

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 3 (88)

2024

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р физ.-мат. наук, проф. Д.В. Георгиевский, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. Н.Н. Грищенко, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Зыза, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Мазнев, д-р физ.-мат. наук, доц. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р физ.-мат. наук, доц. Р.Н. Нескородев, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Соловьев, д-р техн. наук, доц. С.В. Сторожев, д-р физ.-мат. наук, доц. С.Н. Царенко, д-р техн. наук, проф. В.П. Шамота.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of phys. and math., prof. D.V. Georgievskiy, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. N.N. Grishchenkov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., docent A.V. Zyza, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., docent A.V. Maznev, Dr. of phys. and math., docent I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of phys. and math., docent R.N. Neskoroedev, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of phys. and math., prof. A.N. Soloviev, Dr. of tech., docent S.V. Storozhev, Dr. of phys. and math., docent S.N. Tsarenko, Dr. of tech., prof. V.P. Shamota.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет», 2024

№ 3 (88) / 2024

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика деформируемого твердого тела

- Глушанков Е.С.* Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной пластинки из пьезоматериала в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла 5
- Вовк Л.П., Дзундза А.И., Мельничук Н.Ю., Моисеенко И.А.* Нормальные волны в радиально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения 20
- Карасев Д.С., Сторожев С.В., Сторожев В.И.* Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с индивидуальным законом экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики материала 35
- Глушанков Е.С., Мироненко А.Б.* Решение задачи об изгибе свободно опертой прямоугольной пьезоэлектрической плиты. II 44
- Глушченко А.В., Пачева М.Н., Сторожев В.И., Фоменко М.В.* Нормальные окружные волны сдвига в двухслойном протяженном полом цилиндра 65

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Глухова Ж.Л.* Об учете упругих полей в диффузионных процессах водорода в металлах 72
- Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В.* Нечетко-множественный учет фактора параметрической неопределенности в прикладной модели оценки характеристик изгиба биметаллических пластин со свободным краем 79

**Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

<i>Грищенков Н.Н., Скаженик В.Б., Бардакова Е.А., Чернышенко И.В.</i> Пространственное моделирование зон многократной подработки горными выработками участков со сложной структурой рельефа	89
<i>Дрибан В.А., Хохлов Б.В., Антипенко А.В.</i> К вопросу о напряженно-деформированном состоянии горных пород при влиянии очистных работ	100
<i>Азаров Н.Я., Голубев Ф.М., Рахманова Т.И., Сажнев В.П.</i> Особенности влияния структуры рельефа на деформации жилых домов на подрабатываемой территории	111

№ 3 (88) / 2024

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Glushankov E.S.* The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the non-uniform convective heat transfer under linear heat flux action 5
- Vovk L.P., Dzundza A.I., Melnichuk N.I., Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A.* Normal waves in radially inhomogeneous transversally isotropic cylinders of sector cross-section..... 20
- Karasev D.S., Storozhev S.V., Storozhev V.I.* Fuzzy-set accounting of parametric uncertainty factor in an applied model for assessing bending characteristics of free-edge bimetallic plates..... 35
- Glushankov E.S., Mironenko A.B.* The solution of the problem of bending of simply supported rectangular piezoelectric plate. II 44
- Glushchenko A.V., Pacheva M.N., Storozhev V.I.* Normal circumferential shear waves in a two-layer extended hollow cylinder 65

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Glukhova Zh.L.* On the consideration of elastic fields in the diffusion processes of hydrogen in metals 72
- Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V.* Fuzzy-set accounting of parametric uncertainty factor in an applied model for assessing bending characteristics of free-edge bimetallic plates 79

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics

- Grishchenkov N.N., Skazhenik V.B., Bardakova E.A., Chernyshenko I.V.* Spatial modeling of zones of multiple underworking minings in areas with complex relief structure..... 89

Driban V.A., Khokhlov B.V., Antypenko A.V. On the issue of stress-strain state of rocks under the influence of cleaning operations 100

Azarov N.Y., Golubev Ph.M., Raxmanova T.I., Sazhnev V.P. Features of influence of relief structure on deformations of residential buildings on the underworked area..... 111

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-3-5-19

EDN:WCHHWL



©2024. Е.С. Глушанков¹

ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА

В данной работе представлено решение задачи о действии линейного потока тепла в бесконечной многосвязной пластинке из анизотропного материала, когда на ее контурах имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. Решение было получено с применением конформных отображений, функций комплексной переменной и метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, а также коэффициента теплообмена на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинки.

Ключевые слова: линейный поток тепла, многосвязная пластинка, пластинка из пьезоматериала, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. Во многих областях современной науки и техники в качестве элементов конструкций широко используются тонкие пластинки, изготовленные из пьезоматериалов. Под действием тепловых, механических и электромагнитных полей в них могут возникать существенные концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Поэтому являются актуальными вопросы разработки методов определения термоэлектромагнитоупругого состояния упругих тел из пьезоматериалов. К настоящему времени решено множество задач о действии различных физических полей на упругие тела из пьезоматериалов [1–5], в том числе о действии температурных

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

полей на тонкие многосвязные пластинки [6, 7]. А в работах [8, 9] приведены результаты исследований термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных пластинок в условиях конвективного теплообмена с внешней средой.

В данной статье метод определения термоэлектромагнитоупругого состояния, возникающего от действия линейного потока тепла, распространен на случай, когда на контурах пластинки имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. Решение задачи получено с использованием функций комплексной переменной, а определение неизвестных коэффициентов разложений голоморфных функций в ряды Лорана сведено к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями с установлением закономерностей влияния характеристик конвективного теплообмена, свойств материала пластинки, геометрических особенностей пластинки на значения напряжений в пластинке.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную многосвязную пластинку из пьезоматериала, занимающую область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга. Через контуры пластинки имеет место неравномерный конвективный теплообмен с коэффициентом $h_l(\tau)$ с внешней средой температуры \mathfrak{T}_l . Контур отверстия свободны от внешних механических воздействий либо жестко подкреплены, электромагнитные воздействия отсутствуют. На бесконечности под углом α к оси Ox действует линейный поток тепла плотности q , а механические и электромагнитные воздействия отсутствуют.

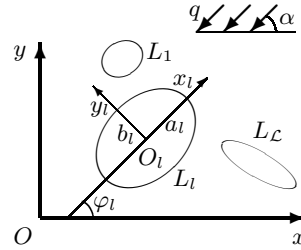


Рис. 1

Поставленную задачу термоэлектромагнитоупругости будем решать в несвязанной постановке с использованием комплексных потенциалов. Тогда задача на первом этапе сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$, а на втором – комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из граничных условий соответствующих задач.

Значения основных характеристик температурного поля (температура T , плотности потока тепла q_x, q_y) в любой точке пластинки можно определять по формулам [6, 7]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5), \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) + 2 \operatorname{Re} i\kappa(\mu_5, -1) F_5'(z_5). \quad (2)$$

Здесь

$$T^* = q(t_x x + t_y y),$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\kappa^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\kappa^2},$$

Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной пластинки из пьезоматериала

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha; \quad \kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

μ_5 – корень характеристического уравнения теплопроводности [6, 7]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (3)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки.

Значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; индукций электромагнитного поля D_x, D_y, B_x, B_y ; напряженностей электромагнитного полей E_x, E_y, H_x, H_y ; перемещений u, v ; потенциалов электромагнитного поля φ, ψ) в любой точке пластинки можно определять по формулам [6, 7]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (4)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (5)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (6)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (7)$$

Здесь μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корни характеристического уравнения плоской задачи термоэлектромагнитоупругости [6, 7]

$$l_8(\mu) = 0, \quad (8)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};$$

$$(E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) = (t_1, t_2, m_1, m_2)T^*;$$

$$u^* = \frac{\alpha_1qt_x}{2}x^2 - \frac{(\alpha_2t_x - \alpha_6t_y)q}{2}y^2 + \alpha_1qt_yxy,$$

$$v^* = \frac{\alpha_2qt_y}{2}y^2 - \frac{(\alpha_1t_y - \alpha_6t_x)q}{2}x^2 + \alpha_2qt_xxy,$$

$$\varphi^* = -\frac{t_1qt_x}{2}x^2 - \frac{t_2qt_y}{2}y^2 - t_1qt_xxy, \quad \psi^* = -\frac{m_1qt_x}{2}x^2 - \frac{m_2qt_y}{2}y^2 - m_1qt_xxy;$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала пластинки; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} – коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости материала пластинки; α_i – коэффициенты теплового расширения материала пластинки; t_i и m_i – пирозлектрические и пирромагнитные модули материала пластинки; δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Комплексные потенциалы. Функции $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) определены в многосвязных областях S_5 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [6, 7]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

В общем случае функции $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) имеют вид [6, 7]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь c_5 , D_{5l} – вещественные постоянные, определяемая из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$; z_{5l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{5ln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$; ζ_{5l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k);$$

Γ_k , A_{kl} , B_{kl} ($k = \overline{1, 4}$) – комплексные постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$, $A_{5l} = r_5 D_{5l}$, $B_{5l} = r_5 (c_{51l} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$; $w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров L_l ; a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [6, 7]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в системе координат Oxy –

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l,$$

$$y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловой параметр уравнения эллипса.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 5}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [6, 7]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию [10]

$$2 \operatorname{Re} (h_l(\tau) F_5(\tau_5) + i\kappa \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = q_n^*(\tau) - h_l(\tau) (T^*(\tau) - \mathfrak{I}_l), \quad (14)$$

где $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$, s – дуга контура отверстия;

$$q_n^*(\tau) = q_x^*(\tau) \cos(nx) + q_y^*(\tau) \cos(ny);$$

τ – аффикс граничной точки; τ_5 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (9).

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости [6, 7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) = \left(\frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds}, \frac{df_{l3}}{ds}, \frac{df_{l4}}{ds} \right), \quad (15)$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; τ_k – точки, получаемые из граничной точки при аффинном преобразовании (10). Для контуров L_l , свободных от внешних механических воздействий,

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (u_l(\tau) - u^*(\tau), v_l(\tau) - v^*(\tau), c_{l3}, c_{l4}),$$

c_{li} – неизвестные постоянные интегрирования; $u_l(\tau)$, $v_l(\tau)$ – заданные на контуре значения перемещений.

3. Решение задачи. Неизвестные постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , a_{kln} , входящие в функции (11) и (12), будем определять из граничных условий (14) и (15) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых будем минимизировать невязку граничных условий.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (11) в граничное условие (14) для определения неизвестных постоянных c_5 , D_{5l} , c_{5ln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений [10]:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_l(\tau_{im})c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l(\tau_{im})w_{5l}(\tau_{5im}) + i\kappa\delta_{5,s}(\tau_{5im})w'_{5l}(\tau_{5im})) D_{5l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l(\tau_{im})\varphi_{5ln}(\tau_{5im}) + i\kappa\delta_{5,s}(\tau_{5im})\varphi'_{5ln}(\tau_{5im})) c_{5ln} = \\ & = q_n^*(\tau_{im}) - h_l(\tau_{im})(T^*(\tau_{im}) - \mathfrak{T}_l) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tau_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$, τ_{im} – аффикс точки M_{im} . После решения этой системы с использованием сингулярных разложений [11] постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , а, следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) становятся известными, и тогда можно в любой точке пластинки определять температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2) [6, 7].

Задача термоэлектромагнитоупругости. При подстановке функций (11) и (12) в граничные условия (15) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip}\delta_{k,s}(\tau_{kim})\varphi'_{kln}(\tau_{kim})a_{kln} = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kip}\delta_{k,s}(\tau_{kim})N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{5ip}\delta_{5,s}(\tau_{5im})r_5 F_5(\tau_{5im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \\ & (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. После решения этой системы с использованием сингулярных разложений [11] постоянные a_{kln} , а, следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (12) будут известны, и тогда можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния по формулам (4)–(7) [6, 7].

4. Численные исследования. Численные исследования были проведены для пластинки с одним и двумя круговыми отверстиями. Пластинка считалась

изготовленной из композита на основе $BaTiO_3-CoFe_2O_4$, физико-механические постоянные которого следующие [12]:

$$s_{11} = 7,165s_0, \quad s_{22} = 6,797s_0, \quad s_{66} = 19,912s_0, \quad s_{12} = -2,337s_0,$$

$$g_{16} = 2,028g_0, \quad g_{21} = -0,496g_0, \quad g_{22} = 1,157g_0,$$

$$p_{16} = 1,850p_0, \quad p_{21} = 0,576p_0, \quad p_{22} = 1,186p_0,$$

$$\beta_{11} = 0,156\beta_0, \quad \beta_{22} = 0,137\beta_0,$$

$$\nu_{11} = -0,190\nu_0, \quad \nu_{22} = -0,185\nu_0,$$

$$\chi_{11} = 0,336\chi_0, \quad \chi_{22} = 0,119\chi_0,$$

$$\alpha_1 = 8,530\alpha_0, \quad \alpha_2 = 1,990\alpha_0,$$

$$t_2 = 133t_0, \quad m_2 = 133m_0, \quad k_{11} = 2,5k_0, \quad k_{22} = 2,5k_0.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА}, \quad \chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТл}^{-1},$$

$$\alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{ МКл} \cdot \text{ К})^{-1},$$

$$m_0 = 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}.$$

При проведении расчетов количество членов в рядах в представлениях (11), (12) и «коллокационных точек» на контурах L_i , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (16) и (17), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с высокой степенью точности. Как показали численные исследования, для этого необходимо было в указанных рядах оставлять от 100 до 200 членов, на каждом из контуров брать от 1000 до 3000 «коллокационных точек». При этом, решалась как задача термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитывается весь комплекс свойств материала пластинки, так и задача термоупругости (ТУ), когда электромагнитные свойства материала не учитываются.

В таблице 1 для пластинки с одним круговым отверстием радиуса a ($a_1 = b_1 = a$) со свободным от механических воздействий контуром, в которой действует линейный поток тепла плотности q под углом $\alpha = \pi/2$ (рис. 2, a), когда через контур отверстия имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом $h_1 = H(1 + \cos \theta)$ с внешней средой температуры $\mathfrak{T}_1 = 0$, с точностью до q как множителя приведены значения напряжений σ_s/s_0 в некоторых точках контура отверстия с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения Ha .

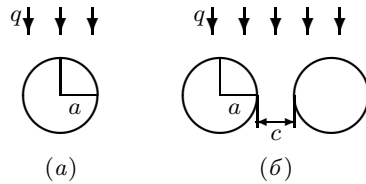


Рис. 2

Таблица 1. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

θ , рад.	Значения Ha						
	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	∞
	Задача ТЭМУ						
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\pi/12$	0,186	0,170	0,061	-0,125	-0,180	-0,187	-0,188
$\pi/6$	0,353	0,324	0,125	-0,230	-0,340	-0,355	-0,357
$\pi/4$	0,445	0,411	0,180	-0,268	-0,424	-0,446	-0,448
$\pi/3$	0,328	0,310	0,176	-0,150	-0,303	-0,327	-0,330
$5\pi/6$	-0,117	-0,100	0,015	0,154	0,132	0,121	0,120
$\pi/2$	-0,472	-0,440	-0,208	0,285	0,457	0,474	0,476
$7\pi/12$	-0,120	-0,121	-0,122	-0,027	0,093	0,117	0,120
$4\pi/3$	0,327	0,300	0,112	-0,248	-0,333	-0,331	-0,330
$3\pi/2$	0,445	0,417	0,218	-0,223	-0,422	-0,447	-0,448
$5\pi/3$	0,354	0,335	0,196	-0,124	-0,309	-0,352	-0,357
$11\pi/12$	0,187	0,178	0,110	-0,047	-0,144	-0,179	-0,188
π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Задача ТУ						
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\pi/12$	-0,036	-0,035	-0,025	0,009	0,031	0,036	0,036
$\pi/6$	-0,101	-0,095	-0,055	0,043	0,091	0,100	0,102
$\pi/4$	-0,202	-0,188	-0,091	0,106	0,188	0,202	0,204
$\pi/3$	-0,324	-0,300	-0,137	0,183	0,304	0,324	0,327
$5\pi/6$	-0,429	-0,398	-0,183	0,243	0,405	0,430	0,433
$\pi/2$	-0,472	-0,440	-0,212	0,257	0,443	0,472	0,476
$7\pi/12$	-0,430	-0,401	-0,202	0,218	0,399	0,429	0,433
$4\pi/3$	-0,324	-0,303	-0,156	0,156	0,297	0,323	0,327
$3\pi/2$	-0,202	-0,188	-0,092	0,103	0,184	0,201	0,204
$5\pi/3$	-0,101	-0,092	-0,036	0,070	0,098	0,101	0,102
$11\pi/12$	-0,036	-0,032	-0,006	0,040	0,045	0,039	0,036
π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

В таблице 2 для пластинки с двумя круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$) (рис. 2, б), удаленными друг от друга на расстояние c , через контуры которых имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами $h_1 = H(1 + \cos \theta)$ и $h_2 = H(1 - \cos \theta)$ с внешними средами температур \mathfrak{T}_1 и \mathfrak{T}_2 соответственно (симметричный теплообмен), с точностью до $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2$, как множителя, приведены значения напряжений σ_s/s_0 в некоторых точках контура левого отверстия с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значений Ha и c/a для случая задачи ТЭМУ.

В таблице 3 для этой же пластинки приведены аналогичные значения напряжений σ_s/s_0 для случая, когда через контуры которых имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами $h_1 = H(1 - \cos \theta)$ и $h_2 = H(1 + \cos \theta)$, для случая задачи ТЭМУ.

В таблицах 4 и 5 приведены аналогичные значения напряжений σ_s/s_0 , соответствующие двум вышеуказанным случаям, для случая задачи ТУ.

Во всех таблицах $Ha = \infty$ соответствует случаю, когда на контуре отверстия задана температура, равная температуре внешней среды.

Таблица 2. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a						
		0,1	0,5	1	2	10	100	∞
10^{-2}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,122	0,231	0,297	0,361	0,370	0,354	0,353
	$\pi/3$	-0,602	-0,339	-0,194	-0,030	0,254	0,322	0,328
	$\pi/2$	-0,924	-0,778	-0,705	-0,635	-0,502	-0,473	-0,472
	$2\pi/3$	0,761	0,622	0,548	0,475	0,370	0,333	0,327
	$5\pi/6$	0,577	0,498	0,455	0,412	0,356	0,353	0,354
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^{-1}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,105	0,204	0,266	0,327	0,339	0,325	0,324
	$\pi/3$	-0,499	-0,290	-0,165	-0,019	0,241	0,304	0,310
	$\pi/2$	-0,818	-0,706	-0,646	-0,586	-0,466	-0,440	-0,440
	$2\pi/3$	0,670	0,562	0,499	0,435	0,340	0,305	0,300
	$5\pi/6$	0,523	0,461	0,425	0,387	0,337	0,334	0,335
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,023	0,054	0,079	0,109	0,130	0,125	0,125
	$\pi/3$	-0,060	-0,030	-0,002	0,041	0,143	0,173	0,176
	$\pi/2$	-0,288	-0,276	-0,267	-0,255	-0,219	-0,208	-0,208
	$2\pi/3$	0,221	0,205	0,190	0,170	0,131	0,115	0,112
	$5\pi/6$	0,247	0,238	0,230	0,218	0,198	0,196	0,196
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^1	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,049	-0,109	-0,162	-0,220	-0,239	-0,230	-0,230
	$\pi/3$	0,174	0,161	0,129	0,058	-0,109	-0,147	-0,150
	$\pi/2$	0,365	0,367	0,365	0,355	0,299	0,285	0,285
	$2\pi/3$	-0,310	-0,310	-0,306	-0,295	-0,267	-0,251	-0,248
	$5\pi/6$	-0,146	-0,144	-0,142	-0,135	-0,122	-0,124	-0,124
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^2	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,055	-0,133	-0,208	-0,298	-0,351	-0,341	-0,340
	$\pi/3$	0,153	0,143	0,109	0,019	-0,231	-0,297	-0,303
	$\pi/2$	0,539	0,546	0,549	0,545	0,478	0,457	0,457
	$2\pi/3$	-0,434	-0,434	-0,429	-0,414	-0,368	-0,338	-0,333
	$5\pi/6$	-0,339	-0,338	-0,334	-0,326	-0,307	-0,309	-0,309
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^3	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,055	-0,135	-0,212	-0,307	-0,366	-0,356	-0,355
	$\pi/3$	0,147	0,137	0,102	0,011	-0,250	-0,321	-0,327
	$\pi/2$	0,555	0,563	0,567	0,564	0,497	0,475	0,474
	$2\pi/3$	-0,440	-0,439	-0,434	-0,419	-0,369	-0,337	-0,331
	$5\pi/6$	-0,382	-0,381	-0,377	-0,369	-0,349	-0,351	-0,352
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
∞	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,055	-0,136	-0,213	-0,308	-0,368	-0,358	-0,357
	$\pi/3$	0,146	0,136	0,101	0,010	-0,253	-0,324	-0,330
	$\pi/2$	0,557	0,564	0,569	0,566	0,499	0,477	0,476
	$2\pi/3$	-0,440	-0,439	-0,434	-0,419	-0,368	-0,336	-0,330
	$5\pi/6$	-0,388	-0,386	-0,382	-0,374	-0,354	-0,356	-0,357
π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Таблица 3. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a						
		0,1	0,5	1	2	10	100	∞
10^{-2}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,123	0,233	0,299	0,363	0,371	0,355	0,354
	$\pi/3$	-0,612	-0,344	-0,197	-0,032	0,253	0,321	0,327
	$\pi/2$	-0,928	-0,780	-0,707	-0,636	-0,502	-0,473	-0,472
	$2\pi/3$	0,765	0,624	0,550	0,476	0,371	0,334	0,328
	$5\pi/6$	0,577	0,497	0,454	0,411	0,355	0,352	0,353
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^{-1}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,116	0,220	0,283	0,343	0,351	0,336	0,335
	$\pi/3$	-0,581	-0,331	-0,194	-0,038	0,231	0,294	0,300
	$\pi/2$	-0,856	-0,723	-0,657	-0,592	-0,467	-0,440	-0,440
	$2\pi/3$	0,708	0,581	0,513	0,446	0,350	0,315	0,310
	$5\pi/6$	0,525	0,453	0,415	0,376	0,325	0,323	0,324
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,067	0,133	0,173	0,208	0,205	0,197	0,196
	$\pi/3$	-0,383	-0,247	-0,167	-0,075	0,078	0,109	0,112
	$\pi/2$	-0,402	-0,348	-0,319	-0,288	-0,221	-0,208	-0,208
	$2\pi/3$	0,345	0,292	0,264	0,234	0,194	0,179	0,176
	$5\pi/6$	0,200	0,173	0,159	0,143	0,124	0,124	0,125
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^1	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,017	-0,039	-0,060	-0,092	-0,128	-0,125	-0,124
	$\pi/3$	-0,023	-0,041	-0,062	-0,098	-0,208	-0,244	-0,248
	$\pi/2$	0,321	0,321	0,320	0,319	0,296	0,285	0,285
	$2\pi/3$	-0,243	-0,235	-0,226	-0,211	-0,173	-0,154	-0,150
	$5\pi/6$	-0,261	-0,258	-0,254	-0,247	-0,230	-0,229	-0,230
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^2	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,049	-0,121	-0,185	-0,264	-0,319	-0,311	-0,309
	$\pi/3$	0,121	0,099	0,059	-0,026	-0,261	-0,326	-0,333
	$\pi/2$	0,529	0,535	0,538	0,534	0,477	0,457	0,457
	$2\pi/3$	-0,417	-0,414	-0,406	-0,389	-0,339	-0,308	-0,303
	$5\pi/6$	-0,373	-0,371	-0,367	-0,358	-0,338	-0,339	-0,340
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^3	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,054	-0,135	-0,210	-0,303	-0,363	-0,353	-0,352
	$\pi/3$	0,143	0,131	0,095	0,004	-0,254	-0,325	-0,331
	$\pi/2$	0,554	0,561	0,566	0,562	0,497	0,475	0,474
	$2\pi/3$	-0,438	-0,437	-0,431	-0,415	-0,365	-0,333	-0,327
	$5\pi/6$	-0,386	-0,384	-0,381	-0,372	-0,352	-0,354	-0,355
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
∞	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,055	-0,136	-0,213	-0,308	-0,368	-0,358	-0,357
	$\pi/3$	0,146	0,136	0,101	0,010	-0,253	-0,324	-0,330
	$\pi/2$	0,557	0,564	0,569	0,566	0,499	0,477	0,476
	$2\pi/3$	-0,440	-0,439	-0,434	-0,419	-0,368	-0,336	-0,330
	$5\pi/6$	-0,388	-0,386	-0,382	-0,374	-0,354	-0,356	-0,357
π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Таблица 4. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a						
		0,1	0,5	1	2	10	100	∞
10^{-2}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,052	0,083	0,089	0,073	-0,040	-0,094	-0,101
	$\pi/3$	-0,364	-0,312	-0,290	-0,269	-0,279	-0,318	-0,324
	$\pi/2$	-0,847	-0,719	-0,655	-0,591	-0,490	-0,473	-0,472
	$2\pi/3$	-0,688	-0,590	-0,540	-0,489	-0,382	-0,331	-0,324
	$5\pi/6$	-0,304	-0,256	-0,233	-0,209	-0,149	-0,107	-0,101
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^{-1}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,046	0,075	0,081	0,066	-0,039	-0,089	-0,095
	$\pi/3$	-0,318	-0,281	-0,265	-0,247	-0,258	-0,294	-0,300
	$\pi/2$	-0,754	-0,655	-0,602	-0,547	-0,455	-0,440	-0,440
	$2\pi/3$	-0,615	-0,539	-0,498	-0,454	-0,356	-0,309	-0,303
	$5\pi/6$	-0,268	-0,232	-0,213	-0,192	-0,137	-0,098	-0,092
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,015	0,025	0,027	0,021	-0,027	-0,052	-0,055
	$\pi/3$	-0,102	-0,105	-0,106	-0,105	-0,116	-0,134	-0,137
	$\pi/2$	-0,290	-0,278	-0,267	-0,252	-0,218	-0,212	-0,212
	$2\pi/3$	-0,251	-0,242	-0,233	-0,220	-0,181	-0,159	-0,156
	$5\pi/6$	-0,093	-0,090	-0,086	-0,080	-0,057	-0,038	-0,036
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^1	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,020	-0,037	-0,047	-0,046	0,010	0,039	0,043
	$\pi/3$	0,117	0,129	0,136	0,139	0,157	0,179	0,183
	$\pi/2$	0,286	0,292	0,294	0,291	0,264	0,257	0,257
	$2\pi/3$	0,212	0,218	0,221	0,219	0,184	0,159	0,156
	$5\pi/6$	0,109	0,113	0,115	0,115	0,095	0,073	0,070
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^2	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,029	-0,052	-0,064	-0,061	0,034	0,085	0,091
	$\pi/3$	0,176	0,197	0,212	0,221	0,259	0,299	0,304
	$\pi/2$	0,479	0,488	0,493	0,491	0,453	0,443	0,443
	$2\pi/3$	0,389	0,397	0,402	0,400	0,346	0,303	0,297
	$5\pi/6$	0,165	0,171	0,174	0,175	0,141	0,104	0,098
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^3	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,030	-0,054	-0,066	-0,062	0,039	0,094	0,100
	$\pi/3$	0,186	0,208	0,223	0,234	0,275	0,318	0,324
	$\pi/2$	0,510	0,519	0,524	0,522	0,483	0,472	0,472
	$2\pi/3$	0,421	0,429	0,434	0,432	0,375	0,329	0,323
	$5\pi/6$	0,173	0,179	0,183	0,183	0,147	0,107	0,101
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
∞	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,030	-0,054	-0,067	-0,062	0,040	0,095	0,102
	$\pi/3$	0,187	0,209	0,225	0,236	0,277	0,320	0,327
	$\pi/2$	0,514	0,523	0,528	0,526	0,487	0,476	0,476
	$2\pi/3$	0,426	0,434	0,438	0,437	0,379	0,333	0,327
	$5\pi/6$	0,174	0,180	0,184	0,184	0,148	0,108	0,102
π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Таблица 5. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a						
		0,1	0,5	1	2	10	100	∞
10^{-2}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,052	0,084	0,090	0,074	-0,040	-0,094	-0,101
	$\pi/3$	-0,366	-0,313	-0,291	-0,269	-0,279	-0,318	-0,324
	$\pi/2$	-0,851	-0,720	-0,655	-0,591	-0,490	-0,473	-0,472
	$2\pi/3$	-0,690	-0,590	-0,540	-0,489	-0,381	-0,330	-0,324
	$5\pi/6$	-0,305	-0,257	-0,234	-0,210	-0,149	-0,107	-0,101
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^{-1}	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,049	0,078	0,085	0,070	-0,036	-0,086	-0,092
	$\pi/3$	-0,339	-0,291	-0,271	-0,251	-0,261	-0,297	-0,303
	$\pi/2$	-0,782	-0,665	-0,607	-0,549	-0,456	-0,440	-0,440
	$2\pi/3$	-0,633	-0,543	-0,498	-0,452	-0,354	-0,306	-0,300
	$5\pi/6$	-0,282	-0,239	-0,218	-0,196	-0,140	-0,101	-0,095
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	0,024	0,043	0,048	0,043	-0,008	-0,033	-0,036
	$\pi/3$	-0,171	-0,149	-0,140	-0,130	-0,135	-0,153	-0,156
	$\pi/2$	-0,352	-0,306	-0,283	-0,260	-0,219	-0,212	-0,212
	$2\pi/3$	-0,274	-0,240	-0,223	-0,205	-0,162	-0,140	-0,137
	$5\pi/6$	-0,135	-0,118	-0,110	-0,101	-0,076	-0,057	-0,055
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^1	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,015	-0,023	-0,025	-0,018	0,037	0,066	0,070
	$\pi/3$	0,094	0,102	0,108	0,111	0,130	0,152	0,156
	$\pi/2$	0,307	0,304	0,300	0,291	0,263	0,257	0,257
	$2\pi/3$	0,263	0,260	0,256	0,248	0,211	0,186	0,183
	$5\pi/6$	0,097	0,097	0,095	0,091	0,067	0,046	0,043
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^2	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,028	-0,050	-0,060	-0,054	0,041	0,092	0,098
	$\pi/3$	0,175	0,194	0,206	0,215	0,252	0,291	0,297
	$\pi/2$	0,489	0,495	0,497	0,492	0,453	0,443	0,443
	$2\pi/3$	0,406	0,412	0,414	0,409	0,353	0,310	0,304
	$5\pi/6$	0,165	0,169	0,171	0,170	0,134	0,097	0,091
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10^3	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,030	-0,054	-0,066	-0,062	0,039	0,094	0,101
	$\pi/3$	0,186	0,208	0,223	0,234	0,274	0,317	0,323
	$\pi/2$	0,511	0,520	0,525	0,522	0,483	0,473	0,472
	$2\pi/3$	0,424	0,431	0,436	0,433	0,376	0,330	0,324
	$5\pi/6$	0,173	0,179	0,183	0,183	0,146	0,107	0,100
	π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
∞	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/6$	-0,030	-0,054	-0,067	-0,062	0,040	0,095	0,102
	$\pi/3$	0,187	0,209	0,225	0,236	0,277	0,320	0,327
	$\pi/2$	0,514	0,523	0,528	0,526	0,487	0,476	0,476
	$2\pi/3$	0,426	0,434	0,438	0,437	0,379	0,333	0,327
	$5\pi/6$	0,174	0,180	0,184	0,184	0,148	0,108	0,102
π	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Выводы. Из полученных данных следует, что установленное распределение коэффициента теплообмена по контурам отверстий существенно влияет на значения напряжений вблизи отверстий. При этом для рассмотренных распределений коэффициента теплообмена на контурах имеются зоны с ухудшенным теплообменом (практически теплоизолированные) при любых значениях параметра Ha .

При значениях $Ha < 0,01$ контуры отверстий являются практически теплоизолированными; вследствие этого возникающее температурное поле мало отличается от однородного и концентрация напряжений в пластинке со свободными контурами очень мала. А при значениях $Ha > 100$ зона с ухудшенным теплообменом становится достаточно малой, чтобы оказывать существенное влияние на термоэлектромагнитоупругое состояние, и можно полагать, что на контуре отверстия задана температура, равная температуре внешней среды.

В то же время, при возрастании значения Ha более значительное влияние на распределение напряжений в пластинке оказывает расстояние между контурами отверстий: чем больше значение Ha , тем более существенным является рост концентрации напряжений около контуров отверстий при увеличении расстояния между контурами.

Из представленных данных можно заключить, что при проведении численных расчетов следует учитывать все свойства материала пластинки, поскольку пренебрежение электромагнитными свойствами ее материала приводит к существенному искажению значений напряжений.

Исследования проводились в Донецком государственном университете в рамках госзадания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
4. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
5. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
6. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
7. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
8. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – № 2 (75). – С. 18–29.
9. Глушанков Е.С. Периодическая задача термоэлектромагнитоупругости для пластинки с эллиптическими отверстиями в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2021. – № 4. – С. 3–13.

10. Глушанков Е.С. Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 2 (84). – С. 39–47. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-2-39-47. – EDN:FLTAHT.
11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

E.S. Glushankov

The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the non-uniform convective heat transfer under linear heat flux action.

A solution is presented for the problem of linear heat flux acting in the infinite multiply connected piezoelectric plate, when a non-uniform convective heat transfer with external environment occurs on its contours. The solution was obtained with using the conformal mappings, the complex potentials and the least squares. The effect of plate's geometric characteristics, the properties of its material, and the heat transfer characteristics on the thermo-electro-magneto-elastic state of the plate was brought out with the numerical studies.

Keywords: *linear heat flux, multiply connected plate, piezoelectric plate, convective heat transfer, thermal stresses, complex potentials.*

*Статья поступила в редакцию 04.10.2024;
доработана 25.10.2024;
рекомендована к печати 06.11.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-3-20-34

EDN:YYIVPO

©2024. Л.П. Вовк¹, А.И. Дзундза², Н.Ю. Мельничук³, И.А. Моисеенко⁴

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ СЕКТОРНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Построены базисные решения для задачи исследования свойств нормальных упругих волн, распространяющихся в радиально неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения с идеально гибким нерастяжимым мембранным покрытием поверхности секторного выреза. Элементы базисных решений выражены через аналитические функции. Модули упругости и плотность материала волновода задаются с использованием шестифакторной модели функциональной радиальной неоднородности физико-механических характеристик трансверсально-изотропного материала. Представлен сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, проведенного для однородного и функционально неоднородных свободных на цилиндрическом участке боковой поверхности волноводов. Даны количественные и качественные оценки полученных численных результатов.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, трансверсально-изотропный цилиндрический волновод, секторное сечение, модель радиальной неоднородности, базисное решение.

¹Вовк Леонид Петрович – доктор техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ, Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com.

Vovk Leonid Petrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technologies, Chair of Mathematical Modeling.

²Дзундза Алла Ивановна – доктор пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

Dzundza Alla Ivanovna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Мельничук Наталья Юрьевна – ассистент каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

Melnichuk Natalia Iurievna – Assistant, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

⁴Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Acad. A.S. Kosmodamiansky.

Введение. Повышенный интерес к функционально-градиентным материалам в настоящее время связан с различными аспектами их применения. Этот факт инициирует разработку новых теоретических подходов к анализу математических моделей, описывающих волновые процессы в объектах из таких материалов, включая задачи исследования свойств нормальных упругих волн в цилиндрических телах из материалов данного типа с варьируемыми геометрией и физико-механическими свойствами. Одним из направлений анализа указанного класса задач является исследование возможностей целенаправленного управления структурой спектра, имеющих новые приложения в ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике. Проведение теоретических исследований в этой области предполагает, как правило, построение новых аналитических решений для соответствующих математических моделей. Одним из подходов, позволяющих строить решения указанного класса, является привлечение специальных моделей функциональной радиальной неоднородности физико-механических характеристик таких материалов.

В работах [1, 2] построены базисные аналитические решения задачи о распространении упругих волн в протяженных цилиндрах кругового секторного и кругового поперечных сечений, изготовленных из трансверсально-изотропного материала с единым для всех физико-механических характеристик материала функциональным законом экспоненциально степенной радиальной неоднородности. В работах [3–5] с применением аналогичной модели функциональной радиальной неоднородности построены базисные аналитические решения для случаев распространения волн в протяженных цилиндрах кругового и кругового секторного поперечных сечений, изготовленных из ортотропного материала. В работе [6] с применением трехфакторной модели функциональной радиальной неоднородности физико-механических характеристик изотропного материала построены базисные аналитические решения для случая распространения волн в протяженных цилиндрах кругового секторного поперечного сечения.

В данной работе с использованием предложенной в работе [7] шестифакторной модели функциональной радиальной неоднородности физико-механических характеристик трансверсально-изотропного материала представлены новые базисные аналитические решения для случая распространяющихся нормальных волн в радиально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения со специальным граничным условием на поверхности секторного выреза.

1. Постановка задачи. Рассматривается цилиндрический волновод радиуса R_* [м], имеющий в поперечном сечении круговой сектор. В отнесенной к линейному размеру R_* безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ волновод занимает область

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (0 < \alpha < \pi). \quad (1)$$

Волновод изготовлен из трансверсально-изотропного радиально-неоднородного материала с физико-механическими характеристиками

$$c_s(r) = C_* \tilde{c}_s(r) \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r) \quad (r \in [0, 1]), \quad (2)$$

где $C_* = \text{const} [\text{Н/М}^2]$ и $\rho_* = \text{const} [\text{кг/М}^3]$. Полагается, что функциональные законы

$$\tilde{c}_s = \tilde{c}_s(r) > 0 \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [0, \delta]) \quad (3)$$

относятся к классу $C^2[0, \delta]$ ($\delta > 1$) и являются произвольными в пределах допустимости варьирования значений характеристик трансверсально-изотропного материала.

Рассматривается пространственная линейная математическая модель распространения нормальных упругих волн с круговой частотой ω , нормированным линейным размером R_* продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) и окружным волновым числом τ ($\tau \in \mathbb{R}$) вдоль оси Oz исследуемого волновода. В результате применения метода разделения переменных уравнения математической модели получают такой вид [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U \mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \\ \mathbf{\Sigma}(r, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{G}}(r) \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r); \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{O} \quad (r \in [0, \delta]). \quad (6)$$

В соотношениях (4) $\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)$ и $\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)$ – вещественные диагональные матрицы функциональной зависимости от угловой координаты, отличные от нуля элементы которых имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \right]_{3,3} = \cos(\tau\theta + \beta), \quad \left[\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \right]_{2,2} = \sin(\tau\theta + \beta), \\ \left[\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \right]_{j,j} &= \cos(\tau\theta + \beta) \quad (j = 1, 2, 3, 5), \\ \left[\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \right]_{j,j} &= \sin(\tau\theta + \beta) \quad (j = 4, 6) \quad \beta \in \{0, \pi/2\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь β – параметр, задающий тип волновых движений:

– при $\beta = 0$ рассматриваются условно симметричные волны со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= u_z(r, \theta, z, t); \end{aligned}$$

– при $\beta = \pi/2$ рассматриваются условно антисимметричные волны со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= -u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= -u_z(r, \theta, z, t); \end{aligned}$$

τ – вещественный параметр разделения переменных. Остальные, используемые в соотношениях (4)–(6) обозначения для векторных $\mathbf{U}(r, \theta, z, t)$, $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$, $\Sigma(r, \theta, z, t)$, $\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(r)$ и матричных \mathbf{P}_U , \mathbf{P}_Σ , $\tilde{\mathbf{G}}(r)$ функциональных объектов, а также матричных дифференциальных операторов $\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$, определены в [7].

Математическая модель (4)–(6) дополняется граничными условиями:

– на участках поверхности секторного выреза $\Gamma_{\text{sec}} = \{r \in [0, 1], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)\}$ рассматриваются граничные условия, моделирующие нанесение абсолютно гибкого микропанцирного покрытия

$$\left[\begin{array}{l} u_r(r, \theta, z, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \end{array} \right] \Big|_{\Gamma_{\text{sec}}} = \mathbf{O}; \quad (8)$$

– на цилиндрическом участке граничной поверхности $\Gamma_{\text{cyl}} = \{r = 1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\}$ рассматриваются условия свободной

$$[\Sigma(r, \theta, z, t)]_{(1,5,6)} \Big|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = \mathbf{O}, \quad (9)$$

либо жестко закрепленной

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) \Big|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = \mathbf{O} \quad (10)$$

поверхности.

Из спектральной подзадачи (4), (7), (8) определяются значения окружного волнового числа τ в виде

$$\begin{aligned} \tau &\in \{(n - 1/2)\pi/\alpha\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{если } \beta = 0; \\ \tau &\in \{n\pi/\alpha\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{если } \beta = \pi/2. \end{aligned} \quad (11)$$

2. Базисные решения. Следуя работе [7], вводится в рассмотрение декартова система координат Ox_1x_2 и формально полагается, что неотрицательная часть полуоси Ox_1 совпадает с осью Or . На плоскости комплексной переменной $\xi = x_1 + ix_2$ рассматриваются произвольные, аналитические в области $|\xi| < \delta$ функции $\varphi = \varphi(\xi)$ и $\psi_s = \psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 5}$). Далее функциональные законы (3) определяются на основании введенных в работе [7] трех альтернативных вариантов модели радиальной неоднородности трансверсально-изотропного материала волновода

$$\tilde{c}_{11} = e^\varphi, \quad \tilde{c}_{12} = (1 - 2\psi_1)e^\varphi, \quad \tilde{c}_{13} = \psi_2 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{33} = \psi_3 e^\varphi, \quad (12-A)$$

$$\tilde{c}_{44} = \psi_4 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{66} = \psi_1 e^\varphi, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_5 e^\varphi \quad (r \in [0, 1]);$$

$$\tilde{c}_{11} = \psi_1 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{12} = (\psi_1 - 2)e^\varphi, \quad \tilde{c}_{13} = \psi_2 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{33} = \psi_3 e^\varphi, \quad (12-B)$$

$$\tilde{c}_{44} = \psi_4 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{66} = e^\varphi, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_5 e^\varphi \quad (r \in [0, 1]);$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11} &= \psi_1 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{12} = (\psi_1 - 2\psi_4)e^\varphi, \quad \tilde{c}_{13} = \psi_2 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{33} = \psi_3 e^\varphi, \\ \tilde{c}_{44} &= e^\varphi, \quad \tilde{c}_{66} = \psi_4 e^\varphi, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_5 e^\varphi \quad (r \in [0, 1]). \end{aligned} \quad (12-B)$$

Для каждого, представленного соотношениями (12-A)–(12-B) варианта модели неоднородности, рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной ξ матричного дифференциального оператора уравнения (6) $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$ в оператор $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi)$ с элементами

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{n,n} &= \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{nn}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{nn}^{(2)} \quad (n = \overline{1,3}), \\ \left[\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{n,m} &= \hat{f}_{nm}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{nm}^{(2)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \end{aligned} \quad (13)$$

где $d_\xi = d/d\xi$. Соответственно выбранному варианту модели неоднородности (12-A)–(12-B) в работе [7] определены входящие в представления (13) функции $\hat{f}_{nm}^{(s)} = \hat{f}_{nm}^{(s)}(\xi)$ ($s = \overline{1,2}$; $n, m = \overline{1,3}$).

Ставится задача – для заданных соотношениями (11) значений параметра τ построить для уравнения

$$\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta) \quad (14)$$

набор из трех линейно независимых частных решений вида

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) = \\ &= \xi^{\eta_q} \left[\hat{u}_r^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_\theta^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_z^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \right]^T \quad (\eta_q \in \mathbb{R}; q = \overline{1,3}) \end{aligned} \quad (15)$$

с аналитическими в области $|\xi| < \delta$ элементами $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$ ($s = r, \theta, z$; $q = \overline{1,3}$).

Известно, что система дифференциальных уравнений (14) имеет решения вида (15), если входящие в представление оператора $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi)$ функции $\hat{f}_{nm}^{(s)}(\xi)$ ($s = \overline{1,2}$; $n, m = \overline{1,3}$) являются аналитическими в области $|\xi| < \delta$ [8, 9]. В работе [7] описаны подходы для определения функций $\varphi = \varphi(\xi)$ и $\psi_s = \psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1,5}$) по заданным функциональным законам (3), а также получены достаточные условия несильной радиальной неоднородности трансверсально-изотропного материала, обеспечивающее аналитичность в области $|\xi| < \delta$ функций $\hat{f}_{nm}^{(s)}(\xi)$ ($s = \overline{1,2}$; $n, m = \overline{1,3}$).

Построенные по заданным функциональным законам (3) аналитические в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$, $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,5}$) [7], а также подлежащие определению элементы $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$ ($s = r, \theta, z$; $q = \overline{1,3}$) искомым частным решений (15), представляются абсолютно и равномерно сходящимися в любом круге $|\xi| \leq s$ ($0 < s < \delta$) разложениями вида

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1,5}), \\ \hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) &= \xi^{\kappa_s} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s,q)} \xi^n \quad (s = r, \theta, z; q = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\kappa_r = \kappa_\theta = 0$, $\kappa_z = 1$; $\{a_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ ($j = \overline{0, 5}$) – заданные наборы коэффициентов; $\{d_n^{(s,q)}\}_{n=0}^\infty$ ($s = r, \theta, z$; $q = \overline{1, 3}$), где $|d_0^{(r,q)}| + |d_0^{(\theta,q)}| + |d_0^{(z,q)}| \neq 0$ ($q = \overline{1, 3}$) – подлежащие определению наборы коэффициентов.

После подстановки вектора (15) в уравнение (14) с учетом разложений (16) для каждого варианта модели радиальной неоднородности (12-А)–(12-В) получается однородная система линейных уравнений третьего порядка вида

$$\mathbf{Q}_0^{(q)} \mathbf{B}_0^{(q)} = \mathbf{O}, \quad (17)$$

и последовательность систем неоднородных линейных уравнений третьего порядка вида

$$\mathbf{Q}_n^{(q)} \mathbf{B}_n^{(q)} = \mathbf{F}_n^{(q)} \left(\left\{ \mathbf{B}_m^{(q)} \right\}_{m=0}^{n-1} \right) \quad (n = \overline{1, \infty}; q = 1, 2, 3), \quad (18)$$

для определения векторов $\mathbf{B}_n^{(q)} = [d_n^{(r,q)}, d_n^{(\theta,q)}, d_n^{(z,q)}]^T$ ($n = \overline{0, \infty}$; $q = \overline{1, 3}$) с искомыми коэффициентами $\{d_n^{(s,q)}\}_{n=0}^\infty$ ($s = r, \theta, z$; $q = \overline{1, 3}$). Входящие в уравнения (17), (18) матрицы $\mathbf{Q}_n^{(q)}$ ($n = \overline{0, \infty}$; $q = \overline{1, 3}$) и вектор-столбцы $\mathbf{F}_n^{(q)}$ ($n = \overline{1, \infty}$; $q = \overline{1, 3}$) соответственно выбранному варианту модели неоднородности (12-А)–(12-В) определены в работе [7].

Из единого для всех вариантов модели радиальной неоднородности (12-А)–(12-В) условия разрешимости однородного уравнения (17) вида

$$\det \left(\mathbf{Q}_0^{(q)} \right) = (\eta_q + \tau + 1)^2 (\eta_q - \tau + 1)^2 (\eta_q + \tau - 1) (\eta_q - \tau - 1) = 0 \quad (19)$$

определяется набор допустимых значений параметров η_q . С учетом значения параметра τ , задаваемого формулой (11), из уравнения (17) определяются начальные условия η_q и $\mathbf{B}_0^{(q)}$ ($q = \overline{1, 3}$) для уравнений (18). Получается:

$$\begin{aligned} & \text{если } 1/2 < \tau < 1, \text{ то} \\ \eta_1 &= 1 - \tau, \quad d_0^{(r,1)} = a_0^{(4)} \left((\tau - 2) a_0^{(1)} - \tau \right), \quad d_0^{(\theta,1)} = a_0^{(4)} \left(\tau \left(a_0^{(1)} - 1 \right) + 2 \right), \\ & \quad d_0^{(z,1)} = k a_0^{(1)} \left(a_0^{(2)} + a_0^{(4)} \right), \\ \eta_2 &= \tau - 1, \quad d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\ \eta_3 &= \tau + 1, \quad d_0^{(r,3)} = a_0^{(4)} \left(\tau - (\tau + 2) a_0^{(1)} \right), \\ & \quad d_0^{(\theta,3)} = a_0^{(4)} \left(\tau \left(a_0^{(1)} - 1 \right) - 2 \right), \\ & \quad d_0^{(z,3)} = k a_0^{(1)} \left(a_0^{(2)} + a_0^{(4)} \right); \end{aligned}$$

если $\tau = 1$, то

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 0, \quad d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \\ \eta_2 &= 0, \quad d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\ \eta_3 &= 2, \quad d_0^{(r,3)} = a_0^{(4)} (1 - 3a_0^{(1)}), \quad d_0^{(\theta,3)} = a_0^{(4)} (a_0^{(1)} - 3), \\ &\quad d_0^{(z,3)} = ka_0^{(1)} (a_0^{(2)} + a_0^{(4)}); \end{aligned}$$

если $\tau > 1$, то

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \tau - 1, \quad d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \\ \eta_2 &= \tau - 1, \quad d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\ \eta_3 &= \tau + 1, \quad d_0^{(r,3)} = a_0^{(4)} (\tau - (\tau + 2) a_0^{(1)}), \\ &\quad d_0^{(\theta,3)} = a_0^{(4)} (\tau (a_0^{(1)} - 1) - 2), \\ &\quad d_0^{(z,3)} = ka_0^{(1)} (a_0^{(2)} + a_0^{(4)}); \end{aligned}$$

(20-А)

если $1/2 < \tau < 1$, то

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 1 - \tau, \quad d_0^{(r,1)} = -a_0^{(4)} (\tau (a_0^{(1)} - 1) + 2), \\ d_0^{(\theta,1)} &= -a_0^{(4)} (a_0^{(1)} (\tau - 2) - \tau), \quad d_0^{(z,1)} = k (a_0^{(2)} + a_0^{(4)}), \\ \eta_2 &= \tau - 1, \quad d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\ \eta_3 &= \tau + 1, \quad d_0^{(r,3)} = a_0^{(4)} (\tau (a_0^{(1)} - 1) - 2), \\ d_0^{(\theta,3)} &= -a_0^{(4)} (a_0^{(1)} (\tau + 2) - \tau), \quad d_0^{(z,3)} = k (a_0^{(2)} + a_0^{(4)}); \end{aligned}$$

если $\tau = 1$, то

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 0, \quad d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \\ \eta_2 &= 0, \quad d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\ \eta_3 &= 2, \quad d_0^{(r,3)} = a_0^{(4)} (a_0^{(1)} - 3), \quad d_0^{(\theta,3)} = a_0^{(4)} (1 - 3a_0^{(1)}), \\ &\quad d_0^{(z,3)} = k (a_0^{(2)} + a_0^{(4)}); \end{aligned}$$

если $\tau > 1$, то

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \tau - 1, \quad d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \\ \eta_2 &= \tau - 1, \quad d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\ \eta_3 &= \tau + 1, \quad d_0^{(r,3)} = a_0^{(4)} (\tau (a_0^{(1)} - 1) - 2), \\ d_0^{(\theta,3)} &= a_0^{(4)} (\tau - (\tau + 2) a_0^{(1)}), \quad d_0^{(z,3)} = k (a_0^{(2)} + a_0^{(4)}); \end{aligned}$$

(20-Б)

$$\begin{aligned}
 & \text{если } 1/2 < \tau < 1, \text{ то} \\
 \eta_1 = 1 - \tau, \quad & d_0^{(r,1)} = (\tau - 2) a_0^{(4)} - \tau a_0^{(1)}, \quad d_0^{(\theta,1)} = \tau a_0^{(4)} - (\tau - 2) a_0^{(1)}, \\
 & d_0^{(z,1)} = k a_0^{(4)} (a_0^{(2)} + 1), \\
 \eta_2 = \tau - 1, \quad & d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\
 \eta_3 = \tau + 1, \quad & d_0^{(r,3)} = \tau a_0^{(1)} - (\tau + 2) a_0^{(4)}, \quad d_0^{(\theta,3)} = \tau a_0^{(4)} - (\tau + 2) a_0^{(1)}, \\
 & d_0^{(z,3)} = k a_0^{(4)} (a_0^{(2)} + 1); \\
 & \text{если } \tau = 1, \text{ то} \\
 \eta_1 = 0, \quad & d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \\
 \eta_2 = 0, \quad & d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\
 \eta_3 = 2, \quad & d_0^{(r,3)} = a_0^{(1)} - 3a_0^{(4)}, \quad d_0^{(\theta,3)} = a_0^{(4)} - 3a_0^{(1)}, \\
 & d_0^{(z,3)} = k a_0^{(4)} (a_0^{(2)} + 1); \\
 & \text{если } \tau > 1, \text{ то} \\
 \eta_1 = \tau - 1, \quad & d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \\
 \eta_2 = \tau - 1, \quad & d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \\
 \eta_3 = \tau + 1, \quad & d_0^{(r,3)} = \tau a_0^{(1)} - (\tau + 2) a_0^{(4)}, \\
 & d_0^{(\theta,3)} = \tau a_0^{(4)} - (\tau + 2) a_0^{(1)}, \\
 & d_0^{(z,3)} = k a_0^{(4)} (a_0^{(2)} + 1).
 \end{aligned} \tag{20-B}$$

Анализ матриц $\mathbf{Q}_n^{(q)}$ и вектор-столбцов $\mathbf{F}_n^{(q)}$ ($q = \overline{1, 3}$; $n = \overline{1, \infty}$), проведенный для начальных определений (20-A)–(20-B), показал, что

$$\det \left(\mathbf{Q}_n^{(q)} \right) \neq 0 \quad (n = \overline{1, 3, \infty}; q = \overline{1, 3}). \tag{21}$$

Следовательно, представления (18) при $n \neq 2$ определяют рекуррентные соотношения для нахождения $\mathbf{B}_n^{(q)}$ в явном виде

$$\mathbf{B}_n^{(q)} = \left(\mathbf{Q}_n^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{F}_n^{(q)} \left(\left\{ \mathbf{B}_m^{(q)} \right\}_{m=0}^{n-1} \right) \quad (n = 1, 3, 4, \dots; q = 1, 2, 3). \tag{22}$$

При $n = 2$ и $1/2 < \tau \leq 1$ для любого начального определения (20-A)–(20-B)

$$\text{rang} \left(\mathbf{Q}_2^{(q)} \right) = \text{rang} \left(\left[\mathbf{Q}_2^{(q)}, \mathbf{F}_2^{(q)} \right] \right) \quad (q = \overline{1, 3}). \tag{23}$$

Следовательно, на основании теоремы Кронекера-Капелли [10], система линейных уравнений (18) является совместной и позволяет определить для указанных значений параметра τ вектор-столбец $\mathbf{B}_2^{(q)}$ ($q = \overline{1, 3}$). Для $n = 2$ и $\tau > 1$ условие

(23) выполнится только при наложении ограничений на разложения функций $\varphi(\xi)$, $\psi_1(\xi)$, $\psi_4(\xi)$ соответственно начальным определениям (20-А)–(20-В) в виде

$$a_0^{(1)} a_1^{(0)} + a_1^{(1)} = 0; \quad (24-А)$$

$$a_1^{(0)} = 0; \quad (24-Б)$$

$$a_0^{(4)} a_1^{(0)} + a_1^{(4)} = 0. \quad (24-В)$$

Следовательно, при $\tau > 1$ для построения искомого базисного набора частных решений (15) необходимо использовать только численный подход к определению аналитических в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$, $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 5}$) [7], позволяющий соответственно выбранному варианту модели неоднородности (12-А)–(12-В) в полиномиальных представлениях учесть ограничения (24-А)–(24-В).

Базисное решение уравнения (14) записывается с использованием построенных соответственно начальным определениям (20-А)–(20-В) частных решений (15) в матричной форме так:

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) = \left[\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 1)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 2)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 3)}(\xi) \right]. \quad (25)$$

Тогда общее решение уравнения (6) определяется следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{general})}(r) = \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(r) \mathbf{A}. \quad (26)$$

Здесь \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 3. На основании соотношения (5) определяется векторная функция $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau, \text{general})}(r)$ в таком виде:

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau, \text{general})}(r) = \left(\hat{\mathbf{G}}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) \right) \Big|_{\xi=r} \mathbf{A}. \quad (27)$$

Соответствующая выбранной модели неоднородности (12-А)–(12-В) матрица-функция $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$, а также матричный дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$, определены в работе [7]. Здесь же представлены соответствующие граничным условиям (9), (10) дисперсионные соотношения.

3. Численный эксперимент. Исследованию подлежали дисперсионные спектры, фазовые и групповые скорости бегущих ($k > 0$) условно симметричных ($\beta = 0$) волн в свободных на цилиндрическом участке граничной поверхности волноводах с угловой мерой секторного выреза равной $\pi/2$ ($\alpha = 3\pi/4$). В соотношениях (11) было выбрано значение $n = 1$ ($\tau = 2/3$). Рассматривался однородный волновод из цинка (Zn)

$$\tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}, \quad (28)$$

а также неоднородные волноводы, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала которых задавались так:

$$\tilde{c}_{11}(r) = \tilde{c}_{11}^{(Zn)}(1 + 0, 2r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 12, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (29-А)$$

$$\tilde{c}_{12}(r) = \tilde{c}_{12}^{(Zn)}(1 + 0, 2r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (29-Б)$$

$$\tilde{c}_{13}(r) = \tilde{c}_{13}^{(Zn)}(1 + 0, 2r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (29-В)$$

$$\tilde{c}_{33}(r) = \tilde{c}_{33}^{(Zn)}(1 + 0, 2r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (29-Г)$$

$$\tilde{c}_{44}(r) = \tilde{c}_{44}^{(Zn)}(1 + 0, 2r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 33), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (29-Д)$$

$$\tilde{\rho}(r) = \tilde{\rho}^{(Zn)}(1 + 0, 2r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44). \quad (29-Е)$$

В соотношениях (28), (29-А)–(29-Е)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_{11}^{(Zn)} = 16, 35; \quad \tilde{c}_{12}^{(Zn)} = 2, 64; \quad \tilde{c}_{13}^{(Zn)} = 5, 17; \quad \tilde{c}_{33}^{(Zn)} = 5, 31; \quad \tilde{c}_{44}^{(Zn)} = 3, 78; \\ \tilde{\rho}^{(Zn)} = 7, 134 \end{array} \right\}, \quad C_* = 10^{10} \text{Н/м}^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{кг/м}^3. \quad (30)$$

Далее волновод с характеристиками материала (28) будет называться однородным, а волноводы с характеристиками материала (29-А)–(29-Е) соответственно неоднородным А – Е типа. Вид законов неоднородности (29-А)–(29-Е) определялся целевой задачей – исследовать влияние на топологическую картину спектра фактора неоднородности, обусловленной отдельной физико-механической характеристикой трансверсально-изотропного материала.

Для вычислительного эксперимента был выбран вариант модели неоднородности (12-А) и численный подход с использованием полиномиальной аппроксимации ($N = 5$) [7] для определения функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 5}$). Максимальная погрешность аппроксимации функциональных законов радиальной неоднородности (3) не превысила $\varepsilon = 10^{-4}$.

В области изменения параметров $k \in [0, 40]$ и $\Omega \in [0, 20]$, где $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ – безразмерная приведенная частота, для однородного волновода и неоднородных волноводов А – Е типов на рисунках 1–7 представлены фрагменты соответствующих спектров бегущих волн.

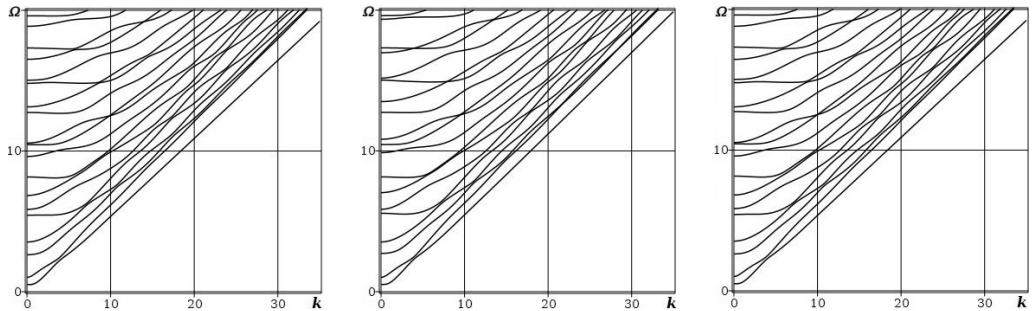


Рис. 1. Спектр однородного волновода

Рис. 2. Спектр неоднородного волновода А

Рис. 3. Спектр неоднородного волновода Б

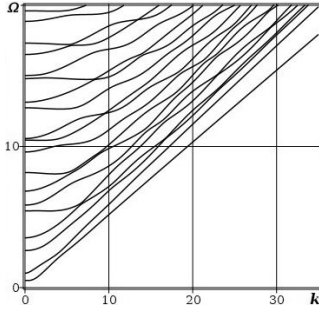


Рис. 4. Спектр неоднородного волновода В

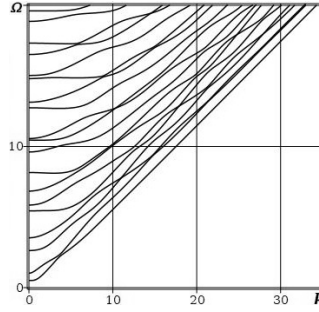


Рис. 5. Спектр неоднородного волновода Γ

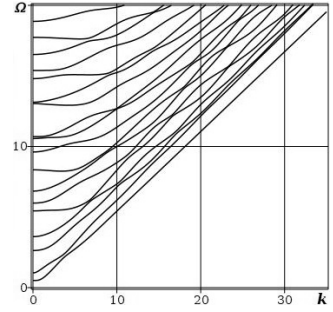


Рис. 6. Спектр неоднородного волновода Д

В результате анализа представленных рисунков можно сделать выводы, что неоднородность исключительно по модулю $\tilde{c}_{12}(r)$ визуально не сказывается на топологической картине соответствующего спектра (рис. 3) по сравнению со спектром однородного волновода (рис. 1); при этом в случаях неоднородности исключительно по модулям $\tilde{c}_s(r)$ ($s = 11, 13, 33, 44$) (рис. 2, 4–6) и плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 7) наблюдаются качественные отличия соответствующих спектров от спектра однородного волновода (рис. 1). Характерными особенностями указанных различий являются ярко выраженная локализация асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области низшей моды по отношению к старшим модам спектра для волновода с неоднородностью исключительно по упругому модулю $\tilde{c}_{13}(r)$ (рис. 4) и плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 7), при этом в случае неоднородности исключительно по упругому модулю $\tilde{c}_{33}(r)$ (рис. 5) указанная тенденция не наблюдается.

Количественные различия построенных фрагментов спектров исследованы с помощью функции сравнения парных по номеру мод в сопоставляемых спектрах

$$\Delta\Omega(k) = \left(\Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (31)$$

Результаты сопоставительного анализа поведения низших пятнадцати мод построенных фрагментов спектров однородного и неоднородных волноводов А – Е типов представлены на рисунках 8–13. Номера мод сопоставляемых спектров и тип соответствующей линии указаны в нижней части рисунков.

Анализ представленных рисунков позволяет указать на закономерности, уже отмеченные для сплошных цилиндрических радиально неоднородных трансверсально-изотропных волноводов в работе [7]. Количественные значения функции $\Delta\Omega(k)$ при сопоставлении спектров однородного и неоднородного исклю-

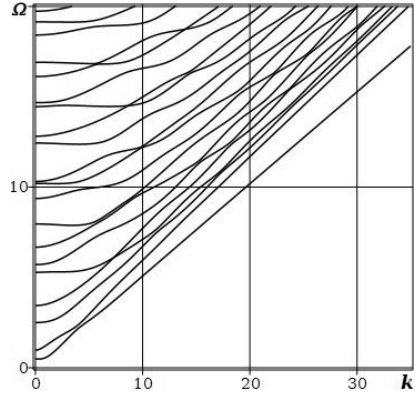


Рис. 7. Спектр неоднородного волновода Е

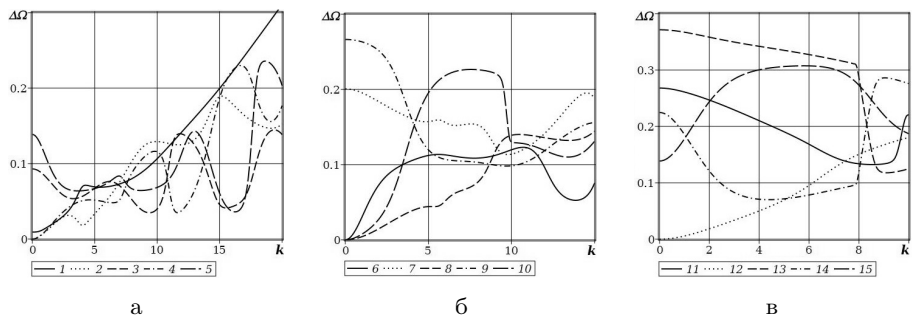


Рис. 8. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода А

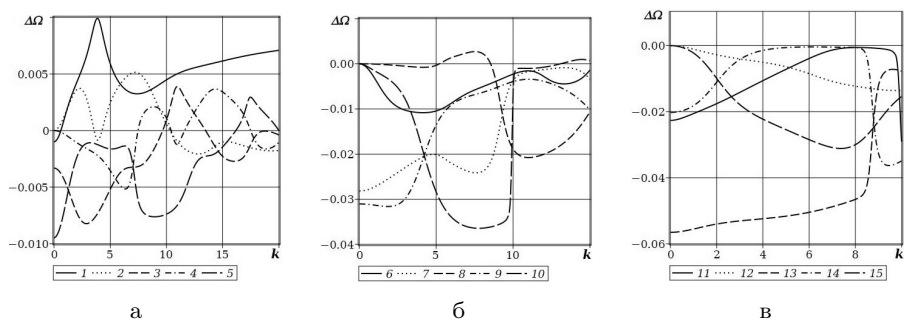


Рис. 9. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Б

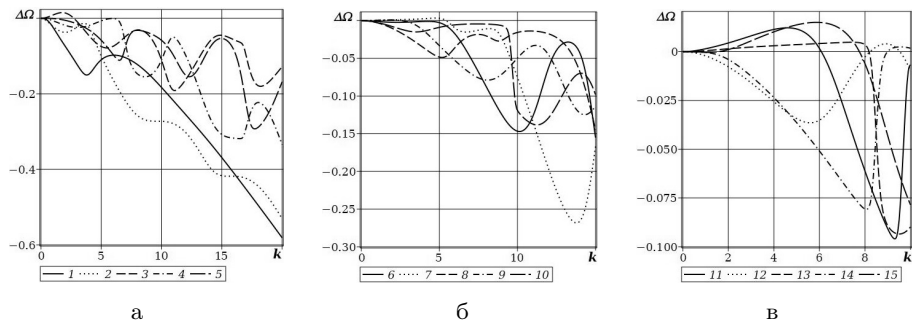


Рис. 10. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода В

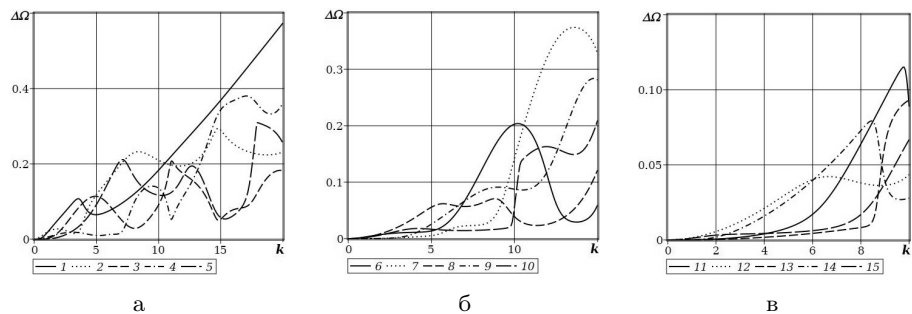


Рис. 11. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Г

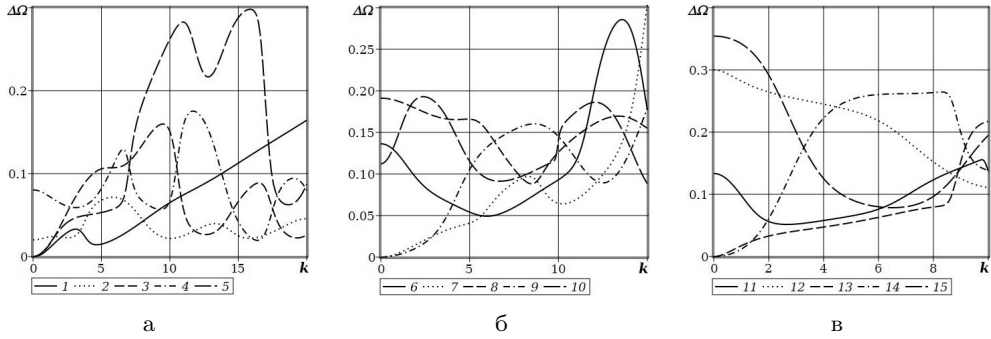


Рис. 12. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Д

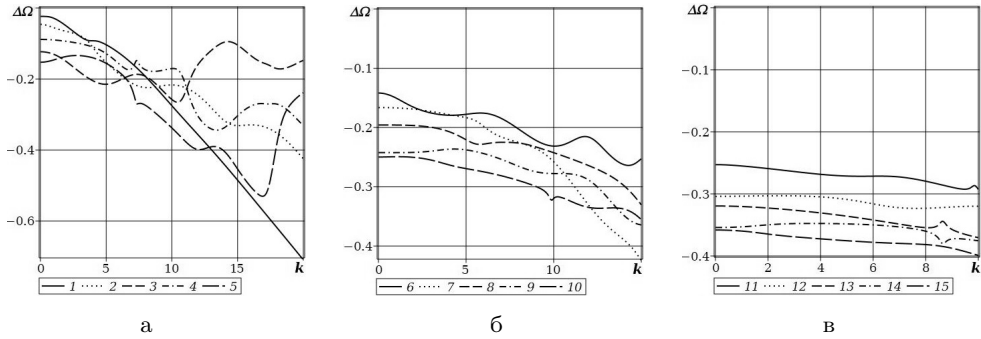


Рис. 13. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Е

чительно по модулю $\tilde{c}_{12}(r)$ волноводов (рис. 9) в абсолютных значениях оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении спектров однородного и неоднородных исключительно по модулям $\tilde{c}_s(r)$ ($s = 11, 13, 33, 44$) (рис. 8, 10–12) и плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 13) волноводов. Следует отметить также характерную закономерность смещения мод спектров неоднородных волноводов по отношению к соответствующим модам спектра однородного волновода в область более высоких частот в случае неоднородности исключительно по модулям $\tilde{c}_s(r)$ ($s = 11, 33, 44$) (рис. 8, 11, 12), и в область более низких частот в случае неоднородности исключительно по модулю $\tilde{c}_{13}(r)$ (рис. 10) и плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 13).

Для представленных на рисунках 1–7 фрагментов спектров построены и исследованы графики фазовых и групповых скоростей. Ниже приведены графики фазовых (рис. 14–16) и групповых (рис. 17–19) скоростей для пяти низших мод спектра. Подбор графиков преследовал цель отобразить указанные характеристики для волновых процессов с наиболее ярко выраженными различиями топологических картин представленных фрагментов спектров. В нижней части рисунков 17–19 указаны номера мод и тип соответствующей линии. На представленных графиках c_p и c_g – соответственно фазовая и групповая скорости, нормированные величиной $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$.

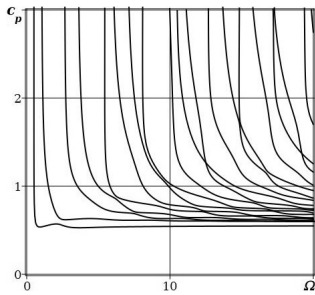


Рис. 14. Фазовые скорости волн в однородном волноводе

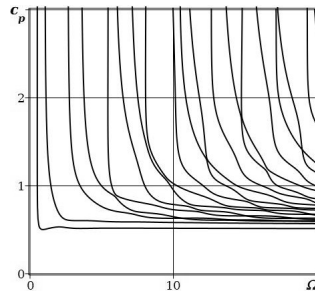


Рис. 15. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе В

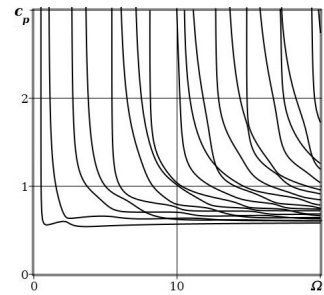


Рис. 16. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе Г

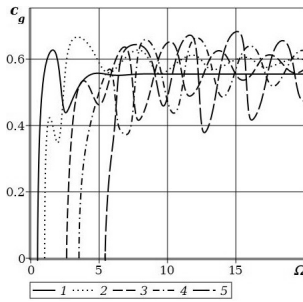


Рис. 17. Групповые скорости волн в однородном волноводе

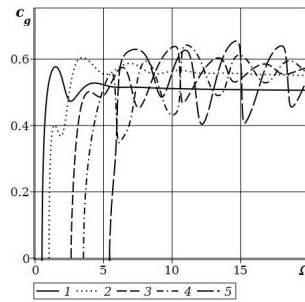


Рис. 18. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе В

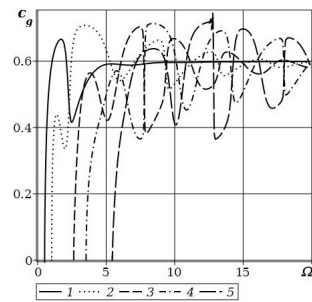


Рис. 19. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе Г

Представленные графики фазовых и групповых скоростей иллюстрируют вышеотмеченные тенденции, в том числе характерную локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды исследованных фрагментов спектров.

Выводы. Представленные результаты актуальны в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализом моделей ультразвуковой диагностики, верификацией результатов, полученных прямыми численными методами.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (№ государственной регистрации 124012400354-0).

1. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн в трансверсально изотропных волноводах секторного сечения с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко. // Труды ИПММ. – 2015. – Т. 29. – С. 100–113.
2. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндров // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37–54.
3. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.

4. Моисеенко И.А. Нормальные волны в функционально градиентных ортотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2016. – № 1 (56). – С. 16–34.
5. Моисеенко И.А. Нормальные волны вдоль ортотропных функционально-градиентных цилиндров секторного поперечного сечения / И.А. Моисеенко. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 4. – С. 41–53.
6. Дзундза А.И. Свойства нормальных волн в радиально-неоднородных изотропных цилиндрах секторного сечения / А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук, И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 1(86). – С. 37–50. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-37-50. – EDN: LJJYHP.
7. Моисеенко И.А. Исследование свойств неосесимметричных волн в протяженных цилиндрах на основе шестифакторной модели радиальной неоднородности трансверсально-изотропного материала / И.А. Моисеенко, Л.П. Вовк, А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3(84). – С. 61–81. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-3-61-81. – EDN: QUUGES.
8. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.
9. Petrowsky I.G. Sur l'analyticite des solutions des systems d'equations differentielles // Матем. сб. – 1939. – № 5(47). – Р. 3–70.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Главная редакция физико-математической литературы. – 1968. – 431 с.

L.P. Vovk, A.I. Dzundza, N.I. Melnichuk, I.A. Moiseyenko

Normal waves in radially inhomogeneous transversally isotropic cylinders of sector cross-section.

Basic solutions are constructed for the problem of studying the properties of normal elastic waves propagating in radially inhomogeneous transversally isotropic cylinders of a sectoral cross-section with an ideally flexible inextensible membrane coating of the surface of a sectoral cutout. The elements of the basic solutions are expressed in terms of analytical functions. The elastic modulus and density of the waveguide material are set using a six-factor model of the functional radial inhomogeneity of the physico-mechanical characteristics of a transversally isotropic material. A comparative analysis of the results of a numerical experiment conducted for homogeneous and functionally inhomogeneous free waveguides on a cylindrical section of the lateral surface is presented, quantitative and qualitative estimates of the numerical results are given.

Keywords: *FGMs, transversally isotropic cylindrical waveguide, sector cross-section, radial heterogeneity model, basic solution.*

*Статья поступила в редакцию 09.10.2024;
доработана 30.10.2024;
рекомендована к печати 12.11.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-3-35-43

EDN:VGCFFAS

©2024. Д.С. Карасев¹, С.В. Сторожев², В.И. Сторожев³

СДВИГОВЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ СЛОЕ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ДЛЯ КАЖДОЙ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА

Разработан алгоритм численно-аналитического интегрирования системы дифференциальных уравнений относительно амплитудных составляющих функций колебательных упругих перемещений в связанных нормальных электроупругих волнах сдвигового типа, распространяющихся вдоль слоя функционально-градиентной пьезокерамики с переменными по толщине разнотипными экспоненциальными зависимостями для параметров плотности, параметров деформационных и электрических свойств материала. Базисные решения волновых уравнений получены в форме степенных рядов. Сформулированы дисперсионные уравнения для исследуемых нормальных волн применительно к отдельным вариантам электромеханических краевых условий на гранях слоя.

Ключевые слова: слой функционально-градиентной пьезокерамики, многофакторная поперечная экспоненциальная неоднородность, нормальные сдвиговые электроупругие волны, системы амплитудных уравнений, базисные частные решения, степенные ряды, рекуррентные соотношения, дисперсионные уравнения.

Введение и цели исследования. Вопросы теоретического исследования спектров и свойств нормальных электроупругих волн в пластиночных волноводах из новых функционально-градиентных пьезокерамических материалов, создаваемых на основе применения аддитивных технологий [1–5], связанные с прикладными конструкторскими расчетами в процессах проектирования аку-

¹ Карасев Дмитрий Сергеевич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: vektor8899@ya.ru.

Karasev Dmitry Sergeevich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

² Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³ Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., гл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

стоэлектронных радиокомпонентов, относится к актуальной инновационной проблематике в механике сопряженных физико-механических полей. Ряд аспектов этих исследований, касающихся анализа систем уравнений распространения электроупругих сдвиговых волн для пьезокерамических материалов с однофакторной экспоненциальной неоднородностью, а также анализа нескольких различных вариантов описания двухфакторной экспоненциальной неоднородности функционально-градиентных пьезокерамических материалов, рассматривался в работах [6–18]. Однако, методика учета общей многофакторной экспоненциальной неоднородности данных материалов остается перспективным важным направлением в исследованиях по данной тематике.

Соответственно вышеизложенному, целью представляемых в данной работе исследований является разработка численно-аналитического алгоритма построения базисных частных решений для систем амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение сдвиговых нормальных электроупругих волн в плоскости слоя функционально-градиентной пьезокерамики с многофакторной неоднородностью, описываемой отдельными разнотипными экспоненциальными зависимостями для каждой из физико-механических характеристик рассматриваемого материала. Генерируемый алгоритм является обобщением подхода, предложенного ранее для исследования процессов распространения сдвиговых нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном слое с многофакторной экспоненциальной неоднородностью [19–20]

1. Форма представления амплитудных уравнений. Система амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение сдвиговых гармонических нормальных электроупругих волн в плоскости слоя функционально-градиентной пьезокерамики с многофакторной неоднородностью, записывается применительно к волноводу в виде занимающего область $V = \{ x_1 \in [-h, h], (x_2, x_3) \in R^2 \}$ в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ слоя функционально-градиентного линейно-поляризованного пьезокерамического материала класса *bmm* гексагональной системы с осью поляризации Ox_3 , обладающего переменными вдоль координаты Ox_1 по его толщине физико-механическими свойствами. Распространение в плоскости слоя вдоль оси Ox_2 нормальных сдвиговых электроупругих *SH*-волн в исходной форме описывается системой уравнений связанного динамического деформирования пьезоэлектриков, которая может быть в рассматриваемом случае представлена соотношениями

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} - \rho(x_1) \ddot{u}_3 = 0, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \\ \partial_j = \partial / \partial x_j \quad (j = \overline{1, 2}); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_{13} = c_{44}(x_1) \partial_1 u_3 + e_{15}(x_1) \partial_1 \phi, \quad \sigma_{23} = c_{44}(x_1) \partial_2 u_3 + e_{15}(x_1) \partial_2 \phi, \quad (2)$$

$$D_1 = -\varepsilon_{11}(x_1) \partial_1 \phi + e_{15}(x_1) \partial_1 u_3, \quad D_2 = -\varepsilon_{11}(x_1) \partial_2 \phi + e_{15}(x_1) \partial_2 u_3. \quad (3)$$

В соотношениях (1)–(3) $u_3(x_1, x_2, t)$, $\phi(x_1, x_2, t)$ – соответственно комплексные функции динамических упругих смещений и потенциала квазистатического электрического поля в SH-волне; σ_{13} , σ_{23} – комплексные функции сдвиговых механических напряжений в исследуемых волнах; D_1 , D_2 – комплексные функции индукции квазистатического электрического поля; $c_{44}(x_1)$, $e_{15}(x_1)$, $\varepsilon_{11}(x_1)$, $\rho(x_1)$ – функциональные характеристики распределений физико-механических характеристик функционально-градиентного пьезокерамического материала по толщине слоя, задаваемые в виде

$$\begin{aligned} c_{44}(x_1) &= c_{440} \exp(\lambda_c x_1), & e_{15}(x_1) &= e_{150} \exp(\lambda_e x_1), \\ \varepsilon_{11}(x_1) &= \varepsilon_{110} \exp(\lambda_\varepsilon x_1), & \rho(x_1) &= \rho_0 \exp(\lambda_\rho x_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Получаемые в качестве следствия при подстановке соотношений (2), (3) в (1) уравнения относительно $u_3(x_1, x_2, t)$, $\phi(x_1, x_2, t)$ первоначально могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \partial_1(c_{44}\partial_1 u_3) + c_{44}\partial_2^2 u_3 + \partial_1(e_{15}\partial_1 \phi) + e_{15}\partial_2^2 \phi - \rho \ddot{u}_3 &= 0, \\ \partial_1(e_{15}\partial_1 u_3) + e_{15}\partial_2^2 u_3 - \partial_1(\varepsilon_{11}\partial_1 \phi) - \varepsilon_{11}\partial_2^2 \phi &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

и после введения для характеристик исследуемых связанных электроупругих волн с круговой частотой ω и волновым числом k представлений

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, t) &= u_{30}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\ \phi(x_1, x_2, t) &= \phi_0(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \end{aligned} \quad (6)$$

преобразуются к виду

$$\begin{aligned} c_{440} \exp(\lambda_c x_1) u''_{30}(x_1) + e_{150} \exp(\lambda_e x_1) \phi''_0(x_1) + \\ + \lambda_c c_{440} \exp(\lambda_c x_1) u'_{30}(x_1) + \lambda_e e_{150} \exp(\lambda_e x_1) \phi'_0(x_1) + \\ + (\rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2) u_{30}(x_1) - e_{150} k^2 \phi_0(x_1) = 0, \\ e_{150} \exp(\lambda_e x_1) u''_{30}(x_1) - \varepsilon_{110} \exp(\lambda_\varepsilon x_1) \phi''_0(x_1) + \\ + \lambda_e e_{150} \exp(\lambda_e x_1) u'_{30}(x_1) - \lambda_\varepsilon \varepsilon_{110} \exp(\lambda_\varepsilon x_1) \phi'_0(x_1) - \\ - e_{150} \exp(\lambda_e x_1) k^2 u_{30}(x_1) + \varepsilon_{110} \exp(\lambda_\varepsilon x_1) k^2 \phi_0(x_1) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Аналитическое интегрирование системы амплитудных уравнений. При разработке алгоритма численно-аналитического интегрирования системы уравнения вида (7) вводятся в рассмотрение [19–20] следующие представления в виде степенных рядов:

$$u_{30}(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \quad u'_{30}(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_1^n, \quad (8)$$

$$u''_{30}(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x_1^n;$$

$$\phi_0(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_1^n, \quad \phi'_0(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x_1^n, \quad (9)$$

$$\phi''_0(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)b_{n+2}x_1^n;$$

$$\exp(\lambda_c x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_c^m}{m!} x_1^m, \quad \exp(\lambda_e x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m}{m!} x_1^m, \quad (10)$$

$$\exp(\lambda_\varepsilon x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\varepsilon^m}{m!} x_1^m, \quad \exp(\lambda_\rho x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\rho^m}{m!} x_1^m.$$

При подстановке разложений (8)–(10) в систему уравнений (7) в качестве следствия могут быть записаны соотношения

$$c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_c^m x_1^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x_1^n + \quad (11)$$

$$+ e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m x_1^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)b_{n+2}x_1^n +$$

$$+ \lambda_c c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_c^m}{m!} x_1^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x_1^n + \lambda_e e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m}{m!} x_1^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x_1^n +$$

$$+ (\rho_0 \omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\rho^m}{m!} x_1^m - k^2 c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_c^m}{m!} x_1^m) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n -$$

$$- k^2 e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m}{m!} x_1^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_1^n = 0,$$

$$e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m x_1^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x_1^n -$$

$$- \varepsilon_{110} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\varepsilon^m x_1^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)b_{n+2}x_1^n +$$

$$+ \lambda_e e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m}{m!} x_1^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x_1^n - \lambda_\varepsilon \varepsilon_{110} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\varepsilon^m}{m!} x_1^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x_1^n -$$

$$- k^2 e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_e^m}{m!} x_1^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n + k^2 \varepsilon_{110} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\varepsilon^m}{m!} x_1^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_1^n = 0,$$

соответственно преобразуемые к виду

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Delta_{np}^{(1)} x_1^p = 0, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \Delta_{np}^{(2)} x_1^p = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{np}^{(1)} = & \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)c_{440}\lambda_e^{p-n}((p-n)!)^{-1}a_{n+2}) + \\ & + (n+1)(n+2)e_{150}\lambda_e^{p-n}((p-n)!)^{-1}b_{n+2} + \\ & + (n+1)c_{440}\lambda_e^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}a_{n+1} + (n+1)e_{150}\lambda_e^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}b_{n+1} + \\ & + (\rho_0\omega^2\lambda_e^{p-n} - c_{440}k^2\lambda_e^{p-n})((p-n)!)^{-1}a_n - k^2e_{150}\lambda_e^{p-n}((p-n)!)^{-1}b_n, \\ \Delta_{np}^{(2)} = & \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)e_{150}\lambda_e^{p-n}((p-n)!)^{-1}a_{n+2} - \\ & - (n+1)(n+2)\varepsilon_{110}\lambda_e^{p-n}((p-n)!)^{-1}b_{n+2} + \\ & + (n+1)e_{150}\lambda_e^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}a_{n+1} - (n+1)\varepsilon_{110}\lambda_e^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}b_{n+1} - \\ & - e_{150}k^2\lambda_e^{p-n}((p-n)!)^{-1}a_n + k^2\varepsilon_{110}\lambda_e^{p-n}((p-n)!)^{-1}b_n). \end{aligned} \quad (13)$$

В итоге приравнивания нулю коэффициентов $\Delta_{np}^{(1)}$ и $\Delta_{np}^{(2)}$ в представлениях (12), при варьировании $p = \overline{0, \infty}$ формируется система рекуррентных формул, позволяющих, в частности, получить четыре базисных частных решения для системы дифференциальных уравнений (7). На исходном шаге применения данной рекуррентной схемы для получения коэффициентов a_n , b_n ($n = \overline{0, \infty}$) в представлениях (8), (9), при $p = 0$ из (12) следуют соотношения

$$2c_{440}a_2 + 2e_{150}b_2 = -c_{440}\lambda_e a_1 - e_{150}\lambda_e b_1 - (\rho_0\omega^2 - c_{440}k^2)a_0 + k^2e_{150}b_0, \quad (14)$$

$$2e_{150}a_2 - 2\varepsilon_{110}b_2 = -e_{150}\lambda_e a_1 + \varepsilon_{110}\lambda_e b_1 + e_{150}k^2a_0 - k^2\varepsilon_{110}b_0,$$

которые интерпретируются как система линейных алгебраических уравнений, определяющая выражения коэффициентов a_2 , b_2 через набор вариативных произвольных значений величин a_1 , b_1 , a_0 , b_0 . Предлагаемыми вариантами задания этих коэффициентов являются множества $\{a_1, b_1, a_0, b_0\}$ вида $\{0, 0, 0, 1\}$, $\{0, 0, 1, 0\}$, $\{0, 1, 0, 0\}$, $\{1, 0, 0, 0\}$, на основе которых формируются четыре последовательности значений $\{a_n^{(j)}, b_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = \overline{1, 4}$), определяющие четыре базисных частных решения системы уравнений (7) с аналитическими представлениями в виде степенных рядов

$$u_{30j}(x_1, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} x_3^n, \quad \phi_{0j}(x_1, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} x_3^n, \quad (15)$$

которые редуцируются при численных исследованиях на оговариваемом уровне точности расчетов. С учетом (15), при дальнейшем описании методики исследования процессов распространения сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с многофакторной экспоненциальной неоднородностью используются представления

$$\begin{aligned}
 u_{30}(x_1, x_2, t) &= (C_1 u_{301}(x_1, \omega, k) + C_2 u_{302}(x_1, \omega, k) + C_3 u_{303}(x_1, \omega, k) + \\
 &\quad + C_4 u_{304}(x_1, \omega, k)) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\
 \phi_0(x_1, x_2, t) &= (C_1 \phi_{01}(x_1, \omega, k) + C_2 \phi_{02}(x_1, \omega, k) + C_3 \phi_{03}(x_1, \omega, k) + \\
 &\quad + C_4 \phi_{04}(x_1, \omega, k)) \exp(-i(\omega t - kx_2)).
 \end{aligned} \tag{16}$$

3. Формулировка дисперсионных соотношений. В качестве варианта использования построенных базисных решений представлено получение дисперсионных соотношений для нормальных сдвиговых электроупругих волн в слое функционально-градиентной пьезокерамики с многофакторной экспоненциальной неоднородностью, грани которого жестко закреплены и контактируют с короткозамкнутыми электродами

$$(u_3(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (\phi(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \tag{17}$$

либо свободны от механических усилий и имеют тонкие напыленные короткозамкнутые электропроводящие покрытия

$$(\sigma_{13}(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (\phi(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0. \tag{18}$$

С учетом выражения для касательных напряжений $\sigma_{13}(x_1, x_2, t)$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}(x_1, x_2, t) &= \\
 &= c_{440} \exp(\lambda_c x_1) (C_1 u'_{301}(x_1, \omega, k) + C_2 u'_{302}(x_1, \omega, k) + \\
 &\quad + C_3 u'_{303}(x_1, \omega, k) + C_4 u'_{304}(x_1, \omega, k)) \exp(-i(\omega t - kx_2)),
 \end{aligned} \tag{19}$$

формулируемые дисперсионные уравнения соответственно имеют вид равенств нулю функциональных определителей матриц четвертого порядка

$$\begin{aligned}
 &F_1(\omega, k) = \\
 &= \det \begin{pmatrix} u_{301}(h, \omega, k) & u_{302}(h, \omega, k) & u_{303}(h, \omega, k) & u_{304}(h, \omega, k) \\ u_{301}(-h, \omega, k) & u_{302}(-h, \omega, k) & u_{303}(-h, \omega, k) & u_{304}(-h, \omega, k) \\ \phi_{01}(h, \omega, k) & \phi_{02}(h, \omega, k) & \phi_{03}(h, \omega, k) & \phi_{04}(h, \omega, k) \\ \phi_{01}(-h, \omega, k) & \phi_{02}(-h, \omega, k) & \phi_{03}(-h, \omega, k) & \phi_{04}(-h, \omega, k) \end{pmatrix} = 0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$F_2(\omega, k) = \det \begin{pmatrix} u'_{301}(h, \omega, k) & u'_{302}(h, \omega, k) & u'_{303}(h, \omega, k) & u'_{304}(h, \omega, k) \\ u'_{301}(-h, \omega, k) & u'_{302}(-h, \omega, k) & u'_{303}(-h, \omega, k) & u'_{304}(-h, \omega, k) \\ \phi_{01}(h, \omega, k) & \phi_{02}(h, \omega, k) & \phi_{03}(h, \omega, k) & \phi_{04}(h, \omega, k) \\ \phi_{01}(-h, \omega, k) & \phi_{02}(-h, \omega, k) & \phi_{03}(-h, \omega, k) & \phi_{04}(-h, \omega, k) \end{pmatrix} = 0, \quad (21)$$

и подлежат исследованию численными методами.

Заключение. Итогом проведенных исследований является разработка численно-аналитического алгоритма построения базисных частных решений для систем амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение сдвиговых нормальных электроупругих волн в плоскости слоя функционально-градиентной пьезокерамики с многофакторной неоднородностью, описываемой отдельными разнотипными экспоненциальными зависимостями для каждой из физико-механических характеристик рассматриваемого материала. Представлены дисперсионных соотношений для исследуемых электроупругих сдвиговых волн в некоторых отдельных случаях задания однородных краевых электромеханических условий на границах слоя.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (соглашение от 29.02.2024 № 075-02-2024-1446).

1. *Setter N.* Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology. – 2002. – 518 p.
2. *Yang J.* Dynamic anti-plane problems of piezoceramics and applications in ultrasonics – a review / Jiashi Yang, Ji Wang // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – Volume 21, Issue 3. – P. 207–220. – DOI: 10.1007/s10338-008-0824-3.
3. *Heywang W.* Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer. – 2008. – 581 p.
4. *Uchino K.* Advanced Piezoelectric Materials. – Cambridge: Woodhead Publishing. – 2011. – 696 p.
5. *Tanaka S.* Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // *Proceedings 2014 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS)* (Taipei, Taiwan). – 2014. – P. 1–4. – DOI: 10.1109/FCS.2014.6859994.
6. *Meguid S.A.* On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials / S.A. Meguid, X.D. Wang, L.Y. Jiang // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2002. – V. 69, No 14–16. – P. 1753–1768. – DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00046-2.
7. *Chen J.* Electromechanical impact of a crack in a functionally graded piezoelectric medium / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2003. – V. 39, No 1. – P. 47–60. – DOI: 10.1016/S0167-8442(02)00137-4.
8. *Zhou Z.G.* Investigation of the dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials by use of the Schmidt method / Z.G. Zhou, B. Wang, Y.G. Sun // *Wave Motion*. – 2004. – V. 39, No 3. – P. 213–225. – DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.09.001.

9. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // *J. Nondestructive Eval.* – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.
10. Chattopadhyay A. Torsional wave propagation in non-homogeneous layer between non-homogeneous half-spaces / A. Chattopadhyay, S. Gupta, P. Kumari, V.K. Sharma // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.* – 2013 – V. 37, Issue 10. – P. 1280–1291.
11. Meguid S.A. On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials / S.A. Meguid, X.D. Wang, L.Y. Jiang // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2002. – V. 69, No 14–16. – P. 1753–1768. – DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00046-2.
12. Chen J. Electromechanical impact of a crack in a functionally graded piezoelectric medium / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* – 2003. – V. 39, No 1. – P. 47–60. – DOI: 10.1016/S0167-8442(02)00137-4.
13. Zhou Z.G. Investigation of the dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials by use of the Schmidt method / Z.G. Zhou, B. Wang, Y.G. Sun // *Wave Motion.* – 2004. – V. 39, No 3. – P. 213–225. – DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.09.001.
14. Cao X. Transverse shear wave in a functionally graded material infinite half-space / X. Cao, F. Jin, K. Kishimoto // *Philosophical Magazine Letters.* – 2012. – Vol. 92, No. 5. – P. 245–253.
15. Majhi S. Reflection and Transmission of Plane SH-Waves in an Initially Stressed Inhomogeneous Anisotropic Magnetoelastic Medium / S. Majhi , P.C. Pal, S. Kumar // *Journal of Seismology.* – 2017. – V. 21. – P. 155–163.
16. Глухов А.А. Дисперсионные соотношения для нормальных SH волн в трансверсально-изотропном слое с разнотипной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам / А.А. Глухов, М.Н. Пачева // *Материалы докладов Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию ИВМ СО РАН.* – Электронные данные. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2024. – С. 38–40.
17. Глухов А.А. Анализ модели распространения продольно-сдвиговых нормальных волн в функционально-градиентном ортотропном слое с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // *Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции (Донецк, 15–17 октября 2024 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой.* – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. – С. 26–29.
18. Карасев Д.С. Электроупругие волны сдвига в слое функционально-градиентной пьезокерамики с двухфакторной неоднородностью физико-механических свойств / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, М.В. Фоменко // *Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции (Донецк, 15–17 октября 2024 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой.* – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. – С. 51–54.
19. Глухов А.А. Численно-аналитическое исследование модели распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной среде с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью / А.А. Глухов, С.В. Сторожев // *Сборник материалов международной конференции «XXXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам».* – Симферополь: ИТ «АРЕАЛ», 2024. – С. 79–80.
20. Глухов А.А. Методика анализа проблемы распространения волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с различными законами экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // *Журнал теоретической и прикладной механики.* – 2024. – № 1 (86). – С. 51–60. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-51-60. – EDN: PSXXPV.

D.S. Karasev, S.V. Storozhev, V.I. Storozhev

Fuzzy-set accounting of parametric uncertainty factor in an applied model for assessing bending characteristics of free-edge bimetallic plates.

An algorithm has been developed for numerical and analytical integration of a system of differential equations with respect to the amplitude components of the functions of oscillatory elastic displacements in coupled normal electroelastic shear waves propagating along a layer of functionally graded piezoceramics with variable-thickness exponential dependences of different types for the density parameters, parameters of deformation and electrical properties of the material. Basic solutions of the wave equations have been obtained in the form of power series. Dispersion equations have been formulated for the normal waves under study as applied to individual variants of electromechanical boundary conditions on the layer faces.

Keywords: *layer of functionally graded piezoceramics, multifactor transverse exponential inhomogeneity, normal shear electroelastic waves, systems of amplitude equations, basic partial solutions, power series, recurrence relations, dispersion equations.*

*Статья поступила в редакцию 18.10.2024;
доработана 05.11.2024;
рекомендована к печати 14.11.2024.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-3-44-64

EDN:OIJFCF

©2024. Е.С. Глушанков¹, А.Б. Мироненко²

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ. II

В работе представлено решение задачи об изгибе свободно опертой по краю прямоугольной плиты из пьезоэлектрического материала, находящейся под действием сосредоточенного давления в точке верхнего основания. Решение получено в виде двойных тригонометрических рядов. Проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и ее геометрических характеристик на электроупругое состояние.

Ключевые слова: теория изгиба тонких плит, пьезоэлектрический материал, прямоугольная плита, свободно опертый край, функция прогиба, изгибающие моменты, двойные тригонометрические ряды.

Введение. В современной науке и технике в качестве элементов конструкций широко применяются тонкие плиты, изготовленные из материалов, обладающих пьезоэлектрическими свойствами. При эксплуатации эти плиты могут подвергаться таким механическим и электрическим воздействиям, которые приводят к существенным изгибным деформациям. Это необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций [1–6]. При решении задач изгиба плит в рамках прикладной теории принято использовать гипотезы Кирхгофа-Лява [7, 8], которые в случае пьезоэлектрического материала следует дополнить гипотезой для компонентов электрического поля (например, для индукции электрического поля [9, 10]).

В монографиях [8, 11, 12] приведено множество решений различных задач

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: andreyandrey80@mail.ru.

Mironenko Andrey Borisovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

об изгибе изотропных и анизотропных прямоугольных плит при различных механических граничных условиях. В работе [13] дано решение задачи об изгибе свободно опертой прямоугольной плиты из пьезоэлектрического материала при действии равномерного давления на плиту.

В данной работе решена задача об изгибе свободно опертой по краю прямоугольной плиты из пьезоэлектрического материала кристаллографического класса $6mm$ при действии сосредоточенного давления в точке верхнего основания. Основания плиты полагаются неэлектродированными. Края плиты свободно оперты. Решение задачи получено в виде двойного тригонометрического ряда. Проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и соотношения ее сторон на значения прогиба плиты, изгибающих моментов, потенциала электрического поля.

1. Постановка задачи об изгибе тонких пьезоэлектрических плит.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$ тонкую плиту толщины $2h$ (рис. 1), изготовленную из пьезоэлектрического материала. Срединная плоскость плиты лежит в плоскости Oxy и занимает двумерную область S . Пусть для каждой точки плиты имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Основания плиты лишены электродных покрытий. В точке верхнего основания (x_0, y_0) действует сосредоточенное давление q_0 . Край плиты свободно оперт, на нем присутствуют некоторым образом распределенные электрические воздействия.

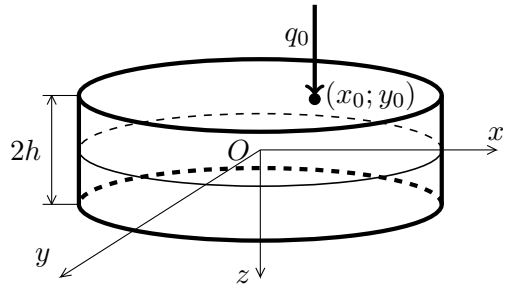


Рис. 1

Будем полагать, что материал плиты принадлежит к кристаллографическому классу $6mm$ и поляризован вдоль оси Oy .

Задача определения электроупругого состояния плиты сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений относительно функции прогиба плиты $w(x, y)$ и функции плотности потенциала электрического поля $\varphi_0(x, y)$ [10, 13]:

$$\begin{aligned} L_{4S}w(x, y) + L_{3G}\varphi_0(x, y) &= -q(x, y), \\ L_{3G}w(x, y) + L_{2B}\varphi_0(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $q(x, y)$ – функция нагрузки по верхнему основанию плиты; L_{4S} , L_{3G} , L_{2B} – дифференциальные операторы, определяемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L_{4S} &= - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\ L_{3G} &= \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \quad L_{2B} = \tilde{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{2h^3}{3}S_{ij}, \quad \tilde{G}_{ij} = \frac{2h^3}{3}G_{ij}, \quad \tilde{B}_{ij} = \frac{2h^3}{3}B_{ij};$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & G_{21} \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & G_{22} \\ 0 & 0 & S_{66} & G_{16} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{16} & B_{11} & 0 \\ -G_{21} & -G_{22} & 0 & 0 & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & 0 & 0 & g_{22} \\ 0 & 0 & s_{66} & g_{16} & 0 \\ 0 & 0 & -g_{16} & \beta_{11} & 0 \\ -g_{21} & -g_{22} & 0 & 0 & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала плиты, g_{ij} – пьезоэлектрические модули материала, β_{ij} – коэффициенты диэлектрической проницаемости материала плиты.

В дальнейшем случай сосредоточенного давления будет рассматриваться как частный случай нормальной нагрузки $q(x, y)$.

Систему уравнений (1) следует интегрировать при соответствующих граничных условиях. После этого прогиб плиты и плотность потенциала электрического поля становятся известными и по ним в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента H_{xy} , моментов электрической индукции M_{Dx} , M_{Dy} [10, 13]:

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ M_y &= - \left(\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ H_{xy} &= - \left(2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right), \\ M_{Dx} &= 2\tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad M_{Dy} = \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

А значения моментов на произвольной площадке с нормалью n и касательной s можно определять по формулам [9, 10]

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ M_s &= M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \\ M_{Dn} &= M_{Dx} \cos(nx) + M_{Dy} \cos(ny), \quad M_{Ds} = M_{Dx} \cos(ny) - M_{Dy} \cos(nx). \end{aligned} \quad (3)$$

2. Граничные условия задачи для случая свободного опертого края плиты. Механические граничные условия имеют вид [8]

$$w = 0, \quad M_n = 0. \quad (4)$$

Если по краю плиты отсутствует электродное покрытие, то электрическое граничное условие имеет вид [9, 13, 14]

$$M_{Dn} = 0, \quad (5a)$$

а если электродное покрытие присутствует и задано распределение φ_0^* потенциала электрического поля [13, 14]

$$\varphi_0 = \varphi_0^*. \quad (56)$$

3. Постановка и решение задачи об изгибе прямоугольной плиты.

Рассмотрим тонкую прямоугольную пьезоэлектрическую плиту со сторонами, равными a и b (рис. 2). На основаниях плиты отсутствует электродное покрытие. На верхнем основании в точке $P_0(x_0, y_0)$ действует сосредоточенное давление q_0 . Плита свободно оперта по краям. Края плиты $y = 0, y = b$ неэлектродированы, на краях плиты $x = 0, x = a$ потенциал электрического поля равен нулю.

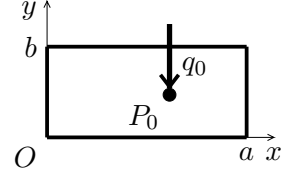


Рис. 2

Края плиты $x = 0, x = a$ потенциал электрического поля равен нулю.

В этом случае граничные условия принимают вид:

- на краях плиты $x = 0, x = a$:

$$w \Big|_{x=0} = w \Big|_{x=a} = 0, \quad M_x \Big|_{x=0} = M_x \Big|_{x=a} = 0, \quad \varphi_0 \Big|_{x=0} = \varphi_0 \Big|_{x=a} = 0; \quad (6)$$

- на краях плиты $y = 0, y = b$:

$$w \Big|_{y=0} = w \Big|_{y=b} = 0, \quad M_y \Big|_{y=0} = M_y \Big|_{y=b} = 0, \quad M_{Dy} \Big|_{y=0} = M_{Dy} \Big|_{y=b} = 0. \quad (7)$$

В этом случае функции $w(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ выберем в виде [13]

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}. \quad (8)$$

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}, \quad (9)$$

где A_{mn}, B_{mn} – неизвестные постоянные.

При таком выборе функций $w(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ граничные условия задачи удовлетворяются тождественно. А подставляя функции (8), (9) в систему дифференциальных уравнений (1), для определения неизвестных постоянных A_{mn}, B_{mn} получим системы уравнений [13]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \left(\tilde{S}_{11} \frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} - B_{mn} \left(\left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \right] = q(x, y),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} + B_{mn} \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \right] = 0.$$

Представим сосредоточенное давление в точке как частный случай распределенного по всему верхнему основанию нормального давления $q(x, y)$. Так, функция $q(x, y)$ может быть представлена в виде [11]

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (10)$$

где

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \sin \frac{\pi m x}{a} dx \int_0^b q(x, y) \sin \frac{\pi n y}{b} dy.$$

Отсюда для коэффициентов Q_{mn} получаем

$$Q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}.$$

А для коэффициентов A_{mn} , B_{mn} получим формулы

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4q_0}{ab\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right), \\ B_{mn} &= -\frac{4q_0}{ab\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= \left(\tilde{S}_{11} \frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) \times \\ &\times \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) + \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right)^2. \end{aligned}$$

Тогда функции $w(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ примут вид

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q_0}{ab\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) \times \\ &\times \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \\ \varphi_0(x, y) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q_0}{ab\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \times \\ &\times \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}. \end{aligned}$$

4. Численные исследования. При проведении численных исследований количество сохраняемых членов в рядах увеличивалось до тех пор, пока погрешность удовлетворения граничных условий на краях плиты не становилась достаточно малой. Для этого, как показали исследования, необходимо сохранять от 50 до 100 членов в одинарных рядах (следовательно, от 2500 до 10000 членов в двойных рядах).

При этом решалась задача электроупругости (ЗЭУ), когда учитываются все свойства материала, и задача упругости (ЗУ), когда не учитываются электрические свойства материала.

Были проведены численные исследования для прямоугольных плит под действием сосредоточенного усилия q_0 интенсивности 1 МПа, изготовленных из следующих материалов:

- селенид кадмия $CdSe$ [15, 16] (материал ЭМ1):

$$\begin{aligned} s_{11} &= 23,31s_0, & s_{22} &= 16,68s_0, & s_{66} &= 74,46s_0, & s_{12} &= -5,38s_0, \\ g_{16} &= -124,40g_0, & g_{21} &= -41,61g_0, & g_{22} &= 81,15g_0, \\ \beta_{11} &= 118987,10\beta_0, & \beta_{22} &= 106071,50\beta_0. \end{aligned}$$

- титанат бария $BaTiO_3$ [15, 17] (материал ЭМ4):

$$\begin{aligned} s_{11} &= 8,70s_0, & s_{22} &= 7,10s_0, & s_{66} &= 17,50s_0, & s_{12} &= -1,90s_0, \\ g_{16} &= 20,20g_0, & g_{21} &= -5,20g_0, & g_{22} &= 12,60g_0, \\ \beta_{11} &= 77,93\beta_0, & \beta_{22} &= 66,47\beta_0. \end{aligned}$$

- пьезокерамика $PZT - 4$ [15, 17] (материал ЭМ5):

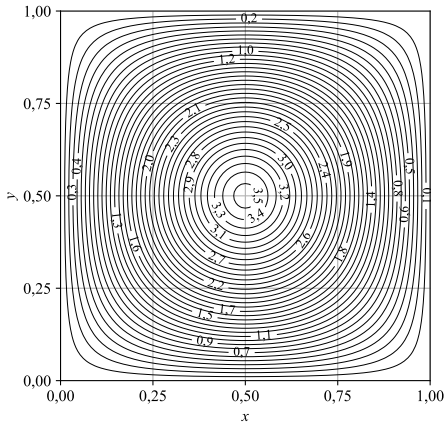
$$\begin{aligned} s_{11} &= 10,90s_0, & s_{22} &= 7,90s_0, & s_{66} &= 19,30s_0, & s_{12} &= -2,10s_0, \\ g_{16} &= 39,40g_0, & g_{21} &= -11,10g_0, & g_{22} &= 26,10g_0, \\ \beta_{11} &= 76,61\beta_0, & \beta_{22} &= 86,92\beta_0. \end{aligned}$$

- пьезокерамика $PZT - 5A$ [15, 17] (материал ЭМ6):

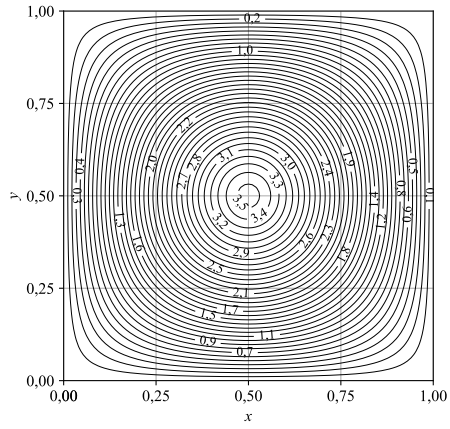
$$\begin{aligned} s_{11} &= 14,40s_0, & s_{22} &= 9,46s_0, & s_{66} &= 25,20s_0, & s_{12} &= -2,98s_0, \\ g_{16} &= 38,20g_0, & g_{21} &= -11,40g_0, & g_{22} &= 24,80g_0, \\ \beta_{11} &= 65,31\beta_0, & \beta_{22} &= 66,46\beta_0. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $s_0 = 10^{-6}$ МПа $^{-1}$, $g_0 = 10^{-3}$ МКл $^{-1} \cdot$ м 2 , $\beta_0 = 1$ МН \cdot м $^2 \cdot$ МКл $^{-2}$.

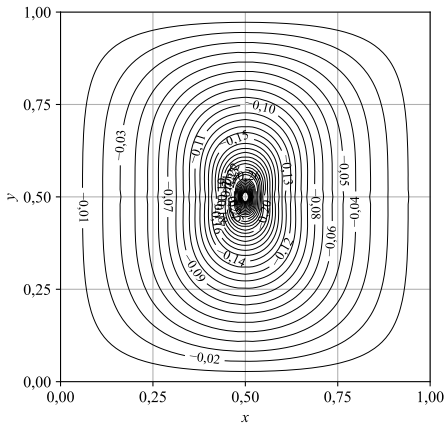
На рисунках 3 и 4 для квадратных плит ($b = a$) из материалов ЭМ1 и ЭМ5 соответственно приведены графики распределений измеренных в $10^{-7}h^{-3}$ м прогибов w (рисунок *a*), измеренных в МН \cdot м изгибающих моментов M_x (рисунок *б*), M_y (рисунок *в*) для случаев задач ЗЭУ и ЗУ, когда сосредоточенное давление действует в точке $P_0(a/2, b/2)$. На рисунках 5 и 6 приведены аналогичные графики, когда сосредоточенное давление действует в точке $P_0(a/2, b/4)$, на рисунках 7 и 8 – когда сосредоточенное давление действует в точке $P_0(a/4, b/2)$, на рисунках 9 и 10 – когда сосредоточенное давление действует в точке $P_0(a/4, b/4)$.



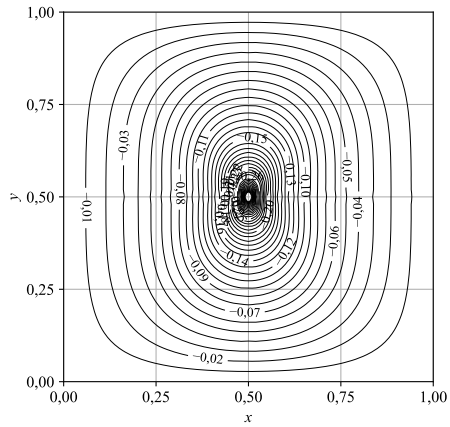
(а: 3ЭУ)



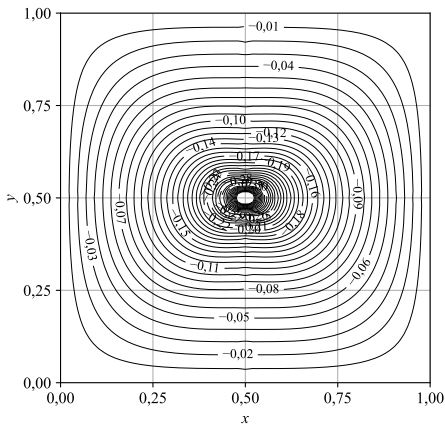
(а: 3У)



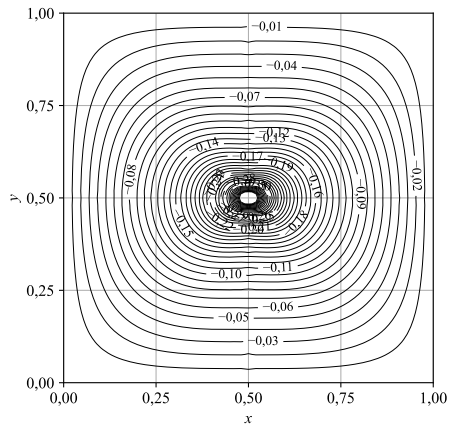
(б: 3ЭУ)



(б: 3У)



(в: 3ЭУ)



(в: 3У)

Рис. 3. Распределение прогибов $w(x, y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ1 для случаев 3ЭУ и 3У, когда действует давление в точке $(a/2, b/2)$

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

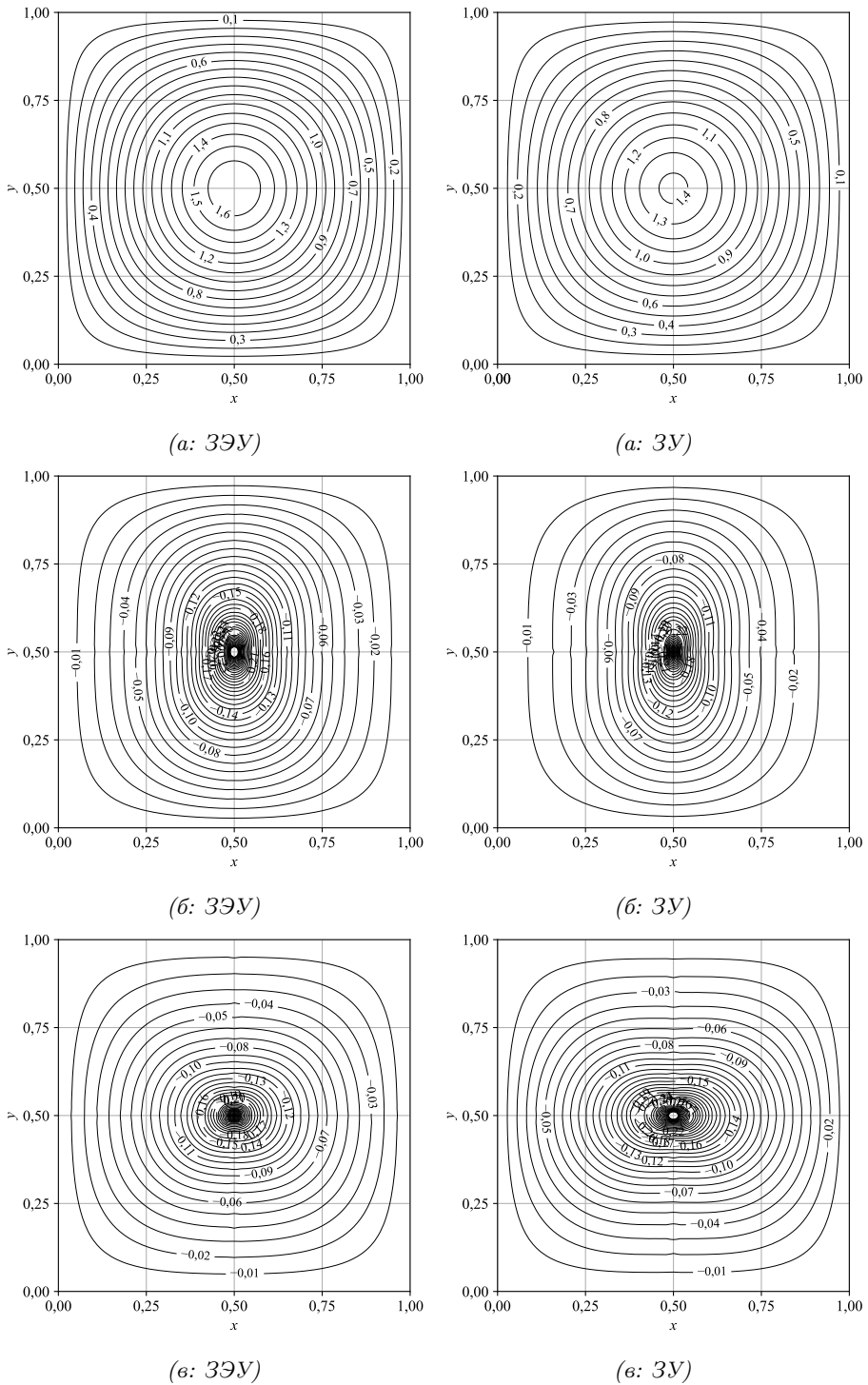
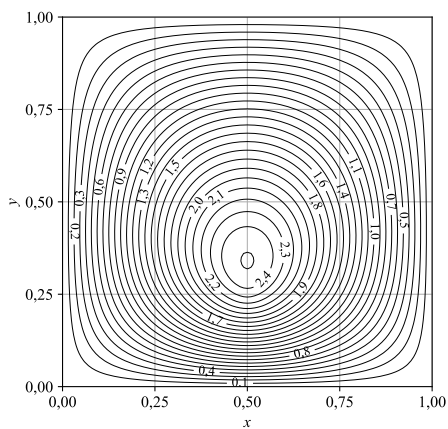
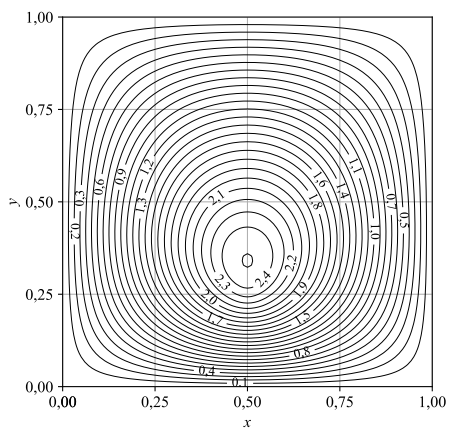


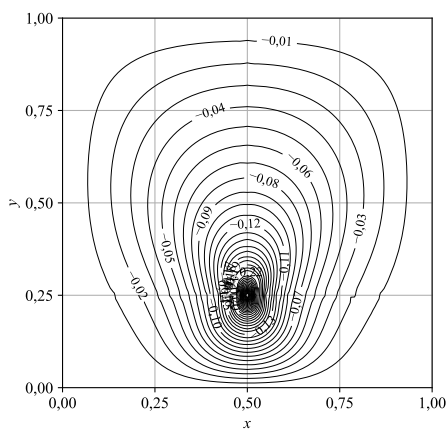
Рис. 4. Распределение прогибов $w(x, y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ5 для случаев 3ЭУ и 3У, когда действует давление в точке $(a/2, b/2)$



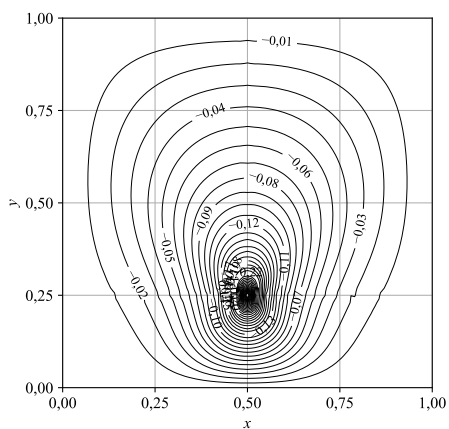
(а: 3ЭУ)



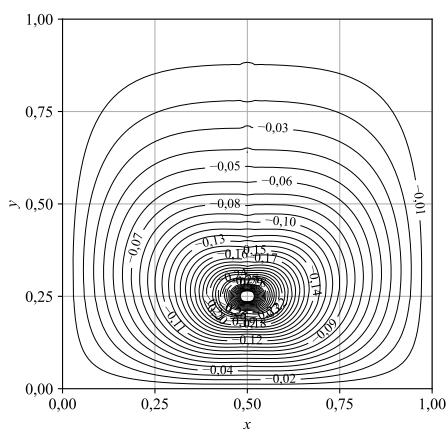
(а: 3У)



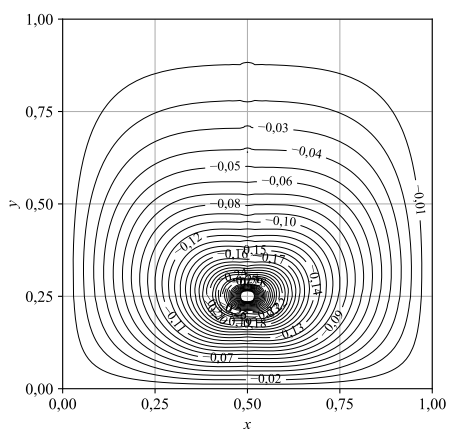
(б: 3ЭУ)



(б: 3У)



(в: 3ЭУ)



(в: 3У)

Рис. 5. Распределение прогибов $w(x, y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ1 для случаев 3ЭУ и 3У, когда действует давление в точке $(a/2, b/4)$

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

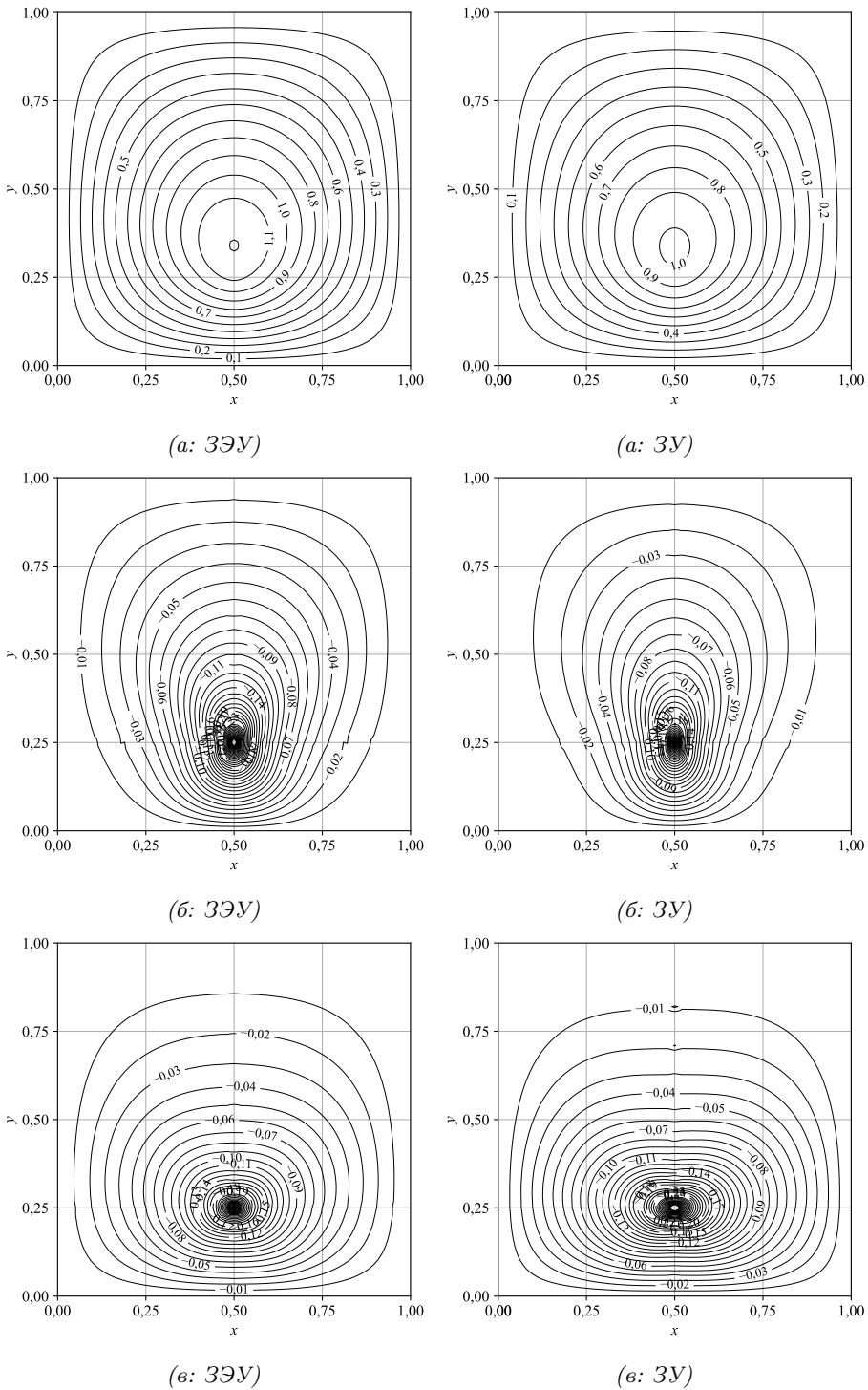
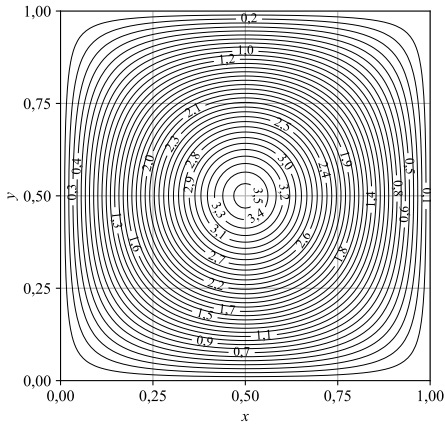
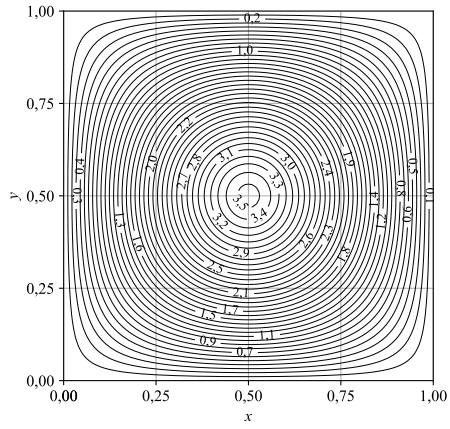


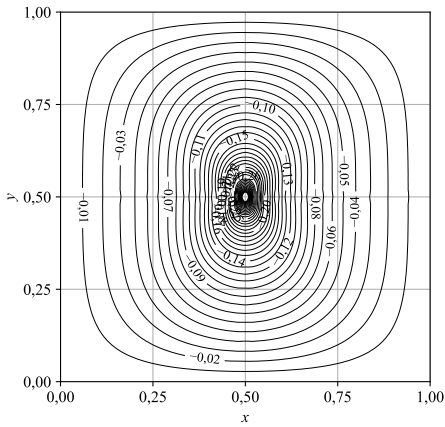
Рис. 6. Распределение прогибов $w(x,y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ5 для случаев ЗЭУ и ЗУ, когда действует давление в точке $(a/2, b/4)$



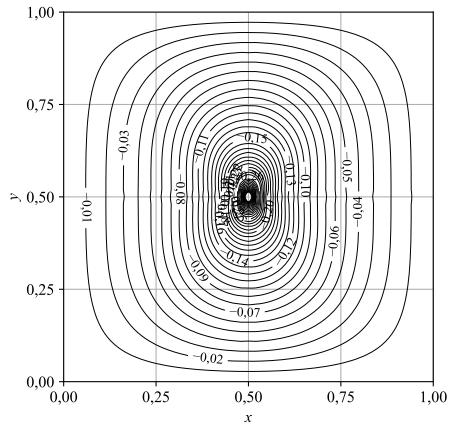
(а: 3ЭУ)



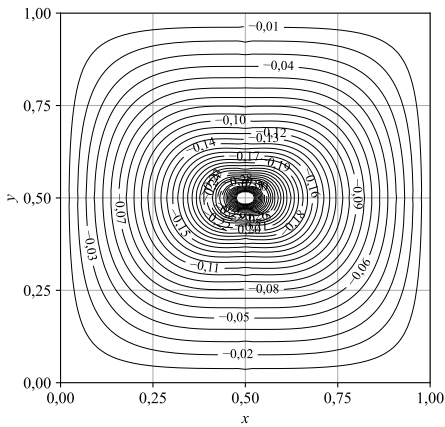
(а: 3У)



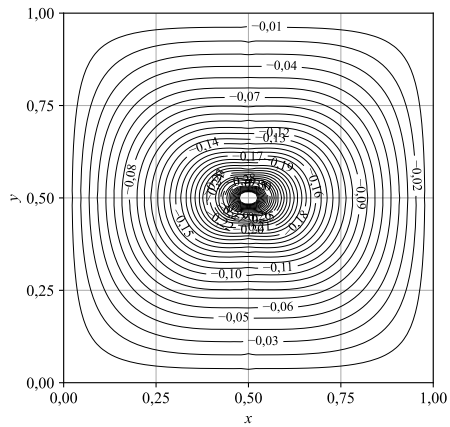
(б: 3ЭУ)



(б: 3У)



(в: 3ЭУ)



(в: 3У)

Рис. 7. Распределение прогибов $w(x, y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ1 для случаев 3ЭУ и 3У, когда действует давление в точке $(a/4, b/2)$

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

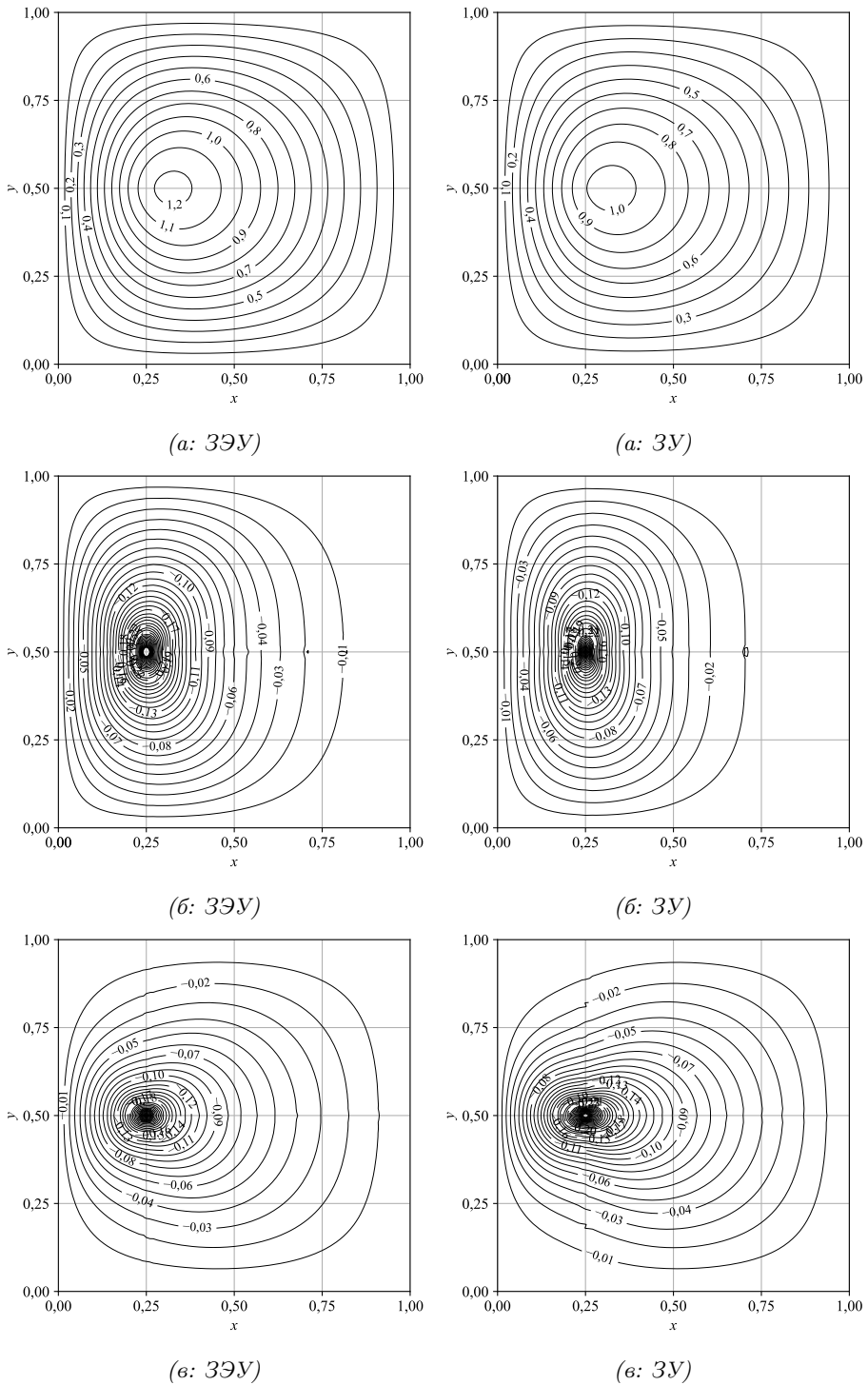
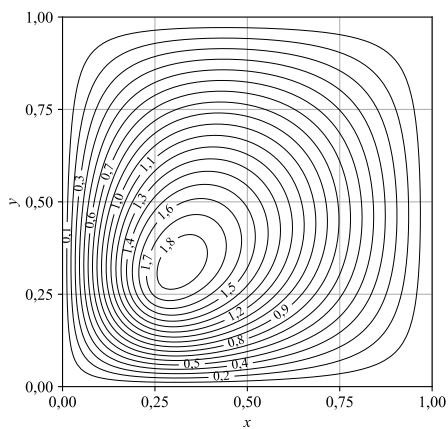
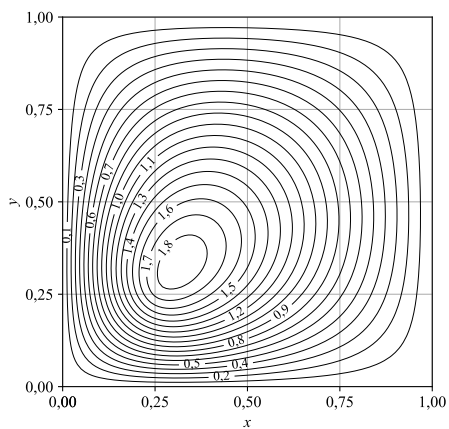


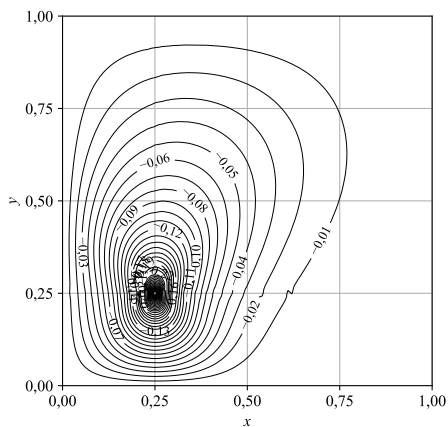
Рис. 8. Распределение прогибов $w(x, y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ5 для случаев 3ЭУ и 3У, когда действует давление в точке $(a/4, b/2)$



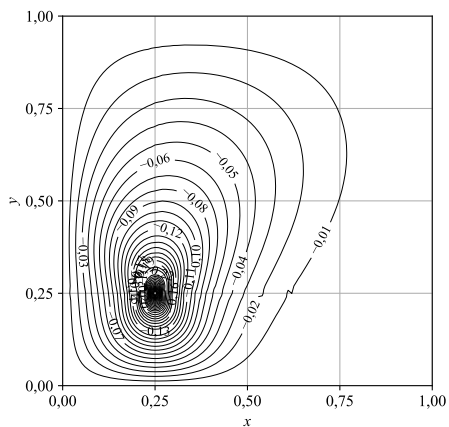
(а: 3ЭУ)



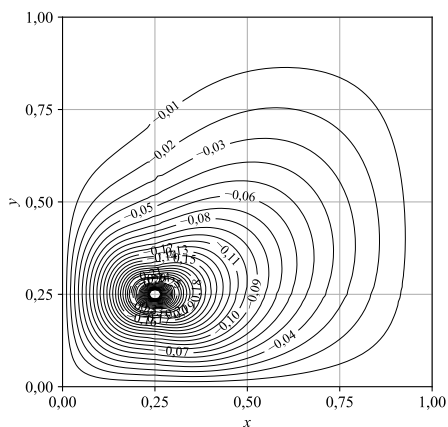
(а: 3У)



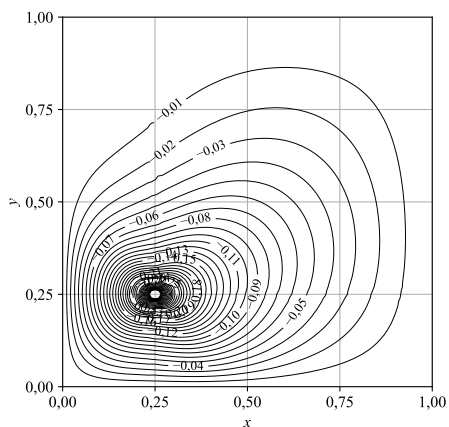
(б: 3ЭУ)



(б: 3У)



(в: 3ЭУ)



(в: 3У)

Рис. 9. Распределение прогибов $w(x, y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ1 для случаев 3ЭУ и 3У, когда действует давление в точке $(a/4, b/4)$

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

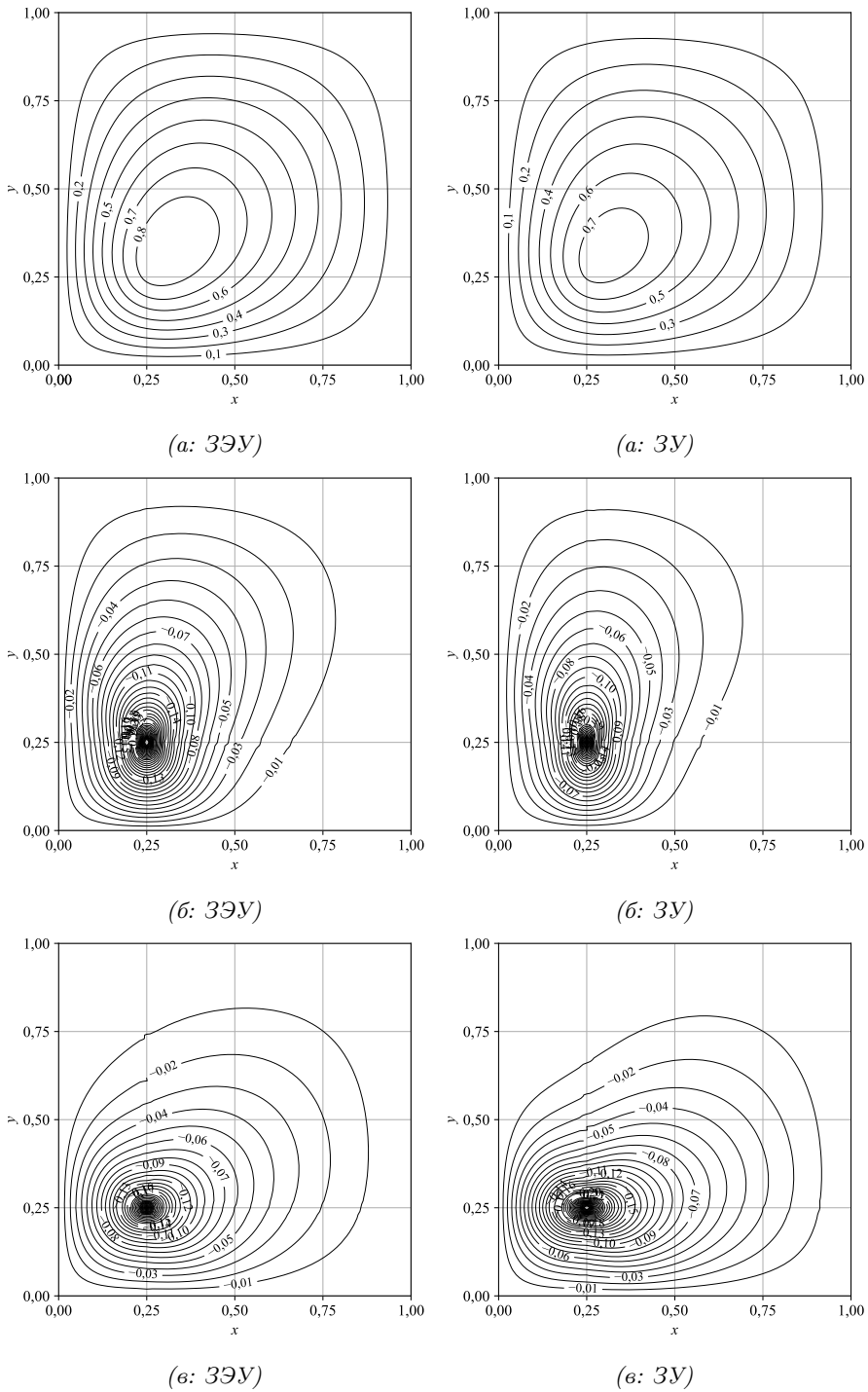


Рис. 10. Распределение прогибов $w(x,y)$ (рис. а), моментов M_x (рис. б), M_y (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ5 для случаев ЗЭУ и ЗУ, когда действует давление в точке $(a/4, b/4)$

В таблице 1 для прямоугольных плит из материалов ЭМ1, ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 с различными отношениями сторон приведены измеренные в $10^{-8}h^{-3}$ м максимальные значения прогибов w .

Таблица 1. Максимальные значения прогиба w

Тип задачи	Материал	Отношение сторон прямоугольника				
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$b/a = 2$	$b/a = 3$
ЗЭУ		$P_0(a/2, b/2)$				
	ЭМ1	3,5457	4,5238	4,5354	5,2633	5,3524
	ЭМ4	1,3221	1,7889	1,8133	1,9522	2,0065
	ЭМ5	1,6976	2,1852	2,1901	2,5190	2,5724
	ЭМ6	2,0697	2,6255	2,6305	3,1540	3,2391
		$P_0(a/2, b/4)$				
	ЭМ1	2,5081	3,1341	3,1455	4,4435	5,1137
	ЭМ4	0,9418	1,2402	1,2574	1,6500	1,9009
	ЭМ5	1,2022	1,5139	1,5189	2,1266	2,4498
	ЭМ6	1,4631	1,8190	1,8245	2,6372	3,0633
		$P_0(a/4, b/2)$				
	ЭМ1	2,5616	4,0492	4,4483	3,6486	3,7100
	ЭМ4	0,9537	1,5628	1,7507	1,3545	1,3911
	ЭМ5	1,2260	1,9487	2,1462	1,7468	1,7832
	ЭМ6	1,5012	2,3554	2,5817	2,1879	2,2451
		$P_0(a/4, b/4)$				
	ЭМ1	1,8699	2,8302	3,0890	3,1260	3,5557
	ЭМ4	0,7000	1,0950	1,2168	1,1607	1,3226
	ЭМ5	0,8958	1,3625	1,4904	1,4962	1,7038
	ЭМ6	1,0945	1,6458	1,7928	1,8579	2,1314
ЗУ		$P_0(a/2, b/2)$				
	ЭМ1	3,5420	4,5199	4,5323	5,2610	5,3502
	ЭМ4	1,2340	1,7061	1,7443	1,8576	1,9277
	ЭМ5	1,4312	1,9482	1,9900	2,2244	2,3299
	ЭМ6	1,7810	2,3744	2,4169	2,8247	2,9697
		$P_0(a/2, b/4)$				
	ЭМ1	2,5055	3,1315	3,1434	4,4405	5,1111
	ЭМ4	0,8813	1,1836	1,2097	1,5582	1,8088
	ЭМ5	1,0199	1,3515	1,3802	1,8446	2,1648
	ЭМ6	1,2658	1,6468	1,6764	2,3261	2,7471
		$P_0(a/4, b/2)$				
	ЭМ1	2,5592	4,0454	4,4444	3,6470	3,7085
	ЭМ4	0,8925	1,4773	1,6682	1,2898	1,3365
	ЭМ5	1,0405	1,6970	1,9068	1,5456	1,6154
	ЭМ6	1,2995	2,0856	2,3267	1,9632	2,0589
		$P_0(a/4, b/4)$				
	ЭМ1	1,8681	2,8275	3,0863	3,1240	3,5539
	ЭМ4	0,6560	1,0362	1,1603	1,0974	1,2595
	ЭМ5	0,7627	1,1895	1,3261	1,3012	1,5084
	ЭМ6	0,9500	1,4605	1,6178	1,6427	1,9148

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

В таблице 2 для прямоугольных плит из материалов ЭМ1, ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 с различными отношениями сторон приведены измеренные в МН·м максимальные по модулю значения изгибающих моментов M_x .

Таблица 2. Максимальные по модулю значения моментов M_x

Тип задачи	Материал	Отношение сторон прямоугольника				
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$b/a = 2$	$b/a = 3$
ЗЭУ		$P_0(a/2, b/2)$				
	ЭМ1	-0,3982	-0,3287	-0,2915	-0,4143	-0,3913
	ЭМ4	-0,3955	-0,3325	-0,2957	-0,4089	-0,3873
	ЭМ5	-0,4167	-0,3508	-0,3128	-0,4269	-0,4025
	ЭМ6	-0,4054	-0,3417	-0,3046	-0,4176	-0,3946
		$P_0(a/2, b/4)$				
	ЭМ1	-0,3565	-0,2937	-0,2571	-0,3918	-0,3858
	ЭМ4	-0,3563	-0,2973	-0,2612	-0,3872	-0,3804
	ЭМ5	-0,3755	-0,3142	-0,2767	-0,4057	-0,3968
	ЭМ6	-0,3655	-0,3059	-0,2693	-0,3960	-0,3882
		$P_0(a/4, b/2)$				
	ЭМ1	-0,3862	-0,3361	-0,2943	-0,3807	-0,3569
	ЭМ4	-0,3826	-0,3372	-0,2981	-0,3762	-0,3529
	ЭМ5	-0,4018	-0,3561	-0,3152	-0,3920	-0,3664
	ЭМ6	-0,3917	-0,3463	-0,3067	-0,3838	-0,3593
		$P_0(a/4, b/4)$				
	ЭМ1	-0,3542	-0,2977	-0,2586	-0,3691	-0,3541
	ЭМ4	-0,3522	-0,3001	-0,2625	-0,3644	-0,3494
	ЭМ5	-0,3706	-0,3171	-0,2780	-0,3808	-0,3636
	ЭМ6	-0,3609	-0,3085	-0,2704	-0,3722	-0,3561
ЗУ		$P_0(a/2, b/2)$				
	ЭМ1	-0,3977	-0,3282	-0,2910	-0,4139	-0,3910
	ЭМ4	-0,3604	-0,3000	-0,2654	-0,3798	-0,3626
	ЭМ5	-0,3378	-0,2800	-0,2470	-0,3607	-0,3463
	ЭМ6	-0,3378	-0,2813	-0,2486	-0,3604	-0,3461
		$P_0(a/2, b/4)$				
	ЭМ1	-0,3560	-0,2933	-0,2567	-0,3914	-0,3855
	ЭМ4	-0,3238	-0,2675	-0,2336	-0,3572	-0,3542
	ЭМ5	-0,3032	-0,2492	-0,2169	-0,3376	-0,3369
	ЭМ6	-0,3037	-0,2506	-0,2185	-0,3373	-0,3365
		$P_0(a/4, b/2)$				
	ЭМ1	-0,3858	-0,3356	-0,2939	-0,3804	-0,3566
	ЭМ4	-0,3512	-0,3049	-0,2678	-0,3507	-0,3310
	ЭМ5	-0,3308	-0,2845	-0,2491	-0,3339	-0,3166
	ЭМ6	-0,3307	-0,2852	-0,2504	-0,3336	-0,3162
		$P_0(a/4, b/4)$				
	ЭМ1	-0,3537	-0,2973	-0,2581	-0,3687	-0,3538
	ЭМ4	-0,3216	-0,2703	-0,2348	-0,3380	-0,3267
	ЭМ5	-0,3019	-0,2518	-0,2180	-0,3207	-0,3117
	ЭМ6	-0,3021	-0,2528	-0,2194	-0,3203	-0,3112

В таблице 3 для прямоугольных плит из материалов ЭМ1, ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 с различными отношениями сторон приведены измеренные в МН·м максимальные по модулю значения изгибающих моментов M_y .

Таблица 3. Максимальные по модулю значения моментов M_y

Тип задачи	Материал	Отношение сторон прямоугольника					
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$b/a = 2$	$b/a = 3$	
ЗЭУ		$P_0(a/2, b/2)$					
	ЭМ1	-0,4825	-0,4773	-0,4460	-0,4052	-0,3603	
	ЭМ4	-0,2970	-0,2878	-0,2676	-0,2612	-0,2354	
	ЭМ5	-0,1820	-0,1529	-0,1362	-0,1778	-0,1651	
	ЭМ6	-0,1989	-0,1675	-0,1493	-0,1954	-0,1817	
		$P_0(a/2, b/4)$					
	ЭМ1	-0,4588	-0,4369	-0,4055	-0,4134	-0,3660	
	ЭМ4	-0,2805	-0,2627	-0,2422	-0,2616	-0,2371	
	ЭМ5	-0,1636	-0,1371	-0,1211	-0,1725	-0,1651	
	ЭМ6	-0,1790	-0,1502	-0,1327	-0,1890	-0,1813	
		$P_0(a/4, b/2)$					
	ЭМ1	-0,4339	-0,4605	-0,4435	-0,3629	-0,3198	
	ЭМ4	-0,2714	-0,2790	-0,2659	-0,2351	-0,2101	
	ЭМ5	-0,1723	-0,1562	-0,1384	-0,1624	-0,1500	
	ЭМ6	-0,1887	-0,1708	-0,1515	-0,1785	-0,1650	
		$P_0(a/4, b/4)$					
	ЭМ1	-0,4261	-0,4285	-0,4043	-0,3679	-0,3228	
	ЭМ4	-0,2633	-0,2582	-0,2414	-0,2357	-0,2110	
	ЭМ5	-0,1604	-0,1391	-0,1222	-0,1599	-0,1500	
	ЭМ6	-0,1756	-0,1522	-0,1339	-0,1755	-0,1649	
	ЗУ		$P_0(a/2, b/2)$				
		ЭМ1	-0,4838	-0,4789	-0,4476	-0,4061	-0,3610
		ЭМ4	-0,4068	-0,4172	-0,3947	-0,3420	-0,3033
		ЭМ5	-0,4096	-0,4191	-0,3965	-0,3446	-0,3054
		ЭМ6	-0,4332	-0,4377	-0,4125	-0,3683	-0,3276
			$P_0(a/2, b/4)$				
		ЭМ1	-0,4602	-0,4385	-0,4070	-0,4143	-0,3668
		ЭМ4	-0,3923	-0,3838	-0,3596	-0,3472	-0,3068
ЭМ5		-0,3946	-0,3855	-0,3612	-0,3497	-0,3092	
ЭМ6		-0,4154	-0,4020	-0,3753	-0,3726	-0,3313	
		$P_0(a/4, b/2)$					
ЭМ1		-0,4350	-0,4620	-0,4451	-0,3637	-0,3204	
ЭМ4		-0,3665	-0,3965	-0,3882	-0,3055	-0,2680	
ЭМ5		-0,3691	-0,3987	-0,3900	-0,3078	-0,2699	
ЭМ6		-0,3917	-0,4182	-0,4067	-0,3295	-0,2902	
		$P_0(a/4, b/4)$					
ЭМ1		-0,4273	-0,4299	-0,4058	-0,3688	-0,3234	
ЭМ4		-0,3618	-0,3725	-0,3563	-0,3088	-0,2699	
ЭМ5		-0,3641	-0,3744	-0,3579	-0,3111	-0,2719	
ЭМ6		-0,3849	-0,3915	-0,3723	-0,3324	-0,2922	

На рисунках 11 и 12 для квадратных плит ($b = a$) из материалов ЭМ1 и ЭМ5 соответственно приведены графики распределений измеренных в $10^{-8}h^{-3} В/м$ плотностей потенциала электрического поля φ_0 для случаев, когда сосредоточенное давление действует в точке $P_0(a/2, b/2)$ (рисунок а), $P_0(a/2, b/4)$ (рисунок б), $P_0(a/4, b/2)$ (рисунок в), $P_0(a/4, b/4)$ (рисунок г).

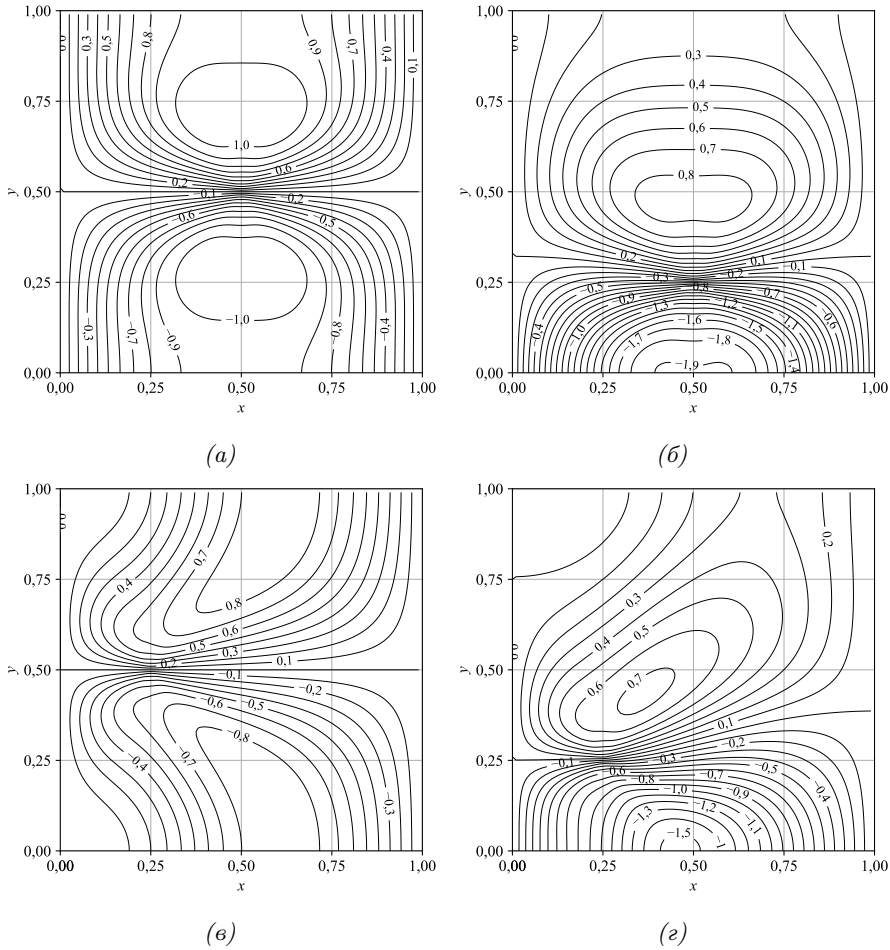


Рис. 11. Распределение плотности потенциала $\varphi_0(x, y)$ в квадратной плите из материала ЭМ1, когда действует давление в точке $(a/2, b/2)$ (рис. а), в точке $(a/2, b/4)$ (рис. б), в точке $(a/4, b/2)$ (рис. в), в точке $(a/4, b/4)$ (рис. г)

Выводы. Из представленных данных следует, что максимальные значения моментов в плите достигаются в точке сосредоточенного давления. А наибольшее значение прогиба плиты достигается в точке, находящейся на сравнительно небольшом удалении от точки сосредоточенного давления в направлении к центру плиты. При этом, увеличение любой из сторон прямоугольной плиты приводит к росту максимальных значений прогиба и к уменьшению концентрации изгибающих моментов.

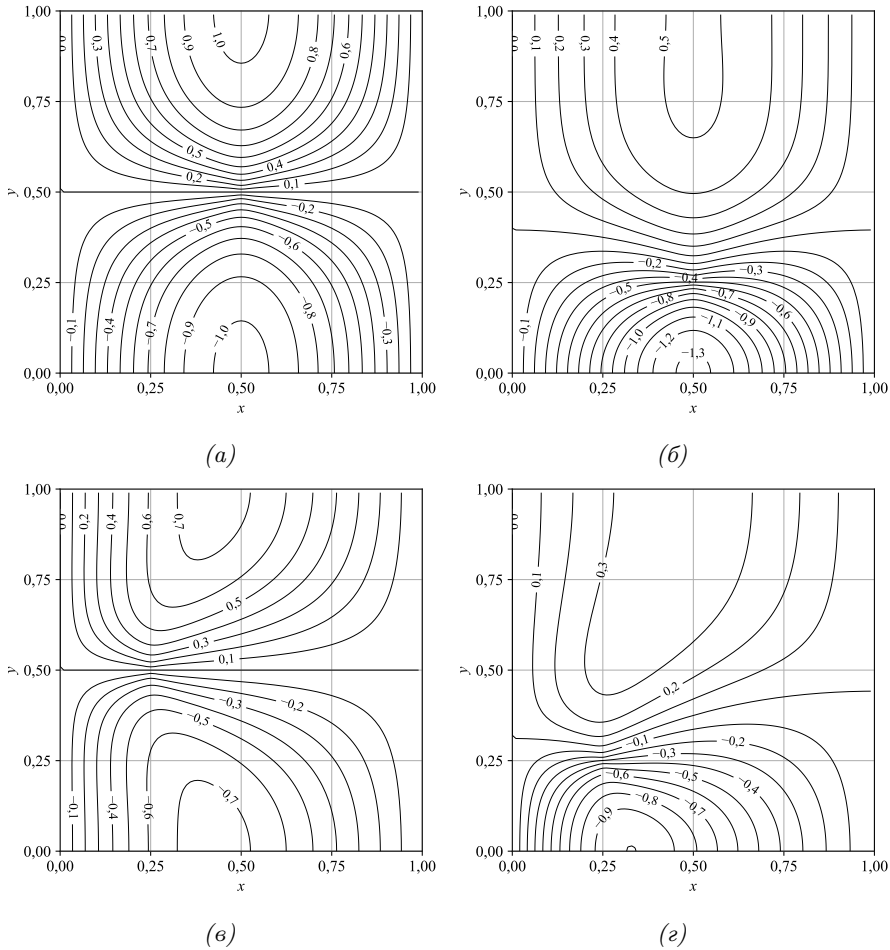


Рис. 12. Распределение плотности потенциала $\varphi_0(x, y)$ в квадратной плите из материала ЭМ5, когда действует давление в точке $(a/2, b/2)$ (рис. а), в точке $(a/2, b/4)$ (рис. б), в точке $(a/4, b/2)$ (рис. в), в точке $(a/4, b/4)$ (рис. г)

Соотношение сторон прямоугольной плиты также оказывает существенное влияние на значения характеристик электроупругого состояния плиты. В случае квадратной плиты перемещение точки сосредоточенного давления от центра плиты к краю приводит к уменьшению максимальных значений прогиба плиты и изгибающих моментов в плите. При этом, перемещение этой точки вдоль направления большей жесткости материала (соответствующего меньшему из коэффициентов деформации s_{ii}) приводит к более выраженному уменьшению указанных величин. В случае прямоугольной плиты уменьшение указанных величин становится более резким, если плита вытянута вдоль большей жесткости материала. Если же плиты вытянута вдоль направления меньшей жесткости материала (соответствующего большему из коэффициентов деформации s_{ii}), то изгибающий момент вдоль этого направления незначительно возрастает, а для остальных величин наблюдается слабо выраженное уменьшение.

Наибольшие значения прогиба возникают в плите из материала ЭМ1, обладающего наибольшими значениями коэффициентов деформации. Таким образом, упругие свойства материала значительно влияют на значения прогиба. В то же время, материал ЭМ1 обладает слабыми пьезоэлектрическими свойствами, поэтому учет электрических свойств приводит к слабому увеличению расчетных значений прогиба. В то же время, для плит из материалов ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 учет электрических свойств материала приводит к существенному росту расчетных значений прогиба и изгибающих моментов в плите. Следовательно, при проведении расчетов электрические свойства материала следует учитывать.

Распределение плотности электрического потенциала в плите также зависит от положения точки сосредоточенного давления. Все рассматриваемые материалы обладают поляризацией вдоль оси Oy , вследствие чего в центральной области плиты для изолиний плотности потенциала заметна тенденция к ориентированию вдоль оси Ox лишь ближе к краям, подчиняясь заданным граничным условиям. Точка сосредоточенного давления влияет на положение линии нулевого потенциала, которая проходит очень близко к этой точке, а в окрестности этой точки градиент плотности потенциала обладает наибольшей величиной. Приближение этой точки к краю плиты с заданным нулевым потенциалом приводит к уменьшению максимальных значений потенциала в плите. Если точка сосредоточенного давления приближается к неэлектропроводящему краю плиты, то по модулю значения плотности потенциала электрического поля вместе с его градиентом существенно возрастают в направлении этого края, а в направлении противоположного края – уменьшаются.

Из других результатов следует, что в плите из материала ЭМ1 возникают наиболее слабые моменты электрической индукции M_{Dx} , M_{Dy} , а в плитах из материалов ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 концентрация этих моментов оказалась на 2 порядка выше. При этом, в плите из материала ЭМ6 значения этих моментов несколько выше, чем в плитах из материалов ЭМ4 и ЭМ5. Это связано с тем, что материал ЭМ6 обладает наименьшими значениями коэффициентов диэлектрической проницаемости, тогда как у материалов ЭМ4, ЭМ5 эти значения несколько больше, а материал ЭМ1 обладает значительно наибольшими значениями пьезоэлектрических модулей и коэффициентов диэлектрической проницаемости.

Исследования проводились в Донецком государственном университете в рамках госзадания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations: elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations piezoelectric plates / H.F. Tiersten. – New York: Plenum, 1969. – 212 p.
3. Mindlin R.D. Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates / R.D. Mindlin // J. Appl. Phys. – 1952. – Vol. 23. – P. 83–88.
4. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates / R.D. Mindlin //

- Int. J. Solids Struct. – 1972. – Vol. 8. – P. 895–906.
5. Krommer M. A Reissner–Mindlin-type plate theory including the direct piezoelectric and the pyroelectric effect / M. Krommer, H. Irschik // Acta Mech. – 2000. – Vol. 141. – P. 51–69.
 6. Bisegna P. Evaluation of higher-order theories of piezoelectric plates in bending and in stretching / P. Bisegna, G. Caruso // Int. J. Solids Struct. – 2001. – Vol. 38. – P. 8805–8830.
 7. Love A.E.H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells / A.E.H. Love // Philosophical trans. of the Royal Society. – 1888. – Vol. serie A, No. 17. – P. 491–549.
 8. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
 9. Калоеров С.А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
 10. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит как частные задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3–4. – С. 58–79.
 11. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
 12. Mansfield E.H. The bending and stretching of plates / E.H. Mansfield. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 228 p.
 13. Глушанков Е.С. Решение задачи об изгибе свободно опертой прямоугольной пьезоэлектрической плиты. I / Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2022. – № 4 (83). – С. 23–46.
 14. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т., Т. 5).
 15. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
 16. Liu J.X. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow / J.X. Liu, X.S. Zhang, X.L. Liu, J. Zheng // Acta Mech. Sinica. – 2000. – Vol. 16. – P. 148–163.
 17. Dunn M.L. Micromechanics of coupled electroelastic composites effective thermal expansion and pyroelectric coefficients / Dunn M.L. // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73. – P. 5131–5140.

E.S. Glushankov, A.B. Mironenko

The solution of the problem of bending of simply supported rectangular piezoelectric plate. II.

A bending problem is solved for simply supported thin rectangular piezoelectric plate with concentrated loading acting upon the upper base. The solution of the problem is obtained in double trigonometric series. The influence of material's properties and plate's geometric characteristics on the electro-elastic state of the plate is obtained with the numerical studies based on the obtained solutions.

Keywords: *bending theory of thin plates, piezoelectric material, rectangular plate, simply supported side surface, deflection function, bending moments, double trigonometric series.*

*Статья поступила в редакцию 21.10.2024;
доработана 06.11.2024;
рекомендована к печати 20.11.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-3-65-71

EDN:UAJSDF

©2024. А.В. Глущенко¹, М.Н. Пачева², В.И. Сторожев³, М.В. Фоменко⁴

НОРМАЛЬНЫЕ ОКРУЖНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В ДВУХСЛОЙНОМ ПРОТЯЖЕННОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

В аналитической форме реализовано построение дисперсионных соотношений для распространяющихся вдоль углового окружного направления в двухслойном протяженном полом изотропном цилиндре поляризованных вдоль его оси нормальных упругих волн сдвигового типа. Рассмотрены случаи задания на внешних граничных поверхностях цилиндра однотипных условий отсутствия механических напряжений либо жесткой заделки, а также сочетаний различных условий указанного типа на противоположных контурах. На цилиндрической поверхности контакта составляющих рассматриваемого тела задаются условия идеального механического сопряжения. Спецификой полученных соотношений является одновременное вхождение искомого параметра волнового числа в выражения коэффициентных алгебраических множителей и в индексные выражения специальных цилиндрических функций. Получены отдельные результаты численного анализа сформулированных дисперсионных соотношений.

Ключевые слова: двухслойный протяженный изотропный цилиндр, concentрическое кольцевое сечение, нормальные окружные волны сдвига, условия свободных или закрепленных внешних поверхностей, идеальный контакт цилиндрических составляющих, дисперсионные соотношения.

Введение и цели работы. Нормальные окружные волны планарного, сдви-

¹ Глущенко Андрей Викторович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: andreyglushenko1@gmail.com.

Glushchenko Andrey Viktorovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

² Пачева Марина Николаевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: pacheva.m.n@mail.ru.

Pacheva Marina Nikolaevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³ Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., гл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

⁴ Фоменко Максим Владимирович – канд. физ.-мат. наук, уч. секретарь научно-исследовательской части, ст. науч. сотр. ДонГУ, Донецк, e-mail: maxim_fom@mail.ru.

Fomenko Maksim Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Scientific Secretary of the Research Department.

гового и изгибного типов вдоль окружных направлений замкнутых волноводов, краевые задачи исследования которых формулируются в кольцевых или составных кольцевых областях, являются актуальным классом задач теории упругих волноводов, представляющих теоретический интерес и востребованных проектными расчетными методиками в механике машин и механизмов, строительной механике, ультразвуковой диагностике, акустоэлектронике [1–6]. Так, в работах [7–10] представлены результаты теоретических исследований по проблемам распространения круговых и спирально-винтовых нормальных волн в полом изотропном цилиндрическом волноводе, а также получены отдельные результаты расчета мод окружных нормальных волн планарного типа в полом упругом цилиндре со свободными граничными поверхностями. Ряд исследований, относящихся к анализу эффектов распространения волн изгиба в тонких изотропных и трансверсально-изотропных однородных и составных кольцевых пластинах при различных краевых условиях на граничных контурах на основе прикладной теории, представлен в публикациях [11–16] и составляет основу для дальнейшего расширения круга рассматриваемых актуальных аспектов в изучении дисперсионных, кинематических и энергетических свойств нормальных окружных волн. В этой связи, целью излагаемых в настоящей работе исследований является получение дисперсионных соотношений для сдвиговых нормальных волн вдоль окружного углового направления в плоскости поперечного сечения двухслойного протяженного полого изотропного цилиндра, на поверхности контакта составляющих которого задаются условия идеального механического сопряжения, а на внешних граничных поверхностях формулируются однотипные условия отсутствия механических напряжений либо жесткой заделки, а также сочетания различных условий указанного типа на противоположных контурах.

1. Основные соотношений рассматриваемой модели. Рассматривается протяженное двухслойное изотропное цилиндрическое упругое тело, занимающее в отнесенных к нормирующему параметру R_* цилиндрических координатах $O r \theta z$ область $V = V_1 \cup V_2 = \{(r, \theta) \in S_1, -\infty < z < \infty\} \cup \{(r, \theta) \in S_2, -\infty < z < \infty\}$; $S_1 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $S_2 = \{R_2 \leq r \leq R_3, 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Вдоль окружного углового направления θ в плоскости поперечного сечения цилиндра $z = 0$ распространяется имеющая циклическую частоту ω и нормированное волновое число k поляризованная вдоль осевого направления Oz двумерная сдвиговая нормальная волна с комплексной функцией колебательных упругих перемещений

$$u_z(r, \theta, t) = \begin{cases} u_{10z}(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)), & R_1 \leq r < R_2; \\ u_{20z}(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)), & R_2 \leq r \leq R_3. \end{cases} \quad (1)$$

В рассматриваемой модели динамического деформирования физико-механические свойства материалов изотропных составляющих цилиндра в областях V_j определяются модулями Ламе μ_j и плотностями ρ_j , а амплитудные составляющие комплексных функций волновых перемещений являются решениями уравнений

$$(D_j^2 + \beta_j^2)u_{j0z}(r_j) = 0, \quad (2)$$

$$D_j^2 = d_j^2/dr_j^2 + r_j^{-1}d/dr_j - r_j^{-2}k^2, \quad \beta_j^2 = \rho_j\omega^2/\mu_j,$$

которые с учетом геометрии областей S_j могут быть выражены в аналитической форме комбинациями специальных цилиндрических функций с произвольными коэффициентами

$$u_{j0z}(r_j) = C_{1j}J_k(\beta_j r_j) + C_{2j}Y_k(\beta_j r_j). \quad (3)$$

Востребованные далее представления для амплитудных составляющих динамических касательных напряжений соответственно имеют выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{j0rz}(r_j) &= \mu_j(d/dr_j)(C_{1j}J_k(\beta_j r_j) + C_{2j}Y_k(\beta_j r_j)) = \\ &= C_{1j}(k\beta_j J_k(\beta_j r_j) - \beta_j^2 r_j J_{k+1}(\beta_j r_j)) + C_{2j}(k\beta_j Y_k(\beta_j r_j) - \beta_j^2 r_j Y_{k+1}(\beta_j r_j)). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Формулировки дисперсионных соотношений. Дисперсионные уравнения для волн рассматриваемого типа являются следствиями из комбинаций однородных краевых условий одного из указанных выше типов на внешних граничных поверхностях рассматриваемого тела и на поверхности идеального механического контакта составляющих двухслойного цилиндра. Соответственно, рассматриваются четыре варианта задания этих условий:

$$(\sigma_{1rz}(r, \theta, t))_{r=R_1} = 0, \quad (\sigma_{1rz}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (\sigma_{2rz}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (5)$$

$$(u_{1z}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (u_{2z}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (\sigma_{2rz}(r, \theta, t))_{r=R_3} = 0;$$

$$(u_{1z}(r, \theta, t))_{r=R_1} = 0, \quad (\sigma_{1rz}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (\sigma_{2rz}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (6)$$

$$(u_{1z}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (u_{2z}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (u_{2z}(r, \theta, t))_{r=R_3} = 0;$$

$$(\sigma_{1rz}(r, \theta, t))_{r=R_1} = 0, \quad (\sigma_{1rz}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (\sigma_{2rz}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (7)$$

$$(u_{1z}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (u_{2z}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (u_{2z}(r, \theta, t))_{r=R_3} = 0;$$

$$(u_{1z}(r, \theta, t))_{r=R_1} = 0, \quad (\sigma_{1rz}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (\sigma_{2rz}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (8)$$

$$(u_{1z}(r, \theta, t))_{r=R_2} = (u_{2z}(r, \theta, t))_{r=R_2}, \quad (\sigma_{2rz}(r, \theta, t))_{r=R_3} = 0.$$

Подстановка представлений (3) и (4) в краевые условия (5)–(8) приводит к однородным системам линейных алгебраических уравнений четвертого порядка относительно постоянных коэффициентов C_{1j} , C_{2j} , равенства нулю определителей матриц которых являются искомыми дисперсионными уравнениями. Таким образом, они могут быть записаны в форме

$$F(\omega, k) = \det \|s_{pq}\|_{p,q=\overline{1,4}} = 0, \quad (9)$$

где для случая краевых условий (5)

$$\begin{aligned}
 \varsigma_{11} &= k\beta_1 J_k(\beta_1 R_1) - \beta_1^2 R_1 J_{k+1}(\beta_1 R_1), \\
 \varsigma_{12} &= k\beta_1 Y_k(\beta_1 R_1) - \beta_1^2 R_1 Y_{k+1}(\beta_1 R_1), \quad \varsigma_{13} = \varsigma_{14} = 0; \\
 \varsigma_{21} &= k\beta_1 J_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 J_{k+1}(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{22} = k\beta_1 Y_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_1 R_2), \\
 \varsigma_{23} &= k\beta_2 J_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 J_{k+1}(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{24} = k\beta_2 Y_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{31} &= J_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{32} = Y_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{33} = J_k(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{34} = Y_k(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{41} &= \varsigma_{42} = 0; \quad \varsigma_{43} = k\beta_2 J_k(\beta_2 R_3) - \beta_2^2 R_3 J_{k+1}(\beta_2 R_3), \\
 \varsigma_{44} &= k\beta_2 Y_k(\beta_2 R_3) - \beta_2^2 R_3 Y_{k+1}(\beta_2 R_3);
 \end{aligned}$$

для случая краевых условий (6)

$$\begin{aligned}
 \varsigma_{11} &= J_k(\beta_1 R_1), \quad \varsigma_{12} = Y_k(\beta_1 R_1), \quad \varsigma_{13} = \varsigma_{14} = 0; \\
 \varsigma_{21} &= k\beta_1 J_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 J_{k+1}(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{22} = k\beta_1 Y_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_1 R_2), \\
 \varsigma_{23} &= k\beta_2 J_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 J_{k+1}(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{24} = k\beta_2 Y_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{31} &= J_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{32} = Y_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{33} = J_k(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{34} = Y_k(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{41} &= \varsigma_{42} = 0; \quad \varsigma_{43} = J_k(\beta_2 R_3), \quad \varsigma_{44} = Y_k(\beta_2 R_3);
 \end{aligned}$$

для случая краевых условий (7)

$$\begin{aligned}
 \varsigma_{11} &= k\beta_1 J_k(\beta_1 R_1) - \beta_1^2 R_1 J_{k+1}(\beta_1 R_1), \quad \varsigma_{12} = k\beta_1 Y_k(\beta_1 R_1) - \beta_1^2 R_1 Y_{k+1}(\beta_1 R_1), \\
 \varsigma_{13} &= \varsigma_{14} = 0; \\
 \varsigma_{21} &= k\beta_1 J_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 J_{k+1}(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{22} = k\beta_1 Y_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_1 R_2), \\
 \varsigma_{23} &= k\beta_2 J_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 J_{k+1}(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{24} = k\beta_2 Y_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{31} &= J_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{32} = Y_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{33} = J_k(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{34} = Y_k(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{41} &= \varsigma_{42} = 0; \quad \varsigma_{43} = J_k(\beta_2 R_3), \quad \varsigma_{44} = Y_k(\beta_2 R_3);
 \end{aligned}$$

для случая краевых условий (8)

$$\begin{aligned}
 \varsigma_{11} &= J_k(\beta_1 R_1), \quad \varsigma_{12} = Y_k(\beta_1 R_1), \quad \varsigma_{13} = \varsigma_{14} = 0; \\
 \varsigma_{21} &= k\beta_1 J_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 J_{k+1}(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{22} = k\beta_1 Y_k(\beta_1 R_2) - \beta_1^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_1 R_2), \\
 \varsigma_{23} &= k\beta_2 J_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 J_{k+1}(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{24} = k\beta_2 Y_k(\beta_2 R_2) - \beta_2^2 R_2 Y_{k+1}(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{31} &= J_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{32} = Y_k(\beta_1 R_2), \quad \varsigma_{33} = J_k(\beta_2 R_2), \quad \varsigma_{34} = Y_k(\beta_2 R_2); \\
 \varsigma_{41} &= \varsigma_{42} = 0; \quad \varsigma_{43} = k\beta_2 J_k(\beta_2 R_3) - \beta_2^2 R_3 J_{k+1}(\beta_2 R_3), \\
 \varsigma_{44} &= k\beta_2 Y_k(\beta_2 R_3) - \beta_2^2 R_3 Y_{k+1}(\beta_2 R_3).
 \end{aligned}$$

Вычислительной особенностью уравнения (9) является то, что искомый параметр k входит в него, как составляющая индексных значений специальных цилиндрических функций, и как алгебраический множитель. Расчет форм волновых движений в рассматриваемых случаях задания краевых условий (5)–(8), после определения удовлетворяющих (9) пар параметров (ω_m, k_m) реализуется с использованием представления (3) на основе вычисления нормированных значений коэффициентов C_{1jm} , C_{2jm} по формулам

$$\begin{aligned}
 C_{11m} &= \det \|\zeta_{pq}\|_{p,q=\overline{2,4}; \omega=\omega_m, k=k_m}, \\
 C_{12m} &= -\det \|\zeta_{pq}\|_{p=\overline{2,4}; q=1,3,4; \omega=\omega_m, k=k_m}, \\
 C_{21m} &= \det \|\zeta_{pq}\|_{p=\overline{2,4}; q=1,2,4; \omega=\omega_m, k=k_m}, \\
 C_{22m} &= -\det \|\zeta_{pq}\|_{p=\overline{2,4}; q=\overline{1,3}; \omega=\omega_m, k=k_m}.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

3. Пример расчетного анализа. Частный случай расчетного анализа корней представлен для случая задания краевых условий (6) применительно к цилиндрическому телу, у которого компонента V_1 изготовлена из меди с параметрами $\mu_1 = 40.7$ ГПа, $\rho_1 = 8.93 \cdot 10^3$ кг/м³, а компонента V_2 – из алюминия с параметрами $\mu_2 = 26.0$ ГПа, $\rho_2 = 2.71 \cdot 10^3$ кг/м³. Приведенные радиусы R_j имеют значения $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$. Результаты расчета ряда значений (ω_m, k_m) для рассматриваемого случая представлены в таблице 1.

Таблица 1

Частотный параметр ω_m , (рад/сек)	Приведенное волновое число k_m
44.7	0.87
40.0	0.81
34.6	0.56
33.2	0.43

Выводы. В результате проведенных исследований получены дисперсионные соотношения для сдвиговых нормальных волн вдоль окружного углового направления в плоскости поперечного сечения двухслойного протяженного полого изотропного цилиндра, на поверхности контакта составляющих которого задаются условия идеального механического сопряжения, а на внешних граничных поверхностях формулируются однотипные условия отсутствия механических напряжений либо жесткой заделки, а также сочетания различных условий указанного типа на противоположных контурах. Исследуемые волновые процессы описываются в рамках модели динамической антиплоской деформации. Представлены аналитические выражения для элементов функциональных дисперсионных определителей четвертого порядка.

Полученные результаты являются основой для дальнейшего исследования дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик окружных нормальных волн сдвигового типа в многослойных полых цилиндрических телах.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Речицкий В.И.* Акустоэлектронные радиокомпоненты. Схемы, топология, конструкции / В.И. Речицкий. – М.: Радио и связь, 1987. – 192 с.
2. *Rose J.L.* Ultrasonic waves in solid media / J.L. Rose. – Cambridge University Press, 2004. – 454 p.
3. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник / под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2005. – 656 с.
4. *Datta S.K.* Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
5. *Бугаев А.С.* Устройства на поверхностных акустических волнах / А.С. Бугаев, В.Ф. Дмитриев, С.В. Кулаков – Санкт-Петербург: ГУАП, 2009. – 187 с.
6. *Бреховских Л.М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы / Л.М. Бреховских // Акуст. журн. – 1960. – Т. 13, № 4. – С. 541–554.
7. *Голубева Е.В.* О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре / Е.В. Голубева // Акуст. журн. – 1986. – Т. 22, № 3. – С. 385–386.
8. *Тютекин В.В.* Нормальные волны кругового типа в полом упругом цилиндре / В.В. Тютекин // Акуст. журн. – 2004. – Т. 50, № 6 – С. 855–864.
9. *Тютекин В.В.* Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрического волновода. Спиральные волны в свободном пространстве / В.В. Тютекин // Акуст. журн. – 2006. – Т. 52, № 4 – С. 549–555.
10. *Тютекин В.В.* Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны / В.В. Тютекин // Акуст. журн. – 2003. – Т. 49, № 6 – С. 843–851.
11. *Болнокин В.Е.* Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с закрепленными краями / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – №4 (77). – С. 35–43.
12. *Болнокин В.Е.* Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с шарнирно опертыми граничными контурами / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 114–121.
13. *Дубяго Л.В.* Дисперсионный спектр упругих волн изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными либо шарнирно опертыми краями / Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 48–56.
14. *Болнокин В.Е.* Моды изгибных упругих волн в окружном направлении изотропной кольцевой пластины на упругом основании / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Л.В. Дубяго // Донецкие чтения 2020: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: ДонНУ, 2020. – С. 35–38.
15. *Глущенко А.В.* Окружные нормальные изгибные волны в кольцевой пластине с двумя разнородными концентрическими составляющими / А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2023. – № 1. – С. 12–20. – EDN: QXXDZO.
16. *Глущенко А.В.* Волны обобщенной плоской деформации в окружном направлении тонкой кольцевой пластины / А.В. Глущенко, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 4 (85). – С. 14–22. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-4-14-22. – EDN: GCWUEA.

A.V. Glushchenko, M.N. Pacheva, V.I. Storozhev, M.V. Fomenko

Normal circumferential shear waves in a two-layer extended hollow cylinder.

The construction of dispersion relations for normal elastic shear waves polarized along its axis and propagating along the angular circumferential direction in a two-layer extended hollow isotropic cylinder is implemented in an analytical form. The cases of specifying the same type of conditions of absence of mechanical stresses or rigid fixation on the outer boundary surfaces of the cylinder, as well as combinations of various conditions of the specified type on opposite contours are considered. The conditions of ideal mechanical contact are specified on the cylindrical contact surface of the components of the body under consideration. The specificity of the obtained relations is the simultaneous inclusion of the sought parameter of the wave number in the expressions of coefficient algebraic factors and in the index expressions of special cylindrical functions. Individual results of the numerical analysis of the formulated dispersion relations are obtained.

Keywords: *two-layer extended isotropic cylinder, concentric annular section, normal circumferential shear waves, conditions of free or fixed outer surfaces, ideal contact of cylindrical components, dispersion relations.*

*Статья поступила в редакцию 24.10.2024;
доработана 19.11.2024;
рекомендована к печати 29.11.2024.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК (669.788+660.234):539.371/372

doi:10.24412/0136-4545-2024-3-72-78

EDN:OWBZBN

©2024. Ж.Л. Глухова¹

ОБ УЧЕТЕ УПРУГИХ ПОЛЕЙ В ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССАХ ВОДОРОДА В МЕТАЛЛАХ

Проведен анализ системы связанных дифференциальных уравнений, описывающих явление водородоупругости. Показано, что диффузионное рассасывание неоднородностей концентрации водорода в металлах, а также формоизменение палладиевой пластины при одностороннем насыщении в области α -твердых растворов водорода в металлах хорошо согласуется с данной моделью. Водородоупругая модель в целом правильно описывает характер изменения остаточного формоизменения в зависимости от температуры и давления водорода.

Ключевые слова: водородоупругость, диффузия водорода в металлах, водородные концентрационные напряжения.

Введение. Учет взаимодействия кристаллической и водородной подсистем в системах металл-водород представляет собой важную задачу при разработке современных технологий водородной обработки металлов. Особую важность этот вопрос приобретает при решении проблем водородной энергетики. Проникновение водорода внутрь металлов приводит к перераспределению напряжений в кристаллических структурах, что в свою очередь влияет на процесс диффузии водорода. Явление водородоупругости [1, 2] принято рассматривать по аналогии с термоупругостью [3]. В «классическом» уравнении теплопроводности не учтена механическая связанность, а в соответствующем уравнении движения – инерционный член. В то же время, механическая связанность вносит значительный вклад в термоупругое рассеяние энергии, а инерционные эффекты проявляются в условиях быстро протекающего нестационарного теплообмена. Учет этих факторов приводит к необходимости описания явления термоупругости системой связанных дифференциальных уравнений [3]:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad } T = \rho \ddot{\vec{u}}, \quad (1)$$

¹ Глухова Жанна Лукьяновна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. физики ДонНТУ, Донецк, e-mail: zhglukhova@yandex.ru.

Glukhova Zhanna Lukyanovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National Technical University, Donetsk, Chair of Physics.

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \dot{T} - \frac{T(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\lambda_T} \operatorname{div} \dot{\vec{u}} = 0, \quad (2)$$

где α – коэффициент температуропроводности; T – температура; ρ – плотность; \vec{u} – вектор перемещений; λ_T – коэффициент теплопроводности; λ и μ – коэффициенты Ляме; точкой сверху обозначены частные производные по времени.

Уравнения (1) и (2) при определенных начальных и граничных условиях описывают изменение в пространстве и во времени поля деформаций и температурного поля.

Термоупругие явления характеризуются взаимосвязанностью и взаимным влиянием распределения температур и упругих полей [3], тогда как водородоупругие явления обусловлены взаимным влиянием водородных концентрационных и упругих полей. Возникают предпосылки для описания явления водородоупругости по аналогии с термоупругостью.

В данной статье приведен анализ системы связанных дифференциальных уравнений водородоупругости. По аналогии с явлением термоупругости обоснована возможность учета в данных уравнениях допущений, аналогичных тем, которые принимаются в термоупругости.

1. Система связанных дифференциальных уравнений водородоупругости. Рассмотрим случай разбавленных растворов водорода в металлах, когда можно считать коэффициент диффузии не зависящим от концентрации. При диапазоне температур выше критических значений, соответствующих началу гидридных превращений, водородоупругие явления описываются системой связанных дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\nabla^2 c - \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{(3\lambda + 2\mu)wB_c c}{D} \operatorname{div} \dot{\vec{u}} = 0, \quad (3)$$

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - w(3\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} c - \rho \ddot{\vec{u}} = 0, \quad (4)$$

где c – относительная атомная концентрация водорода; \vec{u} – вектор перемещений; ρ – плотность металла; λ и μ – упругие коэффициенты Ляме; w – коэффициент линейного расширения металла; D – коэффициент диффузии водорода; $B_c = \partial c / \partial P$ – водородоемкость; P – давление водорода в газовой фазе.

Данная система уравнений описывает деформацию металла при нестационарных механических и водородных воздействиях, а также изменение поля концентрации водорода в металле, вызванное его деформацией. Система является связанной благодаря слагаемым $(3\lambda + 2\mu)wB_c c D^{-1} \operatorname{div} \dot{\vec{u}}$ и $(3\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} c$ в первом и втором уравнениях, соответственно. Рассмотрим случай, когда смещение среды вызвано только неоднородным распределением водорода. Тогда, принимая во внимание то, что время релаксации при диффузии существенно превышает время релаксации для механических смещений, слагаемое $\rho \ddot{\vec{u}}$ во втором уравнении можно принять равным нулю.

2. Результаты численных экспериментов. Связанная система уравнений (3) и (4) (в модификациях) применялась при описании поведения неодно-

родностей концентрации водорода [2] и процесса насыщения водородом тонкой пластинки [4].

В работе [2] математическое моделирование было использовано для анализа процесса диффузионного рассасывания макроскопических концентрационных неоднородностей водорода. Исследован диапазон температур выше границ гидридного превращения. Возникающие водородоупругие напряжения не превышали предела упругости палладия.

Постановка задачи была следующей. Из бесконечной упругой среды вынут шар. Он насыщается водородом и увеличивает вследствие этого свой объем. Затем он возвращается в ту же полость, что приводит к возникновению упругих напряжений. На первом этапе согласно теории упругости рассчитывалось начальное распределение упругих напряжений в среде и шаре. Затем система уравнений (3) и (4) решалась численным методом. Рассчитывалось изменение распределение концентрации водорода и водородоупругих напряжений во времени.

На рисунке 1 представлены зависимости времени рассасывания τ шара радиусом 1 мм от температуры при «чистой» диффузии (кривая 1) и при учете водородоупругих напряжений (кривая 2). Основной результат заключается в том, что водородоупругие напряжения замедляют (в 15–20 раз) процесс рассасывания во всем рассматриваемом диапазоне температур. При низких температурах время жизни неоднородностей возрастает.

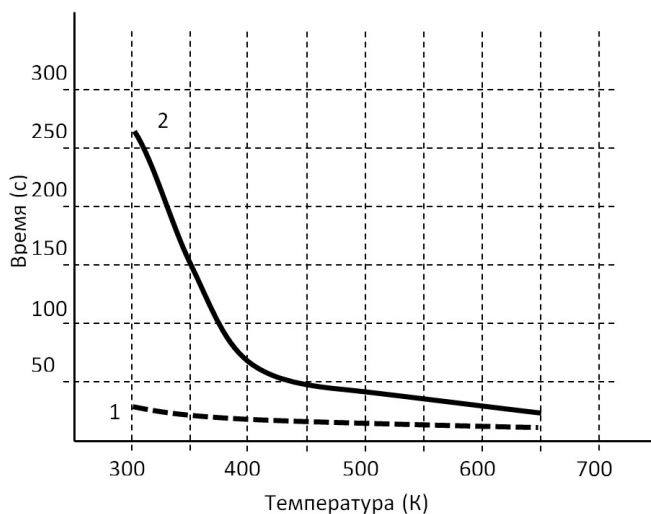


Рис. 1. Зависимость времени жизни концентрационной неоднородности радиусом 1 мм от температуры: 1 – по закону Фика; 2 – упругая диффузия

В следующем численном эксперименте система (3)–(4) применялась для расчета изменений во времени распределения концентрации водорода и изменения формы (изгиба) палладиевой пластинки [4] при ее одностороннем насыщении водородом. Реальный эксперимент по подобной схеме описан в работе [5]. В

применяемой в [4] модели использовалась система связанных уравнений водо-родоупругости для одномерного случая в виде:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{D} w B_c c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{D} w \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

где u_x – проекция вектора смещения на ось x . Начальные условия записывались в виде:

$$c(x, 0) = 0 \text{ для } -\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}; \quad (7)$$

$$c(x, 0) = c_0 \text{ для } -\infty < x < -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} < x < +\infty, \quad (8)$$

где c_0 – равновесная концентрация, определяемая по закону Сивертса при давлении P газообразного водорода; h – толщина пластинки.

Граничные условия для концентраций:

$$D \frac{dc}{dx} \Big|_{x=\frac{h}{2}} = 0; \quad (9)$$

$$c\left(-\frac{h}{2}, t\right) = c_0 (1 - e^{-\alpha t}), \quad (10)$$

где α – константа, которая задается условиями насыщения. Начальные условия для смещений u_x рассчитывались через соответствующие условия для концентраций, а граничные условия – исходя из выражений:

$$\frac{1}{\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx - \frac{w}{1 - 2\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (c(x) - c_h) dx = 0; \quad (11)$$

$$\frac{1}{\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) x dx - \frac{w}{1 - 2\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (c(x) - c_h) x dx = 0, \quad (12)$$

где c_h – концентрация вблизи непроницаемой стороны пластинки; $c(x)$ – концентрация в точке с координатой x ; ν – коэффициент Пуассона; остальные символы имеют свое обычное значение.

На рисунке 2 представлены результаты расчета изменения распределения концентрации водорода по толщине пластины с течением времени для температуры 100°C и $c_0 = 0,008$ (данное значение c_0 соответствует насыщающему давлению водорода $P_{H_2} = 6 \times 10^3 \text{ Па}$). Результаты расчета показывают процесс постепенного выравнивания концентрации водорода. Интерес представляет тот

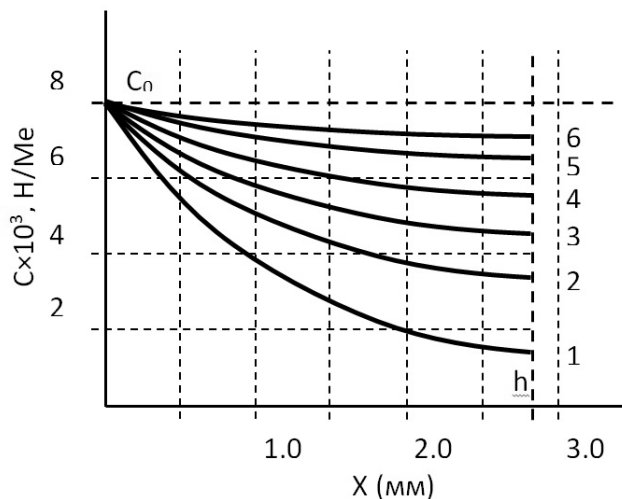


Рис. 2. Графики изменения распределения концентрации водорода по толщине пластины с течением времени: 1 – 1 мин., 2 – 5 мин., 3 – 10 мин., 4 – 15 мин., 5 – 20 мин., 6 – 30 мин

факт, что за время численного эксперимента концентрация так и не выровнивается, что согласуется с результатами работы [5].

Данный факт более наглядно проиллюстрирован на рисунке 3, где показаны зависимости изменения концентрации c_h от времени. Водородные концентрационные напряжения и деформации существенно замедляют процесс диффузии водорода (см. кривую 1 на рис. 3). Процесс может замедляться так, что экспери-

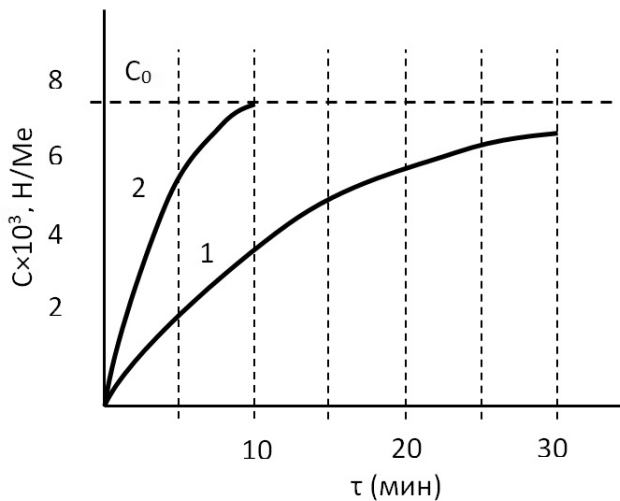


Рис. 3. Зависимости концентрации водорода от времени вблизи непроницаемой стороны мембраны: 1 – водородоупругая модель; 2 – по уравнению Фика

ментально будет восприниматься как стационарное состояние. В целом результаты данных расчетов говорят о том, что одной из причин экспериментально наблюдаемых (см. [5]) остаточных формоизменений в насыщаемой водородом пластине является вызванный водородными концентрационными напряжениями градиент концентрации водорода.

Особый интерес представляет зависимость остаточного формоизменения от температуры. Рассматриваются водородные воздействия при таких давлениях, чтобы в открытом для поступления газа приповерхностном слое пластины устанавливались бы одинаковые концентрации c_0 водорода. Такие экспериментальные данные представлены на рисунке 4а. Результаты соответствующих теоретических расчетов обобщены на рисунке 4б.

Сравнение данных результатов показывает, что водородоупругая модель в целом правильно описывает характер изменения остаточного формоизменения в зависимости от температуры и давления водорода.

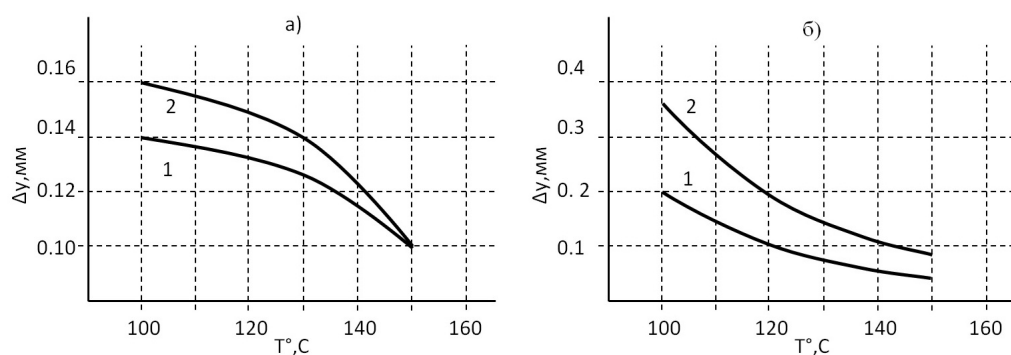


Рис. 4. Зависимости остаточного формоизменения от температуры при одинаковых воздействиях водорода: 1 – $c_0 = 0.001$, 2 – $c_0 = 0.014$; а) – эксперимент, б) – теория

Выводы. Таким образом, в задачах, относящихся к диффузионным эффектам, можно использовать водородоупругую модель, основанную на использовании системы связанных дифференциальных уравнений (3) и (4). Диффузионное рассасывание неоднородностей концентрации водорода в металлах, а также формоизменение палладиевой пластины при одностороннем насыщении в области α -твердых растворов водорода в металлах хорошо согласуется с данной моделью. Водородоупругая модель в целом правильно описывает характер изменения остаточного формоизменения в зависимости от температуры и давления водорода.

1. Goltsov V.A. Hydrogen elasticity effect and its importance in diffusion of concentration inhomogeneities in metals / V.A. Goltsov, Zh.L. Glukhova, A.L. Redko // Int. J. Hydrogen Energy. — 1997. — Vol. 22. — P. 179–183.
2. Гольцов В.А. Явление водородоупругости и его роль в диффузионном рассасывании концентрационных неоднородностей / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова, А.Л. Редько // Физика металлов и металловедение. — 1996. — Т. 82, № 2. — С. 49–55.

3. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. — К.: Наукова думка, 1965. — 203 с.
4. Гольцов В.А. Водородоупругое формоизменение палладиевой пластины. Теоретическое описание / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова // Физика металлов и металловедение. — 2001. — Т. 91, № 3. — С. 21–25.
5. Гольцов В.А. Упругое изменение формы палладиевой пластины под действием водорода. Результаты эксперимента / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова // Физика металлов и металловедение. — 2000. — Т. 90, № 4. — С. 68–73.

Zh.L. Glukhova

On the consideration of elastic fields in the diffusion processes of hydrogen in metals.

The analysis of a system of related differential equations describing the phenomenon of hydrogen elasticity is carried out. It is shown that the diffusive resorption of inhomogeneities in the concentration of hydrogen in metals, as well as the shape change of the palladium plate with unilateral saturation in the region of solid solutions of hydrogen in metals, is in good agreement with this model. The hydrogen-elastic model correctly describes the nature of the change in the residual shape depending on the temperature and pressure of hydrogen.

Keywords: *hydrogen elasticity, hydrogen diffusion in metals, hydrogen concentration stresses.*

*Статья поступила в редакцию 20.09.2024;
доработана 31.10.2024;
рекомендована к печати 14.11.2024.*

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3
doi:10.24412/0136-4545-2024-3-79-88
EDN:LHFJGQ



©2024. С.Б. Номбре¹, Д.Д. Полянский², С.В. Сторожев³

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ УЧЕТ ФАКТОРА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗГИБА БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Представлена нечетко-множественная методика анализа факторов параметрической неопределенности в виде разбросов значений исходных физико-механических и геометрических параметров в расчетных соотношениях модели изгибного термоупругого деформирования изотропных биметаллических пластин. Методика предполагает введение нечетко-множественных описаний для неконтрастных экзогенных характеристик на базе фазсификации имеющихся данных о разбросах и использование получаемых нечетко-множественных величин в качестве аргументов в расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели, расширяемых на данный тип переменных с применением модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения и аппарата нечетко-множественных вычислений. Приведены некоторые результаты численной реализации разрабатываемой методики.

Ключевые слова: свободные биметаллические пластины, модель температурного деформирования, разбросы физико-механических параметров, оценки неопределенности эндогенных характеристик, нечетко-множественная методика, модифицированный эвристический принцип обобщения.

Введение и постановка задачи. Модели термомеханического деформирования биметаллических пластин, используемых в качестве термочувствительных

¹Номбре Светлана Борисовна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

Nombre Svetlana Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

²Полянский Дмитрий Дмитриевич – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

элементов автоматических устройств и приборов, термокомпенсаторов, тепловых реле и термометров на базе использования эффектов изменения кривизны таких пластин при нагревании за счет различия характеристик теплового расширения в слоях образующих их металлов либо сплавов, являются предметом исследования в процессах проектирования широкого ряда инновационных промышленных изделий самого различного назначения [1–3]. При этом решение актуальной задачи повышения точности их расчетного анализа должно учитывать факторы неопределенности в виде разбросов значений исходных физико-механических и геометрических параметров моделей в ситуациях отсутствия корректной статистической информации об указанных разбросах, на основе которой оценки неопределенности эндогенных расчетных параметров могли бы быть получены с использованием вероятностно-стохастических подходов. В этой связи, для получения данных о влиянии неопределенности исходных характеристик в расчетных моделях термоупругого изгиба биметаллических пластин на основе ограниченной по объему информации о неконтрастных параметрах физико-механических свойств используемых материалов, о предусматриваемых при изготовлении биметаллических пластин конструктивных технологических допусках, а также с учетом субъективных экспертных оценок относительно отдельных характеристик рассматриваемых конструкционных элементов, может быть применена нечетко-множественная методика [4, 5] с более мягким уровнем требований к характеру неопределенной исходной информации и с возможностями одновременного учета большего числа неконтрастных параметров.

1. Обобщаемые расчетные соотношения детерминистического варианта модели. Комплекс расчетных соотношений [3], представляющий ведущие характеристики температурного деформирования при нагреве на температуру Δt консольно закрепленной двухслойной пластины длины l с имеющим больший коэффициент линейного теплового α_1 расширения активным слоем толщины h_1 из материала с модулем Юнга E_1 и пассивным слоем с характеристиками $\alpha_2 < \alpha_1$, h_2 , E_2 , включает выражения для эндогенного параметра кривизны изогнутой деформированной пластины

$$\begin{aligned} \vartheta_t &= F_{\vartheta}(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, E_1, E_2) = \\ &= (6(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t)((E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2 (E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2))^{-1} + 4(h_1 + h_2))^{-1}; \end{aligned} \quad (1)$$

параметра максимально достижимой кривизны

$$\vartheta_{t,\max} = F_{\vartheta m}(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2) = (3(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t)(2(h_1 + h_2))^{-1}; \quad (2)$$

максимально достижимой деформации контактной поверхности спая слоев пластины

$$\varepsilon = F_{\varepsilon}(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2) = ((\alpha_1 h_2 + \alpha_2 h_1)\Delta t)(h_1 + h_2)^{-1}; \quad (3)$$

напряжений в активном слое пластины

$$\sigma_{1t} = F_{\sigma 1}(z, \Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, E_1) = E_1(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t((3/2)z - h_1)(h_1 + h_2)^{-1}, \quad (4)$$

где z – поперечная координата по толщине активного слоя, $0 \leq z \leq h_1$; напряжений в пассивном слое пластины

$$\sigma_{2t} = F_{\sigma_2}(z, \Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, E_2) = E_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t((3/2)z + h_2)(h_1 + h_2)^{-1}; \quad (5)$$

прогиба свободного конца пластины

$$w_t = F_w(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, l) = 3(\alpha_1 - \alpha_2)l^2\Delta t(2(h_1 + h_2))^{-1}; \quad (6)$$

угла поворота поперечного сечения на свободном конце пластины при единичном изгибающем моменте [3]

$$\phi_t = F_\phi(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, l) = 3(\alpha_1 - \alpha_2)l\Delta t(2(h_1 + h_2))^{-1}. \quad (7)$$

Реализуемый далее подход базируется на переходе к неконтрастным исходным параметрам нечетко-множественного типа в функциональных расчетных соотношениях (1)–(7) для результирующих характеристик детерминистического варианта рассматриваемой модели, расширяемых на аргументы данного типа посредством применения альфа-уровневой модифицированной версии эвристического принципа обобщения и аппарата арифметики нечетко-множественных величин [4–8].

2. Соотношения нечетко-множественного расчетного алгоритма. Исходной фазой построения нечетко-множественных версий функциональных расчетных соотношений (1)–(7) является реализация процедур фазификации [4, 5] имеющихся массивов экспериментальных и экспертных данных о разбросах значений неконтрастных исходных параметров рассматриваемой модели для формирования используемых далее типов нечетко-множественных аргументов. Применительно к исходным, промежуточным и выходным параметрам расчетных соотношений (1)–(7) вводятся в рассмотрение их нечетко-множественные расширения $\tilde{\Delta}t$, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, \tilde{h}_1 , \tilde{h}_2 , \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 , \tilde{l} , $\tilde{\vartheta}_t$, $\tilde{\vartheta}_{t,\max}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}_{1t}$, $\tilde{\sigma}_{2t}$, \tilde{w}_t , $\tilde{\phi}_t$, представляемые разложениями по множествам α -уровней [4–8]

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}t &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Delta}_{t\alpha}, \overline{\Delta}_{t\alpha}], & \tilde{\alpha}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}], & \tilde{\alpha}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}], & (8) \\ \tilde{h}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}], & \tilde{h}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{2\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}], & \tilde{E}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{1\alpha}, \overline{E}_{1\alpha}], \\ \tilde{E}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{2\alpha}, \overline{E}_{2\alpha}], & \tilde{l} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_\alpha, \overline{l}_\alpha], & \tilde{\vartheta}_t &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{t\alpha}, \overline{\vartheta}_{t\alpha}], \\ \tilde{\vartheta}_{t,\max} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{t,\max\alpha}, \overline{\vartheta}_{t,\max\alpha}], & \tilde{\varepsilon} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha], & \tilde{\sigma}_{1t} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{1t\alpha}, \overline{\sigma}_{1t\alpha}], \\ \tilde{\sigma}_{2t} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{2t\alpha}, \overline{\sigma}_{2t\alpha}], & \tilde{w}_t &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{w}_{t\alpha}, \overline{w}_{t\alpha}], & \tilde{\phi}_t &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\phi}_{t\alpha}, \overline{\phi}_{t\alpha}]. \end{aligned}$$

Далее для разрабатываемого алгоритма могут быть построены следующие варианты. При задании параметрических обобщений $\tilde{\Delta}t$, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, \tilde{h}_1 , \tilde{h}_2 , \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 , \tilde{l} нормальными несимметричными квазигауссовыми нечеткими числами [4, 5], величины границ интервалов α -уровней в разложениях (8) описываются выражениями:

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}_{t\alpha} &= m_{*\Delta t} - \sigma_{*l\Delta t}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\Delta}_{t\alpha} &= m_{*\Delta t} + \sigma_{*r\Delta t}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\alpha}_{1\alpha} &= m_{*\alpha_1} - \sigma_{*l\alpha_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\alpha}_{1\alpha} &= m_{*\alpha_1} + \sigma_{*r\alpha_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\alpha}_{2\alpha} &= m_{*\alpha_2} - \sigma_{*l\alpha_2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\alpha}_{2\alpha} &= m_{*\alpha_2} + \sigma_{*r\alpha_2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{h}_{1\alpha} &= m_{*h_1} - \sigma_{*lh_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{h}_{1\alpha} &= m_{*h_1} + \sigma_{*rh_1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \dots; \\ \underline{l}_\alpha &= m_{*l} - \sigma_{*ll}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{l}_\alpha &= m_{*l} + \sigma_{*rl}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.\end{aligned}$$

При описании обобщений $\tilde{\Delta}t$, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, \tilde{h}_1 , \tilde{h}_2 , \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 , \tilde{l} нормальными трапецидальными нечеткими интервалами с кортежами реперных значений

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}t &= (\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4), & \tilde{\alpha}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), \\ \tilde{\alpha}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}), & \tilde{h}_1 &= (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}), \\ \tilde{h}_2 &= (h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}), & \tilde{E}_1 &= (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}), \\ \tilde{E}_2 &= (E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24}), & \tilde{l} &= (l_1, l_2, l_3, l_4),\end{aligned}$$

границы интервалов α -уровней в разложениях (8) соответствующих нечетко-множественных величин задаются выражениями

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}_{t\alpha} &= (1 - \alpha)\Delta t_1 + \alpha\Delta t_2, & \overline{\Delta}_{t\alpha} &= \alpha\Delta t_3 + (1 - \alpha)\Delta t_4; \\ \underline{\alpha}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{11} + \alpha\alpha_{12}, & \overline{\alpha}_{1\alpha} &= \alpha\alpha_{13} + (1 - \alpha)\alpha_{14}; \\ \underline{\alpha}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{21} + \alpha\alpha_{22}, & \overline{\alpha}_{2\alpha} &= \alpha\alpha_{23} + (1 - \alpha)\alpha_{24}; \\ \underline{h}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)h_{11} + \alpha h_{12}, & \overline{h}_{1\alpha} &= \alpha h_{13} + (1 - \alpha)h_{14}; \\ \underline{h}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)h_{21} + \alpha h_{22}, & \overline{h}_{2\alpha} &= \alpha h_{23} + (1 - \alpha)h_{24}; \\ \underline{E}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)E_{11} + \alpha E_{12}, & \overline{E}_{1\alpha} &= \alpha E_{13} + (1 - \alpha)E_{14}; \\ \underline{E}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)E_{21} + \alpha E_{22}, & \overline{E}_{2\alpha} &= \alpha E_{23} + (1 - \alpha)E_{24}; \\ \underline{l}_\alpha &= (1 - \alpha)l_1 + \alpha l_2, & \overline{l}_\alpha &= \alpha l_3 + (1 - \alpha)l_4.\end{aligned}$$

В случае описания обобщений $\tilde{\Delta}t$, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, \tilde{h}_1 , \tilde{h}_2 , \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 , \tilde{l} для неконтрастных исходных параметров нормальными треугольными нечеткими числами с кортежами реперных значений

$$\tilde{\Delta}t = (\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3), \quad \tilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}), \quad \tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1 &= (h_{11}, h_{12}, h_{13}), & \tilde{h}_2 &= (h_{21}, h_{22}, h_{23}), & \tilde{E}_1 &= (E_{11}, E_{12}, E_{13}), \\ \tilde{E}_2 &= (E_{21}, E_{22}, E_{23}), & \tilde{l} &= (l_1, l_2, l_3),\end{aligned}$$

выражения для границ интервалов α -уровней имеют вид

$$\begin{aligned}\underline{\Delta t}_\alpha &= (1 - \alpha)\Delta t_1 + \alpha\Delta t_2, & \overline{\Delta t}_\alpha &= \alpha\Delta t_2 + (1 - \alpha)\Delta t_3; & (13) \\ \underline{\alpha}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{11} + \alpha\alpha_{12}, & \overline{\alpha}_{1\alpha} &= \alpha\alpha_{12} + (1 - \alpha)\alpha_{13}; \\ \underline{\alpha}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{21} + \alpha\alpha_{22}, & \overline{\alpha}_{2\alpha} &= \alpha\alpha_{22} + (1 - \alpha)\alpha_{23}; \\ \underline{h}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)h_{11} + \alpha h_{12}, & \overline{h}_{1\alpha} &= \alpha h_{12} + (1 - \alpha)h_{13}; \\ \underline{h}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)h_{21} + \alpha h_{22}, & \overline{h}_{2\alpha} &= \alpha h_{22} + (1 - \alpha)h_{23}; \\ \underline{E}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)E_{11} + \alpha E_{12}, & \overline{E}_{1\alpha} &= \alpha E_{12} + (1 - \alpha)E_{13}; \\ \underline{E}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)E_{21} + \alpha E_{22}, & \overline{E}_{2\alpha} &= \alpha E_{22} + (1 - \alpha)E_{23}; \\ \underline{l}_\alpha &= (1 - \alpha)l_1 + \alpha l_2, & \overline{l}_\alpha &= \alpha l_2 + (1 - \alpha)l_3.\end{aligned}$$

Общая методология применения модифицированной альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения к соотношениям (1)–(7) для всех приведенных выше вариантов введения исходных нечетко-множественных параметров включает этап анализа свойств знакоопределенности частных производных [5–8] от функций $F_\vartheta(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, E_1, E_2)$, $F_{\vartheta m}(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2)$, $F_\varepsilon(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2)$, $F_{\sigma_1}(z, \Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, E_1)$, $F_{\sigma_2}(z, \Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, E_2)$, $F_w(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, l)$, $F_\phi(\Delta t, \alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, l)$ по всем аргументам в областях их совокупного изменения. В результате этого анализа могут быть записаны оценки

$$\begin{aligned}\partial F_\vartheta / \partial \Delta t &> 0, & \partial F_\vartheta / \partial \alpha_1 &> 0, & \partial F_\vartheta / \partial \alpha_2 &< 0, & (14) \\ \partial F_\vartheta / \partial E_1 &< 0, & \partial F_\vartheta / \partial E_2 &> 0; \\ \partial F_{\vartheta m} / \partial \Delta t &> 0, & \partial F_{\vartheta m} / \partial \alpha_1 &> 0, & \partial F_{\vartheta m} / \partial \alpha_2 &< 0, \\ \partial F_{\vartheta m} / \partial h_1 &< 0, & \partial F_{\vartheta m} / \partial h_2 &< 0; \\ \partial F_\varepsilon / \partial \Delta t &> 0, & \partial F_\varepsilon / \partial \alpha_1 &> 0, & \partial F_\varepsilon / \partial \alpha_2 &> 0, & \partial F_\varepsilon / \partial h_1 &< 0, & \partial F_\varepsilon / \partial h_2 &> 0; \\ \partial F_{\sigma_1} / \partial \Delta t &> 0, & \partial F_{\sigma_1} / \partial \alpha_1 &> 0, & \partial F_{\sigma_1} / \partial \alpha_2 &< 0, & \partial F_{\sigma_1} / \partial E_1 &> 0; \\ \partial F_{\sigma_1} / \partial h_1 &< 0, & \partial F_{\sigma_1} / \partial h_2 &> 0 & \text{при } 0 \leq z < (2/3)h_1, \\ \partial F_{\sigma_1} / \partial h_2 &< 0 & \text{при } (2/3)h_1 < z \leq h_1; \\ \partial F_{\sigma_2} / \partial \Delta t &> 0, & \partial F_{\sigma_2} / \partial \alpha_1 &> 0, & \partial F_{\sigma_2} / \partial \alpha_2 &< 0, & \partial F_{\sigma_2} / \partial E_2 &> 0; \\ \partial / \partial h_1 &< 0 & \text{при } -(2/3)h_2 < z \leq 0, \\ \partial F_{\sigma_2} / \partial h_1 &> 0 & \text{при } -h_2 \leq z \leq -(2/3)h_2; & \partial F_{\sigma_2} / \partial h_2 &> 0; \\ \partial F_w / \partial \Delta t &> 0, & \partial F_w / \partial \alpha_1 &> 0, & \partial F_w / \partial \alpha_2 &< 0, \\ \partial F_w / \partial h_1 &< 0, & \partial F_w / \partial h_2 &< 0, & \partial F_w / \partial l &> 0; \\ \partial F_\phi / \partial \Delta t &> 0, & \partial F_\phi / \partial \alpha_1 &> 0, & \partial F_\phi / \partial \alpha_2 &< 0, \\ \partial F_\phi / \partial h_1 &< 0, & \partial F_\phi / \partial h_2 &< 0, & \partial F_\phi / \partial l &> 0.\end{aligned}$$

С учетом этих оценок, соответственно модифицированному принципу обобщения, записываются следующие представления границ интервалов α -уровней в представлениях (8) для эндогенных нечетко-множественных характеристик рассматриваемой модели:

$$\underline{\vartheta}_{t\alpha} = \inf_{\substack{h_1 \in [\underline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}] \\ h_2 \in [\underline{h}_{2\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}]}} F_{\vartheta}(\underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, h_1, h_2, \overline{E}_{1\alpha}, \underline{E}_{2\alpha}), \quad (15)$$

$$\overline{\vartheta}_{t\alpha} = \sup_{\substack{h_1 \in [\underline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}] \\ h_2 \in [\underline{h}_{2\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}]}} F_{\vartheta}(\overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, h_1, h_2, \underline{E}_{1\alpha}, \overline{E}_{2\alpha});$$

$$\underline{\vartheta}_{t \max \alpha} = F_{\vartheta m}(\underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}), \quad \overline{\vartheta}_{t \max \alpha} = F_{\vartheta m}(\overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha});$$

$$\underline{\varepsilon}_{\alpha} = F_{\varepsilon}(\underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha}), \quad \overline{\varepsilon}_{\alpha} = F_{\varepsilon}(\overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha});$$

при $0 \leq z < (2/3)h_1$

$$\underline{\sigma}_{1t\alpha} = F_{\sigma 1}(z, \underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha}, \underline{E}_{1\alpha}),$$

$$\overline{\sigma}_{1t\alpha} = F_{\sigma 1}(z, \overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}, \overline{E}_{1\alpha});$$

при $(2/3)h_1 < z \leq h_1$

$$\underline{\sigma}_{1t\alpha} = F_{\sigma 1}(z, \underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}, \underline{E}_{1\alpha}),$$

$$\overline{\sigma}_{1t\alpha} = F_{\sigma 1}(z, \overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha}, \overline{E}_{1\alpha});$$

при $-(2/3)h_2 < z \leq 0$,

$$\underline{\sigma}_{2t\alpha} = F_{\sigma 2}(z, \underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha}, \underline{E}_{2\alpha}),$$

$$\overline{\sigma}_{2t\alpha} = F_{\sigma 2}(z, \overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}, \overline{E}_{2\alpha});$$

при $-h_2 \leq z \leq -(2/3)h_2$

$$\underline{\sigma}_{2t\alpha} = F_{\sigma 2}(z, \underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha}, \underline{E}_{2\alpha}),$$

$$\overline{\sigma}_{2t\alpha} = F_{\sigma 2}(z, \overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}, \overline{E}_{2\alpha});$$

$$\underline{w}_{t\alpha} = F_w(\underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}, \underline{l}_{\alpha}), \quad \overline{w}_{t\alpha} = F_w(\overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha}, \overline{l}_{\alpha});$$

$$\underline{\phi}_{t\alpha} = F_{\phi}(\underline{\Delta}t_{\alpha}, \underline{\alpha}_{1\alpha}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \overline{h}_{2\alpha}, \underline{l}_{\alpha}), \quad \overline{\phi}_{t\alpha} = F_{\phi}(\overline{\Delta}t_{\alpha}, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \underline{h}_{2\alpha}, \overline{l}_{\alpha}).$$

Комплекс соотношений (1)–(8), (15) позволяет рассчитывать характеристики разбросов значений эндогенных параметров рассматриваемой модели для любого из вышеуказанных способов описания нечетко-множественных исходных параметров (9)–(13). В случаях задания экзогенных параметров нормальными трапецидальными нечеткими интервалами (10)–(11), либо нормальными треугольными нечеткими числами (12)–(13), расчет характеристик $\underline{\vartheta}_{t\alpha}$, $\overline{\vartheta}_{t\alpha}$, $\underline{\vartheta}_{t \max \alpha}$, $\overline{\vartheta}_{t \max \alpha}$, $\underline{\varepsilon}_{\alpha}$, $\overline{\varepsilon}_{\alpha}$, ..., $\underline{\phi}_{t\alpha}$, $\overline{\phi}_{t\alpha}$, может быть также реализован с поэтапным фрагментированным применением аппарата неидемпотентной арифметики нечетких

трапецидальных интервалов и треугольных нечетких чисел. Так, в частности, для аргументов в виде нормальных трапецидальных нечетких интервалов

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_{t \max} &= (\vartheta_{r \max 1}, \vartheta_{r \max 2}, \vartheta_{r \max 3}, \vartheta_{r \max 4}), \quad \tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4), \\ \tilde{w}_t &= (w_{t1}, w_{t2}, w_{t3}, w_{t4}), \quad \tilde{\phi}_t = (\phi_{t1}, \phi_{t2}, \phi_{t3}, \phi_{t4}),\end{aligned}\quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}\vartheta_{r \max 1} &= (3/2)(\Delta t_1(\alpha_{11} - \alpha_{24})/(h_{14} + h_{24})), \\ \vartheta_{r \max 2} &= (3/2)(\Delta t_2(\alpha_{12} - \alpha_{23})/(h_{13} + h_{23})), \\ \vartheta_{r \max 3} &= (3/2)(\Delta t_3(\alpha_{13} - \alpha_{22})/(h_{12} + h_{22})), \\ \vartheta_{r \max 4} &= (3/2)(\Delta t_4(\alpha_{14} - \alpha_{21})/(h_{11} + h_{21}));\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \Delta t_1(\alpha_{11}h_{21} + \alpha_{21}h_{11})/(h_{14} + h_{24}), \quad \varepsilon_2 = \Delta t_2(\alpha_{12}h_{22} + \alpha_{22}h_{12})/(h_{13} + h_{23}), \\ \varepsilon_3 &= \Delta t_3(\alpha_{13}h_{23} + \alpha_{23}h_{13})/(h_{12} + h_{22}), \quad \varepsilon_4 = \Delta t_4(\alpha_{14}h_{24} + \alpha_{24}h_{14})/(h_{11} + h_{21});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{t1} &= (3/2)(\Delta t_1(\alpha_{11} - \alpha_{24})l_1^2/(h_{14} + h_{24})), \\ w_{t2} &= (3/2)(\Delta t_2(\alpha_{12} - \alpha_{23})l_2^2/(h_{13} + h_{23})), \\ w_{t3} &= (3/2)(\Delta t_3(\alpha_{13} - \alpha_{22})l_3^2/(h_{12} + h_{22})), \\ w_{t4} &= (3/2)(\Delta t_4(\alpha_{14} - \alpha_{21})l_4^2/(h_{11} + h_{21})); \\ \phi_{t1} &= (3/2)(\Delta t_1(\alpha_{11} - \alpha_{24})l_1/(h_{14} + h_{24})), \\ \phi_{t2} &= (3/2)(\Delta t_2(\alpha_{12} - \alpha_{23})l_2/(h_{13} + h_{23})), \\ \phi_{t3} &= (3/2)(\Delta t_3(\alpha_{13} - \alpha_{22})l_3/(h_{12} + h_{22})), \\ \phi_{t4} &= (3/2)(\Delta t_4(\alpha_{14} - \alpha_{21})l_4/(h_{11} + h_{21})).\end{aligned}$$

3. Численные результаты. В качестве примера использования изложенной методики для оценки влияния погрешностей задания начальных параметров на эндогенные характеристики температурного деформирования при нагреве консольно закрепленной двухслойной пластины рассмотрена конструкция со следующими неконтрастными исходными параметрами, описываемыми нормальными нечеткими трапецидальными интервалами: активным слоем является слой из хромоникелевой стали 19НХ с неконтрастным модулем Юнга $\tilde{E}_1 = (193.5E_*, 194.0E_*, 195.0E_*, 195.7E_*)$, коэффициентом линейного теплового расширения $\tilde{\alpha}_1 = (16.2\alpha_*, 16.8\alpha_*, 17.0\alpha_*, 17.3\alpha_*)$, толщиной $\tilde{h}_1 = (1.87l_*, 1.95l_*, 2.0l_*, 2.04l_*)$; пассивным слоем является слой из инвара 36Н с неконтрастным модулем Юнга $\tilde{E}_2 = (148.8E_*, 149.4E_*, 150.0E_*, 150.7E_*)$, коэффициентом линейного теплового расширения $\tilde{\alpha}_2 = (1.26\alpha_*, 1.29\alpha_*, 1.30\alpha_*, 1.33\alpha_*)$, толщиной $\tilde{h}_2 = (2.25l_*, 2.27l_*, 2.28l_*, 2.30l_*)$, где нормирующие параметры имеют значения $E_* = 10^9$ Па, $\alpha_* = 10^{-6}$ К $^{-1}$, $l_* = 10^{-4}$ м. Пластина имеет неконтрастную

длину $\tilde{l} = (198.4l_*, 199.5l_*, 2.00.0l_*, 200.8l_*)$, а параметр разогрева задается величиной $\tilde{\Delta}t = (177t_*, 179t_*, 180t_*, 181t_*)$. Используемые параметры биметаллической конструкции являются учитывающими начальные погрешности нечетко-интервальными аналогами параметров, рассматриваемых в работе [9]. Функции принадлежности для нечетко-множественных эндогенных параметров $\tilde{\vartheta}_{r \max}$, $\tilde{\varepsilon}$, \tilde{w}_t , $\tilde{\varphi}_t$, в рассматриваемой расчетной модели представлены на рисунках 1–4.

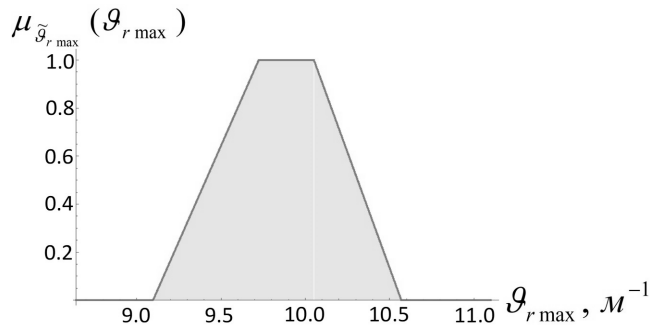


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\vartheta}_{r \max}}(\vartheta_{r \max})$ для нечетко-интервальной величины $\tilde{\vartheta}_{r \max}$

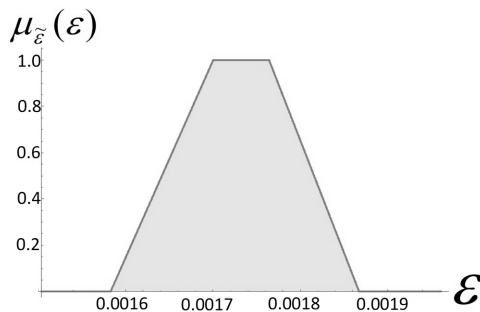


Рис. 2. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\varepsilon}}(\varepsilon)$ для нечетко-интервальной величины $\tilde{\varepsilon}$

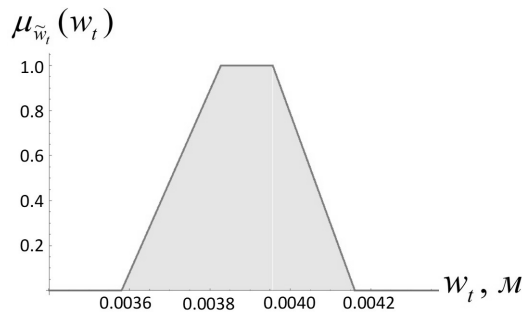


Рис. 3. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{w}_t}(w_t)$ для нечетко-интервальной величины \tilde{w}_t

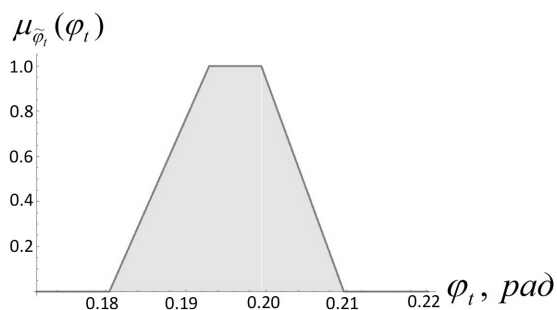


Рис. 4. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\phi}_t}(\phi_t)$ для нечетко-интервальной величины $\tilde{\phi}_t$

Выводы. В результате проведенных исследований разработана нечетко-множественная методика учета разбросов значений исходных геометрических и физико-механических параметров в расчетных соотношениях модели термомеханического деформирования биметаллических пластин, используемых в качестве термочувствительных элементов автоматических устройств и приборов, термокомпенсаторов, тепловых реле и термометров в широком ряде инновационных промышленных изделий. Учитываемые в расчетах разбросы могут быть обусловлены погрешностями экспериментальных данных о физико-механических свойствах используемых материалов, предусматриваемыми при изготовлении технологическими допусками, вариативными субъективными экспертными оценками для отдельных базовых характеристик конструкций. Реализованный подход базируется на введении нечетко-множественных описаний неконтрастных экзогенных характеристик и использовании их в качестве аргументов в расширяемых на данный тип переменных с применением аппарата нечетко-множественных вычислений и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели. Приведены некоторые результаты численной реализации разработанной методики.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Андронов И.Н. Напряжения и деформации в биметаллической балке / И.Н. Андронов, М.Ю. Демина // LIX Международная конференция «Актуальные проблемы прочности» (Тольятти, 5–7 сентября 2017 г.). – 2017. – С. 86–104.
2. Belyaev S. Functional properties of shape memory bimetall plate / S. Belyaev, M. Evard, I. Lomakin, N. Resnina, A. Volkov, V. Rubanik // Materials Today: Proceedings 2S. – 2015. – P. 723–726.
3. Андронов И.Н. Изгиб свободной биметаллической пластины / И.Н. Андронов, М.Ю. Демина // Сборник трудов 60 Международной научной конференции «Актуальные проблемы прочности» (Витебск, 14–18 мая 2018 года). – Витебск: Витебский государственный технологический университет, 2018. – С. 3–5. – EDN: UVLZHS.
4. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. – 2005. – 253 p.
5. Нгуен Куок Ши Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечет-

кими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House. – 2019. – 216 с.

6. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 63–76. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN: TOGBNE.
7. *Номбре С.Б.* Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в расчетных моделях термоупругого деформирования балок / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 81–92. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-1-81-92. – EDN: PQQQXY.
8. *Номбре С.Б.* Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 56–66. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-56-66. – EDN: TVVWFZT.
9. *Куликов Ю.А.* Напряженно-деформированное состояние термометаллических элементов / Ю.А. Куликов, О.С. Мерзлякова // Фундаментальные исследования. – 2007. – № 9. – С. 70–71. – URL: <https://fundamental-research.ru/ru/article/view?id=3551>.

S.B. Nombre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev

Fuzzy-set accounting of parametric uncertainty factor in an applied model for assessing bending characteristics of free-edge bimetallic plates.

A fuzzy-set technique for analyzing parametric uncertainty factors in the form of scatters in the values of initial physical, mechanical, and geometric parameters in the calculation relationships of the model of bending thermoelastic deformation of isotropic bimetallic plates is presented. The technique involves the introduction of fuzzy-set descriptions for non-contrasting exogenous characteristics based on fuzzification of available data on scatters and the use of the resulting fuzzy-set values as arguments in the calculation expressions of the deterministic version of the model under study, extended to this type of variables using a modified alpha-level version of the heuristic generalization principle and the apparatus of fuzzy-set calculations. Some results of the numerical implementation of the developed method are presented.

Keywords: *free bimetallic plates, temperature deformation model, scatter of physical and mechanical parameters, uncertainty estimates of endogenous characteristics, fuzzy-set method, modified heuristic principle of generalization.*

*Статья поступила в редакцию 10.10.2024;
доработана 06.11.2024;
рекомендована к печати 22.11.2024.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.834:658.011.56
doi:10.24412/0136-4545-2024-3-89-99
EDN:KBUNPC



©2024. Н.Н. Грищенко¹, В.Б. Скаженик², Е.А. Бардакова³,
И.В. Чернышенко⁴

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН МНОГОКРАТНОЙ ПОДРАБОТКИ ГОРНЫМИ ВЫРАБОТКАМИ УЧАСТКОВ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ РЕЛЬЕФА

Проведен анализ традиционных подходов к прогнозу сдвижения горных пород и земной поверхности при подработке горными выработками. Выделены недостатки этих подходов, обусловленные усреднением ряда параметров и невозможностью учета отдельных факторов. Представлен алгоритм и основные математические соотношения для построения пространственной модели зон влияния многократной подработки земной поверхности угольной шахтой. На примере угольной шахты, одновременно разрабатывающей четыре пласта, рассмотрен метод

¹Грищенко Николай Николаевич – доктор техн. наук, зав. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: gringm@gmail.com.

Grishchenkov Nikolai Nikolaevich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

²Скаженик Владимир Борисович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: geosoft.svb@gmail.com.

Skazhenik Vladimir Borisovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

³Бардакова Елена Александровна – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru.

Bardakova Elena Aleksandrovna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

⁴Чернышенко Иван Владимирович – аспирант каф. разработки месторождений полезных ископаемых ДонНТУ, Донецк, e-mail: i.w.tschernyschenko@gmail.com.

Chernyshenko Ivan Vladimirovich – Postgraduate, Donetsk National Technical University, Donetsk, Chair of Development of Mineral Deposits.

выделения области пересечения зон влияния подработки каждым пластом и выделения области земной поверхности, подверженной наибольшему влиянию многократной подработки. Предлагаемый алгоритм и программное обеспечение позволяют повысить точность прогноза и автоматизировать построение зон влияния горных работ в сложных условиях.

Ключевые слова: угольная шахта, сдвигение земной поверхности, программное обеспечение, пространственное моделирование, точность прогноза, автоматизация построений.

Введение. Разработка пластовых месторождений угля связана с подработкой значительных площадей земной поверхности. Весомая часть отрабатываемых шахтных полей может находиться в черте населенных пунктов, что особенно характерно для условий Донбасса. Адекватность прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности и влияния подработки на здания, сооружения и инфраструктурные объекты зависит от полноты исходной информации и применяемых методов прогноза. В части полноты учета всех влияющих факторов проблема заключается как в низкой достоверности данных о свойствах горного массива, так и в возможности учета временных и пространственных характеристик процессов подработки земной поверхности.

Задача прогноза сдвижения горных пород и земной поверхности существенно усложняется в условиях многократной подработки территорий со сложной структурой рельефа. При разработке угольной шахтой запасов нескольких пластов на характер развития процесса сдвижения горных пород влияют как пересекающиеся зоны влияния горных выработок, расположенных на нескольких пластах, так и динамика отработки запасов. В зависимости от этих факторов изменяются зоны деформирования горных пород, направленность деформации, максимальные сдвигения и деформации земной поверхности и другие параметры геомеханических процессов [1]. В таких условиях обоснование технологических методов управления геомеханическими процессами связано с решением многовариантной вероятностной задачи.

Применяемые методики прогноза последствий подработки территорий угольными шахтами, как правило, ориентируются на усредненные характеристики горно-геологических и горнотехнических условий разработки. Геометрические характеристики отрабатываемых выработок (конфигурация лавы, выемочная мощность, угол падения пласта в пределах очистной выработки, глубина отработки выемочных столбов) также принимаются усредненно. Из-за невозможности учета всех особенностей условий разработки и отсутствия пространственных моделей месторождений при расчетах принимается ряд допущений и ограничений. Так, применяемая на шахтах Донбасса методика прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности предполагает учет изменения угла падения пласта в пределах очистной выработки не более 10 градусов; форма выработки принимается прямоугольной; в зоне влияния отработанных лав отсутствуют разрывные и пликативные нарушения; не учтен фактор релаксации горного давления во времени [2, 3]. Сложная структура рельефа также не учитывается, что может привести к существенным ошибкам прогноза [4].

В условиях влияния на рассматриваемую область земной поверхности несколь-

ких очистных выработок прогнозные значения деформаций определяются в результате суммирования деформаций, обусловленных влиянием каждой выработки. Для подготовки исходных данных используются планы горных выработок и календарный план развития горных работ. При этом необходимо определить зоны влияния отдельных выработок и пересекающиеся зоны, в которых значения параметров сдвижений и деформаций обусловлены совместным влиянием. Методика прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности должна обеспечить определение значений ожидаемых суммарных деформаций и их знак в различных точках и в различное время. Для предотвращения отрицательных последствий подработки необходимо знать область максимальных суммарных деформаций [1].

Множество факторов, которые необходимо учесть при прогнозе последствий многократной подработки, а также необходимость решения задачи с учетом пространственных и временных характеристик, предопределяют ограниченность традиционных методов и актуальность совершенствования методов прогноза на основе пространственного компьютерного моделирования.

Цель данной работы заключается в разработке автоматизированной методики выделения зон сдвижений и деформаций земной поверхности при многократной подработке горными выработками участков со сложной структурой рельефа. Для повышения точности прогноза используется пространственная компьютерная модель угольной шахты, учитывающая рельеф земной поверхности и сеть горных выработок.

Проблема точности прогноза последствий подработки земной поверхности горными выработками связана, прежде всего, с количеством и изменчивостью факторов, влияющих на результат прогноза. Несмотря на передовые инструменты информационных технологий, прогнозы на основе средних значений параметров часто являются приблизительными, не обеспечивающими требуемую достоверность и не позволяющими принимать адекватные решения по предупреждению отрицательных последствий подземных горных работ [5].

Как известно, при прогнозе последствий подработки земной поверхности горными выработками используют эмпирические, вероятностные, численные методы [6].

Эмпирические методы прогноза обычно не учитывают свойства и поведение горных пород. Как следствие этого, результаты прогноза сложно экстраполировать на другие месторождения [7].

Методы, основанные на функциях влияния, в частности метод Кнотте, широко используются для описания характера и степени влияния элементарных площадок подработки на земную поверхность. Для сложных условий разрабатываются различные вариации данного метода [8–11]. В современных условиях, как отмечают авторы, при высокой концентрации горных работ и значительной глубине, необходимо совершенствование метода Кнотте, а также необходима параметризация моделей в соответствии с местными геологическими и горнотехническими условиями.

Для прогноза оседания угольных участков неправильной формы с использованием метода вероятностного интегрирования в работе [12] предложена модификация метода, однако отмечается, что его применение имеет ряд ограничений из-за трудностей точного определения расчетной области и сложности интегрирования с областью целостности неправильной формы.

В рассмотренных работах представлены результаты моделирования, не учитывающие многократную подработку земной поверхности.

Численные методы рассматриваются как наиболее строгие и сложные методы прогнозирования оседания. Ряд авторов среди численных методов выделяют метод конечных разностей, реализованный в программном обеспечении FLAC3D [7, 13, 14]. Сравнивая эмпирические и численные методы прогноза, авторы подчеркивают преимущества последних в части возможности учета свойств горных пород. При рассмотрении опыта применения распространенных численных моделей для условий многократной подработки отмечается отсутствие в большинстве моделей возможности учета особенностей поведения ранее разрушенных горных пород, в то время как наблюдения на месте показывают, что разрушенные горные породы ведут себя иначе, чем неповрежденный материал.

В работе [15] рассмотрено построение прогнозной мульды сдвижений с использованием метода конечных элементов при совместной отработке двух пластов. Авторы отмечают, что применение численного моделирования позволяет построить мульду сдвижения при повторной и последующих подработках массива. Однако для использования численных методов необходимо определять характеристики горных пород с высокой точностью.

Одним из путей повышения точности прогноза сдвижений и деформаций горных пород может быть построение комплексных моделей горнодобывающих объектов, учитывающих пространственное положение земной поверхности, горных выработок и вмещающих пород. Для реализации пространственного моделирования было разработано программное обеспечение «Шахта 3D», позволяющее создавать трехмерные модели месторождения, включая поверхность, разведочные выработки (скважины, бороздвое опробование), пласты, выработанное пространство, существующие горные выработки.

1. Методика исследования. Построение пространственной модели угольной шахты подразумевает подготовку следующей исходной информации: построение цифровых моделей пласта и поверхности, формирование подготовительных и подготавливающих выработок по результатам маркшейдерских съемок и обрабатываемых очистных горных выработок согласно плану горных работ. Структура программного обеспечения включает модули, обеспечивающие возможность пространственного моделирования всех существующих горных выработок предприятия, а также данных геологической разведки (траектория скважин и структура пласта), геологических нарушений [16].

Программное обеспечение позволяет производить экспорт и импорт графической и цифровой информации в распространенных форматах систем автоматизированного проектирования и электронных таблиц.

Геологическая модель угольных пластов создается на основе данных геологической разведки. При этом могут использоваться как данные геологических отчетов, так и данные, представленные на планах горных выработок. В модели в виде поверхностей могут отражаться данные о геологических нарушениях.

Для упрощенной визуализации угольной шахты предусмотрена возможность моделирования поверхности и пластов на основе изогипс пластов. Посредством триангуляции сети точек формируется каркасная модель поверхностей. Предусмотрена визуализация поверхностей с использованием различной цветовой гаммы с целью улучшения восприятия модели.

Существующая сеть горных выработок строится в соответствии с планом горных выработок. Производится оцифровка бортов выработки по почве, далее в программе по заданному сечению и форме выработки формируются объемные объекты. Технология построения трёхмерных моделей горных выработок предусматривает связь векторизованных плоскостных изображений (из существующей на шахте документации) и базы данных опорных маркшейдерских точек. В результате возможно построение пространственных моделей сложных узлов горных выработок.

В программном комплексе представлен специальный инструментарий для построения проектных (плановых) выработок. Для пластовых и полевых проектных выработок процедура построения различна. В первую очередь это связано с тем, что траектория пластовых выработок должна соответствовать поверхности пласта, и при сложной гипсометрии трасса выработки может иметь сложную форму. Для таких ситуаций реализован режим привязки выработки к поверхности. Для построения выработки требуется задать вектор направления, длину выработки и её сечение. Полевые выработки, как правило, невозможно однозначно привязать к существующим поверхностям, вследствие этого их привязка осуществляется к предварительно задаваемой плоскости.

Совокупность графических задач при построении модели угольной шахты с целью визуализации и анализа последствий подработки земной поверхности представлена в таблице 1.

В качестве объекта моделирования принята угольная шахта, разрабатывающая четыре угольных пласта. Цель моделирования заключалась в визуализации зон влияния подработки на объекты, расположенные вдоль выбранной улицы.

По каждому из четырех пластов выделены отработанные добычные забои, зоны влияния которых могут включать рассматриваемую область земной поверхности. На рисунке 1 представлена построенная модель вскрывающих горных выработок и выделенных выемочных столбов, оказывающих влияние на рассматриваемую улицу.

В программном обеспечении «Шахта 3D» разработан инструментарий для построения зон сдвижения горных пород. Алгоритм построения предусматривает следующие шаги:

1. Задание граничных углов.
2. Определение координат точек, лежащих на линиях AB , BC , CD , DA и

соответствующих кровле очистной выработки (рис. 2).

3. Формирование плоскостей, ограничивающих зону сдвижения горных пород – плоскости $ABEF$, $BCGF$, $CDHG$, $ADHE$.

4. Определение линий пересечения плоскостей с земной поверхностью – линии EF , FG , GH , HE . На этом шаге:

- перебираются все треугольники модели земной поверхности;
- для каждого из них устанавливается, пересекаются ли стороны треугольника с рассматриваемой граничной плоскостью;
- если пересекаются, определяются координаты точек пересечения сторон треугольника с плоскостью;
- полученные точки пересечения сторон треугольников с плоскостью «склеиваются» в единую искомую линию.

Таблица 1. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

№ задачи	Название задачи	Способы решения	Программный инструментарий
1	Построение дневной поверхности	Векторизация топографической поверхности либо оцифровка точек, соответствующих устьям скважин	Триангуляция Делоне
2	Построение поверхности пласта по данным изогипс	Векторизация изогипс пласта	Триангуляция Делоне
3	Построение каркасной модели пласта по данным скважин	Векторизация разрезов либо ввод инклинометрии скважин и данных опробования	Триангуляция тела по разрезам либо построение каркаса по поверхностям кровли и почвы пласта
4	Построение существующих горных выработок	Векторизация бортов выработки	Интерполяция данных маршейдерских точек с целью вычисления координаты Z узлов выработки. Автоматическое построение сечений и триангуляция каркаса выработки по заданным бортам
5	Построение планируемых горных выработок	Выбор параметров сечения, определение трассы выработки	Указание параметров сечения выработки, указание трассы
6	Построение разрезов	Выбор секущей плоскости, построение разреза	Задание параметров секущей плоскости, визуализация разреза, экспорт разреза в формате dxf-файлов
7	Построение зоны сдвижения горных пород	Задание границ области сдвижения горных пород посредством указания граничных углов	Построение линий пересечения границ области сдвижений и земной поверхности

Расчет координат точек пересечения сторон треугольников модели земной поверхности с плоскостью, ограничивающей зону сдвижения горных пород, производится в следующей последовательности [17]:

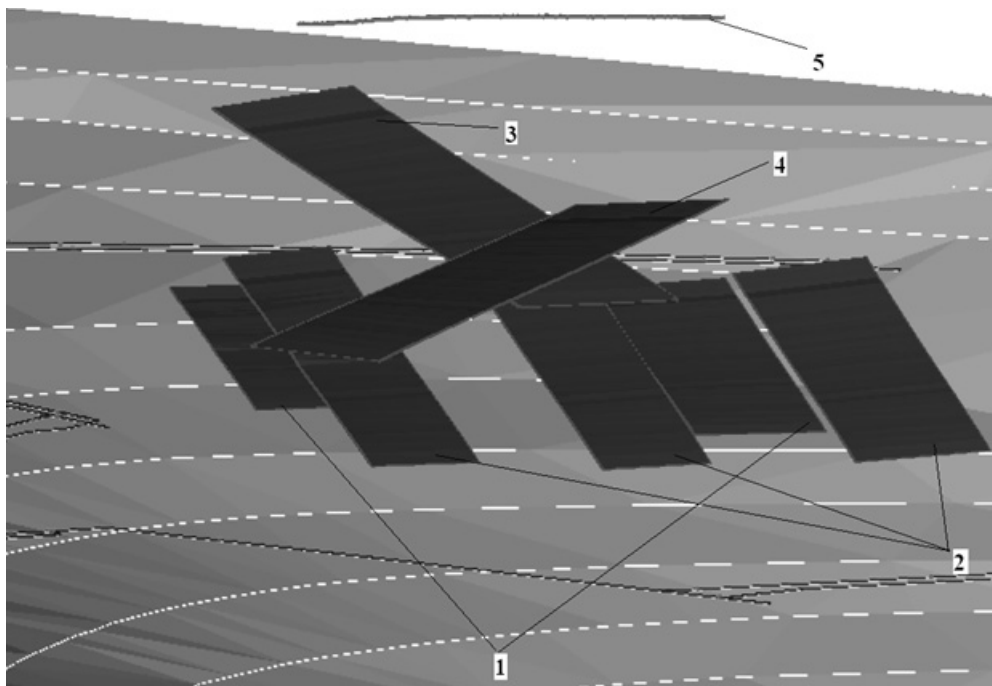


Рис. 1. Модель вскрывающих горных выработок и выемочных столбов (1, 2, 3, 4 – отработанные лавы пластов l_3, l_4, l_6, l_7 соответственно; 5 – исследуемая улица на поверхности)

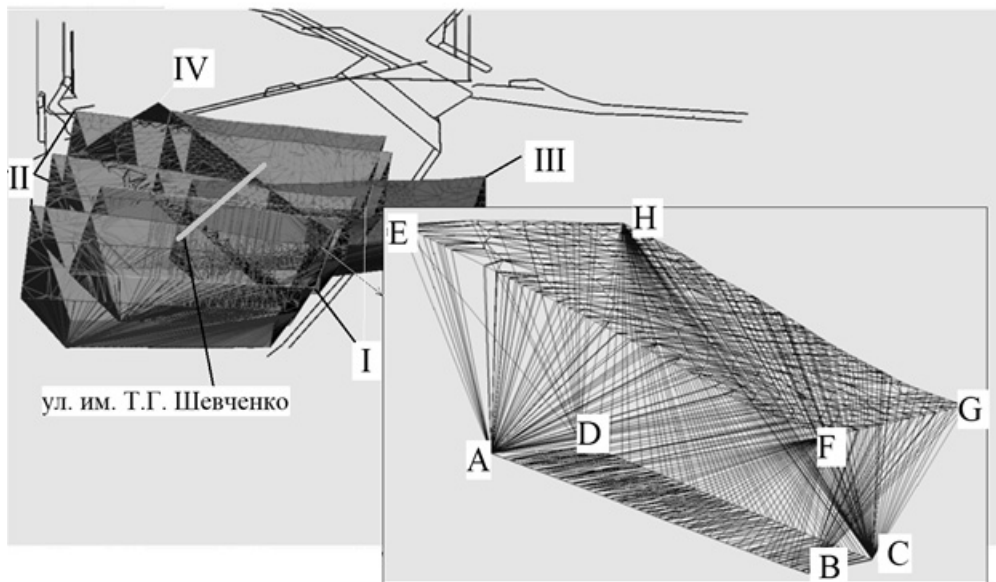


Рис. 2. Построение модели зон сдвижения горных пород (I, II, III, IV – зоны влияния выработок пластов l_3, l_4, l_6, l_7 соответственно)

а) По заданным трем точкам, принадлежащим ограничивающей плоскости, рассчитываются коэффициенты A_1, B_1, C_1, D_1 уравнения плоскости

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \quad (1)$$

где x, y, z – переменные координаты точек, принадлежащих плоскости, м; A_1, B_1, C_1, D_1 – искомые коэффициенты уравнения плоскости, безразмерные величины.

б) Для каждой из сторон треугольника по известным двум точкам (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) рассчитываются коэффициенты l, m, n уравнения прямой в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_1 + l \cdot t, \\ y = y_1 + m \cdot t, \\ z = z_1 + n \cdot t, \end{cases} \quad (2)$$

где x, y, z – переменные координаты точек, принадлежащих прямой, м; x_1, y_1, z_1 – координаты первой точки стороны треугольника, м; t – параметр уравнения прямой, безразмерная величина; l, m, n – коэффициенты уравнения прямой, безразмерные величины.

с) В результате подстановки выражений (2) для x, y, z в уравнение плоскости (1) определяется параметр t

$$t = -\frac{A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D}{A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n}. \quad (3)$$

д) При $t > 0$ координаты точки пересечения вычисляются подстановкой рассчитанного значения t в соответствующие уравнения (2).

5. Формирование каркаса тела, соответствующего области сдвижения горных пород, из следующих поверхностей:

- нижняя поверхность $ABCD$, в нее копируются треугольники кровли из модели выемочного пространства;
- боковые поверхности $ABEF, BCGF, CDHG, ADHE$;
- верхняя поверхность $EFGH$, в ограничивающий контур которой выбираются точки земной поверхности; каркас поверхности формируется в результате триангуляции Делоне набора из выбранных точек и точек ограничивающего контура.

2. Анализ результатов моделирования. В результате моделирования выделены зоны влияния отдельных выработок (рис. 2). Рассматриваемая область земной поверхности полностью попадает под влияние отработанных лав пластов l_3 и l_4 , частично – под влияние отработанных лав пластов l_6 и l_7 . Пространственная модель зон влияния позволяет выделить пересекающиеся зоны, в которых значения параметров сдвижений и деформаций обусловлены совместным влиянием. На рисунке 3 показан пример выделения зоны суммарного воздействия горных работ по четырем пластам. В данном случае эта зона будет определяться пересечением зон влияния пластов l_6 и l_7 , поскольку влияние пластов l_3 и l_4

полностью охватывает рассматриваемую область. В выделенной зоне при прогнозе сдвижений и деформаций горных пород необходимо учитывать совместное влияние четырех пластов.

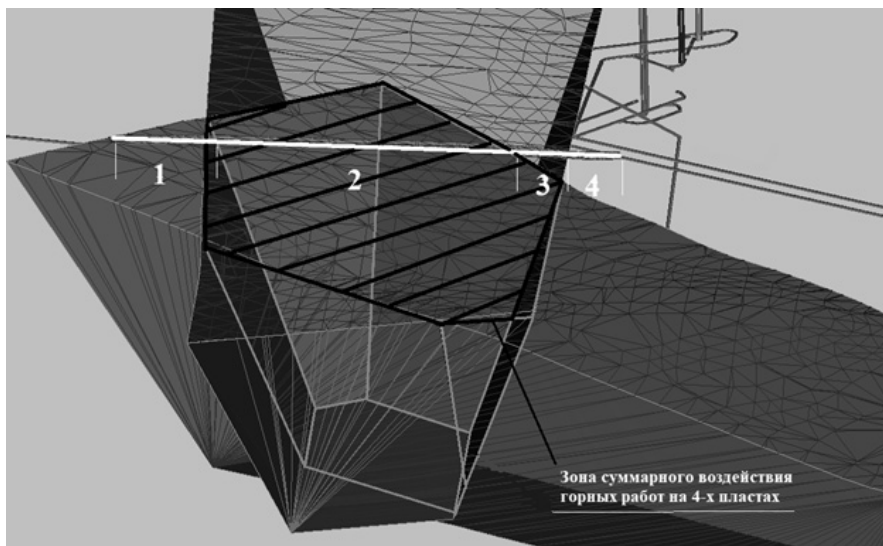


Рис. 3. Выделение зон многократной подработки (1, 2, 3, 4 – части улицы, подверженные влиянию горных работ на различных пластах)

Анализ пересечения зон влияния подработки позволил выделить части рассматриваемой улицы, подверженные влиянию горных работ на двух, трех или четырех пластах (рис. 3 и 4). Так, зона 1 улицы подвержена влиянию пластов l_3 , l_4 , l_6 , зона 2 – влиянию пластов l_3 , l_4 , l_6 и l_7 , зона 3 – влиянию пластов l_3 , l_4 и l_7 , зона 4 – влиянию пластов l_6 и l_7 .

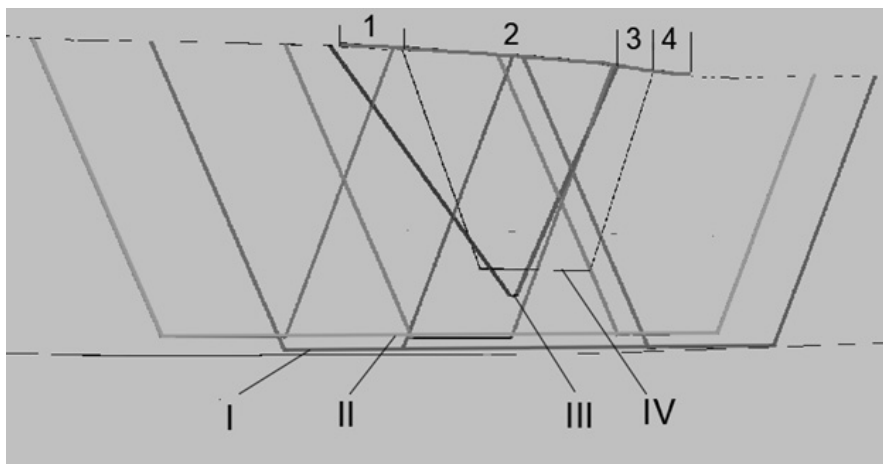


Рис. 4. Разрез вдоль подработанной улицы (I, II, III, IV – зоны влияния выработок пластов l_3 , l_4 , l_6 , l_7 соответственно)

Выводы. Точность прогноза последствий подработки земной поверхности подземными горными выработками зависит от возможности учета совокупности влияющих факторов. Разработка методов прогноза на основе пространственного компьютерного моделирования позволяет преодолеть ряд ограничений и неточностей, свойственных традиционным методам прогноза.

В условиях многократной подработки земной поверхности несколькими пластами пространственное компьютерное моделирование упрощает выделение зон многократной подработки горного массива и участков поверхности, подверженных максимальным сдвигам и деформациям.

Разработанное программное обеспечение может быть использовано для совершенствования методики прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности при подработке угольными шахтами в части автоматизации построения зон влияния горных работ и расчета параметров мульды сдвижения с учетом значимо влияющих факторов.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 123092600006-9).

1. *Викторов С.Д.* Механика сдвижения и разрушения горных пород / С.Д. Викторов, С.А. Гончаров, М.А. Иофис, В.М. Закалинский. – М.: ИПКОН, 2019. – 354 с.
2. *ПБ 07269-98.* Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – Введ. 1998-10-01. – М., 1998. – 203 с.
3. *ГСТУ 101.00159226.001 – 2003.* Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 2003-10-28. – К., 2004. – 128 с.
4. *Анциферов А.В.* Маркшейдерское обеспечение охраны трубопроводных коммуникаций на подрабатываемых территориях / А.В. Анциферов, Н.Н. Грищенко, Е.В. Блиникова // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2017. – № 11. – С. 82–91.
5. *Hejmanowski R.* Evaluation of reliability of subsidence prediction based on spatial statistical analysis / R. Hejmanowski, A. Malinowska // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2009. – Vol. 46. – С. 432–438.
6. *Скаженик В.Б.* Прогноз сдвижений и деформаций земной поверхности на основе компьютерного моделирования / В.Б. Скаженик, И.В. Чернышенко, Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 74–85. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-74-85. – EDN: XEWFNC.
7. *Alejano L.R.* FDM predictive methodology for subsidence due to flat and inclined coal seam mining / L.R. Alejano, P. Ramirez-Oyanguren, J. Taboada // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 1999. – Vol. 36. – С. 475–491.
8. *Witkowski W.T.* Software for Estimation of Stochastic Model Parameters for a Compacting Reservoir / W.T. Witkowski, R. Hejmanowski // Applied Sciences. – 2020. – № 10(9):3287. – DOI: 10.3390/app10093287.
9. *Cheng H.* A New Dynamic Prediction Model for Underground Mining Subsidence Based on Inverse Function of Unstable Creep / H. Cheng, L. Zhang, L. Guo, X. Wang, S. Peng // Advances in Civil Engineering. – 2021. – Vol. 2021. – Article ID 9922136. – DOI: 10.1155/2021/9922136.
10. *Malinowska A.* Ground Movements Modeling Applying Adjusted Influence Function / A. Malinowska, R. Hejmanowski, H. Dai // International Journal of Mining Science and Technology. – 2020. – Vol. 30. – № 2. – P. 243–249. – DOI: 10.1016/j.ijmst.2020.01.007.
11. *Yan J.* The application and development of Knothe influence function in China / J. Yan, Y. Lun, J. Yue, A. Preube, A. Sroka // Transactions of the Strata Mechanics Research Institute.

- 2018. – Vol. 20. – № 1. – P. 115–122.
12. Tan X. Extraction of Irregularly Shaped Coal Mining Area Induced Ground Subsidence Prediction Based on Probability Integral Method / X. Tan, B. Song, H. Bo, Y. Li, M. Wang, G. Lu // Applied Sciences. – 2020. – №. 10(18):6623. – DOI: 10.3390/app10186623.
 13. Назимко В.В. Исследование экологически опасных необратимых сдвижений массива горных пород над выработками солевых шахт / В.В. Назимко // Геотехнічна механіка. – 2015. – № 124. – С. 128–138.
 14. Xu N. Surface subsidence prediction for the WUTONG mine using a 3-D finite difference method / N. Xu, N. Kulatilake, P.H. Tian, H. Wu, X. Nan, T. Wei // Computers and Geotechnics. – 2013. – Vol 48. – P. 134–145.
 15. Кутепов Ю.Ю. Численное моделирование процесса сдвижения породных массивов применительно к горно-геологическим условиям шахты имени Рубана в Кузбассе / Ю.Ю. Кутепов, Е.Б. Боргер // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2017. – № 5. – С. 66–75.
 16. Скаженник В.Б. Проектирование разработки месторождений на основе компьютерного моделирования / В.Б. Скаженник // Вісті Донецького гірничого інституту. – 2011. – № 1. – С. 8–14.
 17. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики: Геометр. основы компьютер. графики: Аффин. и проект. преобразования: Мат. модели поверхностей и объектов: Геометр. задачи визуализации: Учеб. пособие / Е.А. Никулин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 550 с.

N.N. Grishchenkov, V.B. Skazhenik, E.A. Bardakova, I.V. Chernyshenko
Spatial modeling of zones of multiple underworking minings in areas with complex relief structure.

Traditional approaches to prediction of rock and earth surface displacement during underworking are analysed. The disadvantages of these approaches, caused by averaging of a number of parameters and impossibility to take into account individual factors, are highlighted. The algorithm and basic mathematical relations for the construction of spatial model of zones of influence of multiple underworking of the earth surface are presented. On the example of a coal mine, simultaneously developing four seams, the method of selecting the area of intersection of zones of influence of underworking by each seam and selecting the area of the earth surface, subject to the greatest influence of repeated underworking is considered. The proposed algorithm and software allow to increase the accuracy of prediction and automate the construction of zones of influence of mining operations in complex conditions.

Keywords: coal mine, earth surface displacement, software, spatial modelling, prediction accuracy, construction automation.

*Статья поступила в редакцию 27.09.2024;
доработана 08.11.2024;
рекомендована к печати 20.11.2024.*

УДК 622.83:622.268

doi:10.24412/0136-4545-2024-3-100-110

EDN:IVSXUI



©2024. В.А. Дрибан¹, Б.В. Хохлов², А.В. Антипенко³

К ВОПРОСУ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ВЛИЯНИИ ОЧИСТНЫХ РАБОТ

В данной работе рассматриваются вопросы напряженно-деформированного состояния массива горных пород. Построенная аналитическая модель формирования напряженно-деформированного состояния массива позволила достаточно точно описать комплекс процессов, ранее не имевших объяснения даже на качественном уровне. Полученное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии массива горных пород при ведении очистных работ показывает, что деформационные характеристики массива и мощность разрабатываемого пласта влияют на распределение напряжений и, как следствие, на принципиальные решения по вопросам выбросов угля, породы и газа, горных ударов, охраны и поддержания горных выработок в подрабатываемом и в не подрабатываемом массиве.

Ключевые слова: очистная выработка, напряженно-деформированное состояние, породный массив, охрана горных выработок, горное давление, аналитическая модель, слоистый массив.

Введение. Проблема напряженно-деформированного состояния (НДС) горного массива – одна из наиболее важных и сложных в горной геомеханике. От полноты и объективности принятых решений зависит обоснованность мер по обеспечению безопасности угледобычи, управления горным давлением в очистном забое, охраны и поддержания горных выработок, находящихся в сложных горно-геологических условиях.

При проведении экспериментальных исследований опорного давления изменяются не напряжения, а некоторые связанные с ними величины. При этом,

¹ Дрибан Виктор Александрович – доктор техн. наук, директор РАНИМИ, Донецк, e-mail: viktor-driban@yandex.ru.

Driban Victor Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Director, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

² Хохлов Борис Валентинович – канд. техн. наук, зав. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: hbv@bk.ru.

Khohlov Boris Valentinovich – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

³ Антипенко Антон Викторович – мл. науч. сотр. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: ministrxp@mail.ru.

Antypenko Anton Victorovich – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

зависимость между этими величинами и напряжениями достаточно сложна и зависит от множества факторов, которые трудно контролировать.

Таким образом, аналитические исследования распределения напряжений в горном массиве приобретают не только важное теоретическое значение, но и становятся практически единственным способом интерпретации результатов натурных наблюдений, оценки общего состояния массива и постановки новых экспериментов на моделях и в шахтных условиях [1].

В решении таких сложных задач, как охрана и поддержание выработок и шахтных стволов в условиях отработки свиты пластов, решение вопросов ударо- и выбросоопасности, аналитические методы остаются единственным способом получения целостной картины происходящих процессов [2].

Различными исследователями [3, 4] делались попытки аналитического расчета напряженно-деформированного состояния массива горных пород, которые условно можно разделить на три группы:

- 1) расчеты, основанные на задании закона убывания напряжений в пласте;
- 2) расчеты, в основу которых положены кинематические условия на краях пограничных зон;
- 3) расчеты, рассматривающие массив как упругую плоскость с бесконечно тонкими разрезами.

Первые две группы, несмотря на то что законы убывания напряжений в пласте и кинематические условия на границах предельно напряженных зон получены на основании экспериментальных материалов, носят лишь точечный характер и приблизительно отражают реальные процессы. С увеличением расстояния от забоя точность расчётных значений снижается, что приводит к существенному искажению реальной картины при значительном удалении.

В последнее время значительный вклад в изучение напряженно-деформированного состояния массивов горных пород внесли исследователи [5, 6], рассматривающие массив, как упругую плоскость с бесконечно тонкими разрезами. Кроме того, учитывая, что выработанное пространство заполняется, т.е. вес вышележащих пород передается на почву очистной выработки, был разработан метод углов давления, основанный на описании условий передачи давления на почву. Однако метод углов давления, построенный на небольшом экспериментальном материале, вносит ошибки, которые значительно возрастают по мере удаления от очистного пространства.

Важно отметить, что все приведенные разработки не учитывают мощность разрабатываемого пласта и влияние земной поверхности на перераспределение напряжений в массиве. Между тем, эти факторы играют существенную роль и часто являются решающими при определении деформированного состояния массива, а также при решении задач безопасности горных работ, их охраны и поддержания [7].

Таким образом, можно сделать вывод, что существующие решения задачи о НДС массива горных пород предполагают дальнейшие поиски и совершенствования как физической, так и математической модели данного явления.

1. Постановка задачи. Массив горных пород с очистной выработкой рассматривается как тяжелая полуплоскость с горизонтальным разрезом длиной $2a$ и высотой m , пройденным на глубине H от поверхности. При этом учитывается, что при достаточно большой величине выемочного пространства происходит смыкание кровли и почвы очистной выработки и, как следствие, восстановление напряжений на почве. В дальнейшем будет приниматься к учету ослабление подработанного массива за счет образования зоны полных сдвижений над выработкой.

Подобная постановка задачи необходима потому, что объекты, которые охраняются и поддерживаются, пересекают весь массив горных пород (например, стволы и выработки на значительном удалении по вертикали от выработанного пространства) и, как непосредственно лава, так и земная поверхность, влияют на НДС.

Прямое решение задачи в изложенной постановке вызывает значительные технические трудности, поэтому будем искать ее решение поэтапно:

а) рассмотрим осесимметричную задачу для разреза с теми же параметрами в упругой невесомой плоскости с учетом смыкания кровли и почвы (уточненная схема *Berry*);

б) решим задачу о напряженном состоянии тяжелой полуплоскости с горизонтальным разрезом на глубине H , но уже без учета восстановления напряжений;

в) рассмотрим вопрос об ослаблении механических характеристик подрабатываемого массива.

Компоновка этих решений с учетом краевых условий и даст необходимый результат.

2. Осесимметричная задача. Рассматривается невесомая плоскость с напряжениями на бесконечности P и Q , которая частично сомкнулась по разрезу длиной $2a$ высотой m . При рассмотрении аналогичной задачи без условия смыкания (решение Михлина С.Г.) высота разреза (щели) не влияет на распределение напряжений и деформаций.

Будем решать задачу в дополнительных нагрузках. В упругой невесомой плоскости имеется частично сомкнутый разрез, на свободных поверхностях которого действуют напряжения уровня γH . Таким образом, задача сводится к поиску НДС при соприкосновении двух упругих полуплоскостей при условии, что на общей границе имеются две щели $(-a, -b)$, (b, a) , трение на границе отсутствует, и при этом края щелей подвергаются нормальному растяжению γH как на верхней, так и в нижней полуплоскости. Величина b неизвестна и определится ниже, исходя из мощности пласта и условия $\sigma_y(b, 0) = -\gamma H$. Следуя изложенному, приходим к группе граничных условий:

- на всей оси OX касательные напряжения $\tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2$;
- на щелях вертикальные напряжения $\sigma_y^1 = \sigma_y^2 = -\gamma H$;
- на всей оси OX вне щелей $\sigma_y^1 = \sigma_y^2$; вертикальные смещения $U_y^1 = U_y^2$, где верхние индексы относятся соответственно к верхней и нижней полуплоскостям.

В дальнейшем верхние индексы будем опускать.

Применяя соотношения Колосова – Мухелишвили

$$\begin{cases} \sigma_y + \sigma_x = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ 2G(u_y + iu_x) = \chi\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}), \end{cases} \quad (1)$$

где функции Гурса $\varphi(z), \psi(z)$ – аналитические комплексные функции; G – модуль сдвига, а также, учитывая краевые условия, задачу нахождения напряжений можно свести к задаче Гильберта

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \{\varphi'(z)\} = -\frac{\gamma H}{2}, & y = 0, & x \in [-a, -b] \cup [a, b], \\ \operatorname{Im} \{\varphi'(z)\} = 0, & y = 0, & x \notin [-a, -b] \cup [a, b]. \end{cases} \quad (2)$$

Не сосредотачиваясь на достаточно больших преобразованиях, запишем формулы для определения напряжений:

$$\sigma_{ij} = \gamma H \operatorname{Re} \left[(\delta_{ij} \pm A) \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{z^2 - a^2}} - 1 \right], \quad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; величина A определяется из выражения

$$A = \frac{z(a^2 - b^2)(z - \bar{z})}{2(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)};$$

величина параметра b является решением интегрального уравнения

$$\int_b^a \left(\sqrt{\frac{z^2 - b^2}{a^2 - z^2}} - 1 \right) dz = \frac{Em}{4\gamma H(1 - \nu^2)},$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; γ – объемный вес пород; m – мощность разрабатываемого пласта; H – глубина разрабатываемого пласта.

Таким образом, значение b зависит не только от глубины и размеров выработанного пространства, но и от деформационных характеристик массива горных пород и мощности разрабатываемого пласта.

3. Влияние зоны полных сдвижений на НДС массива. Модель, описываемая формулами (3), наиболее точна для надработанного массива. При достаточно большой длине выемочного столба происходит упругое «смыкание» кровли и почвы. В качестве мощности, обозначаемой m_n , необходимо принимать величину $2U_y^2(0, 0)$ – удвоенного (упругого) поднятия почвы пласта в центре выработанного пространства. Обозначая отношение смещения кровли и почвы через β , получим систему уравнений для определения коэффициента перехода от m до m_n

$$\begin{cases} \beta U_y^2 + U_y^2 = m, \\ 2U_y^2 = K_m m, \end{cases} \quad (4)$$

где K_m является отношением m_n к m .

Как показывают расчеты, коэффициент K_m с достаточной точностью описывается линейным уравнением

$$K_m = 1 - \frac{a}{3H}. \quad (5)$$

В уточненной схеме для определения параметра b в уравнение (3) вместо m необходимо подставлять величину $K_m \cdot m$.

Известно, что над выработанным пространством образуются зоны обрушения и полных сдвижений, характерной чертой которых является образование трещин по нормали к напластованию, расслоение и т.п.: происходит ослабление подработанного массива горных пород.

Как видно из (4) и (5), при увеличении длины вынимаемого столба отношение величин a и b стремится к единице и $\sigma_y(0, y) \rightarrow 0$, то есть оседания земной поверхности стремятся по своей величине к упругому опусканию кровли пласта. Экспериментальным путем установлены геометрические соотношения между длиной столба и глубиной разработки, определяющие образования плоского дна мульды сдвижения, то есть точки, где реализуются максимальные оседания. Известна также величина относительных максимальных оседаний. Сравнение этих величин позволяет определить обобщенный коэффициент ослабления подработанного массива горных пород K_0

$$K_0 = \frac{6Hq_0}{3H + a}, \quad (6)$$

где q_0 – максимальные относительные оседания.

Расчеты показывают, что для Донбасса эта величина колеблется в границах 1,2–1,3.

Построенная математическая модель подработанного массива впервые дает принципиальную возможность решить вопрос напряженного и деформированного состояния массива горных пород не на качественном, а на количественном уровне. Корректность модели обусловлена высокой степенью правдоподобия полученного аналитико-эмпирическим способом коэффициента ослабления массива горных пород при подработке. Это единственный инженерный коэффициент; все остальные параметры модели четко проверяются экспериментальным путем и соответствуют реальным характеристикам вмещающего массива. В рамках построенной модели находят ясное и четкое объяснение многочисленным случаям «дальнего действия» очистных работ.

Итак, НДС массива горных пород описывается формулами (3), где величина b определяется уравнением

$$\int_{\alpha}^1 \left(\sqrt{\frac{z^2 - \alpha^2}{1 - z^2}} - 1 \right) dz = \frac{EmK_m}{4a\gamma HK_0(1 - \nu^2)}, \quad (7)$$

в котором α – отношение b к a .

На основании проведенных исследований можно сделать вывод, что полученное решение задачи о НДС массива горных пород зависит от комплексного показателя, который включает в себя деформационные характеристики массива, глубину и мощность разрабатываемого пласта, условия ослабления подработанного массива и геометрические размеры выработанного пространства.

Построенная модель НДС массива позволяет вычислить не только дополнительные напряжения (в долях γH), но и получить коэффициенты концентрации напряжений, т. е. отношение измененного поля напряжений к напряжениям на текущей глубине в нетронутым массиве, что подчеркивает принципиальное отличие проведенных построений и, как свидетельствуют многочисленные расчеты, позволяет предположить, что предложенный метод описывает реальное положение вещей.

Построенная модель должна согласовывать напряженное и фактически деформированное состояние массива горных пород без каких-либо предположений (не имея очень серьезных обоснований) о снижении деформационных характеристик на порядок или более. Этот момент является главным критерием непротиворечивости проведенных построений и рассуждений.

В качестве иллюстрации модели приведем результаты расчетов оседаний земной поверхности для следующих условий: глубина – 1000 м; вынимаемая длина столба – 400 (начальная стадия), 800 и 1600 м (полная подработка); усредненный модуль упругости массива – 18 ГПа; коэффициент Пуассона – 0,25; вынимаемая мощность пласта – 1 м.

Выражение для оседаний массива и земной поверхности имеет вид

$$U_y(x, H) = \frac{1 - \nu^2}{2E} \int_0^{\infty} \widehat{q}(\eta/h) \frac{sh(2\eta) - 2\eta}{sh^2(\eta) - \eta^2} \cos\left(\frac{x\eta}{h}\right) d\eta, \quad (8)$$

где h – толщина породного слоя; $\eta = \xi h$; \widehat{q} – преобразование Фурье нормального давления на слой.

На рисунке 1 представлены расчетные полумульды для описанных выше условий.

В соответствии с графиками, полученные значения оседаний земной поверхности хорошо согласуются с фактическими. Для сравнения приведем прогнозные значения максимальных оседаний для указанных условий, полученные в соответствии с действующей экспериментальной методикой: 0,8, 0,68, 0,48 м соответственно.

Вышесказанное дает основания считать, что на базе разработанной модели возможно создание общей теории НДС массива горных пород, включая смещения.

4. Влияние направления движения фронта очистных выработок. Разработанная аналитическая модель формирования НДС массива позволяет прогнозировать как глобальное напряженное состояние, так и локальные концентрации напряжений, обусловленные слоистостью массива. Модель связывает

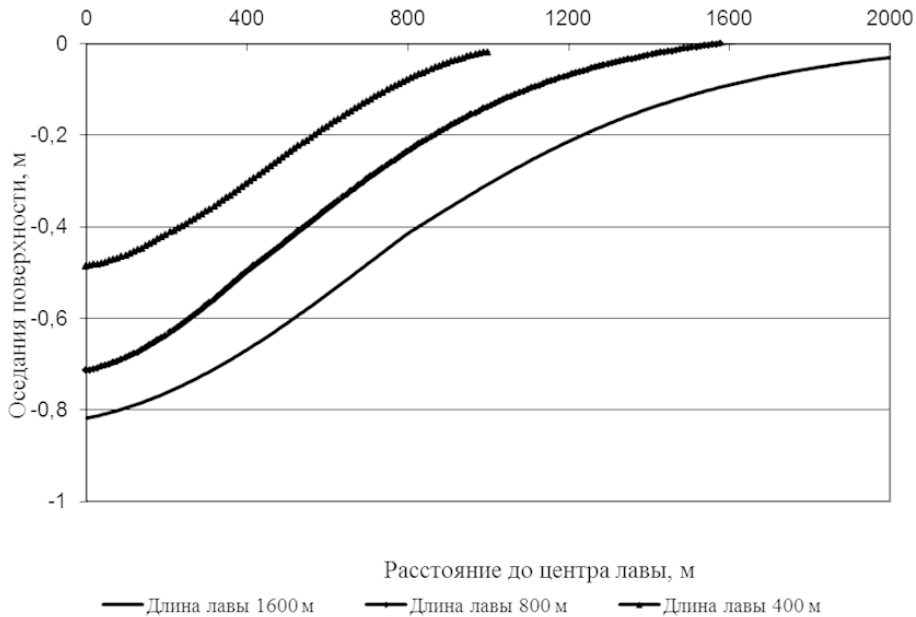


Рис. 1. Расчетные полумульды при развитии очистных работ

практически все основные горно-геологические и горнотехнические параметры массива за исключением влияния дизъюнктивной нарушенности.

Рассмотрим подробнее ряд последствий, вытекающих из указанной модели, и их связь с фактическим материалом. Статистическим методом была получена зависимость оценки состояния ствола от условий оконтуривания приствольного целика и, в частности, от направления оконтуривания [8]:

$$\begin{cases} y = 0,770 \exp(0,56W_o + 0,42W_n + 0,58W_{np}), \\ y = \max y_i, \end{cases} \quad (9)$$

где $W_o, W_n, W_{np} = \sum_j \Pi_{ji} \sum_{k=1}^4 \operatorname{tg}(\chi_k^{(j)} - 50^\circ)$ – значения параметров при уходе, подходе и проходе забоя.

Из приведенного выражения следует, что наиболее благоприятным направлением подвигания забоя является подход к предохранительным целикам, а менее благоприятным – уход от целика и проход лавы вдоль целика, которые создают практически одинаковое влияние.

Определим интервал изменения оценки состояния ствола в зависимости от направления оконтуривания (уход – подход). Согласно (9), при изменении направления отношение оценок составит $\exp(0,14W)$. Полученная величина при изменении угла оконтуривания от 70° до 75° и сторон оконтуривания от одной до четырех меняется в пределах 1,02–1,29. То есть, при изменении направления оконтуривания с подхода на уход расчетная оценка ухудшается на 2–29 %

в зависимости от горнотехнических условий.

Рассмотрим этот же вопрос с учетом разработанной аналитической модели формирования НДС массива. Согласно (3)–(7), параметром, определяющим основные характеристики распределения напряжений в массиве, является выражение, которое стоит в правой части формулы и связывает между собой модуль упругости (деформации), коэффициент Пуассона массива, мощность отрабатываемого пласта, глубину очистных работ и геометрические размеры выработанного пространства. Отсюда следует, что процесс формирования напряженного состояния проходит три стадии. Первая стадия – начальная, когда длина лавы мала и конвергенция «кровля–почва» выработанного пространства меньше мощности пласта. На этом этапе по мере развития очистных работ происходит активное увеличение коэффициентов концентрации напряжений на уровне разрабатываемого пласта. На второй стадии появляется участок силового взаимодействия «кровля–почва», которое постепенно увеличивается по мере увеличения выработанного пространства. При этом постепенно увеличивается компонента влияния земной поверхности на мощность пласта (коэффициент K_m), которая приводит к некоторому уменьшению уровня концентраций. И, наконец, когда участок силового взаимодействия становится достаточно большим по сравнению с зонами взвешенных пород, последние практически не оказывают взаимного влияния на напряженное состояние друг друга. На этой стадии зоны опорного давления стабилизируются.

С физической точки зрения различие между уходом и подходом заключается в том, что в первом случае массив проходит через все три стадии формирования НДС, тогда как при подходе на ствол влияет только стационарная волна опорного давления, что проявляется только на третьей стадии. На рисунке 2 представлены дополнительные напряжения, возникающие в массиве по мере развития очистных работ для следующих условий:

- глубина (H) – 700, 800, 900 м;
- расстояние от очистной выработки до ствола $0,3H$ – стандартный размер предохранительных целиков по действующим правилам;
- усредненный модуль упругости массива – 15 ГПа;
- коэффициент Пуассона – 0,3;
- вынимаемая мощность пласта – 1 м.

Как показано на графиках, при уходе очистной выработки от целика сначала идет интенсивный рост дополнительных сжимающих напряжений (левая часть кривых), затем величина напряжений достигает своего максимума при длине столба 700–900 м, после чего наблюдается ее некоторое снижение в полном соответствии с последовательным переходом одной стадии в другую. Следовательно, в данном случае необходимо расчеты устойчивости крепи вести на максимальные напряжения. При подходе очистной выработки к целику картина принципиально иная, поскольку процесс формирования дополнительных напряжений пройдет первую и вторую стадии. Соответственно, расчеты следует вести, ориентируясь на правые части полученных кривых. Разница в дополни-

тельных нагрузках между уходом и подходом составляет 5–14 % для указанных случаев и растет с уменьшением глубины, что хорошо согласуется с результатами абсолютно независимых статистических исследований, при естественном предположении о прямой связи роста напряжений в массиве и увеличении их воздействия на крепь ствола.

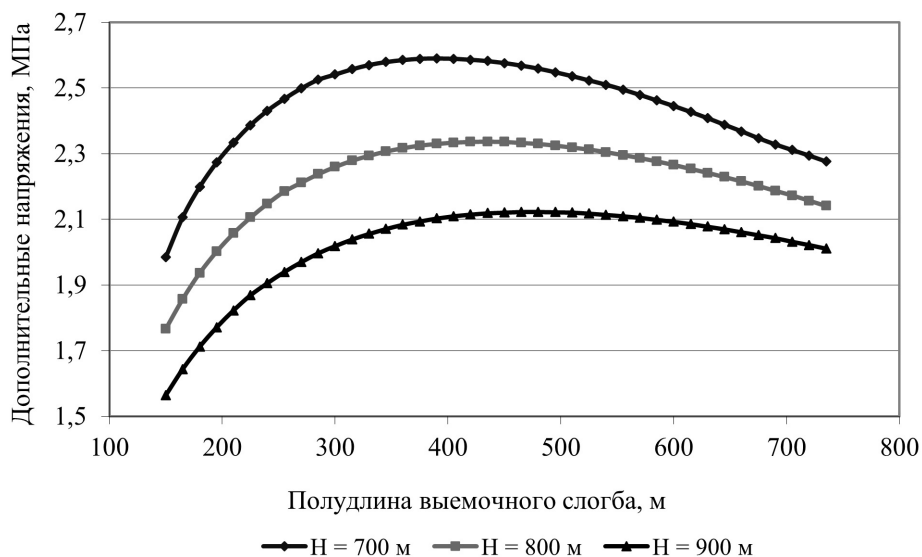


Рис. 2. График изменения дополнительных напряжений в районе пересечения пласта со стволом при развитии очистных работ

Отметим ряд важных последствий. Как видно из выполненных расчетов, величина дополнительных напряжений вдоль оси ствола уменьшается с увеличением глубины (с 2,6 МПа при глубине 700 м до 2,1 МПа при 900 м), что нашло отражение в том, что статистический анализ оценки состояния ствола не выявил зависимости от глубины. Вторым следствием разработанной модели формирования НДС массива является принципиальное отличие поведения выработок, закрепленных податливой и замкнутой жесткой крепью при воздействии очистных выработок. Действительно, если при подходе очистных работ для выработок, закрепленных податливой крепью, активная стадия формирования зоны опорного давления длится 4–6 месяцев (при средней скорости подвигания забоя 30 м/мес.), то при отходе лавы от целика уровень напряжений, соответствующий стационарной зоне опорного давления (третья стадия), достигается не ранее чем через 15–20 месяцев, что, безусловно, благоприятно сказывается на режиме деформации податливой крепи. Для выработок с жесткой замкнутой крепью (например, крепью стволов) наблюдается абсолютно противоположный результат, поскольку, в отличие от податливых крепей, жесткие крепи не имеют возможности сброса дополнительных нагрузок и, следовательно, воздействие очистных работ продлится 20 и более месяцев при большем уровне возникающих

напряжений (максимум напряжений возникает на второй стадии формирования нагрузок).

Выводы. Построенная аналитическая модель формирования НДС массива достаточно точно описывает и хорошо объясняет комплекс процессов, интерпретация которых отсутствовала даже на качественном уровне. Впервые получило объяснение на количественном и качественном уровне «дальнодействие» влияния очистных выработок на состояние вертикальных шахтных стволов, которое было исключено при базировании построений на классических геомеханических схемах сдвига.

Полученное решение задачи о НДС массива горных пород при ведении очистных работ в отличие от классического показывает, что деформационные характеристики массива и мощность разрабатываемого пласта влияют на распределение напряжений и, как следствие, на принципиальные решения по вопросам выбросов угля, породы и газа, горных ударов, охраны и поддержания горных выработок в подрабатываемом и в не подрабатываемом массиве.

Исследования проведены в рамках выполнения фундаментальной научно-исследовательской работы FRSR – 2023-0006 «Исследование устойчивости и трансформации напряженно-деформированного состояния обводненных массивов горных пород».

1. *Дрибан В.А.* Общие закономерности формирования напряженно-деформированного состояния массива / В.А. Дрибан // Проблемы гірського тиску. – 2003. – № 10. – С. 198–210.
2. *Driban V.* On the stability of structurally heterogeneous rock mass / V. Driban. // 5-th International Scientific Conference Modern Management of Mine Producing, Geology and Environmental Protection SGEM – Albena, (Bulgaria). – 2005. – P. 559–557.
3. *Кулибаба С.Б.* Границы зон области сдвижения массива в расчетных схемах / С.Б. Кулибаба, М.Д. Рожко // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2014. – № 14. – С. 128–135.
4. *Южанин И.А.* Расчет деформаций междупластья для оценки защитного действия опережающей подработки / И.А. Южанин, А.М. Терлецкий, С.В. Голдин, В.П. Евдокимова // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2009. – № 4. – С. 133–139.
5. *Голдин С.В.* Аварийные ситуации в районе расположения устьев вертикальных стволов / С.В. Голдин // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2010. – № 6. – С. 313–322.
6. *Канин В.А.* Определение размеров зон ПГД при подработке или надработке источников их формирования / В.А. Канин, Ю.А. Пивень, А.А. Пашенко // Труды РАНМИ: сб. научн. тр. – № 5 (20). – 2018. – С. 44–54.
7. *Дрибан В.А.* Исследования геомеханических процессов в районе сопряжения глубокого ствола / В.А. Дрибан, И.А. Колдунов // Уголь Украины. – 2011. – № 10. – С. 10–13.
8. Расположение, охрана и поддержание горных выработок при отработке угольных пластов на шахтах. Руководящий документ / РАНМИ. – Утв. Минугля и энергетики ДНР 15.04.21. – Донецк, 2021. – 267 с.

V.A. Driban, B.V. Khokhlov, A.V. Antypenko

On the issue of stress-strain state of rocks under the influence of cleaning operations.

This article examines the issues of stress-strain state of rock mass. The constructed analytical model of formation of stress-strain state of rock mass allowed to describe quite accurately the complex of

В.А. Дрибан, Б.В. Хохлов, А.В. Антипенко

processes that previously had no explanation even at a qualitative level. The obtained solution to the problem of stress-strain state of rock mass during mining operations shows that deformation characteristics of the massif and the thickness of the developed seam affect the distribution of stresses and, as a consequence, fundamental decisions on issues of coal, rock and gas emissions, rock bursts, protection and maintenance of mine workings in the undermining and non-undermining massif.

Keywords: *stope, stress-strain state of rock mass, protection of mine workings, rock pressure, analytical model, layered massif.*

*Статья поступила в редакцию 04.10.2024;
доработана 11.11.2024;
рекомендована к печати 22.11.2024.*

УДК 622.837:622.838
doi:10.24412/0136-4545-2024-3-111-118
EDN:JIPLZQ



©2024. Н.Я. Азаров¹, Ф.М. Голубев², Т.И. Рахманова³, В.П. Сажнев⁴

ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ РЕЛЬЕФА НА ДЕФОРМАЦИИ ЖИЛЫХ ДОМОВ НА ПОДРАБАТЫВАЕМОЙ ТЕРРИТОРИИ

В статье проведен анализ особенностей влияния структуры рельефа на характер повреждения подработанных горными выработками зданий. Приведен опыт обследования подработанных и подтопленных зданий на склонах рельефа. Установлено преобладающее над прочими факторами влияние параметров рельефа на состояние основных несущих конструкций.

Ключевые слова: жилые дома, подработка, затопление горных выработок, влияние структуры рельефа, устойчивость склона, меры защиты.

Введение. Разработка месторождений полезных ископаемых неизбежно приводит к изменению ландшафта местности, которая попадает в зону влияния горных работ. Подземные очистные работы вызывают сдвиги и деформации земной поверхности, которые, в свою очередь, приводят к повреждениям и деформациям объектов социальной и производственной инфраструктуры, рас-

¹Азаров Николай Янович – доктор геол.-мин. наук, проф., научный консультант РАНМИ, Донецк, e-mail: ranimi@ranimi.org.

Azarov Nikolay Yanovich – Doctor of Geological and Mineralogical Sciences, Professor, Scientific Consultant, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

²Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

³Рахманова Татьяна Ивановна – ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: rahmanovatata@yandex.ru.

Rahmanova Tat'yana Ivanovna – Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

⁴Сажнев Вячеслав Петрович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: vyacheslav.p.sazhnev@yandex.ru.

Sazhnev Vyacheslav Petrovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

положенных на подрабатываемой территории [1–5].

Особое внимание следует уделять зданиям, расположенным на склонах рельефа и на участках застройки со сложными горно-геологическими и инженерно-геологическими условиями, так как в таких случаях на техническое состояние зданий воздействуют дополнительные факторы.

При эксплуатации зданий и сооружений, возведенных на склонах или вблизи них, появляется опасность нарушения устойчивости и прочности конструкций из-за возможных подвижек грунта [2]. При этом деформации сооружений могут произойти как из-за воздействия давления неустойчивых масс грунта непосредственно на конструкции, так и вследствие разрыхления грунта в основании сооружения в результате смещения оползневых масс вниз по склону. Такое движение грунта по наклонной поверхности (проявление оползневого смещения) может начаться по самым различным причинам, в том числе от влияния подработки и затопления горных выработок.

В работе [3], изложен подход к определению степени устойчивости откоса, который подразумевает составление отношения суммы сил, сопротивляющихся сдвигу, к сумме сил, стремящихся сдвинуть массив по плоскости скольжения, расчетная схема данного подхода для участка MA приведена на рисунке 1

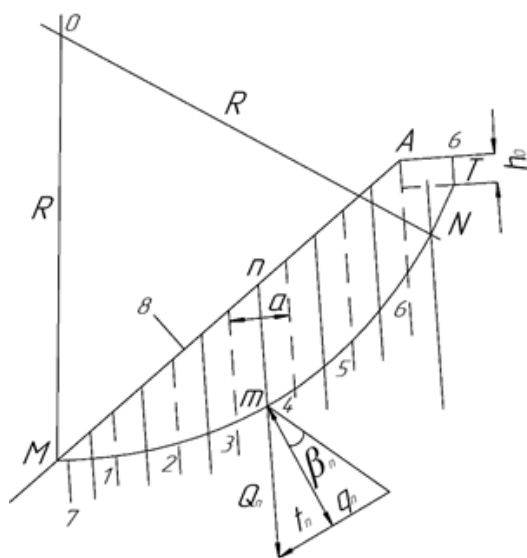


Рис. 1. Схема определения сдвигающих и удерживающих сил для каждой плоскости скольжения в массиве склона: 1–6 – границы блоков; 7 – плоскость скольжения; 8 – склон; M – точка максимального оседания; и R – центр и радиус круглоцилиндрической плоскости скольжения; h_0 – глубина, ниже которой возможно образование плоскости скольжения

Согласно рисунку 1 определяются величины q_n (нормальная составляющая силы Q_n) и t_n (сдвигающее усилие):

$$q_n = Q_n \cos \beta_n, \quad (1)$$

$$t_n = q_n \operatorname{tg} \varphi, \quad (2)$$

где Q_n – вес грунта n -го блока, Н; β_n – угол между вертикалью и нормальной составляющей силы Q_n (q_n), градус; φ – угол внутреннего трения, градус.

Проведенные исследования [3, 6] показывают, что влияние мезорельефа на прогнозируемые величины деформаций могут являться значительными и достигать 40–50 % от допустимых значений наклонов, кривизны и относительных деформаций для целого ряда охраняемых объектов поверхности [7, 8]. Все эти факторы требуют научно обоснованного и своевременного выбора горных и конструктивных мер защиты зданий и сооружений.

Таким образом, теоретическое обоснование прогноза деформаций земной поверхности, определение причин деформирования и выбора мер защиты зданий и сооружений на участках мезорельефа, подрабатываемых подземными горными работами, является актуальной научной задачей, решение которой имеет важное теоретическое и практическое значение для народного хозяйства и способствует повышению безопасности и эффективности ведения горных работ.

1. Методика исследования. Для примера определим причины деформирования жилого дома № 6 по ул. Южной в г. Брянке, расположенного на склоне рельефа на горном отводе шахты «Брянковская». Одноэтажный двухквартирный жилой дом построен в 1958 году. Размеры дома в плане (с пристройками) 23,0 м х 9,24 м, высота 3,3 м. Фундаменты выполнены из бутового камня, стены из гипсоблоков, перекрытие деревянное, кровля двускатная шиферная по деревянным стропилам и обрешетке.

Подвалы каждой квартиры расположены под соответствующими пристройками. Размеры подвалов 3,5 м х 2,5 м х 2,7 м, стены бутовые, перекрытия железобетонные.

Основные параметры горно-геологических условий приведены в таблице 1.

Результаты вертикальной съёмки участка застройки дома на склоне рельефа показаны на рисунке 2.

Породы участка представлены песчаными и песчано-глинистыми сланцами, песчаниками с отдельными пластами известняков и углей. К западу от дома находится выход под наносы известняка M_3 мощностью 3,5–6,0 м. Мощность наносов на участке составляет 2,0–4,0 м.

Для оценки влияния горных работ шахты «Брянковская» выполнен расчёт сдвижений и деформаций земной поверхности в соответствии с методикой «Правил охраны...» [5].

Из одиннадцати лав, принятых к расчету деформаций земной поверхности, на дом оказала влияние отработка только девяти лав. Из них значимое влияние на дом оказала отработка только трёх лав: 1-й восточной лавы пласта l_3 , 1-й восточной лавы пласта l_2^1 и 1-й восточной лавы пласта k_6 .

В таблице 2 приведены результаты расчёта сдвижений и деформаций земной поверхности от каждой лавы и максимальные деформации за весь период подработки дома.

Таблица 1. Горно-геологические условия подработки

Наименование лавы	Символ пласта	Угол падения, град.	Средняя глубина, м	Вынимаемая мощность, м	Размеры лавы, м		Способ управления кровлей
					вкрест простирания	по простиранию	
1	2	4	5	6	7	8	9
1-я бис восточная	l_3	10	296	0,65	135	515	Полное обрушение
Коренная западная	l_2^1	10	410	1,25	148	450	Полное обрушение
Коренная западная	l_3	10	427	0,70	196	250	Полное обрушение
Коренная восточная	l_3	10	427	0,70	180	640	Полное обрушение
Коренная восточная	l_2^1	10	410	1,40	148	500	Полное обрушение
Коренная восточная	k_6	10	650	0,59	170	465	Полное обрушение
Коренная западная	k_6	10	650	0,61	153	1110	Полное обрушение
1-я восточная	l_3	10	296	0,68	208	110	Полное обрушение
1-я восточная	l_2^1	10	310	1,35	196	630	Полное обрушение
1-я западная	l_2^1	10	310	1,30	196	700	Полное обрушение
1-я восточная	k_6	10	350	0,61	114	500	Полное обрушение

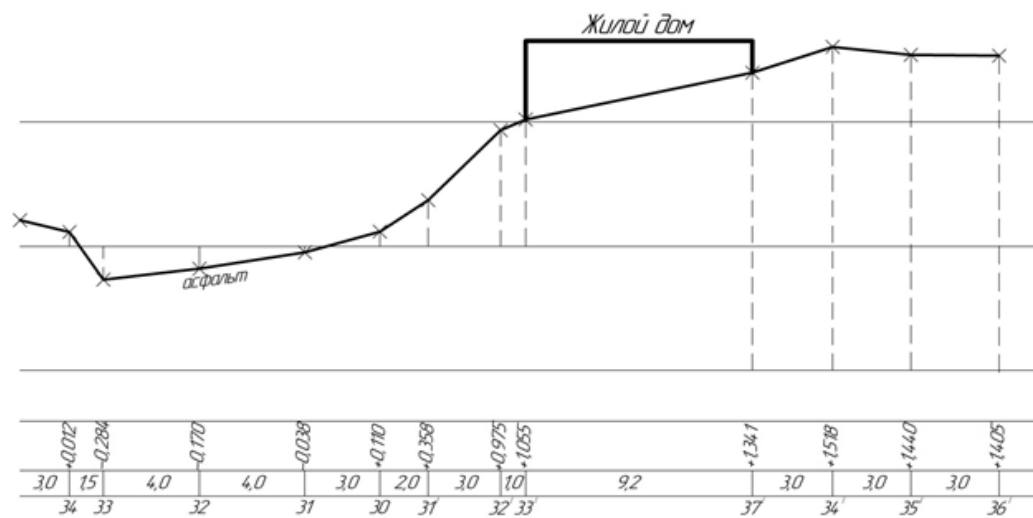


Рис. 2. Схема расположения жилого дома на склоне рельефа

Таблица 2. Расчетные значения сдвижений и деформаций земной поверхности

Наименование лавы	Символ пласта	Оседание, мм	Деформации в направлении простирания, мм/м		Деформации вкрест простирания, мм/м	
			ε_p	K_p	ε_q	K_q
Коренная западная	l_2^1	7	0,30	0,02	-0,04	-0,02
Коренная западная	l_3	3	0,16	0,02	0,02	-0,02
Коренная восточная	l_3	144	-0,46	-0,02	0,51	0,02
Коренная восточная	l_2^1	105	0,19	0,02	-0,69	-0,02
Коренная восточная	k_6	36	-0,07	-0,02	-0,14	0,02
1-я восточная	l_3	51	-0,43	0,022	1,41	0,022
1-я восточная	l_2^1	351	-1,50	-0,04	4,07	0,03
1-я западная	l_2^1	2	0,22	0,02	0,01	-0,02
1-я восточная	k_6	119	-0,39	-0,02	1,6	0,02
Сумма		818	-1,98	-0,06	6,7	0,08

Приведенные в таблице значения расчётных деформаций земной поверхности, кривизны и оседаний, определены на основании действующих отраслевых стандартов [4, 5] в единицах измерения, принятых в нормативной базе угледобывающей отрасли и использованы в анализе степени влияния горных работ на техническое состояние дома. Вычисленное по максимальным деформациям значение показателя суммарных деформаций составляет $\Delta l = 62$ мм.

Величина допустимого показателя суммарных деформаций земной поверхности для жилого дома с учётом коэффициентов, учитывающих грунтовые условия, материал и толщину стен, износ стен, конструкцию перекрытия и конфигурацию в плане, составляет $[\Delta l_{\text{д}}] = 100$ мм. Сравнение показателя суммарных деформаций, вычисленного по расчетным деформациям, с допустимым значением показывает, что он в 1,5 раза меньше допустимого значения. Отсюда следует, что согласно принятым в «Правилах охраны...» [5] нормам здание могло быть подработано без назначения конструктивных либо горных мер защиты. При этом вычисленное значение прогнозируемого максимального раскрытия трещин составляет 6–7 мм. Указанные повреждения не могут вызвать повреждения, угрожающие безопасности эксплуатации дома.

Возможная активизация горных работ, вызванная затоплением шахты, составляет не более 5–7 % от суммарных максимальных деформаций, вызванных влиянием горных работ. При этом расчетный показатель суммарных деформа-

ций не превысит 7 мм. Указанная величина характеризующего ресурс здания показателя суммарных деформаций, вызванных деформациями земной поверхности от активизации сдвижений, является малозначимой и здание не должно пострадать.

2. Результаты обследования здания. При обследовании технического состояния жилого дома зафиксированы следующие повреждения. В стене главного фасада зафиксированы горизонтальные трещины 1–2 мм под оконными проемами, в примыкании пристройки трещины раскрытием до 4 мм. Вертикальные трещины раскрытием до 3 мм зафиксированы в правой торцевой стене. В цоколе горизонтальные и наклонные трещины раскрытием до 10 мм. Щель между отмосткой и стеной дома составляет более 50 мм. Во внутренней поперечной стене, разделяющей квартиры имеются наклонные трещины раскрытием до 2 мм. На сопряжении перекрытий и стен, а также стены главного фасада и поперечных стен происходит деформирование обоев.

При обследовании мест опирания балок перекрытия зафиксировано смещение продольной стены главного фасада на 50–70 мм в сторону склона.

Зафиксированные повреждения позволяют утверждать, что наибольшие деформации здание претерпело на уровне цоколя и перекрытия. При этом трещины ориентированы в направлении падения склона.

Характер повреждений здания совпадает с преобладающим знаком относительных деформаций, что говорит о наличии влияния горных работ на состояние здания, при этом ориентирование зафиксированных трещин позволяет утверждать, что распространение повреждений преобладает в части здания, расположенной ближе к нижней части склона, что обосновывается воздействием подвижек склона под влиянием подработки.

Рассматриваемый жилой дом по степени капитальности следует отнести к III группе, поэтому усредненный срок его службы составляет 100 лет, а так как фактический срок службы на момент обследования составлял 42 года, то процент физического износа, вычисленного по сроку службы, равен 42 %.

В связи с зафиксированным при обследовании смещением стены главного фасада в сторону склона, выполнен анализ его устойчивости на основании предоставленной вертикальной съемки. Измеренный наклон земной поверхности на шестиметровом участке между проезжей частью улицы и стеной главного фасада равен 20 градусов. В полутораметровом интервале (точки 2 и 3) наклон земной поверхности равен 30 градусов.

В работах Маслова Н.Н. [9, 10] изложен «метод устойчивого откоса», по которому величина коэффициента запаса устойчивости склона $k_{\text{зап}}$ [10] для несвязанного грунта определяется формуле

$$k_{\text{зап}} = \frac{\text{tg } \phi}{\text{tg } \alpha}, \quad (3)$$

а для связанного грунта – по формуле

$$k_{\text{зап}} = \frac{\text{tg } \Psi_p}{\text{tg } \alpha}, \quad (4)$$

где: φ – угол внутреннего трения, градус; α – угол падения склона, градус; Ψ_p – угол сопротивления грунта сдвигу, градус.

Выполненный расчет устойчивости склона, с учетом расположенного на нем дома, по методу [7] при усредненных величинах физико-механических характеристик грунта-суглинка (сцепление $C = 0,05$ кг/см², угол внутреннего трения $\varphi = 20$ град., плотность $\gamma = 1,8$ т/м³) показывает, что коэффициент запаса устойчивости равен 1,0. Это позволяет сделать вывод о неустойчивости склона и, таким образом, высказать предположение о его влиянии на техническое состояние дома.

Выводы. На основании выполненного анализа влияния горно-геологических и горнотехнических факторов на техническое состояние здания установлено, что отработка шахтой «Брянковская» угольных пластов оказывала влияние на объекты поверхности, при этом расчетные деформации земной поверхности не превысили допустимых значений. Следовательно, подработка производилась в соответствии с требованиями действующих нормативных документов и в чистом виде не могла привести к деформациям здания. Активизация горных работ, вызванная затоплением горных выработок шахты, в рассматриваемых условиях не может превышать 5–7% от влияния подработки и является малозначимой.

Существующие повреждения дома соответствуют повреждениям, вызванным влиянием склоновых подвижек, активизированных сдвижением земной поверхности при подработке, которые существенно увеличивают физический износ зданий.

Таким образом, повреждения жилого дома вызваны перемещением склона, активизация которого связана с производственной деятельностью шахты и её затоплением. Установление данного факта подчеркивает важность учета влияния параметров рельефа на характер деформирования объектов поверхности и актуализирует необходимость доработки действующей методики расчета, игнорирующей влияние параметров рельефа на расчетные деформации. Адекватность и работоспособность представленного подхода подтверждается результатами наблюдений за несколькими сотнями зданий, подработанных горными выработками и расположенных на склонах рельефа.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 123092600006-9).

1. *Кратч Г.* Сдвижение горных пород и защита подрабатываемых сооружений / Г. Кратч; пер. с нем.; под общ. ред. Р.А. Муллера и И.А. Петухова. – М.: Недра, 1978. – 494 с.
2. *Канавец А.А.* К вопросу об устойчивости склонов мезорельефа / А.А. Канавец, Н.Н. Грищенко // *Инновационные перспективы Донбасса: Материалы 8-й Международной научно-практической конференции.* – Донецк: ДонНТУ, 2022. – Т. 6. – С. 159–161.
3. *Авершин С.Г.* Горные работы под сооружениями и водоемами / С.Г. Авершин. – М.: Углетехиздат, 1954. – 324 с.
4. *ПБ 07269-98.* Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – Введ. 1998-10-01. – М., 1998. – 203 с.
5. *ГСТУ 101.00159226.001 – 2003.* Правила подработки зданий, сооружений и природных

- объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 2003-10-28. – К., 2004. – 128 с.
6. Грищенко Н.Н. Прогноз деформаций земной поверхности на подрабатываемых территориях с учётом мезорельефа / Н.Н. Грищенко, Е.В. Блиникова // Маркшейдерский вестник. – 2013. – № 4 (96). – С. 34–38.
 7. Горбунов-Посадов М.И. Сложные основания и фундаменты: справочник проектировщика / М.И. Горбунов-Посадов, В.А. Ильичев, В.И. Крутов [и др.]; под ред. Ю.Г. Трофименкова. – М.: Стройиздат, 1969. – 272 с.
 8. Березанцев В.Г. Расчет прочности оснований и сооружений / В.Г. Березанцев. – Л.: Госстройиздат, 1960. – 138 с.
 9. Маслов Н.Н. Механика грунтов в практике строительства (оползни и борьба с ними) / Н.Н. Маслов. – М.: Стройиздат, 1977. – 320 с.
 10. Маслов Н.Н. Прикладная механика грунтов / Н.Н. Маслов. – М.: Машстройиздат, 1949. – 328 с.

N.Y. Azarov, Ph.M. Golubev, T.I. Raxmanova, V.P. Sazhnev

Features of influence of relief structure on deformations of residential buildings on the underworked area.

The article analyzes the features of the influence of the relief structure on the nature of damage to buildings underworked by mine workings. The experience of examining underworked and flooded buildings on relief slopes is given. The predominant influence of relief parameters on the condition of the main load-bearing structures over other factors is established.

Keywords: *residential buildings, underworking, flooding of mine workings, influence of relief structure, slope stability, protection measures.*

*Статья поступила в редакцию 10.10.2024;
доработана 18.11.2024;
рекомендована к печати 29.11.2024.*