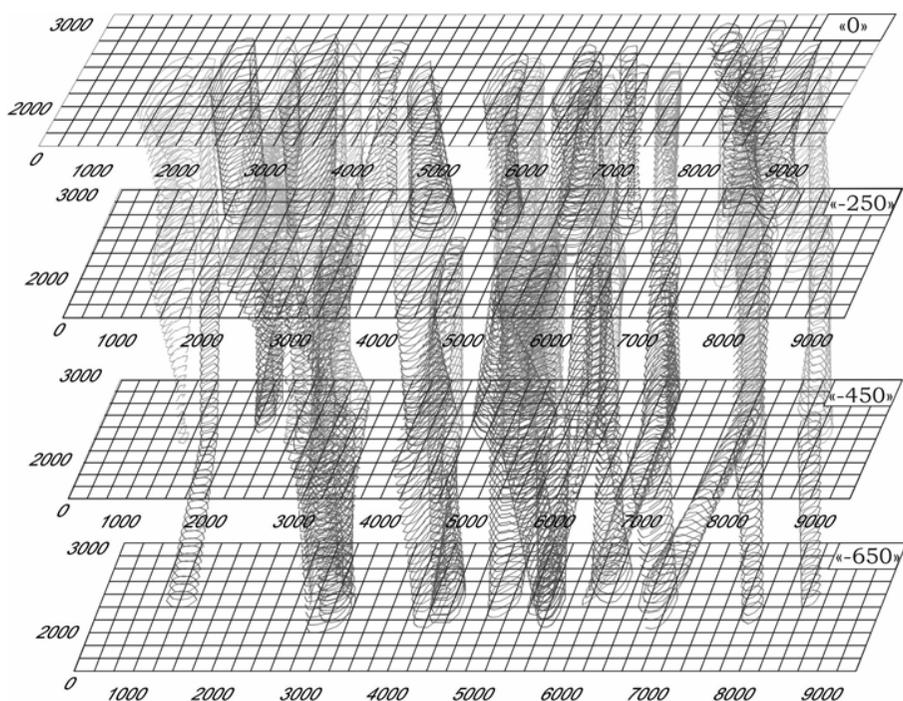


Рис. 5. Вертикально ориентированные техногенные коллекторы (состояние массива после отработки).

Для описания накопления поврежденности массива горных пород в процессе подработки, следует учитывать тот факт, что породы различным образом реагируют на различные виды деформаций. Наиболее устойчивы горные породы к деформациям сжатия, в то время как прочность на растяжение составляет, как правило, не более 10 % от прочности на сжатие [4]. Предельные значения деформаций растяжения для пород исследуемого района, при которых происхо-

дит разрушение и образование трещин колеблются в пределах 0,05 – 0,25 мм/м, а сжатия – 2 мм/м [2, 3]. Полученные значения (только по трем пластам) деформаций растяжения превышают предельные значения в более чем 10 раз, а деформации сжатия соизмеримы с предельными.

Вторым важным обстоятельством является именно необратимость состояния массива, претерпевшего предельное деформирование. То есть, если после прохождения цикла растяжение-сжатие, суммарные деформации близки к нулю, то это отнюдь не означает отсутствие поврежденности, поскольку трещины после появления не «залечиваются». С точки зрения оценки фильтрационных характеристик массива, в этом случае можно говорить лишь о некоторой временной их пассивности. Таким образом, исключительно важным является именно динамический анализ напряженно-деформированного состояния массива [5, 6].

При отработке каждой из лав различные области массива горных пород претерпевают знакопеременные деформации порядка $\pm 10^{-3}$. Если учитывать многократность и долговременность воздействия очистных работ, при которых суммарная мощность отработанных угольных пластов в некоторых точках достигает 8–10 м, то можно утверждать следующее. Многократная подработка в условиях ЦРД приводит к развитию множественных различным образом ориентированных систем техногенных трещин и, как следствие, образованию зон повышенной трещиноватости и, следовательно, к существенному изменению проницаемости массива горных пород и его фильтрационных свойств.

Выводы. Долгосрочная многократная подработка угольных пластов в условиях крутого падения приводит к образованию в массиве горных пород чередующихся пространственно-сопряженных зон сжатий и растяжений, замещающих друг друга в процессе ведения горных работ и генерирующих квазирегулярную сеть вертикально ориентированных техногенных коллекторов.

Увеличение значений горизонтальных деформаций растяжения, достигающих на некоторых участках $5 \div 7$ мм/м и превышающих предельные значения в $20 \div 30$ раз, свидетельствует о кардинальном изменении естественного состояния вмещающих массив горных пород вследствие подработки.

1. ГСТУ 101.00159226.001- 2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01.01.2004. – К.: 2004. – 128 с.
2. Распределение и корреляция показателей физических свойств горных пород: справочное пособие / М.М. Протодьяконов, Р.И. Тедер, Е.И. Ильницкая и др.; под общ. ред. М.М. Протодьяконова. – М.: Недра, 1981. – 192 с.
3. Карташов Ю.М. Прочность и деформируемость горных пород / Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев, А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1979. – 269 с.
4. Флоренский П.В. Основы литологии: учеб. пособие / П.В. Флоренский, Л.В. Милосердова, В.П. Балицкий. – М.: РГУ Нефти и газа им. И. М. Губкина, 2003. – 105 с.
5. Дрибан В.А. Деформирование массивов горных пород при отработке угольных пластов крутого падения / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // XI Международ. шк.-семинар: Физические основы прогнозирования разрушения горных пород. – Пермь, 2018. – № 11. – С. 25–27.
6. Driban V.A. Evaluation of changes in rock mass permeability due to long-time repeated mining / V. Driban, N. Dubrova // Progressive Technologies of coal, coalbed methane and ores mining. – CRC Press/Balkema, Netherlands, 2014. – P. 167–174.

V.A. Driban, N.A. Dubrova

The evolution of a repeated mining rock mass deformation fields.

The article provides a dynamic assessment of rock mass disturbance degree due to the repeated phased impact of rockworks. A methodological approach for calculating a rock mass deformations and displacements fields has been developed, taking into account the influence of old rockworks, which allows taking into account the multiplicity of mining. Increased permeability quasi-regular network of vertically oriented zones is formed in the process of repeated mining in conditions of a steep drop the rock mass has been established.

Keywords: *repeated mining, steep drop, dynamics of deformation fields changes, alternating multidirectional deformations, limiting values of deformations, man-made reservoirs.*

*Статья поступила в редакцию 06.09.2024;
доработана 15.10.2024;
рекомендована к печати 24.10.2024.*