

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 4 (89)**

**2024**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**  
**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**  
**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р физ.-мат. наук, проф. Д.В. Георгиевский, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. Н.Н. Грищенко, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Зыза, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Мазнев, д-р физ.-мат. наук, доц. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р физ.-мат. наук, доц. Р.Н. Нескородев, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Соловьев, д-р техн. наук, доц. С.В. Сторожев, д-р физ.-мат. наук, доц. С.Н. Царенко, д-р техн. наук, проф. В.П. Шамота.*

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

**EXECUTIVE SECRETARY:** Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

**EDITORIAL BOARD:**

*Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of phys. and math., prof. D.V. Georgievskiy, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. N.N. Grishchenkov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., docent A.V. Zyza, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., docent A.V. Maznev, Dr. of phys. and math., docent I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of phys. and math., docent R.N. Neskorojev, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of phys. and math., prof. A.N. Soloviev, Dr. of tech., docent S.V. Storozhev, Dr. of phys. and math., docent S.N. Tsarenko, Dr. of tech., prof. V.P. Shamota.*

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: [jtam\\_donnu@mail.ru](mailto:jtam_donnu@mail.ru), URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное  
учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет», 2024

№ 4 (89) / 2024

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Механика твердого тела

*Горр Г.В., Мазнев А.В., Белоконь Т.В.* Исследование уравнений движения твердого тела в трех однородных силовых полях..... 5

### Механика деформируемого твердого тела

*Глушанков Е.С.* Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной пластинки из пьезоматериала в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах ..... 14

*Глуценко А.В., Пачева М.Н., Сторожев С.В., Фоменко М.В.* Дисперсия окружных электроупругих волн в биморфной пьезоактивной кольцевой пластине ..... 28

*Глушанков Е.С., Мироненко А.Б.* Решение задачи об изгибе защемленной по краю эллиптической пьезомагнитной плиты ..... 35

*Вовк Л.П., Дзундза А.И., Мельничук Н.Ю., Моисеенко И.А., Моисеенко В.А.* Исследование свойств осесимметричных нормальных волн в функционально-градиентных цилиндрах на основе многофакторных моделей радиальной неоднородности ортотропного материала..... 46

*Сторожев В.И.* Интегрирование системы уравнений модели распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн в слое из функционально-градиентной пьезокерамики с экспоненциальной неоднородностью общего вида ..... 64

*Нескородев Р.Н., Зыза А.В.* Численно-аналитическая методика исследования напряженно-деформированного состояния горного массива, содержащего плоскость упругой симметрии, вблизи вертикальной выработки в условиях ползучести горных пород ..... 74

**Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

*Малютина Т.П., Полянский Д.Д., Сторожев С.В., Чан Ба Ле Хоанг*  
Нечетко-множественный анализ эффектов параметрической неопределенности в модели деформирования толстостенного цилиндра из материала с температурозависимыми свойствами ..... 84

**Геомеханика, разрушение горных пород,  
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

*Голубев Ф.М., Анциферов В.А., Крижановская Л.Н.* К вопросу о влиянии физико-механических параметров подработанного горного массива на характер процесса сдвижения ..... 95

*Грищенко Н.Н., Скаженик В.Б., Чернышенко И.В., Голубев Ф.М.* Нейросетевые модели прогноза последствий подработки земной поверхности ..... 104

№ 4 (89) / 2024

*Founded in 1970.*

# JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

### **Rigid Body Dynamics**

- Gorr G.V., Mazniev A.V., Belokon T.V.* Investigation of the equations of motion of a solid body in three homogeneous force fields ..... 5

### **Solid Mechanics**

- Glushankov E.S.* The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the non-uniform convective heat transfer under temperature difference action ..... 14
- Glushchenko A.V., Pacheva M.N., Storozhev S.V., Fomenko M.V.* Dispersion of circumferential electroelastic waves in a bimorphous piezoactive ring plate ..... 28
- Glushankov E.S., Mironenko A.B.* The solution of the problem of bending of clamped elliptic piezomagnetic plate ..... 35
- Vovk L.P., Dzundza A.I., Melnichuk N.I., Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A.* Investigation of the properties of axisymmetric normal waves in functionally gradient cylinders based on multifactorial models of radial inhomogeneity of orthotropic material..... 46
- Storozhev V.I.* Solution of the system of equations the models longitudinal-shear electroelastic waves propagation in a layer of functional-gradient piezoceramics with exponential heterogeneity a general type ..... 64
- Neskorodev R.N., Zyza A.V.* Numerical and analytical methodology for studying the stress-strain state of a rock mass containing a plane of elastic symmetry near vertical excavation under rock creep conditions ..... 74

**Mathematical Modeling,  
Numerical Methods and Program Complexes**

*Malutina T.P., Polyansky D.D., Storozhev S.V., Tran Ba Le Hoang* Fuzzy-set analysis of parametric uncertainty effects in a model of deformation of a thick-walled cylinder made of a material with temperature-dependent properties ..... 84

**Geomechanics, Rock Damage,  
Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics**

*Golubev Ph.M., Anciferov V.A., Kriganovskaya L.N.* On the issue of the influence of the physico-mechanical parameters of the mined mountain range on the nature of the displacement process..... 95

*Grishchenkov N.N., Skazhenik V.B., Chernyshenko I.V., Golubev Ph.M.* Neural network models for predicting the consequences of earth surface working ..... 104

## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39  
 doi:10.24412/0136-4545-2024-4-5-13  
 EDN:NLWGUI



©2024. Г.В. Горр<sup>1</sup>, А.В. Мазнев<sup>2</sup>, Т.В. Белоконь<sup>3</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

В статье рассмотрен новый подход к интегрированию уравнений движения твердого тела в трех однородных силовых полях. Изучен случай интегрирования исходных уравнений, при котором скорость прецессии тела в два раза больше скорости собственного вращения. При этом условия интегральное многообразие характеризуется только одним инвариантным соотношением, определяемым эллиптическими функциями времени, а в остальной части – стационарными решениями, которые описывают равномерные вращения тела.

**Ключевые слова:** однородные силовые поля, инвариантные соотношения, прецессионные движения.

**Введение.** Прецессионные движения тела характеризуются свойством постоянства угла между двумя осями, проходящими через неподвижную точку. Первая ось с единичным вектором  $\mathbf{a}$  неизменно связана с телом, вторая ось с единичным вектором  $\boldsymbol{\nu}$  неподвижна в пространстве. Данное свойство описывается соотношением

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0), \quad (1)$$

где  $\theta_0$  – угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  ( $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ ). В силу того, что вектор  $\boldsymbol{\nu}$  неподвижен в пространстве, для вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  имеем

<sup>1</sup>Горр Геннадий Викторович – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. ФГБНУ ИПММ, Донецк, e-mail: : gvgorr@gmail.com.

Gorr Gennadiy Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

<sup>2</sup>Мазнев Александр Владимирович – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: o.mazniev.dongu@mail.ru.

Mazniev Oleksandr Vladimirovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

<sup>3</sup>Белоконь Татьяна Валериевна – ст. преподаватель кафедры высшей и прикладной математики ДонНУЭТ им. М. Туган-Барановского, Донецк, e-mail: V.Tatyana13@mail.ru.

Belokon Tatyana Valerievna – Senior Lecturer, Donetsk National University of Economics and Trade named after M. Tugan-Baranovsky, Donetsk, Chair of High and Applied Mathematics.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\gamma}. \quad (2)$$

где  $\dot{\varphi}$  – скорость собственного вращения,  $\dot{\psi}$  – скорость прецессии тела. Классификация прецессий зависит от свойств функций  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ :

1.  $\dot{\varphi} = c_1, \dot{\psi} = c_2$  ( $c_i = \text{const}$ ) – регулярные прецессии;
2.  $\dot{\varphi} \neq \text{const}, \dot{\psi} = c_2$  – полурегулярные прецессии первого типа;
3.  $\dot{\varphi} = c_1, \dot{\psi} \neq \text{const}$  – полурегулярные прецессии второго типа;
4.  $\dot{\varphi} \neq \text{const}, \dot{\psi} \neq \text{const}$  – прецессии общего вида.

В классической задаче о движении тяжелого твердого тела изучены регулярные прецессии [1, 2]. В обзоре [3] указаны полурегулярные прецессии класса 2. Прецессии общего вида рассмотрены А. Брессаном в работе [4].

Общий метод исследования прецессий приведен в [5, 6]. Следует отметить, что многочисленные классы прецессий получены в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом [7]. Интересный класс прецессий, описывающий прецессионные движения системы связанных твердых тел, состоящих из гироскопов Лагранжа и Гесса, описан в статье [8]. Прецессии твердых тел изучены во многих задачах механики. Отметим ряд работ, посвященных задаче о движении твердого тела с жидким заполнением [9–12].

В задаче о движении твердого тела в трех однородных силовых полях изучены регулярные прецессии [13–15]. Прецессии общего вида рассмотрены в статьях [16–17].

В данной статье изучается задача о движении твердого тела в трех однородных силовых полях. Предполагается, что исходные дифференциальные уравнения допускают одно инвариантное соотношение (ИС). Интегрирование уравнений движения в фазовом пространстве вне множества ИС проводится при связанных с условиями существования ограничениями на параметры задачи, полученными при изучении ИС, но скорости прецессии и собственного вращения тела предполагаются произвольными. В качестве примера рассмотрен случай сферического распределения масс и  $\dot{\psi} \neq 2\dot{\varphi}$ .

**1. Общая постановка задачи.** Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Обозначим через  $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^{(1)}, \boldsymbol{\gamma}^{(2)}$  – единичные векторы, характеризующие направления сил  $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  каждого из полей;  $C, C_1, C_2$  – центры приведения сил;  $\mathbf{s} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{OC}, \mathbf{r} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{OC}_1, \mathbf{p} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{OC}_2$ ;  $Oxyz$  – подвижная система координат;  $O$  – неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе  $Oxyz$  имеет значение  $A = (A_{ij}), (i, j = \overline{1, 3})$ . Тело вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \dot{\mathbf{i}}_1 + \omega_2 \dot{\mathbf{i}}_2 + \omega_3 \dot{\mathbf{i}}_3$  ( $\dot{\mathbf{i}}_1, \dot{\mathbf{i}}_2, \dot{\mathbf{i}}_3$  – единичные векторы системы  $Oxyz$ ). Для векторов  $\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{p}$  запишем соотношения

$$\mathbf{s} = s_1 \dot{\mathbf{i}}_1 + s_2 \dot{\mathbf{i}}_2 + s_3 \dot{\mathbf{i}}_3, \quad \mathbf{r} = r_1 \dot{\mathbf{i}}_1 + r_2 \dot{\mathbf{i}}_2 + r_3 \dot{\mathbf{i}}_3, \quad \mathbf{p} = p_1 \dot{\mathbf{i}}_1 + p_2 \dot{\mathbf{i}}_2 + p_3 \dot{\mathbf{i}}_3. \quad (3)$$

Тогда уравнения движения тела представимы в виде [16]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}^{(1)} + \mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma}^{(2)}, \quad (4)$$



$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad \dot{\gamma}^{(1)} = \gamma^{(1)} \times \omega, \quad \dot{\gamma}^{(2)} = \gamma^{(2)} \times \omega, \quad (5)$$

где точка над переменными  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma^{(1)}$ ,  $\gamma^{(2)}$  обозначает дифференцирование по времени  $t$ . В формулах (4), (5) полагаем

$$\gamma \cdot \gamma^{(1)} = 0, \quad \gamma^{(2)} = \gamma \times \gamma^{(1)}, \quad |\gamma| = 1, \quad |\gamma^{(1)}| = 1, \quad (6)$$

то есть, направления силовых полей будет характеризоваться тройкой единичных, взаимно перпендикулярных векторов  $\gamma$ ,  $\gamma^{(i)}$  ( $i = \overline{1,2}$ ). Тогда очевидны равенства  $P = P\gamma$ ,  $P_i = P_i\gamma^{(i)}$  ( $i = \overline{1,2}$ ).

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора  $\gamma$ . Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС)

$$\mathbf{a} \cdot \gamma = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0), \quad (7)$$

где  $\theta_0$  – угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\gamma$  ( $\dot{\mathbf{a}} = 0$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ ). Вектор угловой скорости тела на ИС (7) представим так [5, 6]

$$\omega = \dot{\varphi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\gamma. \quad (8)$$

Переменные  $\varphi$ ,  $\psi$  и постоянную  $\theta_0$  можно трактовать как углы Эйлера. Используя метод [5], запишем значение вектора  $\gamma^{(1)}$

$$\gamma^{(1)} = b_0 [a_0\gamma \sin(\psi + \psi_0) - \mathbf{a} \sin(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \gamma) \cos(\psi + \psi_0)], \quad (9)$$

где  $b_0 = 1/a'_0$  ( $a'_0 = \sin\theta_0$ ),  $\psi_0$  – постоянная.

Значение вектора  $\gamma^{(2)}$  найдем по второй формуле системы (6)

$$\gamma^{(2)} = b_0 [\mathbf{a} \cos(\psi + \psi_0) - a_0\gamma \cos(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \gamma) \sin(\psi + \psi_0)]. \quad (10)$$

Таким образом, при получении (9), (10) полагалось, что  $\mathbf{a} \times \gamma \neq 0$ , то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом: направим вектор  $\dot{\mathbf{i}}_3$  по вектору  $\mathbf{a}$ . Тогда, на основании ИС (7), первого уравнения из (5) имеем

$$\gamma = a'_0 \sin\varphi \cdot \dot{\mathbf{i}}_1 + a'_0 \cos\varphi \cdot \dot{\mathbf{i}}_2 + a_0 \dot{\mathbf{i}}_3, \quad (\dot{\mathbf{i}}_3 = \mathbf{a}). \quad (11)$$

На основании (8), (11) запишем компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  вектора  $\omega$ . В подвижной системе координат

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin\varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}. \quad (12)$$

*Замечание 1.* При описании кинематических свойств в виде соотношений (7)–(12) использован метод [6, 7], который отличается от методов, применяемых в [13–15].

*Замечание 2.* Уравнения (4), (5) имеют интеграл энергии

$$A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot \gamma + r \cdot \gamma^{(1)} + p \cdot \gamma^{(2)}) = 2E, \quad (13)$$

где  $E$  – постоянная. Как было показано в [6–11], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (13) значительно упрощается.

**2. Преобразование уравнений (4) на ИС (7).** Внесем в уравнение (4) значение  $\omega$  из (8) и рассмотрим полученное уравнение в базисе  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}$  с учетом (9), (10):

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi} (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2 [\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\gamma})] - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \{a_0 [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}\} - \\ & - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} - a_0 [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma})]\} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi} (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} [\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}^2 [\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times A\mathbf{a})] - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \{a_0 (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}]\} - \\ & - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \{a_0 (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})]\} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} [A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi} [A\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}\dot{\psi} \left[ 2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0'^2 Sp(A) - 2a_0 (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \right] + \\ & + \dot{\varphi}^2 [(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0 (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \dot{\psi}^2 [a_0 (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] - \\ & - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) + a_0 (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0' [(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0) - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)] = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $Sp(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$  – след матрицы  $A$ .

По аналогии с (14)–(16) распишем интеграл (13) на ИС (7), (8):

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \dot{\varphi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \dot{\varphi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \dot{\psi}^2 - \\ & - 2\{(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + b_0 [\sin(\psi + \psi_0) \cdot (a_0 (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - \\ & - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})) + \cos(\psi + \psi_0) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - a_0 (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}))]\} = 2E. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= a_0' (s_1 \sin\varphi + s_2 \cos\varphi) + a_0 s_3, \\ \tilde{f}_0(\varphi) &= a_0' (s_2 \sin\varphi - s_1 \cos\varphi), \\ f_1(\varphi) &= a_0' \left[ (a_0 r_1 + p_2) \sin\varphi + (a_0 r_2 - p_1) \cos\varphi - a_0' r_3 \right], \\ f_2(\varphi) &= a_0' \left[ (r_2 - a_0 r_1) \sin\varphi - (a_0 p_2 + r_1) \cos\varphi + a_0' p_3 \right], \\ f_3(\varphi) &= a_0' [(p_1 - a_0 r_2) \sin\varphi + (p_2 + a_0 r_1) \cos\varphi], \\ f_4(\varphi) &= a_0' [(r_1 + a_0 p_2) \sin\varphi + (r_2 - a_0 p_1) \cos\varphi], \\ f_5(\varphi) &= a_0' \left[ a_0 (s_1 \sin\varphi + s_2 \cos\varphi) - a_0' s_3 \right], \\ f_6(\varphi) &= -a_0' \left[ a_0' (r_1 \sin\varphi + r_2 \cos\varphi) + a_0 r_3 \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$f_7(\varphi) = a_0' \left[ a_0' (p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi) + a_0 p_3 \right].$$

Сначала запишем интеграл (17) с учетом (18)

$$(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \dot{\varphi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \dot{\varphi} \dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \dot{\psi}^2 - 2[f_0(\varphi) + b_0(f_1(\varphi) \sin(\psi + \psi_0) + f_2(\varphi) \cos(\psi + \psi_0))] = 2E. \quad (19)$$

Затем обратимся к уравнениям (14)–(16). На основании (18) имеем

$$\ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \tilde{f}_0(\varphi) - b_0(f_3(\varphi) \sin(\psi + \psi_0) + f_4(\varphi) \cos(\psi + \psi_0)) = 0, \quad (20)$$

$$\ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}^2[\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times A\mathbf{a})] - b_0(f_1(\varphi) \cos(\psi + \psi_0) - f_2(\varphi) \sin(\psi + \psi_0)) = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi}[A\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}\dot{\psi} \left[ 2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0'^2 Sp(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \right] + \\ &+ \dot{\varphi}^2[(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \\ &+ f_5(\varphi) + f_6(\varphi) \sin(\psi + \psi_0) + f_7(\varphi) \cos(\psi + \psi_0) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

**3. Исследование случая  $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$ .** За основу задания инвариантного соотношения (ИС) системы (19)–(22) примем решение [17], которое характеризуется резонансным соотношением

$$\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}. \quad (23)$$

В статье [17] приняты условия

$$A_1 = A_2 = A_3, \quad (24)$$

которые означают, что твердое тело имеет сферическое распределение масс. Кроме (24) в [17] установлены условия

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}, \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, 0), \quad \mathbf{p} = (r_2, -r_1, 0), \\ s_1 &= \frac{\sqrt{15}}{3} R_1(\psi_0), \quad s_2 = -\frac{\sqrt{15}}{3} R_2(\psi_0), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$R_1(\psi_0) = r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0, \quad R_2(\psi_0) = r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0. \quad (26)$$

Решение [17] описывается эллиптическими функциями времени, так как  $\varphi(t)$  находится с помощью обращения интеграла

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{R_1(\psi_0) \sin \varphi - R_2(\psi_0) \cos \varphi + E_1}} = \sqrt{\frac{2}{3A_1}} (t - t_0). \quad (27)$$

Отметим, что данное ИС описывает в фазовом пространстве системы замкнутую кривую.

**4. Случай  $\dot{\psi} \neq 2\dot{\varphi}$ .** Вместо переменной  $\psi$  введем новую переменную  $v$ :

$$\psi = 2(\varphi + v). \quad (28)$$

Положим

$$\tilde{R}_1(\psi_0) = \frac{R_1(\psi_0)}{A_1}, \quad \tilde{R}_2(\psi_0) = \frac{R_2(\psi_0)}{A_1}. \quad (29)$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем результат

$$\ddot{v} = 3\sin v \left[ -\tilde{R}_1(\psi_0) \sin(v + \varphi) + \tilde{R}_2(\psi_0) \cos(v + \varphi) \right], \quad (30)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{3} \left[ \tilde{R}_1(\psi_0) (4 \cos \varphi - 3 \cos(2v + \varphi)) + \tilde{R}_2(\psi_0) (4 \sin \varphi - 3 \sin(2v + \varphi)) \right], \quad (31)$$

$$6\dot{\varphi}^2 + 9\dot{\varphi}\dot{v} + 4\dot{v}^2 = \frac{1}{2} \left[ \tilde{R}_1(\psi_0) (3 \sin(2v + \varphi) + 5 \sin \varphi) - \right. \\ \left. - \tilde{R}_2(\psi_0) (3 \cos(2v + \varphi) + 5 \cos \varphi) \right] + E_1, \quad (32)$$

$$6\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{v}) = \tilde{S}_3 - \tilde{R}_1(\psi_0) (3 \sin(2v + \varphi) - 5 \sin \varphi) + \\ + \tilde{R}_2(\psi_0) (3 \cos(2v + \varphi) - 5 \cos \varphi), \quad (33)$$

где

$$E_1 = s_3 + 4E, \quad \tilde{S}_3 = \frac{16s_3}{5}. \quad (34)$$

Поскольку в замене (28) полагается  $v \neq 0$ , то из (30) следует, что уравнение (30) не вырождается.

Приведем систему (30)–(33) к нормальной форме, полагая  $v = x_1$ ,  $\varphi = x_2$ . На основании формы указанных уравнений целесообразно ввести новые параметры  $\alpha = 3\tilde{R}_1(\psi_0)$ ,  $\beta = 3\tilde{R}_2(\psi_0)$ . Тогда из (30)–(33) получим

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad (35)$$

$$\dot{x}_3 = \sin x_1 (-\alpha \sin(x_1 + x_2) + \beta \cos(x_1 + x_2)), \quad (36)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{9} [\alpha (4 \cos x_2 - 3 \cos(2x_1 + x_2)) + \beta (4 \sin x_2 - 3 \sin(2x_1 + x_2))]. \quad (37)$$

В силу (32) первый интеграл уравнений (30), (31) имеет вид

$$6x_4^2 + 9x_3x_4 + 4x_3^2 = \frac{1}{6} [\alpha (3 \sin(2x_1 + x_2) + 5 \sin x_2) - \\ - \beta (3 \cos(2x_1 + x_2) + 5 \cos x_2)] + E_1. \quad (38)$$

Система (30), (31) с интегралом (38) должна рассматриваться с учетом (33)

$$6x_4(x_3 + x_4) = \tilde{S}_3 - \frac{\alpha}{3} [3\sin(2x_1 + x_2) + 5\sin x_2] + \\ + \frac{\beta}{3} [3\cos(2x_1 + x_2) - 5\cos x_2], \quad (39)$$

то есть соотношение (39) должно быть инвариантным соотношением – производная от (39) в силу уравнений должна быть равна нулю:

$$(4x_3 + x_4)(\alpha\cos x_2 + \beta\sin x_2) = 0. \quad (40)$$

Рассмотрим случай  $\alpha\cos x_2 + \beta\sin x_2 = 0$ , или

$$tg x_2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (41)$$

В силу второго уравнения системы (35)  $x_4 = 0$ . Учитывая это равенство и условие (41), из дифференциального уравнения (37) следует, что и переменная  $x_1 = \text{const}$ . То есть случай (41) приводит к стационарным решениям системы (35)–(37) – равномерным вращениям.

Таким образом, следует рассмотреть случай

$$4x_3 + x_4 = 0. \quad (42)$$

Если в равенстве (42) учесть, что  $x_3 = \dot{x}_1$ ,  $x_4 = \dot{x}_2$ , то из (42) определим условия либо в переменных  $x_1, x_2$ , либо в переменных  $(v, \varphi)$  и  $(\psi, \varphi)$

$$4x_1 + x_2 = C, \quad (43)$$

$$4v + \varphi = C, \quad 2\dot{\psi} = 3\dot{\varphi} + C, \quad (44)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. При  $C = 0$  имеем равенство

$$2\dot{\psi} = 3\dot{\varphi}, \quad (45)$$

которое можно трактовать как резонансный случай, так как  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\varphi}$  соизмеримы.

Подставим  $x_4 = -4x_3$  из (42) в равенства (38), (39) и для наглядности положим  $\beta = 0$

$$x_3^2 = \frac{1}{384} \left[ \tilde{S}_3 - \frac{\alpha}{3} (3\sin(2x_1 + x_2) - 5\sin x_2) \right], \\ x_3^2 = \frac{1}{72} [6E_1 + \alpha (3\sin(2x_1 + x_2) - 5\sin x_2)]. \quad (46)$$

Приравнивая правые части выражений (46), найдем условия на переменные  $x_1, x_2$

$$3\tilde{S}_3 - 96E_1 - 17\alpha (3\sin(2x_1 + x_2) - 5\sin x_2) = 0, \quad (47)$$

где в силу (43)

$$x_2 = C - 4x_1. \quad (48)$$

В результате подстановки (48) в равенство (47) получим, что  $x_1$  – постоянная; тогда и  $x_2$  – постоянная. Из системы (35) следует, что переменные  $x_3$  и  $x_4$  обращаются в нуль; установленное решение является стационарным. На основании (2) данное свойство можно трактовать, как равномерное движение тела.

**Выводы.** В статье рассмотрен новый подход к интегрированию уравнений движения твердого тела в трех однородных силовых полях. Он основан на предположениях: твердое тело имеет сферическое распределение масс, система дифференциальных уравнений допускает инвариантное соотношение относительно скоростей прецессии тела и собственного вращения. Изучен вариант  $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$ . Для случая  $\dot{\psi} \neq 2\dot{\varphi}$  доказано, что фазовое пространство допускает одно ИС, а другие его точки являются стационарными точками, которые соответствуют равномерным вращениям тела.

Исследования проводились в рамках государственного задания (номер государственной регистрации 1023020900001-4-1.1.2;1.1.1).

1. Klein F. Über die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld // New York: Johnson reprint corp. – 1965. – 966 s.
2. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – Vol. 26. – P. 271–281.
3. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 4. – С. 573–587.
4. Bressan A. Sulle precessioni d'un corporigido costituenti moti di Hess / A. Bressan // Rend. del Semin. Mat. Univ. Padova. – 1957. – 27. – P. 276–283.
5. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щегина – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
6. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. Горр Г.В. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Г.А. Котов. – Донецк: ГУ «ИПММ», 2018. – 250 с.
8. Горр Г.В. Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел / Г.В. Горр, В.Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1988. – Т. 52, вып. 5. – С. 707–712.
9. Ольшанский В.Ю. О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким заполнением / В.Ю. Ольшанский // Прикл. математика и механика. – 2018. – Т. 82, вып. 5. – С. 559–571.
10. Ol'shanskii V. Yu. Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies / V. Yu. Ol'shanskii // Celest Mech Dyn Astr. – 2020. – Vol. 132, Iss.9. – P. 143–148.
11. Ольшанский В.Ю. Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением / В.Ю. Ольшанский // Прикл. математика и механика. – 2021. – Т. 85, вып. 5. – С. 547–564.
12. Рубановский В.Н. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости / В.Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1985. – Т. 49, вып. 2. – С. 212–219.
13. Yehia H.M. On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields / H.M. Yehia // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. – 2015. – Vol. 2, Iss. 3. – P. 200–205.
14. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combina-

- tion of three classical fields / H.M. Yehia // J. Egypt. Math. Soc. – 2017. – Vol. 25, Iss. 2. – P. 216–219.
15. *Hessein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by irreducible fields / A.M. Hessein // Russian J. Nonlin. Dyn. – 2019. – Vol. 15, Iss.3. – P. 285–292.
  16. *Горр Г.В.* Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения тела / Г.В. Горр // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 3. – С. 122–134.
  17. *Горр Г.В.* Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2023. – Т. 67, вып. 1. – С. 3–18.

**G.V. Gorr, A.V. Mazniev, T.V. Belokon**

**Investigation of the equations of motion of a solid body in three homogeneous force fields.**

The article considers a new approach to integrating the equations of motion of a solid body in three homogeneous force fields. The case of integration of the initial equations is studied, in which the precession velocity is twice the velocity of the body's own rotation. Under this condition, the integral manifold is characterized by only one invariant relation determined by elliptic functions of time, and in the rest by stationary solutions that describe uniform rotations of the body.

**Keywords:** *homogeneous force fields, invariant relations, precessional motions.*

*Статья поступила в редакцию 20.11.2024;  
доработана 11.12.2024;  
рекомендована к печати 18.12.2024.*

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-4-14-27

EDN:OQMIWY



©2024. Е.С. Глушанков<sup>1</sup>

### ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗНОСТИ ТЕМПЕРАТУР НА КОНТУРАХ

Представлено решение задачи о действии разности температур в бесконечной многосвязной пластинке из пьезоматериала, когда на контурах пластинки имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. Решение построено с использованием конформных отображений, функций комплексной переменной и метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинки.

**Ключевые слова:** многосвязная пластинка из пьезоматериала, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**Введение.** В различных областях науки и техники широкое применение в качестве элементов конструкций получили пластинки с отверстиями, изготовленные из пьезоматериалов. Под действием тепловых, механических и электромагнитных полей в этих элементах могут возникать значительные концентрации напряжений. Это следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Поэтому являются актуальными вопросы разработки методов определения термоэлектромагнитоупругого состояния упругих тел из пьезоматериалов. К настоящему времени разработано множество методов, решено большое количество задач о действии различных физических полей в многосвязных пластинках из пьезоматериалов [1–5], в том числе температурных полей, возник-

---

<sup>1</sup>Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та мат. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

*Glushankov Evgenij Sergeevich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.



кающих от разности температур на контурах пластинки [6], от воздействия на пластинку линейного потока тепла [7]. В работах [8,9] приведены результаты исследований термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных пластинок, находящихся в условиях конвективного теплообмена.

В данной статье метод определения термоэлектромагнитоупругого состояния конечной пластинки, возникающего от разности температур, распространен на случай, когда на контурах пластинки имеет место неравномерный по контуру конвективный теплообмен с внешней средой. Для решения задачи используются функции комплексной переменной. Определение неизвестных коэффициентов разложений голоморфных функций в ряды Лорана сведено к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений. Проведены численные исследования с установлением закономерностей влияния условий (характеристик) конвективного теплообмена, свойств материала пластинки, геометрических особенностей пластинки на значения напряжений в пластинке.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим находящуюся в условиях плоской задачи бесконечную пластинку из пьезоматериала, занимающую многосвязную область  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с центрами в точках  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуосями  $a_l$  и  $b_l$ , углами поворота  $\varphi_l$  (рис. 1). Контур  $L_l$  располагается произвольно относительно друг друга. На каждом из контуров  $L_l$  имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом  $h_l$  с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_l$ . Эти контуры свободны от внешних усилий или жестко подкреплены; потоки электромагнитной индукции по направлению нормали равны нулю. На бесконечности напряжения, компоненты векторов индукции электромагнитного поля равны нулю.

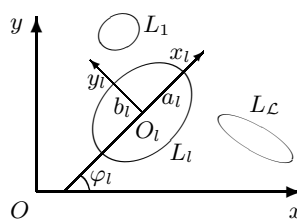


Рис. 1

Определение термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязной пластинки в рамках постановки несвязанной задачи термоэлектромагнитоупругости сводится к последовательному решению задачи теплопроводности, а затем задачи термоэлектромагнитоупругости [6–8]. При решении этих задач будем использовать соответствующие комплексные потенциалы.

Решение задачи теплопроводности сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности – функции  $F_5(z_5)$  обобщенной комплексной переменной

$$z_5 = x + \mu_5 y \quad (1)$$

из граничных условий задачи теплопроводности [6–8], где  $\mu_5$  – корень характеристического уравнения

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (2)$$

$k_{ij}$  – коэффициенты теплопроводности материала пластинки. После определения функции  $F_5(z_5)$  становится возможным определять в любой точке пластинки

ки значения температуры  $T$  и плотностей потока тепла  $q_x, q_y$  [6–8]:

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (3)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_5, -1) F_5'(z_5), \quad (4)$$

где  $\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$ .

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости сводится к определению комплексных потенциалов – функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y \quad (5)$$

из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости [6–8], где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения

$$l_8(\mu) = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  – коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости материала;  $\alpha_i$  – коэффициенты теплового расширения материала;  $t_i$  и  $m_i$  – пирозлектрические и пирромагнитные модули материала. После определения этих функций становится возможным рассчитывать в любой точке пластинки значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ; индукций электромагнитного поля  $D_x, D_y, B_x, B_y$ ; напряженностей электромагнитного поля  $E_x, E_y, H_x, H_y$ ; перемещений  $u, v$ ; потенциалов электромагнитного поля  $\varphi, \psi$ ) [6–8]:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (7)$$

Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной пластинки из пьезоматериала

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (8)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (9)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k) l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k) l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1 \mu_5^2 + \alpha_6 \mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1 \mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1 \mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11} \mu_k^2 - s_{16} \mu_k + s_{12} - (g_{11} \mu_k - g_{12}) \nu_k - (p_{11} \mu_k - p_{12}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} \alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12} \mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21} \mu_k - g_{22}) \nu_k - (p_{21} \mu_k - p_{22}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} \alpha_2}{r_5 \mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11} \mu_k^2 - g_{16} \mu_k + g_{12} - (\beta_{11} \mu_k - \beta_{12}) \nu_k - (\nu_{11} \mu_k - \nu_{12}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11} \mu_k^2 - p_{16} \mu_k + p_{12} - (\nu_{11} \mu_k - \nu_{12}) \nu_k - (\chi_{11} \mu_k - \chi_{12}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} m_1}{r_5};$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

**2. Определение комплексных потенциалов.** Комплексные потенциалы  $F_5(z_5)$  и  $\Phi_k(z_k)$  в общем случае имеют вид [6–8]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь  $c_5$ ,  $D_{5l}$  – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности;  $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (1) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $c_{5ln}$  – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;  $\zeta_{5l}$  – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl});$$

$\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – комплексные постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

где  $\Gamma_5 = r_5 c_5$ ,  $A_{5l} = r_5 D_{5l}$ ,  $B_{5l} = r_5 (c_{51l} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$ ;  $w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (5) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $a_{kln}$  – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости;  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ ;  $\zeta_{kl}$  – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В системах координат  $O_l x_l y_l$  параметрические уравнения эллипсов (рисунок 1) имеют вид [6–8]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в системе координат  $Oxy$  –

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) – угловая характеристика уравнения эллипса в параметрической форме.

Комплексные переменные  $\zeta_{5l}$ ,  $\zeta_{kl}$  определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов  $|\zeta_{5l}| \geq 1$ ,  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{5l}$ ,  $L_{kl}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (1), (5) [6–8]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

На контурах  $L_l$  функция  $F_5(z_5)$  должна удовлетворять граничному условию задачи теплопроводности [10]

$$2 \operatorname{Re} (h_l(\tau) F_5(\tau_5) + i\kappa \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = h_l(\tau) \mathfrak{F}_l, \quad (14)$$

где  $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$ ,  $s$  – дуга контура отверстия;  $\tau$  – аффикс граничной точки;  $\tau_5$  – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (1).

Функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1,4}$ ) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), которые в дифференциальной форме имеют вид [6–8]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) = \left( \frac{df_{11}}{ds}, \frac{df_{12}}{ds}, \frac{df_{13}}{ds}, \frac{df_{14}}{ds} \right), \quad (15)$$

где  $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$ ;  $\tau_k$  – точки, получаемые из граничной точки при аффинном преобразовании (5). Для неподкрепленных контуров  $L_l$

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}) = (u_l(\tau), v_l(\tau), c_{l3}, c_{l4}),$$

$c_{li}$  – неизвестные постоянные интегрирования;  $u_l(\tau)$ ,  $v_l(\tau)$  – заданные на контуре значения перемещений.

**3. Определение неизвестных постоянных.** Неизвестные постоянные  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$ , входящие в функции (11) и (12), будем определять из граничных

условий (14) и (15) с использованием метода наименьших квадратов [6–8]. Для этого на контурах  $L_i$  ( $i = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) выберем систему точек  $M_{im}(x_{im}, y_{im})$  ( $m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$ ), в которых следует минимизировать невязку граничных условий.

*Задача теплопроводности.* При подстановке функции (11) в граничное условие (14), для определения неизвестных постоянных  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений [8]

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_i(\tau_{im})c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_i(\tau_{im})w_{5l}(\tau_{5im}) + i\kappa\delta_{5,s}(\tau_{5im})w'_{5l}(\tau_{5im})) D_{5l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_i(\tau_{im})\varphi_{5ln}(\tau_{5im}) + i\kappa\delta_{5,s}(\tau_{5im})\varphi'_{5ln}(\tau_{5im})) c_{5ln} = h_i(\tau_{im})\mathfrak{Z}_i \end{aligned} \quad (16)$$

$$(i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}),$$

где  $\tau_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$ ,  $\tau_{im}$  – аффикс точки  $M_{im}$ . После решения этой системы уравнений с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$ , а, следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11), будут известны. По известной функции (11) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (3), (4) [6–8].

*Задача термоэлектромагнитоупругости.* При подстановке функций (11) и (12) в граничные условия (15) для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получается следующая система линейных алгебраических уравнений [8]:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip}\delta_{k,s}(\tau_{kim})\varphi'_{kln}(\tau_{kim})a_{kln} = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kip}\delta_{k,s}(\tau_{kim})N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{5ip}\delta_{5,s}(\tau_{5im})r_5 F_5(\tau_{5im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$(i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 4}),$$

где  $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$ . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные  $a_{kln}$ , а, следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12) будут известны. По известным функциям (12) можно в любой точке пластинки найти значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния по формулам (7)–(10) [6–8].

**4. Результаты численных исследований, выводы.** Численные исследования были проведены для пластинки с двумя эллиптическими (круговыми) отверстиями. При проведении расчетов количество членов в рядах в представлениях (11), (12) и «коллокационных точек» на контурах  $L_i$ , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (16) и (17), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с высокой

степенью точности. Как показали численные исследования, для этого необходимо было в указанных рядах оставлять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1100 «коллокационных точек». Численные исследования были проведены для пластинки из композита на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ . Физико-механические постоянные этого материала [12]:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 7,165s_0, \quad s_{22} = 6,797s_0, \quad s_{66} = 19,912s_0, \quad s_{12} = -2,337s_0, \\ g_{16} &= 2,028g_0, \quad g_{21} = -0,496g_0, \quad g_{22} = 1,157g_0, \\ p_{16} &= 1,850p_0, \quad p_{21} = 0,576p_0, \quad p_{22} = 1,186p_0, \\ \beta_{11} &= 0,156\beta_0, \quad \beta_{22} = 0,137\beta_0, \\ \nu_{11} &= -0,190\nu_0, \quad \nu_{22} = -0,185\nu_0, \\ \chi_{11} &= 0,336\chi_0, \quad \chi_{22} = 0,119\chi_0, \\ \alpha_1 &= 8,530\alpha_0, \quad \alpha_2 = 1,990\alpha_0, \\ t_2 &= 133t_0, \quad m_2 = 133m_0, \\ k_{11} &= 2,5k_0, \quad k_{22} = 2,5k_0. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s_0 &= 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \\ \beta &= 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \quad \chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \\ \alpha_0 &= 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1}, \\ m_0 &= 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}. \end{aligned}$$

В таблице 1 для пластинки с двумя круговыми отверстиями радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$ ) (рис. 2), удаленными друг от друга на расстояние  $c$ , через неподкрепленные контуры которых имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами  $h_1 = H(1 + \cos \theta)$  и  $h_2 = H(1 - \cos \theta)$  с внешними средами температур  $\mathfrak{T}_1$  и  $\mathfrak{T}_2$  соответственно (симметричный теплообмен), с точностью до  $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2$ , как множителя, приведены значения напряжений  $\sigma_s/s_0$  в некоторых точках контура левого отверстия с центральным углом  $\theta$  на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значений  $Ha$  и  $c/a$  для случая задачи ТЭМУ.

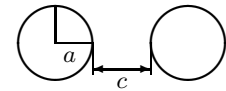


Рис. 2

В таблице 2 для этой же пластинки приведены аналогичные значения напряжений  $\sigma_s/s_0$  для случая, когда через контуры которых имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами  $h_1 = H(1 - \cos \theta)$  и  $h_2 = H(1 + \cos \theta)$ , для случая задачи ТЭМУ.

В таблицах 3 и 4 приведены аналогичные значения напряжений  $\sigma_s/s_0$ , соответствующие вышеуказанным случаям, для задачи теории упругости.

Таблица 1. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура отверстия

Знач. $Ha$	$\theta$ , рад.	Значения $c/a$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
$10^{-2}$	0	0,002	0,005	0,007	0,009	0,013	0,022
	$\pi/6$	0,000	0,002	0,004	0,007	0,013	0,021
	$\pi/3$	0,000	0,001	0,001	0,002	0,007	0,011
	$\pi/2$	-0,003	-0,003	-0,003	-0,004	-0,006	-0,010
	$2\pi/3$	0,002	0,002	0,002	0,003	0,005	0,010
	$5\pi/6$	0,003	0,003	0,004	0,004	0,008	0,015
	$\pi$	0,003	0,003	0,003	0,004	0,007	0,015
$10^{-1}$	0	0,024	0,050	0,066	0,082	0,122	0,182
	$\pi/6$	0,001	0,018	0,037	0,062	0,118	0,178
	$\pi/3$	0,003	0,005	0,011	0,023	0,062	0,097
	$\pi/2$	-0,027	-0,030	-0,032	-0,036	-0,050	-0,087
	$2\pi/3$	0,017	0,019	0,022	0,028	0,049	0,081
	$5\pi/6$	0,026	0,030	0,034	0,041	0,071	0,128
	$\pi$	0,025	0,029	0,033	0,039	0,067	0,124
$10^0$	0	0,204	0,397	0,488	0,545	0,622	0,710
	$\pi/6$	0,011	0,144	0,272	0,414	0,607	0,697
	$\pi/3$	0,019	0,039	0,082	0,157	0,328	0,386
	$\pi/2$	-0,210	-0,226	-0,238	-0,250	-0,275	-0,354
	$2\pi/3$	0,134	0,150	0,167	0,193	0,270	0,334
	$5\pi/6$	0,211	0,233	0,255	0,288	0,392	0,526
	$\pi$	0,201	0,223	0,244	0,275	0,371	0,509
$10^1$	0	0,984	1,346	1,351	1,250	1,038	0,978
	$\pi/6$	0,059	0,494	0,753	0,944	1,028	0,972
	$\pi/3$	0,041	0,118	0,228	0,376	0,587	0,562
	$\pi/2$	-0,658	-0,659	-0,647	-0,616	-0,526	-0,537
	$2\pi/3$	0,437	0,459	0,477	0,498	0,534	0,519
	$5\pi/6$	0,735	0,760	0,778	0,795	0,820	0,844
	$\pi$	0,701	0,727	0,744	0,760	0,777	0,815
$10^2$	0	1,886	1,785	1,633	1,422	1,097	1,002
	$\pi/6$	0,119	0,659	0,910	1,072	1,092	1,000
	$\pi/3$	0,037	0,146	0,273	0,431	0,632	0,583
	$\pi/2$	-0,807	-0,789	-0,760	-0,707	-0,575	-0,565
	$2\pi/3$	0,576	0,591	0,601	0,612	0,614	0,565
	$5\pi/6$	1,054	1,065	1,068	1,063	1,016	0,964
	$\pi$	1,019	1,031	1,034	1,026	0,972	0,936
$10^3$	0	2,121	1,843	1,662	1,436	1,098	1,001
	$\pi/6$	0,134	0,681	0,927	1,083	1,093	0,999
	$\pi/3$	0,035	0,148	0,276	0,434	0,632	0,582
	$\pi/2$	-0,817	-0,797	-0,765	-0,711	-0,576	-0,566
	$2\pi/3$	0,611	0,624	0,632	0,640	0,634	0,576
	$5\pi/6$	1,129	1,136	1,136	1,125	1,061	0,990
	$\pi$	1,124	1,132	1,130	1,116	1,039	0,977
$\infty$	0	1,799	2,171	1,766	1,465	0,451	1,533
	$\pi/6$	0,035	0,908	1,004	1,100	0,838	1,154
	$\pi/3$	0,087	0,055	0,234	0,417	1,119	0,058
	$\pi/2$	-0,634	-1,161	-0,906	-0,751	0,326	-1,379
	$2\pi/3$	0,706	0,453	0,570	0,628	1,136	0,058
	$5\pi/6$	1,059	1,304	1,205	1,152	0,815	1,153
	$\pi$	1,006	1,510	1,302	1,197	0,424	1,532



Таблица 2. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура отверстия

Знач. $Ha$	$\theta$ , рад.	Значения $c/a$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
$10^{-2}$	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,007	0,015
	$\pi/6$	0,000	0,001	0,001	0,003	0,008	0,015
	$\pi/3$	0,001	0,001	0,001	0,002	0,005	0,010
	$\pi/2$	-0,004	-0,004	-0,004	-0,005	-0,006	-0,010
	$2\pi/3$	0,004	0,005	0,005	0,005	0,008	0,011
	$5\pi/6$	0,010	0,010	0,011	0,011	0,014	0,021
	$\pi$	0,011	0,011	0,012	0,012	0,015	0,022
$10^{-1}$	0	0,008	0,019	0,027	0,035	0,063	0,123
	$\pi/6$	0,000	0,006	0,013	0,026	0,068	0,128
	$\pi/3$	0,007	0,009	0,012	0,019	0,048	0,081
	$\pi/2$	-0,035	-0,037	-0,040	-0,042	-0,053	-0,087
	$2\pi/3$	0,041	0,043	0,046	0,051	0,068	0,097
	$5\pi/6$	0,093	0,096	0,100	0,105	0,128	0,179
	$\pi$	0,101	0,104	0,108	0,113	0,134	0,184
$10^0$	0	0,061	0,132	0,182	0,226	0,338	0,505
	$\pi/6$	0,001	0,040	0,089	0,169	0,366	0,524
	$\pi/3$	0,042	0,054	0,074	0,114	0,254	0,332
	$\pi/2$	-0,229	-0,240	-0,249	-0,258	-0,278	-0,354
	$2\pi/3$	0,243	0,255	0,268	0,287	0,343	0,387
	$5\pi/6$	0,530	0,544	0,557	0,575	0,628	0,698
	$\pi$	0,568	0,581	0,593	0,608	0,649	0,712
$10^1$	0	0,244	0,482	0,603	0,666	0,727	0,811
	$\pi/6$	0,006	0,157	0,316	0,519	0,784	0,842
	$\pi/3$	0,095	0,123	0,178	0,278	0,505	0,518
	$\pi/2$	-0,623	-0,628	-0,625	-0,607	-0,528	-0,537
	$2\pi/3$	0,525	0,543	0,558	0,577	0,599	0,562
	$5\pi/6$	1,019	1,033	1,043	1,048	1,021	0,972
	$\pi$	1,059	1,071	1,079	1,080	1,032	0,978
$10^2$	0	0,607	1,021	1,120	1,089	0,957	0,934
	$\pi/6$	0,031	0,370	0,639	0,882	1,018	0,964
	$\pi/3$	0,053	0,110	0,206	0,356	0,594	0,564
	$\pi/2$	-0,793	-0,782	-0,759	-0,712	-0,578	-0,566
	$2\pi/3$	0,612	0,628	0,639	0,650	0,645	0,583
	$5\pi/6$	1,130	1,141	1,145	1,137	1,073	0,999
	$\pi$	1,165	1,175	1,176	1,164	1,079	1,002
$10^3$	0	1,121	1,479	1,445	1,302	1,046	0,976
	$\pi/6$	0,069	0,548	0,831	1,033	1,078	0,992
	$\pi/3$	0,032	0,123	0,244	0,404	0,620	0,576
	$\pi/2$	-0,814	-0,796	-0,767	-0,714	-0,577	-0,566
	$2\pi/3$	0,622	0,636	0,645	0,652	0,643	0,581
	$5\pi/6$	1,143	1,152	1,152	1,140	1,072	0,997
	$\pi$	1,177	1,185	1,183	1,166	1,078	1,000
$\infty$	0	110,461	25,768	3,346	7,333	0,813	0,531
	$\pi/6$	31,414	17,334	2,182	4,562	0,980	0,860
	$\pi/3$	-16,123	-6,710	-0,410	-2,730	0,844	1,038
	$\pi/2$	-56,781	-27,925	-3,110	-9,010	-0,180	0,149
	$2\pi/3$	-24,799	-12,889	-0,569	-3,723	0,858	1,038
	$5\pi/6$	27,373	12,468	2,061	4,100	0,958	0,858
	$\pi$	54,047	25,394	3,198	7,959	0,790	0,530

Таблица 3. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура отверстия

Знач. $Ha$	$\theta$ , рад.	Значения $c/a$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
$10^{-2}$	0	-0,001	-0,001	-0,002	-0,002	-0,003	-0,004
	$\pi/6$	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,003	-0,006
	$\pi/3$	0,000	0,000	-0,001	-0,001	-0,004	-0,008
	$\pi/2$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,004	-0,009
	$2\pi/3$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,003	-0,006
	$5\pi/6$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,002	-0,004
	$\pi$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,002	-0,003
$10^{-1}$	0	-0,005	-0,012	-0,016	-0,020	-0,029	-0,038
	$\pi/6$	0,000	-0,004	-0,009	-0,015	-0,031	-0,049
	$\pi/3$	-0,002	-0,004	-0,006	-0,012	-0,035	-0,069
	$\pi/2$	-0,007	-0,008	-0,010	-0,013	-0,033	-0,073
	$2\pi/3$	-0,007	-0,008	-0,009	-0,012	-0,024	-0,054
	$5\pi/6$	-0,006	-0,007	-0,009	-0,011	-0,019	-0,035
	$\pi$	-0,007	-0,008	-0,009	-0,011	-0,018	-0,028
$10^0$	0	-0,046	-0,093	-0,117	-0,137	-0,152	-0,150
	$\pi/6$	-0,003	-0,034	-0,064	-0,100	-0,159	-0,192
	$\pi/3$	-0,016	-0,029	-0,048	-0,081	-0,180	-0,271
	$\pi/2$	-0,054	-0,062	-0,073	-0,093	-0,178	-0,294
	$2\pi/3$	-0,057	-0,063	-0,070	-0,082	-0,134	-0,221
	$5\pi/6$	-0,052	-0,058	-0,064	-0,074	-0,105	-0,144
	$\pi$	-0,055	-0,062	-0,068	-0,078	-0,101	-0,117
$10^1$	0	-0,206	-0,305	-0,322	-0,317	-0,263	-0,212
	$\pi/6$	-0,016	-0,116	-0,180	-0,229	-0,268	-0,267
	$\pi/3$	-0,060	-0,090	-0,129	-0,184	-0,305	-0,382
	$\pi/2$	-0,177	-0,191	-0,207	-0,235	-0,333	-0,438
	$2\pi/3$	-0,202	-0,210	-0,218	-0,230	-0,276	-0,345
	$5\pi/6$	-0,179	-0,187	-0,194	-0,202	-0,215	-0,227
	$\pi$	-0,188	-0,197	-0,204	-0,210	-0,209	-0,188
$10^2$	0	-0,372	-0,398	-0,386	-0,362	-0,281	-0,218
	$\pi/6$	-0,035	-0,156	-0,219	-0,261	-0,285	-0,275
	$\pi/3$	-0,082	-0,115	-0,155	-0,210	-0,327	-0,398
	$\pi/2$	-0,234	-0,246	-0,261	-0,288	-0,378	-0,471
	$2\pi/3$	-0,295	-0,300	-0,305	-0,311	-0,340	-0,389
	$5\pi/6$	-0,259	-0,265	-0,268	-0,270	-0,266	-0,259
	$\pi$	-0,263	-0,268	-0,271	-0,272	-0,253	-0,212
$10^3$	0	-0,413	-0,409	-0,393	-0,365	-0,282	-0,217
	$\pi/6$	-0,039	-0,162	-0,223	-0,263	-0,285	-0,275
	$\pi/3$	-0,085	-0,118	-0,158	-0,213	-0,330	-0,400
	$\pi/2$	-0,245	-0,257	-0,272	-0,298	-0,386	-0,477
	$2\pi/3$	-0,320	-0,324	-0,328	-0,334	-0,358	-0,400
	$5\pi/6$	-0,288	-0,293	-0,295	-0,295	-0,285	-0,270
	$\pi$	-0,278	-0,282	-0,285	-0,284	-0,261	-0,217
$\infty$	0	0,062	-0,857	-0,536	-0,407	0,649	-1,092
	$\pi/6$	0,094	-0,459	-0,325	-0,287	0,124	-0,635
	$\pi/3$	-0,148	-0,008	-0,110	-0,195	-0,872	0,174
	$\pi/2$	-0,444	0,137	-0,120	-0,254	-1,431	0,581
	$2\pi/3$	-0,424	-0,118	-0,250	-0,315	-0,916	0,172
	$5\pi/6$	-0,188	-0,506	-0,379	-0,325	0,114	-0,635
	$\pi$	-0,045	-0,716	-0,445	-0,327	0,680	-1,091

Таблица 4. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура отверстия

Знач. $Ha$	$\theta$ , рад.	Значения $c/a$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
$10^{-2}$	0	0,000	-0,001	-0,001	-0,001	-0,002	-0,003
	$\pi/6$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,004
	$\pi/3$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,006
	$\pi/2$	-0,002	-0,002	-0,002	-0,002	-0,004	-0,009
	$2\pi/3$	-0,003	-0,003	-0,003	-0,004	-0,005	-0,008
	$5\pi/6$	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,004	-0,006
$10^{-1}$	0	-0,003	-0,006	-0,008	-0,012	-0,019	-0,028
	$\pi/6$	0,000	-0,002	-0,004	-0,006	-0,017	-0,035
	$\pi/3$	-0,001	-0,001	-0,003	-0,005	-0,021	-0,054
	$\pi/2$	-0,015	-0,017	-0,018	-0,021	-0,036	-0,074
	$2\pi/3$	-0,028	-0,029	-0,031	-0,033	-0,043	-0,070
	$5\pi/6$	-0,025	-0,026	-0,027	-0,029	-0,035	-0,050
$10^0$	0	-0,018	-0,039	-0,054	-0,073	-0,103	-0,117
	$\pi/6$	-0,001	-0,012	-0,023	-0,039	-0,091	-0,142
	$\pi/3$	-0,005	-0,010	-0,018	-0,035	-0,113	-0,218
	$\pi/2$	-0,092	-0,098	-0,106	-0,119	-0,184	-0,294
	$2\pi/3$	-0,160	-0,164	-0,169	-0,176	-0,209	-0,273
	$5\pi/6$	-0,142	-0,146	-0,150	-0,156	-0,172	-0,193
$10^1$	0	-0,067	-0,133	-0,172	-0,207	-0,217	-0,189
	$\pi/6$	-0,002	-0,040	-0,074	-0,114	-0,193	-0,226
	$\pi/3$	-0,027	-0,043	-0,066	-0,106	-0,235	-0,342
	$\pi/2$	-0,203	-0,214	-0,226	-0,247	-0,333	-0,438
	$2\pi/3$	-0,297	-0,302	-0,306	-0,313	-0,339	-0,384
	$5\pi/6$	-0,267	-0,272	-0,276	-0,280	-0,277	-0,267
$10^2$	0	-0,147	-0,263	-0,307	-0,323	-0,272	-0,214
	$\pi/6$	-0,004	-0,078	-0,136	-0,189	-0,250	-0,258
	$\pi/3$	-0,069	-0,093	-0,126	-0,178	-0,304	-0,386
	$\pi/2$	-0,242	-0,253	-0,266	-0,290	-0,377	-0,471
	$2\pi/3$	-0,324	-0,328	-0,332	-0,338	-0,360	-0,401
	$5\pi/6$	-0,295	-0,300	-0,303	-0,304	-0,292	-0,275
$10^3$	0	-0,245	-0,369	-0,384	-0,367	-0,285	-0,219
	$\pi/6$	-0,021	-0,128	-0,192	-0,239	-0,275	-0,270
	$\pi/3$	-0,083	-0,112	-0,151	-0,205	-0,324	-0,397
	$\pi/2$	-0,247	-0,259	-0,273	-0,299	-0,386	-0,477
	$2\pi/3$	-0,327	-0,331	-0,335	-0,340	-0,362	-0,403
	$5\pi/6$	-0,299	-0,303	-0,305	-0,305	-0,292	-0,275
$\infty$	0	-148,250	-33,535	-2,765	-8,662	0,126	0,552
	$\pi/6$	-41,362	-22,148	-1,903	-5,116	-0,106	0,042
	$\pi/3$	19,022	8,052	0,647	3,408	-0,567	-0,905
	$\pi/2$	60,129	29,165	2,286	8,856	-0,845	-1,409
	$2\pi/3$	29,626	15,443	1,067	4,660	-0,605	-0,908
	$5\pi/6$	-34,649	-15,338	-1,538	-4,438	-0,114	0,042
	$\pi$	-70,634	-32,682	-3,003	-9,563	0,153	0,554

**Выводы.** Из полученных данных следует, что установленное распределение коэффициента теплообмена по контурам отверстий существенно влияет на значения напряжений вблизи отверстий. При этом для рассмотренных распределений коэффициента теплообмена на контурах имеются зоны с ухудшенным теплообменом (практически теплоизолированные) при любых значениях параметра  $Ha$ .

При значениях  $Ha < 0,01$  контуры отверстий можно полагать теплоизолированными, и концентрация напряжений в пластинке с неподкрепленными контурами будет мала ввиду однородного температурного поля. При возрастании значения  $Ha$  значительное влияние на распределение напряжений также играет расстояние между контурами. Если в области перемычки между контурами поддерживается активный теплообмен (таблицы 1 и 3), то с уменьшением расстояния между контурами концентрация напряжений вблизи отверстий убывает при  $Ha < 10$ , либо достигает максимума для  $0,5 \leq c/a \leq 1$  при  $Ha > 10$ . При ухудшении теплообмена в этой области (таблицы 2 и 4) с уменьшением расстояния между контурами концентрация напряжений вблизи отверстий убывает при  $Ha < 100$ , либо достигает максимума для  $0,5 \leq c/a \leq 1$  при  $100 \leq Ha \leq 1000$ , либо резко возрастает при  $Ha > 1000$ .

Также из представленных данных видно, что пренебрежение электромагнитными свойствами материала пластинки приводит к искажению значений напряжений в пластинке, поэтому при проведении расчетов необходимо учитывать все свойства материала.

Исследования проводились в Донецком государственном университете в рамках госзадания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
4. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
5. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
6. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
7. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
8. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – № 2 (75). – С. 18–29.
9. Глушанков Е.С. Периодическая задача термоэлектромагнитоупругости для пластинки с эллиптическими отверстиями в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2021. – № 4. – С. 3–13.

10. Глушанков Е.С. Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 15–26. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-15-26. – EDN: FYBPPC.
11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

### **E.S. Glushankov**

#### **The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the non-uniform convective heat transfer under temperature difference action.**

A solution is presented for the problem of temperature difference acting in the infinite multiply connected piezoelectric plate, when a non-uniform convective heat transfer with external environment occurs on its contours. The solution was obtained with using the conformal mappings, the complex potentials and the least squares. The effect of plates's geometric characteristics, the properties of its material, and the heat transfer characteristics on the thermoelastic state of the plate was brought out with the numerical studies.

**Keywords:** *multiply connected piezoelectric plate, convective heat transfer, complex potentials, thermal stresses.*

*Статья поступила в редакцию 14.11.2024;  
доработана 05.12.2024;  
рекомендована к печати 18.12.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-4-28-34

EDN:ODUMCR



©2024. А.В. Глущенко<sup>1</sup>, М.Н. Пачева<sup>2</sup>, С.В. Сторожев<sup>3</sup>, М.В. Фоменко<sup>4</sup>

## ДИСПЕРСИЯ ОКРУЖНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В БИМОРФНОЙ ПЬЕЗОАКТИВНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЕ

Представлена численно-аналитическая методика исследования задачи о распространении нормальных изгибных волн вдоль окружного углового направления в подверженной воздействию равномерно распределенного осциллирующего электрического поля биморфной кольцевой шарнирно закрепленной по граничным контурам пьезоактивной пластине, составленной из имеющих встречную поляризацию двух тонких скрепленных по лицевым поверхностям пьезопластин, внешние и контактирующие грани которых имеют тонкие электродные покрытия. Для рассматриваемой модели волновых процессов записаны дисперсионное уравнение и соотношения для расчета форм волновых движений в анализируемых нормальных волнах. Получены отдельные результаты численного анализа дисперсионных соотношений.

**Ключевые слова:** биморфная кольцевая пьезоактивная пластина, шарнирно закрепленные контуры, равномерное осциллирующее электрическое поле, нормальные окружные изгибные волны, дисперсионные соотношения, формы волновых движений.

**Введение и цели работы.** Нормальные окружные волны планарного, сдвигового и изгибного типов вдоль окружных направлений замкнутых кольцевых

---

<sup>1</sup>Глущенко Андрей Викторович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: andreyglushenko1@gmail.com.

*Glushchenko Andrey Viktorovich* – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Пачева Марина Николаевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: pacheva.m.n@mail.ru.

*Pacheva Marina Nikolaevna* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup>Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

*Storozhev Sergey Valerievich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>4</sup>Фоменко Максим Владимирович – канд. физ.-мат. наук, уч. секретарь научно-исследовательской части, ст. науч. сотр. ДонГУ, Донецк, e-mail: maxim\_fom@mail.ru.

*Fomenko Maksim Vladimirovich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Scientific Secretary of the Research Department.

или составных кольцевых волноводов являются актуальным объектом теоретических исследований в волновой механике деформируемого твердого тела, востребованных проектными расчетными методиками в механике машин и механизмов, строительной механике, ультразвуковой диагностике, акустоэлектронике [1–5]. Ряд исследований, относящихся к анализу закономерностей распространения волн изгиба в тонких изотропных и трансверсально-изотропных однородных и составных кольцевых пластинах при различных краевых условиях на граничных контурах на основе прикладной теории, представлен в публикациях [6–11] и составляет основу для дальнейшего расширения круга рассматриваемых актуальных аспектов в изучении дисперсионных, кинематических и энергетических свойств нормальных окружных волн.

В этой связи, целью излагаемых в настоящей работе исследований, базирующихся на описываемых в работах [12, 13] моделях волновой динамики тонких пьезоактивных биморфных пластин, является получение дисперсионных соотношений для нормальных изгибных волн вдоль окружного углового направления в подверженной воздействию равномерно распределенного осциллирующего электрического поля биморфной кольцевой шарнирно закрепленной по граничным контурам пьезоактивной пластине, составленной из имеющих встречную поляризацию двух тонких скрепленных по лицевым поверхностям пьезопластин, внешние и контактирующие грани которых имеют тонкие электродные покрытия.

**1. Основные соотношений рассматриваемой модели.** Рассматриваемые в данной работе применительно к исследованию закономерностей распространения окружных изгибных нормальных волн модели стационарного динамического деформирования биморфной кольцевой пьезоактивной пластины, составленной из имеющих встречную поляризацию двух тонких скрепленных по лицевым поверхностям пьезопластин из одинакового электроупругого материала, внешние и контактирующие грани которых имеют тонкие электродные покрытия, представлена в работах [12, 13]. Они базируются на гипотезах прикладной кирхгоффовской теории изгиба тонких пластин при учете дополнительных эффектов взаимодействия приложенного извне электрического поля с пьезоактивным материалом пластины. Полагается, что к отнесенной к цилиндрическим координатам  $Or\theta z$  и занимающей в них область  $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- = \{(r, \theta) \in S, 0 < z \leq h/2\} \cup \{(r, \theta) \in S, -h/2 \leq z \leq 0\}$ ,  $S = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  тонкой биморфной кольцевой пластине описанной структуры с составляющими из пьезоактивных материалов с плотностью  $\rho$ , упругими податливостями  $s_{11}^E$  и  $s_{12}^E$ , коэффициентом Пуассона в плоскости изотропии  $\nu = -s_{12}^E/s_{11}^E$ , пьезоэлектрической постоянной  $d_{31}$ , статическим планарным коэффициентом электромеханической связи  $k_p^2$  [12], подведена осциллирующая разность потенциалов

$$V(t) = V_0 \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

с амплитудным параметром  $V_0$  и циклической частотой  $\omega$ . Эффектом этих воз-

действий является возникновение дополнительных изгибающих моментов

$$M_{rr}^* = (h/4)V_0 d_{31}(s_{11}^E(1-\nu))^{-1} \exp(-i\omega t). \quad (2)$$

Как отмечается в работах [12, 13], в рассматриваемом случае учет характеристик электрического поля и электроупругих свойств материалов пьезопластин в рассматриваемой модели не влияет на структуру уравнения для функции прогибов  $w(r, \theta, t)$  биморфной пластины, имеющего тот же общий вид, что и для непьезоактивной однослойной пластины

$$\Delta \Delta w(r, \theta, t) + (\rho h/D)(\partial^2 w(r, \theta, t)/\partial t^2) = 0, \quad (3)$$

с модифицированным представлением для эффективной изгибной жесткости [12]

$$D = (h^3/(12(1-\nu^2)s_{11}^E))(1 + (1+\nu)k_p^2/(8(1-k_p^2))). \quad (4)$$

Амплитудная составляющая  $w_0(r)$  в решении уравнения (3) для случая распространения в биморфной кольцевой пластине окружной нормальной волны с нормированным волновым числом  $k$

$$w(r, \theta, t) = w_0(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)), \quad (5)$$

может быть записана в форме

$$w_0(r) = a_1 J_k(\lambda r) + a_2 Y_k(\lambda r) + a_3 I_k(\lambda r) + a_4 K_k(\lambda r), \quad (6)$$

где  $J_k(\lambda r)$ ,  $Y_k(\lambda r)$ ,  $I_k(\lambda r)$ ,  $K_k(\lambda r)$  – специальные цилиндрические функции первого и второго рода с индексами  $k$ ;

$$\lambda = ((h\rho\omega^2)/D)^{1/4}. \quad (7)$$

Общее представление для изгибающих моментов в рассматриваемой биморфной пластине задается соотношением

$$M_{rr}(r, \theta, t) = -D[(\partial^2/\partial r^2 + \nu_* r^{-1}\partial/\partial r + \nu_* r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)] + M_{rr}^*, \quad (8)$$

где  $\nu_*$  – эффективный коэффициент Пуассона [12], имеющий представление

$$\nu_* = (\nu + (1+\nu)k_p^2/(8(1-k_p^2)))(1 + (1+\nu)k_p^2/(8(1-k_p^2)))^{-1}.$$

В рассматриваемом случае шарнирного опирания обоих граничных контуров пластины дисперсионное уравнение для окружных нормальных волн исследуемого типа, получаемое с учетом формул дифференцирования цилиндрических функций из однородного варианта соответствующих граничных условий

$$[w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} = 0, \quad (9)$$

$$[(\partial^2/\partial r^2 + \nu_* r^{-1}\partial/\partial r + \nu_* r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)w(r, \theta, t)]_{r=R_j, \theta \in [0, 2\pi]} = -M_{rr}^*$$



$$(j = \overline{1, 2}),$$

записывается как равенство нулю функционального определителя

$$F(k, \omega) = \det \|\vartheta_{qp}(k, \omega)\| = 0 \quad (q, p = \overline{1, 4}), \quad (10)$$

элементы которого имеют вид

$$\vartheta_{j1}(k, \omega) = J_k(\lambda R_j), \quad (11)$$

$$\vartheta_{j2}(k, \omega) = Y_k(\lambda R_j),$$

$$\vartheta_{j3}(k, \omega) = I_k(\lambda R_j),$$

$$\vartheta_{j4}(k, \omega) = K_k(\lambda R_j),$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{j+2,1}(k, \omega) &= (J_{k-2}(\lambda R_j) - 2J_k(\lambda R_j) + J_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ &+ (\nu_*/(2R_j))(J_{k-1}(\lambda R_j) - J_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu_*k^2/R_j^2)J_k(\lambda R_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{j+2,2}(k, \omega) &= (Y_{k-2}(\lambda R_j) - 2Y_k(\lambda R_j) + Y_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ &+ (\nu_*/(2R_j))(Y_{k-1}(\lambda R_j) - Y_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu_*k^2/R_j^2)Y_k(\lambda R_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{j+2,3}(k, \omega) &= (I_{k-2}(\lambda R_j) + 2I_k(\lambda R_j) + I_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ &+ (\nu_*/(2R_j))(I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu_*k^2/R_j^2)I_k(\lambda R_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{j+2,4}(k, \omega) &= -(K_{k-2}(\lambda R_j) + 2K_k(\lambda R_j) + K_{k+2}(\lambda R_j))/4 - \\ &- (\nu_*/(2R_j))(K_{k-1}(\lambda R_j) + K_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu_*k^2/R_j^2)K_k(\lambda R_j) \end{aligned}$$

$$(j = \overline{1, 2}).$$

Особенностью уравнения (11) является то, что искомый параметр  $k$  входит в него, как составляющая индексных значений специальных цилиндрических функций, и как алгебраический множитель.

Отдельно формулируется подлежащее специальному исследованию уравнение для расчета частот записания анализируемых окружных нормальных волн

$$F_*(\omega) = \det \|\vartheta_{qp}(0, \omega)\| = 0 \quad (q, p = \overline{1, 4}),$$

и комплексное представление для поля изгибных колебательных перемещений в нормальных окружных волнах

$$w(r, t) = ((a_1 J_0(\lambda r) + a_2 Y_0(\lambda r) + a_3 I_0(\lambda r) + a_4 K_0(\lambda r))) \exp(-i\omega t),$$

в котором вектор коэффициентов  $\|a_p\| = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$  определяется соотношением

$$\|a_p\| = \|\vartheta_{qp}(0, \omega)\|^{-1} (0, 0, -M_{rr}^*, -M_{rr}^*)^T.$$

**2. Пример расчетного анализа.** Расчетный анализ характеристик рассматриваемой модели реализован применительно к частному случаю задачи описания траектории низшей моды бегущих окружных нормальных волн в биморфной пластине с шарнирным закреплением внутреннего и внешнего контуров из пьезокерамики ЦТС-19, имеющей характеристики

$$\begin{aligned} R_1 &= 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & R_2 &= 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\ h &= 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & \rho &= 6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ s_{11}^E &= 12.3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, & \nu &= 0.33, \\ d_{31} &= -5.2 \text{ Кл/м}^2, & k_p^2 &= 0.34. \end{aligned}$$

Результаты расчетов, проведенных с применением разработанного программного приложения, представлены на рисунке 1. Рассчитанная мода имеет ненулевую частоту записания и обладает достаточно выраженной дисперсией.

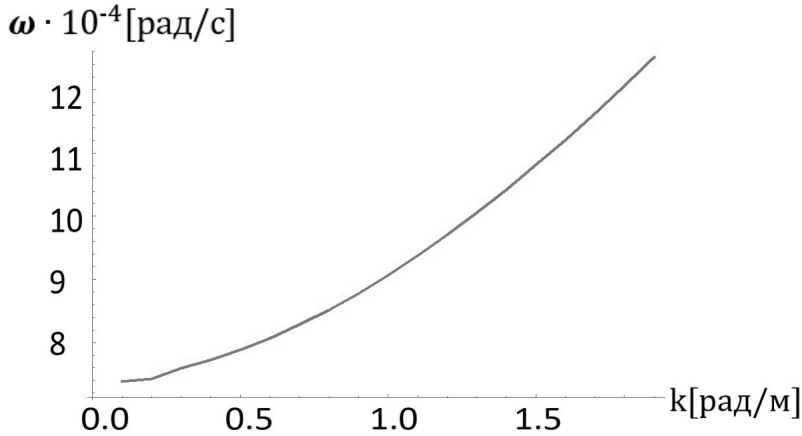


Рис. 1. Траектория низшей моды бегущих окружных нормальных волн в биморфной шарнирно закрепленной на контурах кольцевой пластине из керамики ЦТС-19

**Выводы.** В результате проведенных исследований разработана численно-аналитическая методика исследования задачи о распространении нормальных изгибных волн вдоль окружного углового направления в подверженной воздействию равномерно распределенного осциллирующего электрического поля биморфной кольцевой шарнирно закрепленной по граничным контурам пьезоактивной пластине, составленной из имеющих встречную поляризацию двух тонких скрепленных по лицевым поверхностям пьезопластин, внешние и контактирующие грани которых имеют тонкие электродные покрытия. Для рассматри-

ваемой модели волновых процессов записаны дисперсионное уравнение и соотношения для расчета форм волновых движений в анализируемых нормальных волнах. Представлены отдельные результаты численного анализа дисперсионного соотношения. Полученные результаты являются основой для дальнейшего исследования дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик окружных нормальных изгибных волн в биморфных пьезоактивных пластинах.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Речицкий В.И. Акустоэлектронные радиокомпоненты. Схемы, топология, конструкции / В.И. Речицкий. – М.: Радио и связь, 1987. – 192 с.
2. Rose J.L. Ultrasonic waves in solid media / J.L. Rose. – Cambridge University Press, 2004. – 454 p.
3. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник / под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2005. – 656 с.
4. Datta S.K. Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
5. Бугаев А.С. Устройства на поверхностных акустических волнах / А.С. Бугаев, В.Ф. Дмитриев, С.В. Кулаков. – Санкт-Петербург: ГУАП, 2009. – 187 с.
6. Тютюкин В.В. Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны / В.В. Тютюкин // Акуст. журн. – 2003. – Т. 49, № 6 – С. 843–851.
7. Болнокин В.Е. Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с закрепленными краями / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – №4 (77). – С. 35–43.
8. Болнокин В.Е. Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с шарнирно опертыми граничными контурами / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 114–121.
9. Дубяго Л.В. Дисперсионный спектр упругих волн изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными либо шарнирно опертыми краями / Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 48–56.
10. Болнокин В.Е. Моды изгибных упругих волн в окружном направлении изотропной кольцевой пластины на упругом основании / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Л.В. Дубяго // Донецкие чтения 2020: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: ДонНУ, 2020. – С. 35–38.
11. Глущенко А.В. Окружные нормальные изгибные волны в кольцевой пластине с двумя разнородными концентрическими составляющими / А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2023. – № 1. – С. 12–20. – EDN QXXDZO.
12. Шахери Мобараке П. Изгибные колебания биморфных пьезокерамических пластин неканонической формы / П. Шахери Мобараке, В.Т. Гринченко, Б. Солтанниа // Прикладная механика. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 120–132.
13. Белубекян М.В. Изгибные колебания круглой биморфной пьезоэлектрической пластины в переменном поперечном электрическом поле / М.В. Белубекян, М.Г. Саргсян, И.М. Саргсян // Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. – 2021. – Т. LXXIV, № 3. – С. 249–256. – DOI: 10.53297/0002306X-2021.3.v74-249.

**A.V. Glushchenko, M.N. Pacheva, S.V. Storozhev, M.V. Fomenko**

**Dispersion of circumferential electroelastic waves in a bimorphous piezoactive ring plate.**

The paper presents a numerical and analytical method for studying the problem of propagation of normal bending waves along the circumferential angular direction in a bimorphic annular piezoactive plate subject to the action of a uniformly distributed oscillating electric field, hinged along the boundary contours, composed of two thin piezoelectric plates with opposite polarization, fastened along the front surfaces, the outer and contacting faces of which have thin electrode coatings. For the considered model of wave processes, the dispersion equation and relations for calculating the forms of wave motions in the analyzed normal waves are written. Separate results of the numerical analysis of the dispersion relations are obtained.

**Keywords:** *bimorphic annular piezoactive plate, hinged contours, uniform oscillating electric field, normal circumferential flexural waves, dispersion relations, forms of wave motions.*

*Статья поступила в редакцию 15.11.2024;  
доработана 09.12.2024;  
рекомендована к печати 20.12.2024.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-4-35-45

EDN:RPQOAK

©2024. Е.С. Глушанков<sup>1</sup>, А.Б. Мироненко<sup>2</sup>

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КРАЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОМАГНИТНОЙ ПЛИТЫ

Решена задача об изгибе защемленной по краю тонкой эллиптической плиты из пьезомагнитного материала, по верхнему основанию которой действует равномерно распределенное давление. Решение задачи получено в виде полиномов. На его основе проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и ее геометрических характеристик на магнитоупругое состояние плиты.

**Ключевые слова:** теория изгиба тонких плит, пьезомагнитный материал, эллиптическая плита, полиномиальные решения, функция прогиба, изгибающие и крутящие моменты.

**Введение.** В настоящее время широкое применение находят материалы, обладающие пьезомагнитными свойствами, которые используются для изготовления конструктивных элементов или чувствительных элементов датчиков. В процессе эксплуатации эти элементы могут подвергаться воздействию значительных механических или магнитных полей, в т.ч. вызывающих изгибные деформации. Это необходимо учитывать еще на этапе проектирования элементов. Для решения задач теории изгиба плит из материалов, не обладающих пьезомагнитными свойствами, зачастую применяется прикладная теория изгиба, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява [1, 2]. Разработаны различные методы и решены многие задачи теории изгиба плит из изотропных и анизотропных материалов [3, 4].

Если же плита изготовлена из пьезомагнитного материала, то

---

<sup>1</sup> Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

*Glushankov Evgenij Sergeevich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup> Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: andreyandrey80@mail.ru.

*Mironenko Andrey Borisovich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

присутствующий пьезоэффект следует учитывать и гипотезы Кирхгофа-Лява необходимо дополнить гипотезой для компонентов магнитного поля. Например, в [5, 6] предложена гипотеза для компонентов вектора индукции магнитного поля: *поток индукции по толщине плиты можно пренебречь*. Эту гипотезу целесообразно принимать, если материал плиты обладает намагниченностью в плоскости плиты, а основания плиты нечувствительны к внешнему магнитному пол (например, покрыты магнитомягким материалом).

В данной работе получено точное аналитическое решение в виде полиномов для задачи об изгибе тонкой эллиптической плиты, изготовленной из пьезомагнитного материала. Основания плиты полагаются нечувствительными к внешнему магнитному поля, по верхнему основанию действует равномерно распределенное давление. Край плиты жестко защемлен, в плоскости плиты действует направленное внешнее магнитное поле, вызывающее момент магнитной индукции на крае. Проведены численные исследования влияния характеристик механических и магнитных воздействий, а также свойств материала плиты на значения изгибающих и крутящих моментов плите.

### 1. Постановка задачи теории изгиба тонких пьезоэлектрических плит.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $Oxyz$  тонкую плиту толщины  $2h$  (рис. 1), изготовленную из пьезоэлектрического материала. Срединная плоскость плиты лежит в плоскости  $Oxy$  и занимает двумерную область  $S$ . Пусть для каждой точки плиты имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Основания плиты лишены электродного покрытия, по верхнему основанию распределены нормальные усилия  $q(x, y)$ . По краю плиты распределены механические и электрические воздействия.

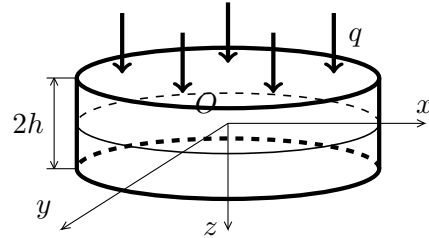


Рис. 1

Определение магнитоупругого состояния плиты сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений относительно функции прогиба плиты  $w(x, y)$  и функции плотности потенциала магнитного поля  $\psi_0(x, y)$  [6]

$$\begin{aligned} L_{4S}w(x, y) + L_{3P}\psi_0(x, y) &= -q(x, y), \\ L_{3P}w(x, y) + L_{2X}\psi_0(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L_{4S}$ ,  $L_{3G}$ ,  $L_{2X}$  — дифференциальные операторы, определяемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L_{4S} &= -\left( \tilde{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\tilde{S}_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\tilde{S}_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\ L_{3P} &= \tilde{P}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\tilde{P}_{21} + \tilde{P}_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (\tilde{P}_{12} + \tilde{P}_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \tilde{P}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2X} &= \tilde{X}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\tilde{X}_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{X}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{2h^3}{3}S_{ij}, \quad \tilde{P}_{ij} = \frac{2h^3}{3}P_{ij}, \quad \tilde{X}_{ij} = \frac{2h^3}{3}X_{ij};$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} & P_{11} & P_{21} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} & P_{12} & P_{22} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} & P_{16} & P_{26} \\ -P_{11} & -P_{12} & -P_{16} & X_{11} & X_{12} \\ -P_{21} & -P_{22} & -P_{26} & X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & p_{16} & p_{26} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

$s_{ij}$  — коэффициенты деформации,  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические модули,  $\chi_{ij}$  — коэффициенты магнитной проницаемости материала плиты.

После интегрирования системы уравнений (1) при соответствующих граничных условиях, функции  $w(x, y)$  и  $\psi_0(x, y)$  становятся известными, и по ним в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  (порождаемых распределенными по толщине напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ), крутящего момента  $H_{xy}$  (порождаемого напряжением  $\tau_{xy}$ ), моментов магнитной индукции  $M_{Bx}$ ,  $M_{By}$  (порождаемых компонентами вектора магнитной индукции  $B_x$ ,  $B_y$ ) по формулам [6]

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h}^h z \sigma_x dz = - \left( \tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{P}_{11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \tilde{P}_{21} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ M_y &= \int_{-h}^h z \sigma_y dz = - \left( \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{P}_{12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \tilde{P}_{22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ H_{xy} &= \int_{-h}^h z \tau_{xy} dz = - \left( \tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{P}_{16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \tilde{P}_{26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\ M_{Bx} &= \int_{-h}^h z B_x dz = \tilde{P}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{P}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{P}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{X}_{11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \tilde{X}_{12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\ M_{By} &= \int_{-h}^h z B_y dz = \tilde{P}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{P}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{P}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{X}_{12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \tilde{X}_{22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда становится возможным определение моментов и перерезывающих сил на произвольной площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$  [5, 6]:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ M_s &= M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \end{aligned}$$

Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко

$$\begin{aligned} M_{Bn} &= M_{Bx} \cos(nx) + M_{By} \cos(ny), \\ M_{Bs} &= M_{Bx} \cos(ny) - M_{By} \cos(nx). \end{aligned} \quad (3)$$

**2. Граничные условия для случая жестко заземленного края плиты.** Если край плиты жестко заземлен, то механические граничные условия имеют вид [2]

$$w(s) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}(s) = 0,$$

что эквивалентно

$$w(s) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(s) = \frac{\partial w}{\partial y}(s) = 0. \quad (4)$$

Для возникновения изгибного магнитоупругого состояния в плите необходимо, чтобы по краю плиты заданная плотность потока магнитной индукции в направлении нормали изменялась по толщине линейно, что эквивалентно заданию момента магнитной индукции по направлению нормали [5]:

$$M_{Bn} = m^*(s). \quad (5)$$

В частности, если поток магнитной индукции отсутствует, то

$$M_{Bn} = 0.$$

### 3. Постановка и решение задачи об изгибе эллиптической плиты.

Рассмотрим тонкую эллиптическую пьезомагнитную плиту с полуосями, равными  $a$  и  $b$  (рис. 2). По верхнему основанию равномерно распределены нормальные усилия  $q = const$ . Край плиты жестко заземлен. В плоскости плиты под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  действует магнитное поле с линейно изменяющейся по толщине индукцией, порождающее в направлении своего действия момент магнитной индукции  $m$ .

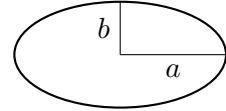


Рис. 2

На краю плиты для компонентов вектора моментов индукции могут быть записаны соотношения

$$M_{Bx} = -m \cos \alpha, \quad M_{By} = -m \sin \alpha, \quad (6)$$

а для момента индукции в направлении нормали получим

$$M_{Bn} = m^*(s) = -m (\cos \alpha \cos(nx) + \sin \alpha \cos(ny)). \quad (7)$$

Для точек эллиптического контура справедливы соотношения

$$\cos(nx) = \frac{b^2 x}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}, \quad \cos(ny) = \frac{a^2 y}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}.$$

Тогда для момента  $M_{Bn}$  на краю плиты получим

$$M_{Bn} = m^*(s) = -m \frac{b^2 x \cos \alpha + a^2 y \sin \alpha}{\sqrt{b^4 a^2 + a^4 y^2}}.$$



Функцию прогиба выберем в известном [3] виде

$$w(x, y) = K \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (8)$$

где  $K$  – неизвестная постоянная. Функция прогиба  $w$  тождественно удовлетворяет механических граничным условиям (4).

Поскольку функция прогиба выбрана в виде полинома четвертой степени и содержит слагаемые четного порядка, то целесообразно искать функцию плотности потенциала магнитного поля в виде полинома третьей степени, содержащего слагаемые нечетного порядка:

$$\psi_0(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex + Fy. \quad (9)$$

где  $A, B, C, D, E, F$  – неизвестные постоянные.

Тогда из (2) для моментов магнитной индукции  $M_{Bx}, M_{By}$  в точках края плиты (для которых учтем равенство  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ ) получим

$$M_{Bx} = \left( \frac{8K\tilde{P}_{11}}{a^4} + 3A\tilde{X}_{11} + B\tilde{X}_{12} \right) x^2 + \left( \frac{16K\tilde{P}_{16}}{a^2b^2} + 2B\tilde{X}_{11} + 2C\tilde{X}_{12} \right) xy + \\ + \left( \frac{8K\tilde{P}_{12}}{b^4} + C\tilde{X}_{11} + 3D\tilde{X}_{12} \right) y^2 + E\tilde{X}_{11} + F\tilde{X}_{12},$$

$$M_{By} = \left( \frac{8K\tilde{P}_{21}}{a^4} + 3A\tilde{X}_{12} + B\tilde{X}_{22} \right) x^2 + \left( \frac{16K\tilde{P}_{26}}{a^2b^2} + 2B\tilde{X}_{12} + 2C\tilde{X}_{22} \right) xy + \\ + \left( \frac{8K\tilde{P}_{22}}{b^4} + C\tilde{X}_{12} + 3D\tilde{X}_{22} \right) y^2 + E\tilde{X}_{12} + F\tilde{X}_{22}.$$

Подставим эти выражения вместе с (7) в условие (5) и воспользуемся подходом, описанным в работе [10] и позволяющим учесть уравнение контура  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ . Тогда получим представление:

$$\left( \frac{8K\tilde{P}_{11}}{a^4} + 3A\tilde{X}_{11} + B\tilde{X}_{12} \right) b^2 x^3 + \left( \left( \frac{8K\tilde{P}_{21}}{a^4} + 3A\tilde{X}_{12} + B\tilde{X}_{22} \right) a^2 + \right. \\ + \left. \left( \frac{16K\tilde{P}_{16}}{a^2b^2} + 2B\tilde{X}_{11} + 2C\tilde{X}_{12} \right) b^2 \right) x^2 y + \left( \left( \frac{16K\tilde{P}_{26}}{a^2b^2} + 2B\tilde{X}_{12} + 2C\tilde{X}_{22} \right) a^2 + \right. \\ + \left. \left( \frac{8K\tilde{P}_{12}}{b^4} + C\tilde{X}_{11} + 3D\tilde{X}_{12} \right) b^2 \right) xy^2 + \left( \frac{8K\tilde{P}_{22}}{b^4} + C\tilde{X}_{12} + 3D\tilde{X}_{22} \right) a^2 y^3 + \\ + \left( E\tilde{X}_{11} + F\tilde{X}_{12} + m \cos \alpha \right) b^2 x + \left( E\tilde{X}_{12} + F\tilde{X}_{22} + m \sin \alpha \right) a^2 y = \\ = (Qx + Ry) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0, \quad (10)$$

где  $Q, R$  – неизвестные постоянные.

В качестве следствия из подстановки функций (8), (9) в систему дифференциальных уравнений (1) и из представления (10) получим систему 9 линейных алгебраических уравнений относительно 9 неизвестных  $K, A, B, C, D, E, F, Q, R$ :

$$\begin{aligned}
 & K \cdot \left( -\frac{24\tilde{S}_{11}}{a^4} - \frac{16(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66})}{a^2b^2} - \frac{24\tilde{S}_{22}}{b^4} \right) + A \cdot 6\tilde{P}_{11} + \\
 & + B \cdot 2(\tilde{P}_{21} + \tilde{P}_{16}) + C \cdot 2(\tilde{P}_{12} + \tilde{P}_{26}) + D \cdot 6\tilde{P}_{22} = q, \\
 & K \cdot \left( \frac{12\tilde{P}_{11}}{a^4} + \frac{4(\tilde{P}_{12} + \tilde{P}_{26})}{a^2b^2} \right) + A \cdot 3\tilde{X}_{11} + B \cdot 2\tilde{X}_{12} + C \cdot \tilde{X}_{22} = 0, \\
 & K \cdot \left( \frac{4(\tilde{P}_{21} + \tilde{P}_{16})}{a^2b^2} + \frac{12\tilde{P}_{22}}{b^4} \right) + B \cdot \tilde{X}_{11} + C \cdot 2\tilde{X}_{12} + D \cdot 3\tilde{X}_{22} = 0, \\
 & K \cdot \frac{8\tilde{P}_{11}}{a^4} + A \cdot 3\tilde{X}_{11} + B \cdot \tilde{X}_{12} - Q = 0, \\
 & K \cdot \frac{8\tilde{P}_{21} + 16\tilde{P}_{16}}{a^2} + A \cdot 3a^2\tilde{X}_{12} + B \cdot (a^2\tilde{X}_{22} + 2b^2\tilde{X}_{11}) + \\
 & + C \cdot 2b^2\tilde{X}_{12} - R \cdot b^2 = 0, \\
 & K \cdot \frac{8\tilde{P}_{12} + 16\tilde{P}_{26}}{b^2} + B \cdot 2b^2\tilde{X}_{12} + C \cdot (2a^2\tilde{X}_{22} + b^2\tilde{X}_{11}) + \\
 & + D \cdot 3b^2\tilde{X}_{12} - Q \cdot a^2 = 0, \\
 & K \cdot \frac{8\tilde{P}_{22}}{b^4} + C \cdot 3\tilde{X}_{12} + D \cdot \tilde{X}_{22} - R = 0, \\
 & E \cdot \tilde{X}_{11} + F \cdot \tilde{X}_{12} + Q \cdot a^2 = -m \cos \alpha, \\
 & E \cdot \tilde{X}_{12} + F \cdot \tilde{X}_{22} + R \cdot b^2 = -m \sin \alpha. \tag{11}
 \end{aligned}$$

После решения этой системы станут известными значения неизвестных постоянных, а, следовательно, и функции  $w, \psi_0$ . После этого становится возможным определять значения моментов в любой точке плиты по формулам (2).

**4. Численные исследования.** Были проведены численные исследования для плит из следующих материалов:

- магнитострикционный материал *Terfenol* –  $D$  модифицированный [7, 8] (материал ММ8):

$$s_{11} = 36,40s_0, \quad s_{22} = 34,80s_0, \quad s_{66} = 55,95s_0, \quad s_{12} = -8,96s_0,$$

$$p_{16} = 112,22p_0, \quad p_{21} = -52,83p_0, \quad p_{22} = 121,25p_0,$$

$$\chi_{11} = 162,68\chi_0, \quad \chi_{22} = 138,06\chi_0.$$

- феррит (II) кобальта  $CoFe_2O_4$  [7,8] модифицированный (материал ММ9а):

$$s_{11} = 6,48s_0, \quad s_{22} = 6,98s_0, \quad s_{66} = 21,83s_0, \quad s_{12} = -2,61s_0,$$

$$p_{16} = 2,04p_0, \quad p_{21} = 0,36p_0, \quad p_{22} = 1,18p_0,$$

$$\chi_{11} = 0,81\chi_0, \quad \chi_{22} = 0,70\chi_0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad \chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-2}.$$

Направление намагниченности этих материалов коллинеарно оси  $Oy$ .

В таблице 1 для круговой плиты ( $b = a$ ), находящейся под действием давления  $q = \text{const}$  по верхнему основанию, в отсутствие внешнего магнитного поля ( $M_{Bn} = 0$ ), с точностью до множителя  $qa^2$  приведены значения механических моментов  $M_n, M_s, H_{ns}$ , измеряемых в  $\text{МН} \cdot \text{м}$ , магнитного момента  $M_{Bs}$ , измеряемого в  $\text{МТл} \cdot \text{м}^{-1}$ , в некоторых точках контура плиты с центральным углом  $\theta$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $Ox$ . При этом решались задачи теории магнитоупругости (ТМУ), когда учитывались все свойства материала плиты, и теории упругости (ТУ), когда не учитывались магнитные свойства материала.

Таблица 1. Значения моментов в точках края круговой плиты

$\theta$ , рад.	Величина							
	$M_n, 10^{-2}$		$M_s, 10^{-2}$		$H_{ns}, 10^{-2}$		$M_{Bs}, 10^{-5}$	
	ТМУ	ТУ	ТМУ	ТУ	ТМУ	ТУ	ТМУ	
Материал ММ8								
0	11,0026	11,0008	2,8426	2,8324	0,0000	0,0000	0,2787	
$\pi/12$	11,6600	11,6578	2,2186	2,2092	1,1443	1,1426	0,2692	
$\pi/6$	12,9996	12,9967	0,9702	0,9629	1,1916	1,1889	0,2414	
$\pi/4$	13,7499	13,7463	0,3445	0,3397	0,1292	0,1264	0,1971	
$\pi/3$	13,2535	13,2496	0,9655	0,9629	-0,9678	-0,9699	0,1394	
$5\pi/12$	12,0997	12,0958	2,2106	2,2092	-1,0151	-1,0161	0,0721	
$\pi/2$	11,5103	11,5066	2,8333	2,8324	0,0000	0,0000	0,0000	
Материал ММ9а								
0	14,0833	13,2600	1,4106	4,9583	0,0000	0,0000	-22,8062	
$\pi/12$	14,1905	13,0538	1,7838	5,1008	-0,4329	-0,3656	-22,0291	
$\pi/6$	14,5064	12,5949	2,7800	5,3858	-0,7096	-0,4525	-19,7508	
$\pi/4$	14,9930	12,2149	4,0860	5,5284	-0,7559	-0,2375	-16,1264	
$\pi/3$	15,5431	12,1200	5,3285	5,3858	-0,5997	0,0412	-11,4031	
$5\pi/12$	15,9860	12,2312	6,1978	5,1008	-0,3230	0,1281	-5,9027	
$\pi/2$	16,1566	12,3101	6,5075	4,9583	0,0000	0,0000	0,0000	

В табл. 2 для круговой плиты, находящейся под действием магнитного момента, описанного формулой (7), с точностью до множителя  $m$  приведены значения моментов  $M_n, M_s, H_{ns}, M_{Bs}$  в некоторых точках контура плиты в зависимости от значения  $\alpha$ .

Таблица 2. Значения моментов в точках края круговой плиты

$\theta$ , рад.	Величина							
	$M_n, 10^{-2}$	$M_s, 10^{-2}$	$H_{ns}, 10^{-2}$	$M_{Bs}, 10^{-5}$	$M_n, 10^{-2}$	$M_s, 10^{-2}$	$H_{ns}, 10^{-2}$	$M_{Bs}, 10^{-5}$
	Материал ММ8				Материал ММ9а			
	$\alpha = 0$							
0	0,0000	0,0000	-20,0572	0,0000	0,0000	0,0000	-93,4494	0,0000
$\pi/12$	-10,0286	10,0286	-17,3700	0,2588	-46,7247	46,7247	-80,9295	0,2588
$\pi/6$	-17,3700	17,3700	-10,0286	0,5000	-80,9295	80,9295	-46,7247	0,5000
$\pi/4$	-20,0572	20,0572	0,0000	0,7071	-93,4494	93,4494	0,0000	0,7071
$\pi/3$	-17,3700	17,3700	10,0286	0,8660	-80,9295	80,9295	46,7247	0,8660
$5\pi/12$	-10,0286	10,0286	17,3700	0,9659	-46,7247	46,7247	80,9295	0,9659
$\pi/2$	0,0000	0,0000	20,0572	1,0000	0,0000	0,0000	93,4494	1,0000
$7\pi/12$	10,0286	-10,0286	17,3700	0,9659	46,7247	-46,7247	80,9295	0,9659
$2\pi/3$	17,3700	-17,3700	10,0286	0,8660	80,9295	-80,9295	46,7247	0,8660
$3\pi/4$	20,0572	-20,0572	0,0000	0,7071	93,4494	-93,4494	0,0000	0,7071
$5\pi/6$	17,3700	-17,3700	-10,0286	0,5000	80,9295	-80,9295	-46,7247	0,5000
$11\pi/12$	10,0286	-10,0286	-17,3700	0,2588	46,7247	-46,7247	-80,9295	0,2588
$\pi$	0,0000	0,0000	-20,0572	0,0000	0,0000	0,0000	-93,4494	0,0000
	$\alpha = \pi/6$							
0	3,1695	-16,6049	-17,3700	-0,5000	-72,7856	-111,7436	-80,9295	-0,5000
$\pi/12$	-6,8402	-6,5953	-19,9865	-0,2588	-115,8601	-68,6692	-79,8265	-0,2588
$\pi/6$	-16,8170	3,3816	-17,2476	0,0000	-152,6122	-31,9171	-57,3341	0,0000
$\pi/4$	-24,0877	10,6523	-9,8872	0,2588	-173,1942	-11,3351	-19,4790	0,2588
$\pi/3$	-26,7042	13,2688	0,1224	0,5000	-172,0912	-12,4381	23,5955	0,5000
$5\pi/12$	-23,9653	10,5299	10,0993	0,7071	-149,5987	-34,9305	60,3475	0,7071
$\pi/2$	-16,6049	3,1695	17,3700	0,8660	-111,7436	-72,7856	80,9295	0,8660
$7\pi/12$	-6,5953	-6,8402	19,9865	0,9659	-68,6692	-115,8601	79,8265	0,9659
$2\pi/3$	3,3816	-16,8170	17,2476	1,0000	-31,9171	-152,6122	57,3341	1,0000
$3\pi/4$	10,6523	-24,0877	9,8872	0,9659	-11,3351	-173,1942	19,4790	0,9659
$5\pi/6$	13,2688	-26,7042	-0,1224	0,8660	-12,4381	-172,0912	-23,5955	0,8660
$11\pi/12$	10,5299	-23,9653	-10,0993	0,7071	-34,9305	-149,5987	-60,3475	0,7071
$\pi$	3,1695	-16,6049	-17,3700	0,5000	-72,7856	-111,7436	-80,9295	0,5000
	$\alpha = \pi/3$							
0	5,4897	-28,7606	-10,0286	-0,8660	-126,0684	-193,5456	-46,7247	-0,8660
$\pi/12$	-1,8189	-21,4519	-17,2476	-0,7071	-153,9509	-165,6632	-57,3341	-0,7071
$\pi/6$	-11,7579	-11,5130	-19,8451	-0,5000	-183,4025	-136,2116	-52,5808	-0,5000
$\pi/4$	-21,6640	-1,6068	-17,1252	-0,2588	-206,5317	-113,0823	-33,7386	-0,2588
$\pi/3$	-28,8830	5,6122	-9,8165	0,0000	-217,1411	-102,4729	-5,8562	0,0000
$5\pi/12$	-31,4805	8,2097	0,1224	0,2588	-212,3879	-107,2262	23,5955	0,2588
$\pi/2$	-28,7606	5,4897	10,0286	0,5000	-193,5456	-126,0684	46,7247	0,5000
$7\pi/12$	-21,4519	-1,8189	17,2476	0,7071	-165,6632	-153,9509	57,3341	0,7071
$2\pi/3$	-11,5130	-11,7579	19,8451	0,8660	-136,2116	-183,4025	52,5808	0,8660
$3\pi/4$	-1,6068	-21,6640	17,1252	0,9659	-113,0823	-206,5317	33,7386	0,9659
$5\pi/6$	5,6122	-28,8830	9,8165	1,0000	-102,4729	-217,1411	5,8562	1,0000
$11\pi/12$	8,2097	-31,4805	-0,1224	0,9659	-107,2262	-212,3879	-23,5955	0,9659
$\pi$	5,4897	-28,7606	-10,0286	0,8660	-126,0684	-193,5456	-46,7247	0,8660
	$\alpha = \pi/2$							
0	6,3390	-33,2098	0,0000	-1,0000	-145,5713	-223,4872	0,0000	-1,0000
$\pi/12$	3,6897	-30,5606	-9,8872	-0,9659	-150,7906	-218,2679	-19,4790	-0,9659
$\pi/6$	-3,5482	-23,3226	-17,1252	-0,8660	-165,0502	-204,0082	-33,7386	-0,8660
$\pi/4$	-13,4354	-13,4354	-19,7744	-0,7071	-184,5292	-184,5292	-38,9580	-0,7071
$\pi/3$	-23,3226	-3,5482	-17,1252	-0,5000	-204,0082	-165,0502	-33,7386	-0,5000
$5\pi/12$	-30,5606	3,6897	-9,8872	-0,2588	-218,2679	-150,7906	-19,4790	-0,2588
$\pi/2$	-33,2098	6,3390	0,0000	0,0000	-223,4872	-145,5713	0,0000	0,0000
$7\pi/12$	-30,5606	3,6897	9,8872	0,2588	-218,2679	-150,7906	19,4790	0,2588
$2\pi/3$	-23,3226	-3,5482	17,1252	0,5000	-204,0082	-165,0502	33,7386	0,5000
$3\pi/4$	-13,4354	-13,4354	19,7744	0,7071	-184,5292	-184,5292	38,9580	0,7071
$5\pi/6$	-3,5482	-23,3226	17,1252	0,8660	-165,0502	-204,0082	33,7386	0,8660
$11\pi/12$	3,6897	-30,5606	9,8872	0,9659	-150,7906	-218,2679	19,4790	0,9659
$\pi$	6,3390	-33,2098	0,0000	1,0000	-145,5713	-223,4872	0,0000	1,0000

**Выводы.** Из полученных результатов следует, что при действии равномерного давления значения механических моментов  $M_n$ ,  $M_s$ ,  $H_{ns}$  являются сопоставимыми для всех материалов. Можно предположить, что это является следствием жесткого заземления края плиты. Следовательно, при жестко заземленном крае упругие свойства материала (значения коэффициентов деформации) незначительно влияют на распределение моментов.

Влияние магнитных свойств также оказалось незначительным – учет этих свойств приводит к несущественному росту расчетных значений механических моментов. Но для плиты из материала ММ9а этот рост оказался более заметным, чем для плиты из материала ММ8. Вероятно, это связано с тем, что материал ММ9а обладает большей магнитной проницаемостью (меньшими значениями  $\chi_{ij}$ ).

В то же время, влияние магнитных свойств материала является существенным для распределения магнитных моментов в плите. В плите из материала ММ9а значения магнитных моментов существенно выше, чем в плите из материала ММ8. Это также является следствием большей магнитной проницаемости материала ММ9а по сравнению с материалом ММ8.

В случае действия магнитного момента концентрация механических моментов в плите существенно возрастает. При этом, для плиты из материала ММ9а значения моментов намного выше, чем для плиты из материала ММ8, что также связано с большей магнитной проницаемостью материала ММ9а. А наибольшая концентрация моментов возникает, когда направление действия момента совпадает с направлением намагниченности материала.

Отметим присутствие симметричности значений моментов для случаев, когда направление действия момента совпадает с направлением намагниченности материала или когда эти направления перпендикулярны, и отсутствие симметричности для остальных случаев.

Распределение же магнитных моментов является идентичным для плит из обоих материалов, что связано с постановкой магнитного граничного условия.

## Приложение А. О направленном внешнем магнитном поле, создающем момент на краю плиты

Будем полагать, что плита из магнитоупругого материала окружена изотропной средой, в которой действует магнитное поле, в плоскости  $Oxy$  направленное под углом  $\alpha$  к положительному направлению оси  $Ox$ , создающее момент на контуре плиты. Для магнитного поля в этом материале справедливы трехмерные уравнения магнитостатики

$$\frac{\partial D_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial D_y^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial D_z^{(0)}}{\partial z} = 0; \quad (\text{A.1})$$

$$H_x^{(0)} = \xi^{(0)} D_x^{(0)}, \quad H_y^{(0)} = \xi^{(0)} D_y^{(0)}, \quad H_z^{(0)} = \xi^{(0)} D_z^{(0)}; \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial H_x^{(0)}}{\partial y} = \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial H_x^{(0)}}{\partial z}; \quad (\text{A.3})$$

$$H_x^{(0)} = -\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x}, \quad H_y^{(0)} = -\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y}, \quad H_z^{(0)} = -\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}. \quad (\text{A.4})$$

Здесь  $D_x^{(0)}, D_y^{(0)}, D_z^{(0)}$  – компоненты вектора индукции магнитного поля во внешней среде;  $H_x^{(0)}, H_y^{(0)}, H_z^{(0)}$  – компоненты вектора напряженности магнитного поля во внешней среде;  $\psi^{(0)}$  – потенциал магнитного поля во внешней среде;  $\xi^{(0)}$  – коэффициент магнитной проницаемости внешней среды.

В то же время, учитывая формулы (2), (6) при линейном изменении индукций  $B_x, B_y$  ( $B_x(x, y, z) = zB_{x0}(x, y)$ ,  $B_y(x, y, z) = zB_{y0}(x, y)$ ) по толщине плиты, получим на ее контуре

$$M_x = \int_{-h}^h z B_x dx = \int_{-h}^h z^2 B_{x0}(x, y) dx = \frac{2h^3}{3} B_{x0}(x, y) = -m \cos \alpha,$$

$$M_y = \int_{-h}^h z B_y dx = \int_{-h}^h z^2 B_{y0}(x, y) dx = \frac{2h^3}{3} B_{y0}(x, y) = -m \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что на контуре плиты

$$B_x = -\frac{3m \cos \alpha}{2h^3} z, \quad B_y = -\frac{3m \sin \alpha}{2h^3} z.$$

Следовательно, во всех точках внешней среды

$$B_x^{(0)} = -\frac{3m \cos \alpha}{2h^3} z, \quad B_y^{(0)} = -\frac{3m \sin \alpha}{2h^3} z.$$

Тогда из (A.1) получим, что  $B_z^{(0)}$  является функцией  $x$  и  $y$ , а из (A.2) и (A.3) –

$$\frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial y} = -\frac{3\xi^{(0)} m \sin \alpha}{2h^3}, \quad \frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial H_x^{(0)}}{\partial z} = -\frac{3\xi^{(0)} m \cos \alpha}{2h^3}.$$

Отсюда следует, что

$$H_z^{(0)} = -\frac{3\xi^{(0)} m}{2h^3} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \text{const},$$

$$B_z^{(0)} = -\frac{3m}{2h^3} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \text{const}.$$

Покрытие оснований плиты магнитомягким материалом имеет целью ослабление влияния компоненты  $B_z^{(0)}$  вектора магнитной индукции на магнитоупругое состояния плиты. В противном случае гипотеза о малом значении  $B_z$  [5, 6] не может быть принята.

Исследования проводились в Донецком государственном университете в рамках госзадания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Love A.E.H.* On the small free vibrations and deformations of elastic shells / A.E.H. Love // Philosophical trans. of the Royal Society. – 1888. – Vol. serie A, No. 17. – P. 491–549.
2. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
3. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
4. *Mansfield E.H.* The bending and stretching of plates / E.H Mansfield. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 228 p.
5. *Калоеров С.А.* Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
6. *Калоеров С.А.* Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит как частные задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
7. *Калоеров С.А.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
8. *Liu J.X.* Numerical modeling of magnetoelectric model in a composite structure / J.X. Liu, J.G. Wan, J.M. Liu, C.V. Nan // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol. 94, No. 8. – P. 5111–5117.
9. *Zhao M.H.* A magnetoelectroelastic medium with with an alliptical cavity under combined mechanical-electric-magnetic loading / M.H. Zhao, H. Wang, F. Yang, T. Liu // Theoret. Appl. Frac. Mech. – 2006. – Vol. 45. – P. 227–237.
10. *Глушанков Е.С.* Решение задачи об изгибе заземленной по краю эллиптической пьезоэлектрической плиты / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – № 4 (73). – С. 5–15.

**E.S. Glushankov, A.B. Mironenko**

**The solution of the problem of bending of clamped elliptic piezomagnetic plate.**

A bending problem is solved for clamped thin elliptic piezomagnetic plate loaded with uniformly distributed pressure along the upper base. The solution is obtained in polynomials. The influence of plate's material's properties and geometric characteristics on the magneto-elastic state of the plate is obtained with the numerical studies based on the obtained solution.

**Keywords:** *bending theory of thin plates, piezomagnetic material, elliptic plate, polynomial solutions, deflection function, bending and twisting moments.*

*Статья поступила в редакцию 22.11.2024;  
доработана 11.12.2024;  
рекомендована к печати 20.12.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-4-46-63

EDN:IWWYCP



©2024. Л.П. Вовк<sup>1</sup>, А.И. Дзундза<sup>2</sup>, Н.Ю. Мельничук<sup>3</sup>, И.А. Моисеенко<sup>4</sup>,  
В.А. Моисеенко<sup>5</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ НА ОСНОВЕ МНОГОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Построены базисные решения для задачи о распространении осесимметричных нормальных волн в радиально неоднородных цилиндрически-ортотропных круговых цилиндрах. Элементы базисных решений выражены через аналитические функции. Модули упругости и плотность материала волновода задаются с использованием предложенной восьмифакторной мо-

---

<sup>1</sup>*Вовк Леонид Петрович* – доктор техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ, Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com.

*Vovk Leonid Petrovich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technologies, Chair of Mathematical Modeling.

<sup>2</sup>*Дзундза Алла Ивановна* – доктор пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

*Dzundza Alla Ivanovna* – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup>*Мельничук Наталия Юрьевна* – ассистент каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

*Melnichuk Natalia Iurievna* – Assistant, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>4</sup>*Моисеенко Игорь Алексеевич* – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

*Moiseyenko Igor Alekseevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Acad. A.S. Kosmodamiansky.

<sup>5</sup>*Моисеенко Виктор Алексеевич* – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. специализированных информационных технологий и систем ФГБОУВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка, e-mail: v.a.moiseyenko@donnasa.ru.

*Moiseyenko Viktor Alekseevich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.



дели функциональной радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала волновода. Представлен сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, проведенного для однородного и функционально неоднородных свободных волноводов, даны количественные и качественные оценки полученных численных результатов.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, ортотропные цилиндрические волноводы, модель радиальной неоднородности, базисные решения.

**Введение.** В настоящее время наблюдается повышенный интерес к функционально-градиентным материалам, связанный с различными аспектами их применения. Этот факт актуализирует разработку новых теоретических подходов к анализу математических моделей, описывающих, в частности, волновые процессы в протяженных цилиндрах из таких материалов. Теоретические исследования в этой области предполагают, как правило, построение новых аналитических решений для соответствующих математических моделей. Одним из подходов, позволяющих строить решения указанного класса, является привлечение специальных моделей радиальной неоднородности, учитывающих независимый характер функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода.

С применением предложенных разнофакторных функциональных моделей радиальной неоднородности построены базисные аналитические решения задач о распространении нормальных волн в протяженных изотропных [1-3] и трансверсально-изотропных [4-7] цилиндрах кругового и кругового секторного поперечных сечений. В данной работе для построения базисных аналитических решений математической модели, описывающей процесс распространения осесимметричных нормальных волн в цилиндрически-ортотропных протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения привлечена предложенная восьмифакторная модель функциональной радиальной неоднородности материала волновода.

**1. Математическая модель.** Рассматривается имеющий круговое поперечное сечение цилиндрический волновод радиуса  $R_*$  [м]. В отнесенной к параметру линейной размерности  $R_*$  безразмерной цилиндрической системе координат  $O\theta z$  волновод занимает область

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}. \quad (1)$$

Цилиндрически-ортотропный материал волновода считается функционально неоднородным вдоль радиальной координаты

$$\begin{aligned} c_s(r) &= C_* \tilde{c}_s(r) \quad (s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 44, 55, 66), \\ \rho(r) &= \rho_* \tilde{\rho}(r) \quad (r \in [0, 1]). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $C_* = const$  [Н/м<sup>2</sup>] и  $\rho_* = const$  [кг/м<sup>3</sup>] – нормирующие параметры. Полагается, что произвольные, в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик цилиндрически-ортотропного материала, функциональные законы  $\tilde{c}_s = \tilde{c}_s(r) > 0$  ( $s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 44, 55, 66$ ) и  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0$  относятся к классу  $C^2[0, 1)$ .

Исследованию подлежат нормальные упругие осесимметричные волны продольно-сдвигового типа, распространяющиеся вдоль оси  $Oz$  с круговой частотой  $\omega$  и нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым числом  $k$  ( $k \in \mathbb{C}$ ). В этом случае, во-первых, полная пространственная линейная математическая модель динамического волнового деформирования упругих тел в цилиндрической системе координат  $Or\theta z$  упрощается, во-вторых, указанная модель допускает решение методом разделения переменных. Отличные от тождественного нуля компоненты вектора упругих перемещений, тензоров деформаций и напряжений для рассматриваемого типа волнового процесса получают представления, которые могут быть записаны в матричной форме так:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(r, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r), \\ \mathbf{E}^{(LSW)}(r, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r), \\ \mathbf{\Sigma}^{(LSW)}(r, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(r), \\ u_\theta^{(LSW)} &\equiv 0, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(LSW)} = \varepsilon_{r\theta}^{(LSW)} \equiv 0, \quad \sigma_{\theta z}^{(LSW)} = \sigma_{r\theta}^{(LSW)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения для: векторов с компонентами вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(r, z, t) &= \left[ u_r^{(LSW)}(r, z, t), u_z^{(LSW)}(r, z, t) \right]^T, \\ \mathbf{E}^{(LSW)}(r, z, t) &= \\ &= \left[ \varepsilon_{rr}^{(LSW)}(r, z, t), \varepsilon_{\theta\theta}^{(LSW)}(r, z, t), \varepsilon_{zz}^{(LSW)}(r, z, t), \varepsilon_{rz}^{(LSW)}(r, z, t) \right]^T, \\ \mathbf{\Sigma}^{(LSW)}(r, z, t) &= \\ &= \left[ \sigma_{rr}^{(LSW)}(r, z, t), \sigma_{\theta\theta}^{(LSW)}(r, z, t), \sigma_{zz}^{(LSW)}(r, z, t), \sigma_{rz}^{(LSW)}(r, z, t) \right]^T; \end{aligned} \quad (4)$$

векторов с вещественными радиальными амплитудными составляющими компонент, представленных в соотношениях (4)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) &= \left[ \tilde{u}_r^{(LSW)}(r), \tilde{u}_z^{(LSW)}(r) \right]^T, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r) &= \left[ \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(LSW)}(r), \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(LSW)}(r), \tilde{\varepsilon}_{zz}^{(LSW)}(r), \tilde{\varepsilon}_{rz}^{(LSW)}(r) \right]^T, \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(r) &= \left[ \tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(r) \right]^T; \end{aligned} \quad (5)$$

диагональных матриц комплексной нормировки с элементами

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_1 &= 1, \quad \left[ \mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_2 = i, \quad \left[ \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_j = 1 \quad (j = \overline{1, 3}), \\ \left[ \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_4 &= i. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом соотношений (2)–(6) математическая модель рассматриваемого волнового процесса включает представленные в матричной форме уравнения линейного закона Гука относительно радиальных амплитудных составляющих

$$\tilde{\Sigma}^{(LSW)}(r) = \tilde{\mathbf{G}}^{(LSW)}(r) \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r), \quad (7)$$

дифференциальные уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций и вектора упругих перемещений

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r) = \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r), \quad (8)$$

и дифференциальные уравнения движения

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = \mathbf{O}. \quad (9)$$

В соотношениях (7)–(9)  $\mathbf{O}$  – нулевой вектор-столбец размерности 2;

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11}(r) & \tilde{c}_{12}(r) & \tilde{c}_{13}(r) & 0 \\ \tilde{c}_{12}(r) & \tilde{c}_{22}(r) & \tilde{c}_{23}(r) & 0 \\ \tilde{c}_{13}(r) & \tilde{c}_{23}(r) & \tilde{c}_{33}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55}(r) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} d_r & 0 \\ r^{-1} & 0 \\ 0 & -k \\ k & d_r \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} r^2 d_r^2 + \tilde{f}_{11}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{11}^{(2)} & \tilde{f}_{12}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{12}^{(2)} \\ \tilde{f}_{21}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{21}^{(2)} & r^2 d_r^2 + \tilde{f}_{22}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{22}^{(2)} \end{bmatrix},$$

где  $d_r = d/dr$ . Элементы  $\tilde{f}_{nm}^{(s)} = \tilde{f}_{nm}^{(s)}(r)$  ( $s, n, m = \overline{1, 2}$ ) матричного дифференциального оператора  $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{11}^{(1)} &= 1 + \frac{\tilde{c}'_{11}}{\tilde{c}_{11}} r, & \tilde{f}_{11}^{(2)} &= -\frac{\tilde{c}_{22}}{\tilde{c}_{11}} + \frac{\tilde{c}'_{12}}{\tilde{c}_{11}} r + \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}_{11}} - k^2 \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \right) r^2, \\ \tilde{f}_{12}^{(1)} &= -k \left( \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} + \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \right) r, & \tilde{f}_{12}^{(2)} &= -k \left( \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} - \frac{\tilde{c}_{23}}{\tilde{c}_{11}} - \frac{\tilde{c}'_{13}}{\tilde{c}_{11}} r \right) r, \\ \tilde{f}_{21}^{(1)} &= k \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{55}} \right) r, & \tilde{f}_{21}^{(2)} &= k \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{23}}{\tilde{c}_{55}} + \frac{\tilde{c}'_{55}}{\tilde{c}_{55}} r \right) r, \\ \tilde{f}_{22}^{(1)} &= 1 + \frac{\tilde{c}'_{55}}{\tilde{c}_{55}} r, & \tilde{f}_{22}^{(2)} &= \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}_{55}} - k^2 \frac{\tilde{c}_{33}}{\tilde{c}_{55}} \right) r^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$  – безразмерная приведенная частота. Математическая модель (2)–(11) дополняется однородными граничными условиями свободной

$$\left[ \tilde{\Sigma}^{(LSW)}(1) \right]_{(1,4)} = \mathbf{O}, \quad (12)$$

либо жестко закрепленной

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(1) = \mathbf{O} \quad (13)$$

граничной поверхности.

В представленных соотношениях и далее используется операция  $\mathbf{V}^T$  транспонирования вектора  $\mathbf{V}$ ; квадратные скобки со скалярными элементами определяют вектор либо матрицу; квадратные скобки с векторами и/или матрицами в качестве элементов определяют построенный на их основе вектор либо матрицу; для вектора  $\mathbf{V}$  определяется подвектор  $[\mathbf{V}]_{(n_1, \dots, n_p)}$  размерности  $p$ , составленный из заданных своими индексами  $n_1, \dots, n_p$  элементов вектора  $\mathbf{V}$ ; для матрицы  $\mathbf{M}$  определяется подматрица  $[\mathbf{M}]_{(n_1, \dots, n_p), (m_1, \dots, m_q)}$  размерности  $p \times q$ , составленная из заданных своими индексами  $n_1, \dots, n_p$  и  $m_1, \dots, m_q$  элементов матрицы  $\mathbf{M}$ .

**2. Модель радиальной неоднородности.** Рассматривается декартова система координат  $Ox_1x_2$ , для которой формально полагается, что неотрицательная часть полуоси  $Ox_1$  совпадает с осью  $Or$ . На плоскости комплексной переменной  $\xi = x_1 + ix_2$  вводятся восемь произвольных аналитических в области  $|\xi| < \delta$  ( $\xi > 1$ ) функций  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ). Функциональные законы радиальной неоднородности  $\tilde{c}_s(r)$  ( $s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 55$ ), участвующие в представлении (10) матрицы функции  $\tilde{\mathbf{G}}^{(LSW)}(r)$ , определяются с учетом вида функций  $\tilde{f}_{nm}^{(s)}(r)$  ( $s, n, m = \overline{1, 2}$ ) через введенные функции  $\varphi = \varphi(\xi)$ ,  $\psi_s = \psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ) двумя альтернативными способами:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11} = e^\varphi, \quad \tilde{c}_{12} = \psi_1 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{13} = \psi_2 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{22} = \psi_3 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{23} = \psi_4 e^\varphi, \\ \tilde{c}_{33} = \psi_5 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{55} = \psi_6 e^\varphi, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_7 e^\varphi \quad (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (14-A)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11} = \psi_6 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{12} = \psi_1 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{13} = \psi_2 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{22} = \psi_3 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{23} = \psi_4 e^\varphi, \\ \tilde{c}_{33} = \psi_5 e^\varphi, \quad \tilde{c}_{55} = e^\varphi, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_7 e^\varphi \quad (r \in [0, 1]). \end{aligned} \quad (14-B)$$

Далее соотношения (14-A) и (14-B) называются альтернативными вариантами модели радиальной неоднородности.

С использованием предложенных вариантов модели радиальной неоднородности (14-A) и (14-B) рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной  $\xi$  заданного соотношением (10) матричного дифференциального оператора  $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r)$  в оператор  $\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi)$

$$\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{11}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{11}^{(2)} & \hat{f}_{12}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{12}^{(2)} \\ \hat{f}_{21}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{21}^{(2)} & \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{22}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{22}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Здесь  $\hat{f}_{nm}^{(s)} = \hat{f}_{nm}^{(s)}(\xi)$  ( $s, n, m = \overline{1, 2}$ ) – аналитические продолжения на плоскость комплексной переменной  $\xi$  заданных соотношениями (11) вещественных операторов  $\tilde{f}_{nm}^{(s)}(r)$  ( $s, n, m = \overline{1, 2}$ ). В соответствии с выбранным вариантом модели радиальной неоднородности (14-A) либо (14-B) получаются следующие опреде-

ления:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)} &= 1 + \xi \varphi', \quad \hat{f}_{11}^{(2)} = -\psi_3 + \xi (\psi'_1 + \phi_1) + \xi^2 (\Omega^2 \psi_7 - k^2 \psi_6), \\
 \hat{f}_{12}^{(1)} &= -k \xi (\psi_2 + \psi_6), \quad \hat{f}_{12}^{(2)} = -k \xi (\psi_2 - \psi_4 + \xi (\phi_2 + \psi'_2)), \\
 \hat{f}_{21}^{(1)} &= k \xi (1 + \chi_3), \quad \hat{f}_{21}^{(2)} = k \xi (1 + \chi_5 + \xi (\varphi' + \chi_{10})), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)} &= 1 + \xi (\varphi' + \chi_{10}), \quad \hat{f}_{22}^{(2)} = \xi^2 (\Omega^2 \chi_7 - k^2 \chi_6);
 \end{aligned} \tag{16-A}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)} &= 1 + \xi (\varphi' + \chi_{10}), \quad \hat{f}_{11}^{(2)} = -\chi_4 + \xi (\chi_8 + \phi_3) + \xi^2 (\Omega^2 \chi_7 - k^2 \chi_1), \\
 \hat{f}_{12}^{(1)} &= -k \xi (\chi_1 + \chi_3), \quad \hat{f}_{12}^{(2)} = -k \xi (\chi_3 - \chi_5 + \xi (\phi_4 + \chi_9)), \\
 \hat{f}_{21}^{(1)} &= k \xi (1 + \psi_2), \quad \hat{f}_{21}^{(2)} = k \xi (1 + \psi_4 + \xi \varphi'), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)} &= 1 + \xi \varphi', \quad \hat{f}_{22}^{(2)} = \xi^2 (\Omega^2 \psi_7 - k^2 \psi_5).
 \end{aligned} \tag{16-B}$$

Здесь использован единый для обоих вариантов модели радиальной неоднородности (14-A) и (14-B) набор вспомогательных функций  $\chi_j = \chi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 10}$ ) и  $\phi_j = \phi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) вида

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \frac{1}{\psi_6}, \quad \chi_2 = \frac{\psi_1}{\psi_6}, \quad \chi_3 = \frac{\psi_2}{\psi_6}, \quad \chi_4 = \frac{\psi_3}{\psi_6}, \quad \chi_5 = \frac{\psi_4}{\psi_6}, \\
 \chi_6 &= \frac{\psi_5}{\psi_6}, \quad \chi_7 = \frac{\psi_7}{\psi_6}, \quad \chi_8 = \frac{\psi'_1}{\psi_6}, \quad \chi_9 = \frac{\psi'_2}{\psi_6}, \quad \chi_{10} = \frac{\psi'_6}{\psi_6}, \\
 \phi_1 &= \psi_1 \varphi', \quad \phi_2 = \psi_2 \varphi', \quad \phi_3 = \chi_2 \varphi', \quad \phi_4 = \chi_3 \varphi' \quad (|\xi| < \delta).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Ставится целевая задача – построить для уравнения

$$\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta) \tag{18}$$

набор из двух линейно независимых частных решений вида

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) = \xi^{\eta_q} \left[ \hat{u}_r^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_z^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) \right]^T \tag{19}$$

$(\eta_q \in \mathbb{R}; \quad q = \overline{1, 2}),$

с аналитическими в области  $|\xi| < \delta$  элементами  $\hat{u}_s^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi)$  ( $s = r, z$ ;  $q = \overline{1, 2}$ ). Известно, что система дифференциальных уравнений (18) имеет частные решения вида (19), если, соответственно выбранному варианту модели радиальной неоднородности (14-A) либо (14-B), заданные соотношениями (16-A) либо (16-B) функции являются аналитическими в области  $|\xi| < \delta$  [8,9].

Рассматриваются два подхода к определению аналитических в области  $|\xi| < \delta$  функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ) по заданным функциональным законам (2), обеспечивающие решение целевой задачи – аналитический и численный.

Аналитический подход может быть реализован при выполнении трех условий: функции  $\tilde{c}_s(r)$  ( $s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 55$ ) и  $\tilde{\rho}(r)$  допускают аналитическое

продолжение на плоскость комплексной переменной  $\xi$  в аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции  $\hat{c}_s(\xi)$  ( $s = \overline{11, 12, 13, 22, 23, 33, 55}$ ) и  $\hat{\rho}(\xi)$ ; определяемые из полученных соответственно выбранному варианту модели радиальной неоднородности (14-А) либо (14-Б) соотношений вида

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \ln(\hat{c}_{11}(\xi)), \quad \psi_1(\xi) = \frac{\hat{c}_{12}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\hat{c}_{13}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \\ \psi_3(\xi) &= \frac{\hat{c}_{22}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \quad \psi_4(\xi) = \frac{\hat{c}_{23}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \quad \psi_5(\xi) = \frac{\hat{c}_{33}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \\ \psi_6(\xi) &= \frac{\hat{c}_{55}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \quad \psi_7(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)} \quad (|\xi| < \delta), \end{aligned} \quad (20-A)$$

либо

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \ln(\hat{c}_{55}(\xi)), \quad \psi_1(\xi) = \frac{\hat{c}_{12}(\xi)}{\hat{c}_{55}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\hat{c}_{13}(\xi)}{\hat{c}_{55}(\xi)}, \\ \psi_3(\xi) &= \frac{\hat{c}_{22}(\xi)}{\hat{c}_{55}(\xi)}, \quad \psi_4(\xi) = \frac{\hat{c}_{23}(\xi)}{\hat{c}_{55}(\xi)}, \quad \psi_5(\xi) = \frac{\hat{c}_{33}(\xi)}{\hat{c}_{55}(\xi)}, \\ \psi_6(\xi) &= \frac{\hat{c}_{11}(\xi)}{\hat{c}_{55}(\xi)}, \quad \psi_7(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\hat{c}_{55}(\xi)} \quad (|\xi| < \delta), \end{aligned} \quad (20-B)$$

функции  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ) являются аналитическими в области  $|\xi| < \delta$ ; определяемые соотношениями (17) функции  $\chi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 10}$ ) являются аналитическими в области  $|\xi| < \delta$ . Второе и третье условия выполняются, если потребовать выполнение единого для обоих вариантов модели радиальной неоднородности (14-А) и (14-Б) достаточного аналитического условия несильной радиальной неоднородности

$$1 < \delta \leq \min \left( \left| \xi_*^{(11)} \right|, \left| \xi_*^{(55)} \right| \right), \quad (21)$$

где  $\xi_*^{(11)}$  и  $\xi_*^{(55)}$  – соответственно наименьшие по модулю нули функций  $\hat{c}_{11}(\xi)$  и  $\hat{c}_{55}(\xi)$ .

Численный подход реализуется любым численным методом, обеспечивающим аппроксимацию на отрезке  $r \in [0, 1]$  искомым функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ) полиномами

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 7}), \quad (22)$$

из полученных соответственно выбранному варианту модели радиальной неоднородности (14-А) либо (14-Б) приближенных соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln(\tilde{c}_{11}(r)), \quad \psi_1(r) \approx \frac{\tilde{c}_{12}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \quad \psi_2(r) \approx \frac{\tilde{c}_{13}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \\ \psi_3(r) &\approx \frac{\tilde{c}_{22}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \quad \psi_4(r) \approx \frac{\tilde{c}_{23}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \quad \psi_5(r) \approx \frac{\tilde{c}_{33}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \\ \psi_6(r) &\approx \frac{\tilde{c}_{55}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \quad \psi_7(r) \approx \frac{\tilde{\rho}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)} \quad (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (23-A)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(r) &\approx \ln(\tilde{c}_{55}(r)), \quad \psi_1(r) \approx \frac{\tilde{c}_{12}(r)}{\tilde{c}_{55}(r)}, \quad \psi_2(r) \approx \frac{\tilde{c}_{13}(r)}{\tilde{c}_{55}(r)}, \\
 \psi_3(r) &\approx \frac{\tilde{c}_{22}(r)}{\tilde{c}_{55}(r)}, \quad \psi_4(r) \approx \frac{\tilde{c}_{23}(r)}{\tilde{c}_{55}(r)}, \quad \psi_5(r) \approx \frac{\tilde{c}_{33}(r)}{\tilde{c}_{55}(r)}, \\
 \psi_6(r) &\approx \frac{\tilde{c}_{11}(r)}{\tilde{c}_{55}(r)}, \quad \psi_7(r) \approx \frac{\tilde{\rho}(r)}{\tilde{c}_{55}(r)} \quad (r \in [0, 1]).
 \end{aligned} \tag{23-Б}$$

При численном подходе для решения целевой задачи необходимо обеспечить аналитичность в области  $|\xi| < \delta$  только определяемых соотношениями (17) функций  $\chi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 10}$ ). Это требование будет удовлетворено при выполнении достаточного численного условия несильной радиальной неоднородности вида

$$1 < \delta \leq \left| \xi_*^{(66)} \right|, \tag{24}$$

где  $\xi_*^{(66)}$  – наименьший по модулю нуль функции  $\psi_6(\xi)$ . Отметим, что для альтернативных вариантов модели радиальной неоднородности (14-А) и (14-Б) условие (24) накладывает различающиеся ограничения на функциональные законы (2); следовательно, численный подход к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ) является более гибким. Очевидно также, что найденные при численном подходе, согласно соотношениям (22), (23-А) либо (22), (23-Б) функции  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ), фактически определяют отличающиеся от заданных соотношениями (2) функциональные законы  $\tilde{c}_s^{(*)}(r)$  ( $s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 55$ ) и  $\tilde{\rho}^{(*)}(r)$ , для которых, собственно, и будут строиться частные решения (19) уравнения (18). Но, поскольку физико-механические характеристики реальных материалов могут быть предоставлены с весьма ограниченной точностью  $\varepsilon$ , следовательно, степень  $N$  полиномов (22), обеспечивающая требуемую точность аппроксимации

$$\begin{aligned}
 \max_{r \in [0,1]} \left| \tilde{c}_s(r) - \tilde{c}_s^{(*)}(r) \right| &< \varepsilon \quad (s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 55), \\
 \max_{r \in [0,1]} \left| \tilde{\rho}(r) - \tilde{\rho}^{(*)}(r) \right| &< \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{25}$$

может выбираться весьма небольшой.

**3. Базисные решения.** Для построения частных решений (19) уравнения (18) используются разложения в окрестности точки  $\xi = 0$  аналитических в области  $|\xi| < \delta$  функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 7}$ ), полученных соответственно выбранному варианту модели неоднородности (14-А) либо (14-Б) в результате применения аналитического либо численного подхода; заданных соотношениями (17) функций  $\chi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 10}$ ) и  $\phi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 4}$ ); подлежащих определению функций

$\hat{u}_s^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi)$  ( $s = r, z; q = \overline{1, 2}$ ). Указанные разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 7}), \\ \chi_s(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 10}), \quad \phi_s(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 4}), \\ \hat{u}_s^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) &= \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(s, q)} \xi^p \quad (s = r, z; q = \overline{1, 2}) \\ &(|\xi| < \delta). \end{aligned} \quad (26)$$

В представлениях (26)  $\{a_n^{(s)}\}_{n=0}^{\infty}$  ( $s = \overline{0, 7}$ ) – заданные наборы коэффициентов;  $\{b_n^{(s)}\}_{n=0}^{\infty}$  ( $s = \overline{1, 10}$ ) и  $\{g_n^{(s)}\}_{n=0}^{\infty}$  ( $s = \overline{1, 4}$ ) – определяемые из соотношений (17) наборы коэффициентов

$$\begin{aligned} b_n^{(1)} &= \left( \delta_{0, n} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(1)} a_{n-m}^{(6)} \right) / a_0^{(6)}, \quad b_n^{(2)} = \left( a_n^{(1)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(2)} a_{n-m}^{(6)} \right) / a_0^{(6)}, \\ \dots \quad g_n^{(4)} &= \sum_{m=0}^n (n - m + 1) a_{n-m+1}^{(0)} b_m^{(3)} \quad (n = \overline{0, \infty}); \end{aligned} \quad (27)$$

$\{d_p^{(s, q)}\}_{p=0}^{\infty}$  ( $s = r, z; q = \overline{1, 2}$ ) – подлежащие определению наборы коэффициентов.

На основании физического требования отсутствия в области волновода сингулярности в поле перемещений и напряжений, получаются ограничения на значения параметров  $\eta_q$  ( $q = \overline{1, 2}$ ) в представлениях (19) и коэффициентов  $d_0^{(s, q)}$  ( $q = \overline{1, 2}; s = r, z$ ) в разложениях (26) такого вида:

$$\eta_q = 0 \quad \text{либо} \quad \eta_q >= 1, \quad \left| d_0^{(r, q)} \right| + \left| d_0^{(z, q)} \right| \neq 0 \quad (q = \overline{1, 2}). \quad (28)$$

В результате подстановки вектора  $\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi)$  в уравнение (18), с учетом разложений (26) и соответственно выбранному варианту модели радиальной неоднородности (14-А) либо (14-Б) соотношений (16-А) либо (16-Б), во-первых, определяется однородная система линейных уравнений второго порядка

$$\mathbf{Q}_0^{(q)} \mathbf{B}_0^{(q)} = \mathbf{O} \quad (q = \overline{1, 2}), \quad (29)$$

порождающая начальные определения для частных решений (19), а также последовательность систем неоднородных линейных уравнений второго порядка

$$\mathbf{Q}_p^{(q)} \mathbf{B}_p^{(q)} = \mathbf{F}_p^{(q)} \left( \left\{ \mathbf{B}_m^{(q)} \right\}_{m=0}^{p-1} \right) \quad (p = \overline{1, \infty}), \quad (q = \overline{1, 2}), \quad (30)$$



определяющих рекуррентные соотношения для указанных частных решений. Здесь  $\mathbf{B}_p^{(q)} = \left[ d_p^{(r,q)}, d_p^{(z,q)} \right]^T$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ;  $q = \overline{1, 2}$ ) – векторы с искомыми коэффициентами;  $\mathbf{Q}_p^{(q)}$  и  $\mathbf{F}_p^{(q)}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ;  $q = \overline{1, 2}$ ) – матрицы и векторы, которые соответственно выбранному варианту модели радиальной неоднородности (14-А) либо (14-Б) имеют вид:

$$\mathbf{Q}_p^{(q)} = \begin{bmatrix} (\eta_q + p)^2 - \gamma & 0 \\ 0 & (\eta_q + p)^2 \end{bmatrix}; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{F}_p^{(q)} \right]_1 &= \sum_{j=0}^{p-1} \left( \left( (j-p)(j+\eta_q) a_{p-j}^{(0)} + (j-p) a_{p-j}^{(1)} + a_{p-j}^{(3)} + k^2 a_{p-j-2}^{(6)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Omega^2 a_{p-j-2}^{(7)} - g_{p-j-1}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\ &\quad \left. + k \left( (p+\eta_q) a_{p-j-1}^{(2)} - a_{p-j-1}^{(4)} + (j+\eta_q) a_{p-j-1}^{(6)} + g_{p-j-2}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\ \left[ \mathbf{F}_p^{(q)} \right]_2 &= -k(p+\eta_q) d_{p-1}^{(r,q)} + \sum_{j=0}^{p-1} \left( \left( (j-p)(j+\eta_q) a_{p-j}^{(0)} + k^2 b_{p-j-2}^{(6)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Omega^2 b_{p-j-2}^{(7)} - (j+\eta_q) b_{p-j-1}^{(10)} \right) d_j^{(z,q)} - \right. \\ &\quad \left. - k \left( (p-j-1) a_{p-j-1}^{(0)} + (j+\eta_q) b_{p-j-1}^{(3)} + b_{p-j-1}^{(5)} + b_{p-j-2}^{(10)} \right) d_j^{(r,q)} \right) \\ &\quad (p = \overline{0, \infty}; \quad q = \overline{1, 2}); \end{aligned} \quad (32-A)$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{F}_p^{(q)} \right]_1 &= \sum_{j=0}^{p-1} \left( \left( (j-p)(j+\eta_q) a_{p-j}^{(0)} + k^2 b_{p-j-2}^{(1)} + b_{p-j}^{(4)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Omega^2 b_{p-j-2}^{(7)} - b_{p-j-1}^{(8)} - (j+\eta_q) b_{p-j-1}^{(10)} - g_{p-j-1}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\ &\quad \left. + k \left( (j+\eta_q) b_{p-j-1}^{(1)} + (j+\eta_q+1) b_{p-j-1}^{(3)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_{p-j-1}^{(5)} - b_{p-j-2}^{(9)} + g_{p-j-2}^{(4)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\ \left[ \mathbf{F}_p^{(q)} \right]_2 &= -k(p+\eta_q) d_{p-1}^{(r,q)} + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-1} \left( \left( (j-p)(j+\eta_q) a_{p-j}^{(0)} + k^2 a_{p-j-2}^{(5)} - \Omega^2 a_{p-j-2}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} - \right. \\ &\quad \left. - k \left( (p-j-1) a_{p-j-1}^{(0)} + (j+\eta_q) a_{p-j-1}^{(2)} + a_{p-j-1}^{(4)} \right) d_j^{(r,q)} \right) \\ &\quad (p = \overline{0, \infty}; \quad q = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (32-B)$$

В едином для обоих вариантов модели неоднородности (14-А) и (14-Б) представлении (31) матриц  $\mathbf{Q}_p^{(q)}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ;  $q = \overline{1, 2}$ ) имеем  $\gamma = \tilde{c}_{22}(0)/\tilde{c}_{11}(0)$ , если используется аналитический подход к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$

( $s = \overline{1, 7}$ ), и  $\gamma = \tilde{c}_{22}^{(*)}(0)/\tilde{c}_{11}^{(*)}(0)$ , если используется численный подход к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ).

Уравнение (29) порождает единые для обоих вариантов модели неоднородности (14-А) и (14-Б) начальные определения для двух линейно независимых частных решений (19)

$$\eta_1 = 0, d_0^{(r,1)} = 0, d_0^{(z,1)} = 1, \eta_2 = \sqrt{\gamma}, d_0^{(r,2)} = 1, d_0^{(z,2)} = 0. \quad (33)$$

Начальные определения (33) будут удовлетворять условиям (28) при выполнении требования  $\gamma \geq 1$ , которое накладывает ограничения на функциональные законы  $\tilde{c}_{11}(r)$  и  $\tilde{c}_{22}(r)$ , если используется аналитический подход к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ), либо на функциональные законы  $\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)$  и  $\tilde{c}_{22}^{(*)}(r)$ , если используется численный подход к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ).

Из представлений (31) для матриц  $\mathbf{Q}_p^{(q)}$  следует, что уравнение (30) фактически определяют явные рекуррентные соотношения для нахождения векторов  $\mathbf{B}_p^{(q)}$  ( $p = \overline{1, \infty}$ ;  $q = \overline{1, 2}$ ) вида

$$\mathbf{B}_p^{(q)} = \left(\mathbf{Q}_p^{(q)}\right)^{-1} \mathbf{F}_p^{(q)} \left(\left\{\mathbf{B}_m^{(q)}\right\}_{m=0}^{p-1}\right) \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (q = \overline{1, 2}), \quad (34)$$

при условии, что  $\sqrt{\gamma} \notin \mathbb{N}$ .

Анализ соотношений (32-А) и (32-Б) показал, что для обоих вариантов модели радиальной неоднородности (14-А) и (14-Б) при  $\gamma = p = 1$  и  $q = 1$  условие совместности системы линейных уравнений (30), имеющее согласно теореме Кронекера-Капелли [10] вид

$$\text{rang} \left(\mathbf{B}_p^{(1)}\right) = \text{rang} \left(\left[\mathbf{B}_p^{(1)}, \mathbf{F}_p^{(1)}\right]\right), \quad (35)$$

выполнится, если  $\kappa = 1$ , где  $\kappa = \tilde{c}_{23}(0)/\tilde{c}_{13}(0)$ , когда используется аналитический подход к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ), и  $\kappa = \tilde{c}_{23}^{(*)}(0)/\tilde{c}_{13}^{(*)}(0)$ , когда используется численный подход к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 7}$ ). При  $\sqrt{\gamma} = p = 2, 3, \dots$  и  $q = 1$  условие совместности (35) накладывает системные ограничения на функциональные законы  $\tilde{c}_s(r)$  либо  $\tilde{c}_s^{(*)}(r)$  ( $s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 55$ ).

Окончательно, базисное решение уравнения (18) в матричном виде может быть представлено так:

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(\xi) = \left[\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,particular,1)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau,particular,2)}(\xi)\right]. \quad (36)$$

На его основе общее решение уравнения (9) допустимо записать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,general)}(r) = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(r) \mathbf{A}, \quad (37)$$

где  $\mathbf{A}$  – произвольный вектор-столбец размерности 2. Тогда с использованием соотношений (7), (8) определяются векторные функции  $\tilde{\Sigma}^{(LSW,general)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,general)}(r)$  так:

$$\tilde{\Sigma}^{(LSW,general)}(r) = \left( \hat{\mathbf{G}}^{(LSW)}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=r} \mathbf{A}; \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,general)}(r) = \left( \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=r} \mathbf{A}. \quad (39)$$

Здесь матрица-функция  $\hat{\mathbf{G}}^{(LSW)}(\xi)$  в соответствии с выбранным вариантом модели радиальной неоднородности (14-А) либо (14-Б) имеет отличные от нуля элементы:

$$\hat{\mathbf{G}}^{(LSW)}(\xi) = \begin{bmatrix} e^\varphi & \psi_1 e^\varphi & \psi_2 e^\varphi & 0 \\ \psi_1 e^\varphi & \psi_3 e^\varphi & \psi_4 e^\varphi & 0 \\ \psi_2 e^\varphi & \psi_4 e^\varphi & \psi_5 e^\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_6 e^\varphi \end{bmatrix}, \quad (40-А)$$

$$\hat{\mathbf{G}}^{(LSW)}(\xi) = \begin{bmatrix} \psi_6 e^\varphi & \psi_1 e^\varphi & \psi_2 e^\varphi & 0 \\ \psi_1 e^\varphi & \psi_3 e^\varphi & \psi_4 e^\varphi & 0 \\ \psi_2 e^\varphi & \psi_4 e^\varphi & \psi_5 e^\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^\varphi \end{bmatrix}; \quad (40-Б)$$

$\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi)$  – аналитическое продолжение вещественного оператора  $\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(r)$  на плоскость комплексной переменной  $\xi$  с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{1,1} &= \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{4,2} = d_\xi, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{2,1} = \xi^{-1}, \\ \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{3,2} &= -k, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{4,1} = k. \end{aligned} \quad (41)$$

**4. Дисперсионные соотношения.** Граничные условия (12) и (13) с учетом представлений (37), (38) определяют дисперсионные уравнения соответствующего вида относительно безразмерного продольного волнового числа  $k$  и приведенной частоты  $\Omega$  вида

$$\Phi_\Sigma^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left( \left( \hat{\mathbf{S}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \right) = 0, \quad (42)$$

$$\Phi_U^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left( \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(1) \right) = 0, \quad (43)$$

а также соответствующего вида однородные уравнения для нахождения с точностью до скалярного множителя вектора  $\mathbf{A}$

$$\left( \hat{\mathbf{S}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \mathbf{A} = \mathbf{O}; \quad (44)$$

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(1) \mathbf{A} = \mathbf{O}. \quad (45)$$

В соотношениях (42), (44) используется матричный дифференциальный оператор

$$\hat{\mathbf{S}}^{(LSW)}(\xi) = \left[ \hat{\mathbf{G}}^{(LSW)}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) \right]_{(1,4),(1,4)}. \quad (46)$$

**5. Численный эксперимент.** Численному исследованию подлежали дисперсионные спектры бегущих ( $k > 0$ ) нормальных волн в протяженных свободных цилиндрах. В качестве базового однородного материала, обеспечивающего физически корректное решение задачи описания дисперсионных спектров в рамках предложенных вариантов модели радиальной неоднородности (14-А) и (14-Б), был выбран используемый в работе [11] ортотропный материал с нормированной плотностью ( $\rho = 1$ ) и нормированными модулем  $G_{13}$  параметрами

$$\begin{aligned} E_1 = 43/24, \quad E_2 = 179/24, \quad E_3 = 131/24, \quad G_{23} = 28/24, \\ G_{13} = 1, \quad G_{12} = 1, \quad \nu_{23} = 0.15, \quad \nu_{12} = 0.08, \quad \nu_{13} = 0.102, \end{aligned} \quad (47)$$

для которого вычислены значения используемых в данном исследовании нормированных упругих модулей и плотности

$$\tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 12, 13, 22, 23, 33), \quad \tilde{c}_{55}^{(hg)} = 1, \quad \tilde{\rho}^{(hg)} = 1. \quad (48)$$

При численном эксперименте использовались также неоднородные материалы, функциональные законы радиальной неоднородности характеристик которых задавались так:

$$\tilde{c}_{11}(r) = \tilde{c}_{11}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 12, 13, 22, 23, 33, 55), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(hg)}; \quad (49-А)$$

$$\tilde{c}_{12}(r) = \tilde{c}_{12}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 13, 22, 23, 33, 55), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(hg)}; \quad (49-Б)$$

$$\tilde{c}_{13}(r) = \tilde{c}_{13}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 12, 22, 23, 33, 55), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(hg)}; \quad (49-В)$$

$$\tilde{c}_{22}(r) = \tilde{c}_{22}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 12, 13, 23, 33, 55), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(hg)}; \quad (49-Г)$$

$$\tilde{c}_{23}(r) = \tilde{c}_{23}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 12, 13, 22, 33, 55), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(hg)}; \quad (49-Д)$$

$$\tilde{c}_{33}(r) = \tilde{c}_{33}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 12, 13, 22, 23, 55), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(hg)}; \quad (49-Е)$$

$$\tilde{c}_{55}(r) = \tilde{c}_{55}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 12, 13, 22, 23, 33), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(hg)}; \quad (49-Ж)$$

$$\tilde{\rho}(r) = \tilde{\rho}^{(hg)} f(r), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(hg)} \quad (s = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 55), \quad (49-З)$$

где  $f(r) = 1 + 0,25r^3$ . Далее волновод с характеристиками материала (48) будет называться однородным, а волноводы с характеристиками материала (49-А)–(49-З) соответственно неоднородным А–З типа. Вид законов радиальной неоднородности (49-А)–(49-З) определялся задачей исследовать влияние на топологическую картину спектра фактора неоднородности, обусловленной отдельной физико-механической характеристикой цилиндрически-ортотропного материала.

При проведении вычислительного эксперимента для определения функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1,7}$ ) был выбран численный подход с использованием полиномиальной аппроксимации ( $N = 5$ ). В таблице 1 представлены результаты анализа характеристик построенных решений для обоих вариантов модели радиальной неоднородности (далее ВМРН) (14-А) и (14-Б), а также для всех представленных соотношениями (49-А)–(49-З) функциональных законов.

Таблица 1. Характеристики построенных решений

Материал	Максимальная погрешность аппроксимации в соотношениях (25)		Радиус сходимости $\delta$ разложений (26)		ВМРН
	ВМРН (14-А)	ВМРН (14-Б)	ВМРН (14-А)	ВМРН (14-Б)	
(54-А)	$10^{-4}$	0	1.391	1.587	(14-Б)
(54-Б)	0	0	$\infty$	$\infty$	(14-А)
(54-В)	0	0	$\infty$	$\infty$	(14-А)
(54-Г)	0	0	$\infty$	$\infty$	(14-А)
(54-Д)	0	0	$\infty$	$\infty$	(14-А)
(54-Е)	0	0	$\infty$	$\infty$	(14-А)
(54-Ж)	0	$10^{-4}$	1.587	1.391	(14-А)
(54-З)	0	0	$\infty$	$\infty$	(14-А)

В последнем столбце таблицы 1 указан выбранный для проведения численного эксперимента вариант модели радиальной неоднородности.

В области изменения параметров  $k \in [0, 35]$  и  $\Omega \in [0, 30]$ , для однородного волновода и неоднородных волноводов А–З типов на рисунках 1–9 представлены фрагменты соответствующих спектров бегущих волн.

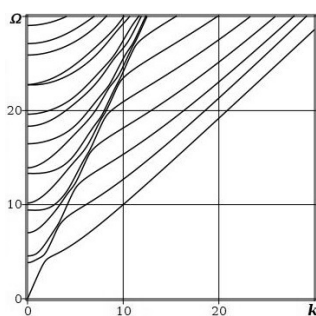


Рис. 1. Спектр однородного волновода

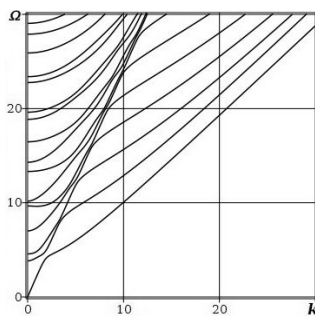


Рис. 2. Спектр неоднородного волновода А

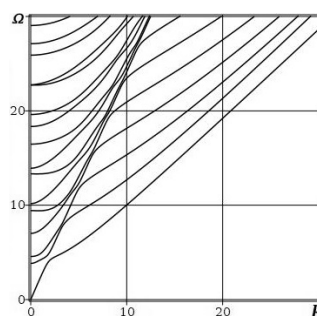


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода Б

В результате анализа представленных рисунков можно сделать вывод, что неоднородность исключительно по модулям  $\tilde{c}_s(r)$  ( $s = 11, 12, 13, 22, 23, 33$ ) визуально не сказывается на топологической картине соответствующих фрагментов спектров (рис. 2–7) по сравнению с фрагментом спектра однородного волновода (рис. 1). Вместе с этим для волноводов с неоднородность исключительно по

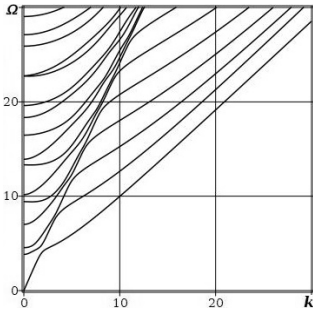


Рис. 4. Спектр неоднородного волновода В

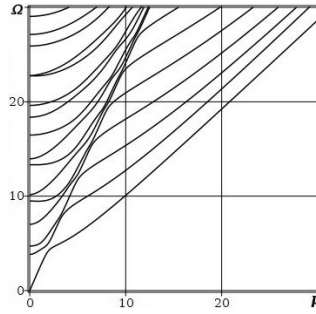


Рис. 5. Спектр неоднородного волновода Γ

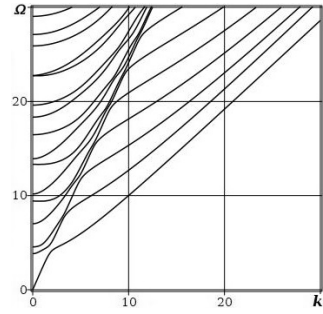


Рис. 6. Спектр неоднородного волновода Д

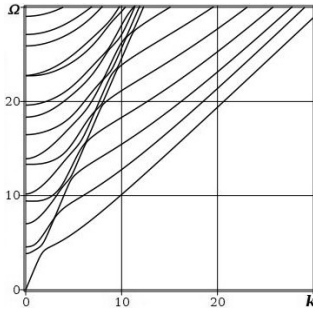


Рис. 7. Спектр неоднородного волновода Е

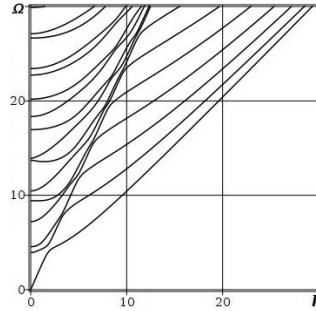


Рис. 8. Спектр неоднородного волновода Ж

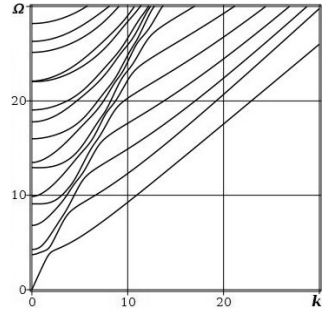


Рис. 9. Спектр неоднородного волновода З

упругому модулю  $\tilde{c}_{55}(r)$  (рис. 8) и плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 9) наблюдается характерная, ярко выраженная локализация асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области низшей моды по отношению к старшим модам спектра.

Количественные различия построенных фрагментов спектров исследованы с помощью функции сравнения парных по номеру в сопоставляемых спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left( \Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (50)$$

Результаты сопоставительного анализа поведения низших четырнадцати мод, характеризуемые наибольшими абсолютными значениями функции  $\Delta\Omega(k)$ , отображены на рисунках 10–15. Номера мод сопоставляемых спектров указаны в нижней части рисунков.

На представленных рисунках наблюдается ярко выраженная закономерность смещения мод спектров неоднородных волноводов по отношению к соответствующим модам спектра однородного волновода в область более высоких частот в случае неоднородности исключительно по модулям  $\tilde{c}_s(r)$  ( $s = 11, 22, 33, 55$ ) (рис. 10, 12–14), и в область более низких частот в случае неоднородности исключительно по плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 15). В случае неоднородности исключительно по модулю  $\tilde{c}_{13}(r)$  (рис. 11) допустимо констатировать лишь доминирующее сме-

щение мод спектра неоднородного волновода по отношению к соответствующим модам спектра однородного волновода в область более низких частот. В случаях неоднородности исключительно по модулям  $\tilde{c}_{12}(r)$  и  $\tilde{c}_{23}(r)$  функция  $\Delta\Omega(k)$  имела абсолютные значения на порядок меньшие, чем на рисунках 10–15.

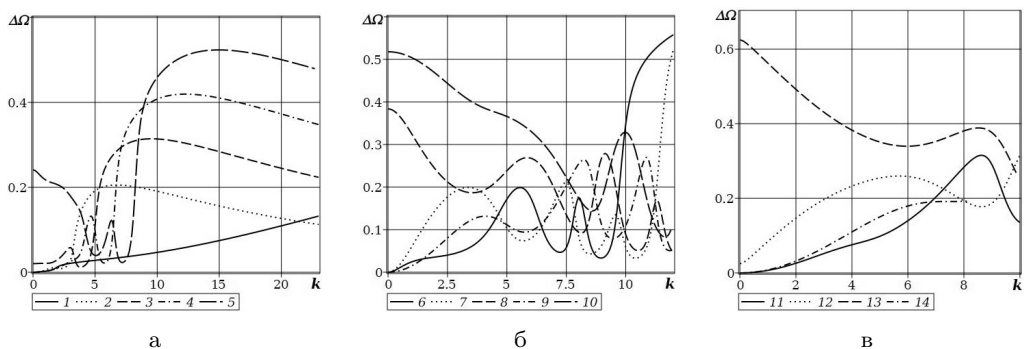


Рис. 10. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода А

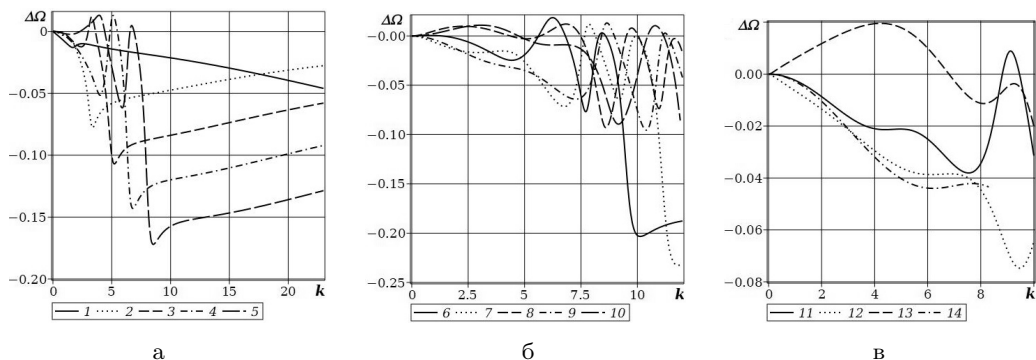


Рис. 11. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода В

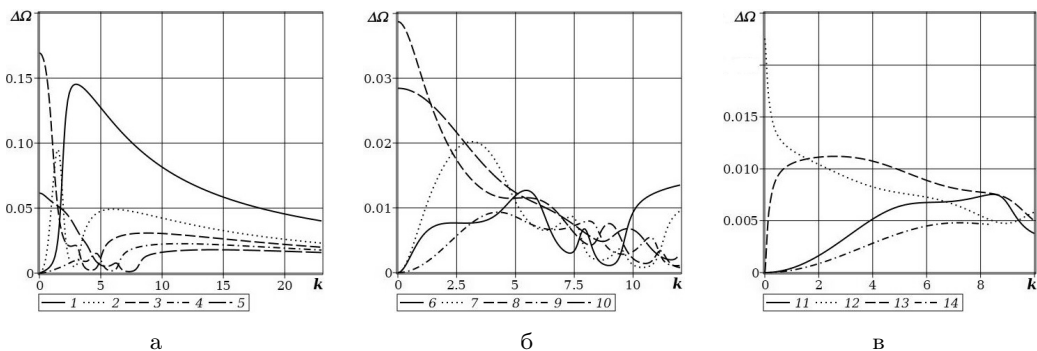


Рис. 12. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Г

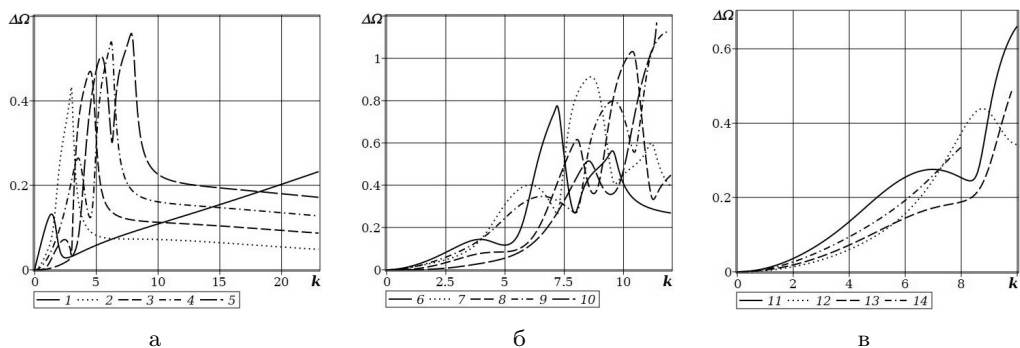


Рис. 13. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Е

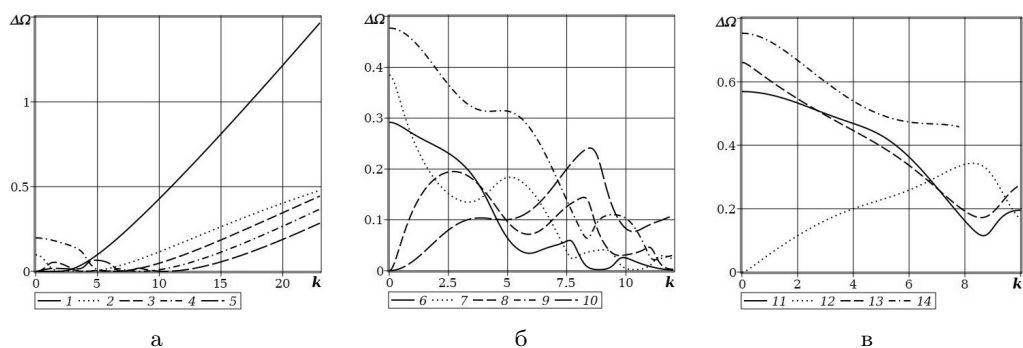


Рис. 14. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Ж

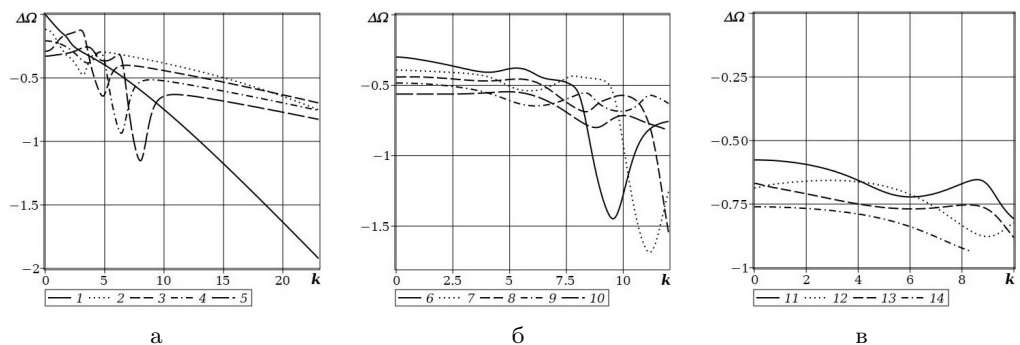


Рис. 15. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода З

**Выводы.** Представленные результаты актуальны в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализом моделей ультразвуковой диагностики, верификацией результатов, полученных прямыми численными методами.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Моисеенко И.А. Модели функциональной неоднородности изотропного цилиндрического волновода для случая осесимметричных нормальных волн / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1(82). – С. 40–61.



2. Моисеенко И.А. Исследование свойств изгибных волн в сплошных цилиндрах на основе трехфакторной модели радиальной неоднородности изотропного материала / И.А. Моисеенко, А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2(83). – С. 5–25.
3. Дзундза А.И. Свойства нормальных волн в радиально-неоднородных изотропных цилиндрах секторного сечения / А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук, И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 1(86). – С. 37–50.
4. Моисеенко И.А. Исследование упругих волн крутильного типа с использованием трехфакторной модели функциональной неоднородности трансверсально изотропных сплошных цилиндрических волноводов / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 2(79). – С. 5–15.
5. Моисеенко И.А. Осесимметричные продольно-сдвиговые упругие волны в протяженных сплошных цилиндрах из шестифакторно функционально неоднородного трансверсально-изотропного материала / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 33–59.
6. Моисеенко И.А. Исследование свойств неосесимметричных волн в протяженных цилиндрах на основе шестифакторной модели радиальной неоднородности трансверсально-изотропного материала / И.А. Моисеенко, Л.П. Вовк, А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3(84). – С. 61–81.
7. Вовк Л.П. Нормальные волны в радиально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения / Л.П. Вовк, А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук, И.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3(88). – С. 20–34.
8. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.
9. Petrowsky I.G. Sur l'analyticite des solutions des systems d'equations differentielles // Матем. сб. – 1939. – № 5(47). Р. 3–70.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Главная редакция физико-математической литературы. – 1968. – 431 с.
11. Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных упругих волн в анизотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга, А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22. – Вып. 8. – С. 118–121.

**L.P. Vovk, A.I. Dzundza, N.I. Melnichuk, I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko**  
**Investigation of the properties of axisymmetric normal waves in functionally gradient cylinders based on multifactorial models of radial inhomogeneity of orthotropic material.**

Basic solutions for the problem of propagation of axisymmetric normal waves in radially inhomogeneous cylindrical-orthotropic circular cylinders are constructed. The elements of the basic solutions are expressed in terms of analytical functions. The elastic modulus and density of the waveguide material are set using the proposed eight-factor model of functional radial heterogeneity of the physical and mechanical characteristics of the waveguide material. A comparative analysis of the results of a numerical experiment conducted for homogeneous and functionally heterogeneous free waveguides is presented, and quantitative and qualitative estimates of the numerical results are given.

**Keywords:** FGMs, orthotropic cylindrical waveguides, radial inhomogeneity model, basic solutions.

*Статья поступила в редакцию 05.12.2024;  
доработана 18.12.2024;  
рекомендована к печати 24.12.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-4-64-73

EDN:IOLPYA

©2024. В.И. Сторожев<sup>1</sup>

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В СЛОЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

Получены базисные частные решения системы амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающей распространение стационарных продольно-сдвиговых электроупругих волн в слое из функционально-градиентной пьезокерамики с многофакторной экспоненциальной неоднородностью общего вида, описываемой отдельными разнотипными экспоненциальными зависимостями для каждой из физико-механических характеристик рассматриваемого материала. Формой представления полученных базисных решений являются степенные ряды, коэффициенты которых последовательно определяются из системы рекуррентных соотношений.

**Ключевые слова:** *слой линейно-поляризованной функционально-градиентной пьезокерамики, многофакторная экспоненциальная физико-механическая неоднородность, нормальные продольно-сдвиговые электроупругие волны, методика интегрирования амплитудных волновых уравнений, базисные частные решения, степенные ряды, системы рекуррентных соотношений.*

**Введение и цели исследования.** Вопросы теоретического анализа закономерностей распространения нормальных электроупругих волн в конструктивных элементах в виде пластин пространственной геометрии из инновационных типов функционально-градиентных анизотропных пьезокерамических материалов, создаваемых с применением аддитивных технологий [1–6], являются крайне актуальной областью перспективных исследований с высокотехнологичными приложениями в приборостроении и электронике [7–10]. Исследования по этой проблематике в преимущественной степени основываются на нескольких моделях описания законов изменения физико-механических свойств функционально-градиентных пьезокерамических материалов вдоль линейных направлений, к числу которых относятся широко используемые модели экспоненциальных координатных зависимостей характеристик деформационных свойств, сопряженных электромеханических полей и плотности. При этом, в доминирующем числе опубликованных работ по данной тематике принимается концепция

<sup>1</sup>Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., гл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

введения единого экспоненциального закона неоднородности для всех физико-механических характеристик модели [11–19], и уравнения относительно амплитудных составляющих волновых перемещений в сдвиговых и продольно-сдвиговых нормальных электроупругих волнах для волновода в виде неоднородного по толщине плоскопараллельного пьезокерамического слоя из таких материалов являются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, интегрируемыми методом Эйлера. В работах [20–22] концепция экспоненциального описания законов изменения физико-механических характеристик функционально-градиентной пьезокерамики в случае анализа задачи о сдвиговых электроупругих нормальных волнах в слое функционально-градиентной пьезокерамики распространена на случаи введения двух различных видов экспоненциальных зависимостей в представлениях физико-механических характеристик пьезоактивных материалов – различных законов неоднородности для параметра плотности материала и для совокупности всех остальных механических характеристик, различных законов неоднородности для совокупности параметров упругих свойств и плотности, а также для совокупности характеристик электрических свойств. В работе [23] разработан численно-аналитический алгоритм построения базисных частных решений для систем амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение сдвиговых нормальных электроупругих волн плоскости слоя функционально-градиентной пьезокерамики с многофакторной неоднородностью, описываемой отдельными разнотипными экспоненциальными зависимостями для каждой из физико-механических характеристик рассматриваемого материала.

В контексте вышеизложенного, целью исследований, реализуемых в данной работе, является разработка численно-аналитического алгоритма интегрирования системы уравнений относительно амплитудных составляющих нормальных электроупругих волн  $P$ - $SV$  типа в функционально-градиентном пьезокерамическом слое класса  $bmm$  гексагональной системы, каждый из физико-механических параметров которого характеризуется своей, отличающейся от остальных, экспоненциальной функцией изменения по толщине.

**1. Структура системы рассматриваемых амплитудных волновых уравнений.** Система амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение гармонических нормальных электроупругих волн  $P$ - $SV$  типа в плоскости слоя функционально-градиентной пьезокерамики с многофакторной неоднородностью, записывается применительно к волноводу в виде занимающего в координатном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  область  $V = \{x_3 \in [-h, h], (x_1, x_2) \in R^2\}$  слоя линейно-поляризованного пьезокерамического материала класса  $bmm$  гексагональной системы с осью поляризации  $Ox_3$ . Слой обладает переменными вдоль координаты  $Ox_3$  по его толщине физико-механическими свойствами, задаваемыми исходными характеристиками в виде модулей упругости  $c_{ij}(x_3)$ , пьезоэлектрических  $e_{ij}(x_3)$  и диэлектрических  $\varepsilon_{ij}(x_3)$  параметров и параметра плотности

$\rho(x_3)$  функционально-градиентной пьезокерамики. Согласно гипотезам исследования, данные физико-механические характеристики имеют представления

$$\begin{aligned} c_{ij}(x_3) &= c_{ij0} \exp(\lambda_{cij}x_3), & e_{ij}(x_3) &= e_{ij0} \exp(\lambda_{eij}x_3), \\ \varepsilon_{ij}(x_3) &= \varepsilon_{ij0} \exp(\lambda_{\varepsilon ij}x_3), & \rho(x_3) &= \rho_0 \exp(\lambda_\rho x_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Исследуемые волновые процессы в исходной форме описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами относительно комплексных функций динамических перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$  и потенциала квазистатического электрического поля  $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ , имеющей вид

$$\begin{aligned} &c_{11}(x_3)\partial_1^2 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{44}(x_3)\partial_3 u_1(x_1, x_3, t)) + \\ &+ c_{13}(x_3)\partial_1\partial_3 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{44}(x_3)\partial_1 u_3(x_1, x_3, t)) + \\ &+ e_{31}(x_3)\partial_1\partial_3\varphi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{15}(x_3)\partial_1\varphi(x_1, x_3, t)) - \\ &\quad - \rho(x_3)\partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0, \\ &c_{44}(x_3)\partial_1\partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{13}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3, t)) + \\ &+ c_{44}(x_3)\partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{33}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3, t)) + \\ &+ e_{15}(x_3)\partial_1^2\varphi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3)\partial_3\varphi(x_1, x_3, t)) - \\ &\quad - \rho(x_3)\partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0, \\ &e_{15}(x_3)\partial_1\partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{31}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3, t)) + \\ &+ e_{15}(x_3)\partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3, t)) + \\ &- \varepsilon_{11}(x_3)\partial_1^2\varphi(x_1, x_3, t) - \partial_3(\varepsilon_{33}(x_3)\partial_3\varphi(x_1, x_3, t)) = 0, \\ &\quad \partial_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial_t = \partial/\partial t. \end{aligned} \quad (2)$$

С введением применительно к волнам исследуемого типа представлений

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3, t) &= u_{10}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ u_3(x_1, x_3, t) &= u_{30}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\ \varphi(x_1, x_3, t) &= \varphi_0(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \end{aligned} \quad (3)$$

а также с использованием соотношений (1), система (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &c_{440} \exp(\lambda_{c44}x_3)u_{10}''(x_3) - c_{110}k^2 \exp(\lambda_{c11}x_3)u_{10}(x_3) + \\ &\quad + (c_{130} \exp(\lambda_{c13}x_3) + c_{440} \exp(\lambda_{c44}x_3))ik u_{30}'(x_3) + \\ &\quad + (e_{150} \exp(\lambda_{e15}x_3) + e_{310} \exp(\lambda_{e31}x_3))ik \varphi_0'(x_3) + \\ &\quad + \rho_0\omega^2 \exp(\lambda_\rho x_3)u_{10}(x_3) + c_{440}\lambda_{c44} \exp(\lambda_{c44}x_3)(u_{10}'(x_3) + ik u_{30}(x_3)) + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+e_{150}\lambda_{e15}ik \exp(\lambda_{e15}x_3)\varphi_0(x_3) = 0,$$

$$\begin{aligned} & (c_{130} \exp(\lambda_{c13}x_3) + c_{440} \exp(\lambda_{c44}x_3))iku'_{10}(x_3) + \\ & + c_{330} \exp(\lambda_{c33}x_3)u''_{30}(x_3) - c_{440} \exp(\lambda_{c44}x_3)k^2u_{30}(x_3) - \\ & - e_{150} \exp(\lambda_{e15}x_3)k^2\varphi_0(x_3) + e_{330} \exp(\lambda_{e33}x_3)\varphi''_0(x_3) + \\ & + \rho_0\omega^2 \exp(\lambda_\rho x_3)u_{30}(x_3) + \\ & + c_{130}\lambda_{c13}ik \exp(\lambda_{c13}x_3)u_{10}(x_3) + c_{330}\lambda_{c33} \exp(\lambda_{c33}x_3)u'_{30}(x_3) + \\ & + e_{330}\lambda_{e33} \exp(\lambda_{e33}x_3)\varphi'_0(x_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (e_{150} \exp(\lambda_{e15}x_3) + e_{310} \exp(\lambda_{e31}x_3))iku'_{10}(x_3) + \\ & + e_{330} \exp(\lambda_{e33}x_3)u''_{30}(x_3) - e_{150} \exp(\lambda_{e15}x_3)k^2u_{30}(x_3) + \\ & + \varepsilon_{110} \exp(\lambda_{\varepsilon11}x_3)k^2\varphi_0(x_3) - \varepsilon_{330} \exp(\lambda_{\varepsilon33}x_3)\varphi''_0(x_3) + \\ & + e_{310}\lambda_{e31}ik \exp(\lambda_{e31}x_3)u_{10}(x_3) + e_{330}\lambda_{e33} \exp(\lambda_{e33}x_3)u'_{30}(x_3) - \\ & - \varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon33} \exp(\lambda_{\varepsilon33}x_3)\varphi'_0(x_3) = 0. \end{aligned}$$

При реализации предлагаемого алгоритма численно-аналитического интегрирования системы уравнения вида (4) вводятся в рассмотрение следующие представления в виде степенных рядов:

$$u_{10}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_3^n, \quad (5)$$

$$u'_{10}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}x_3^n, \quad u''_{10}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\alpha_{n+2}x_3^n;$$

$$u_{30}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n,$$

$$u'_{30}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\beta_{n+1}x_3^n, \quad u''_{30}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\beta_{n+2}x_3^n;$$

$$\varphi_0(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_3^n,$$

$$\varphi'_0(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\gamma_{n+1}x_3^n, \quad \varphi''_0(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\gamma_{n+2}x_3^n;$$

$$\exp(\lambda_{cij}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{cij}^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\lambda_{eij}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{eij}^m}{m!} x_3^m,$$

$$\exp(\lambda_{\varepsilon ij} x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\varepsilon ij}^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\lambda_{\rho} x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho}^m}{m!} x_3^m.$$

В результате подстановки разложений (5) в систему уравнений (4) в качестве следствия могут быть записаны соотношения

$$\begin{aligned} & c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c44}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \alpha_{n+2} x_3^n + \\ & + \lambda_{c44} c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c44}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x_3^n + \\ & + (\rho_0 \omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho}^m}{m!} x_3^m - c_{110} k^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c11}^m}{m!} x_3^m) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_3^n + \\ & + (c_{130} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c13}^m}{m!} x_3^m + c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c44}^m}{m!} x_3^m) i k \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \beta_{n+1} x_3^n + \\ & + \lambda_{440} c_{440} i k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c44}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n + \\ & + (e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{e15}^m}{m!} x_3^m + e_{310} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{e31}^m}{m!} x_3^m) i k \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \gamma_{n+1} x_3^n + \\ & + \lambda_{e15} e_{150} i k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{e15}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_3^n = 0, \\ & (c_{130} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c13}^m}{m!} x_3^m + c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c44}^m}{m!} x_3^m) i k \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x_3^n + \\ & + \lambda_{130} c_{130} i k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c13}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_3^n + \\ & + c_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \beta_{n+2} x_3^n + \\ & + \lambda_{c33} c_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \beta_{n+1} x_3^n + \\ & + (\rho_0 \omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho}^m}{m!} x_3^m - c_{440} k^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{c44}^m}{m!} x_3^m) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n + \\ & + e_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{e33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \gamma_{n+2} x_3^n + \end{aligned} \tag{6}$$

Интегрирование уравнений распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн

$$\begin{aligned}
& +\lambda_{\epsilon 33} e_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \gamma_{n+1} x_3^n - e_{150} k^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 15}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_3^n = 0, \\
& (e_{150} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 15}^m}{m!} x_3^m + e_{310} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 31}^m}{m!} x_3^m) i k \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x_3^n + \\
& + \lambda_{\epsilon 31} e_{310} i k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 31}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_3^n + \\
& + e_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \beta_{n+2} x_3^n + \\
& + \lambda_{330} e_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \beta_{n+1} x_3^n - \\
& - e_{150} k^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 15}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n - \epsilon_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \gamma_{n+2} x_3^n - \\
& - \lambda_{\epsilon 33} \epsilon_{330} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 33}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \gamma_{n+1} x_3^n + \epsilon_{110} k^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\epsilon 11}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_3^n = 0,
\end{aligned}$$

соответственно преобразуемые к виду

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Delta_{np}^{(1)} x_3^p = 0, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \Delta_{np}^{(2)} x_3^p = 0, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \Delta_{np}^{(3)} x_3^p = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_{np}^{(1)} = & \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)c_{440} \lambda_{c44}^{p-n} ((p-n)!)^{-1} \alpha_{n+2} + \\
& + (n+1)c_{440} \lambda_{c44}^{p-n+1} ((p-n)!)^{-1} \alpha_{n+1} + \\
& + (n+1)(c_{130} \lambda_{c13}^{p-n} + c_{440} \lambda_{c44}^{p-n}) i k ((p-n)!)^{-1} \beta_{n+1} + \\
& + (n+1)(e_{150} \lambda_{\epsilon 15}^{p-n} + e_{310} \lambda_{\epsilon 31}^{p-n}) i k ((p-n)!)^{-1} \gamma_{n+1} + \\
& + (\rho_0 \omega^2 \lambda_{\rho}^{p-n} - c_{110} k^2 \lambda_{c11}^{p-n}) ((p-n)!)^{-1} \alpha_n + c_{440} \lambda_{c44}^{p-n+1} i k ((p-n)!)^{-1} \beta_n + \\
& + e_{150} \lambda_{\epsilon 15}^{p-n+1} i k ((p-n)!)^{-1} \gamma_n,
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{np}^{(2)} = & \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)c_{330} \lambda_{c33}^{p-n} ((p-n)!)^{-1} \beta_{n+2} + \\
& + (n+1)(n+2)e_{330} \lambda_{\epsilon 33}^{p-n} ((p-n)!)^{-1} \gamma_{n+2} + \\
& + (n+1)(c_{130} \lambda_{c13}^{p-n} + c_{440} \lambda_{c44}^{p-n}) i k ((p-n)!)^{-1} \alpha_{n+1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(n+1)c_{330}\lambda_{c33}^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}\beta_{n+1}+ \\
 & +(n+1)e_{330}\lambda_{e33}^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}\gamma_{n+1}+c_{130}\lambda_{c13}^{p-n+1}ik((p-n)!)^{-1}\alpha_n+ \\
 & +(\rho_0\omega^2\lambda_\rho^{p-n}-c_{440}k^2\lambda_{c44}^{p-n})((p-n)!)^{-1}\beta_n-e_{150}\lambda_{e15}^{p-n}k^2((p-n)!)^{-1}\gamma_n,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{np}^{(3)} = & \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)e_{330}\lambda_{e33}^{p-n}((p-n)!)^{-1}\beta_{n+2}- \\
 & -(n+1)(n+2)\varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon33}^{p-n}((p-n)!)^{-1}\gamma_{n+2}+ \\
 & +(n+1)(e_{150}\lambda_{e15}^{p-n}+e_{310}\lambda_{e31}^{p-n})ik((p-n)!)^{-1}\alpha_{n+1}+ \\
 & +(n+1)e_{330}\lambda_{e33}^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}\beta_{n+1}- \\
 & -(n+1)\varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon33}^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}\gamma_{n+1}+e_{310}\lambda_{e31}^{p-n+1}ik((p-n)!)^{-1}\alpha_n- \\
 & -e_{150}k^2\lambda_{e15}^{p-n}((p-n)!)^{-1}\beta_n+\varepsilon_{110}\lambda_{\varepsilon11}^{p-n}k^2((p-n)!)^{-1}\gamma_n).
 \end{aligned}$$

При приравнении нулю коэффициентов  $\Delta_{np}^{(1)}$ ,  $\Delta_{np}^{(2)}$  и  $\Delta_{np}^{(3)}$  в представлениях (7) с варьированием  $p = \overline{0, \infty}$  формируется система рекуррентных соотношений, позволяющих, в частности, получить шесть базисных частных решений для системы дифференциальных уравнений (4). На исходном шаге применения данной рекуррентной схемы для получения коэффициентов  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  ( $n = \overline{0, \infty}$ ) в представлениях (5), исходя из выражений  $\Delta_{np}^{(1)}$ ,  $\Delta_{np}^{(2)}$  и  $\Delta_{np}^{(3)}$  для  $p = 0$ , в результате их приравнения нулю записываются соотношения

$$\begin{aligned}
 2c_{440}\alpha_2 = & -(c_{440}\lambda_{c44}\alpha_1 + (c_{130} + c_{440})ik\beta_1 + (e_{150} + e_{310})ik\gamma_1 + \quad (9) \\
 & +(\rho_0\omega^2 - c_{110}k^2)\alpha_0 + c_{440}\lambda_{c44}ik\beta_0 + e_{150}\lambda_{e15}ik\gamma_0), \\
 2c_{330}\beta_2 + 2e_{330}\gamma_2 = & -((c_{130} + c_{440})ik\alpha_1 + c_{330}\lambda_{c33}\beta_1 + e_{330}\lambda_{e33}\gamma_1 + \\
 & +c_{130}\lambda_{c13}ik\alpha_0 + (\rho_0\omega^2 - c_{440}k^2)\beta_0 - e_{150}k^2\gamma_0), \\
 2e_{330}\beta_2 + 2\varepsilon_{330}\gamma_2 = & -((e_{150} + e_{310})ik\alpha_1 + \varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon33}\beta_1 - \varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon33}\gamma_1 + \\
 & +e_{310}\lambda_{e31}ik\alpha_0 - e_{150}k^2\beta_0 + \varepsilon_{110}k^2\gamma_0),
 \end{aligned}$$

которые интерпретируются как система линейных алгебраических уравнений, определяющая выражения коэффициентов  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  через набор произвольных значений величин  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ . Предлагаемыми вариантами задания этих коэффициентов являются множества  $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$  вида  $\{0, 0, 0, 0, 0, 1\}$ ,  $\{0, 0, 0, 0, 1, 0\}$ ,  $\{0, 0, 0, 1, 0, 0\}$ ,  $\{0, 0, 1, 0, 0, 0\}$ ,  $\{0, 1, 0, 0, 0, 0\}$ ,  $\{1, 0, 0, 0, 0, 0\}$ , на основе которых формируются шесть последовательностей значений  $\{\alpha_n^{(j)}, \beta_n^{(j)}, \gamma_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$  ( $j = \overline{1, 6}$ ), определяющие шесть базисных частных решения системы уравнений (4) с аналитическими представлениями в виде степенных рядов

$$u_{10j}(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n^{(j)} x_3^n, \quad (10)$$



$$u_{30j}(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(j)} x_3^n, \quad \varphi_{0j}(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(j)} x_3^n,$$

которые редуцируются при численных исследованиях на оговариваемом уровне точности расчетов. С учетом (10), при дальнейшем исследовании процессов распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с многофакторной экспоненциальной неоднородностью подлежат использованию представления

$$u_j(x_1, x_3, t) = \sum_{q=1}^6 C_q u_{j0q}(x_3, \omega, k) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad (j = 1; 3),$$

$$\varphi(x_1, x_3, t) = \sum_{q=1}^6 C_q \varphi_{0q}(x_3, \omega, k) \exp(-i(\omega t - kx_1)).$$

**Заключение.** Итогом проведенных исследований является разработка численно-аналитического алгоритма получения базисных частных решений для системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей распространение нормальных продольно-сдвиговых электроупругих волн в слое функционально-градиентной пьезокерамики класса бтм с индивидуальными экспоненциальными законами изменения каждого из физико-механических параметров по толщине слоя вдоль поперечного направления линейной поляризации. Искомые базисные решения получены в виде степенных рядов, члены которых последовательно определяются из рекуррентных соотношений.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДОНГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 29.02.2024 № 075-02-2024-1446).

1. *Hudai Kara.* Porous PZT ceramics for receiving transducers / Kara Hudai, Ramesh Rajamami, Ron Stevens, Cris R. Bowen // IEEE Trans. UFFC. – 2003. – Vol. 50. – No. 3. – P. 280–296.
2. *Saito Y.* Lead-free piezoceramics / Y. Saito, H. Takao, T. Tani, T. Nonoyama, K. Takatori, T. Homma, T. Nagaya, M. Nakamura // Nature. – 2004. – Vol. 432. – P. 84–87.
3. *Yoon H.* Macroporous alumina ceramics with aligned microporous walls by unidirectionally freezing foamed aqueous ceramic suspensions / H. Yoon, U. Kim, J. Kim, Y. Koh, W. Choi, H. Kim // J. Am. Ceram. Soc. – 2010. – Vol. 93. – P. 1580–1582.
4. *Uchino K.* Advanced Piezoelectric Materials. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2011. – 696 p.
5. *Lugovaya M.A.* Complex material properties of porous piezoelectric ceramics / M.A. Lugovaya, A.A. Naumenko, A.N. Rybyanets, S.A. Shcherbinin // Ferroelectrics. – 2015. – Vol. 484, Iss. 1. – P. 87–94.
6. *Bowen C.R.* The piezoelectric medium and its characteristics / C.R. Bowen, V.Y. Topolov, H.A. Kim // Springer Series in Materials Science. – 2016. – Vol. 238. – P. 1–22.
7. *Setter N.* Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
8. *Yang J.* Dynamic anti-plane problems of piezoceramics and applications in ultrasonics – a review / J. Yang, J. Wang // Acta Mechanica Sinica. – 2008. – Vol. 21, Iss. 3. – P. 207–220. – DOI: 10.1007/s10338-008-0824-3.

9. Heywang W. Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
10. Tanaka S. Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // Proceedings 2014 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS) (Taipei, Taiwan). – 2014. – P. 1–4. – DOI: 10.1109/FCS.2014.6859994.
11. Meguid S.A. On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials / S.A. Meguid, X.D. Wang, L.Y. Jiang // Engineering Fracture Mechanics. – 2002. – Vol. 69, No. 14–16. – P. 1753–1768. – DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00046-2.
12. Chen J. Electromechanical impact of a crack in a functionally graded piezoelectric medium / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 1. – P. 47–60. – DOI: 10.1016/S0167-8442(02)00137-4.
13. Zhou Z.G. Investigation of the dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials by use of the Schmidt method / Z.G. Zhou, B. Wang, Y.G. Sun // Wave Motion. – 2004. – Vol. 39, No. 3. – P. 213–225. – DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.09.001.
14. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang. // J. Nondestructive Eval. – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.
15. Chattopadhyay A. Torsional wave propagation in non-homogeneous layer between non-homogeneous half-spaces / A. Chattopadhyay, S. Gupta, P. Kumari, V.K. Sharma // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2013 – Vol. 37, Iss. 10. – P. 1280–1291.
16. Meguid S.A. On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials / S.A. Meguid, X.D. Wang, L.Y. Jiang // Engineering Fracture Mechanics. – 2002. – Vol. 69, No. 14–16. – P. 1753–1768. – DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00046-2.
17. Chen J. Electromechanical impact of a crack in a functionally graded piezoelectric medium / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 1. – P. 47–60. – DOI: 10.1016/S0167-8442(02)00137-4.
18. Zhou Z.G. Investigation of the dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials by use of the Schmidt method / Z.G. Zhou, B. Wang, Y.G. Sun // Wave Motion. – 2004. – Vol. 39, No. 3. – P. 213–225. – DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.09.001.
19. Cao X. Transverse shear wave in a functionally graded material infinite half-space / X. Cao, F. Jin, K. Kishimoto // Philosophical Magazine Letters. – 2012. – Vol. 92, No. 5. – P. 245–253.
20. Majhi S. Reflection and Transmission of Plane SH-Waves in an Initially Stressed Inhomogeneous Anisotropic Magnetoelastic Medium / S. Majhi, P.C. Pal, S. Kumar // Journal of Seismology. – 2017. – Vol. 21. – P. 155–163.
21. Карасев Д.С. Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с разнотипной экспоненциальной неоднородностью механических и электрических свойств / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 4 (85). – С. 23–30. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-4-23-30. – EDN: YFWFOO.
22. Карасев Д.С. Электроупругие волны сдвига в слое функционально-градиентной пьезокерамики с двухфакторной неоднородностью физико-механических свойств / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, М.В. Фоменко // Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции (Донецк, 15–17 октября 2024 г.). – Т. I: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. – С. 51–54.
23. Карасев Д.С. Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с индивидуальным законом экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики материала / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3 (88). – С. 35–43. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-3-35-43. – EDN: VGCFAS.

**V.I. Storozhev**

**Solution of the system of equations the models longitudinal-shear electroelastic waves propagation in a layer of functional-gradient piezoceramics with exponential heterogeneity a general type.**

Basic partial solutions of the system of amplitude wave ordinary differential equations with variable coefficients, describing the propagation of stationary longitudinal-shear electroelastic waves in a layer of functionally graded piezoceramics with a multifactor exponential heterogeneity of a general type, described by separate different types of exponential dependencies for each of the physical and mechanical characteristics of the material under consideration are obtained. The form of presentation of the obtained basic solutions is power series, the coefficients of which are successively determined from a system of recurrence relations.

**Keywords:** *layer of linearly polarized functionally graded piezoceramics, multifactor exponential physical and mechanical heterogeneity, normal longitudinal-shear electroelastic waves, method of integration of amplitude wave equations, basic partial solutions, power series, systems of recurrence relations.*

*Статья поступила в редакцию 06.12.2024;  
доработана 19.12.2024;  
рекомендована к печати 24.12.2024.*

УДК 539.3  
doi:10.24412/0136-4545-2024-4-74-83  
EDN:HBSOXJ



©2024. Р.Н. Нескородев<sup>1</sup>, А.В. Зыза<sup>2</sup>

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА, СОДЕРЖАЩЕГО ПЛОСКОСТЬ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ, ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

В работе предложена численно-аналитическая методика исследования напряженно-деформированного состояния горного массива, содержащего плоскость упругой симметрии, вблизи вертикальной выработки в условиях ползучести горных пород. Представление решения для функций перемещений выражено через три аналитические функции обобщенных комплексных переменных. Полученное решение удовлетворяет граничным условиям на границе полупространства и содержит произвол для удовлетворения условиям на боковой поверхности.

**Ключевые слова:** анизотропный горный массив, вертикальная выработка, обобщенные комплексные переменные, напряженное состояние, ползучесть.

**Введение.** В работе [1] в рамках модели слоистого массива горных пород осадочного происхождения с плоскостью изотропии, параллельной горизонтальной плоскости, предложена численно-аналитическая методика исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния, возникающего вблизи вертикальной выработки кругового сечения.

Для случая анизотропного массива получить аналитическое решение не удастся. В статье [2] строится численно-аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии вблизи вертикальной полости в анизотропном массиве, обладающем плоскостью упругой симметрии. В данной статье предложена более эффективная методика получения численно-аналитического ре-

---

<sup>1</sup>Нескородев Роман Николаевич – док. физ.-мат. наук, профессор каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nromn72@mail.ru.

*Neskorodev Roman Nikolaevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Зыза Александр Васильевич – док. физ.-мат. наук, профессор каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: z9125494@mail.ru.

*Zyza Alexander Vasilievich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

шения задачи о напряженном состоянии вертикальной выработки в условиях ползучести горных пород.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается массив горных пород, ограниченный горизонтальной плоскостью, который отнесен к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ , где плоскость  $Oxy$  совпадает с дневной поверхностью. От плоскости  $Oxy$  внутрь массива, вдоль оси  $Oz$ , проведена вертикальная выработка в виде цилиндра эллиптического сечения. Требуется определить напряженное состояние массива около полости от действия сил собственного веса.

Считается, что свойства горных пород в разных направлениях различны и для описания их поведения используется модель упругого анизотропного тела. Линейная связь между напряжениями и деформациями, выраженная обобщенным законом Гука, имеет вид

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^6 a_{ik} \sigma_k, \quad (1)$$

или

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^6 A_{ik} \varepsilon_k, \quad (2)$$

где  $a_{ik}$  – коэффициенты деформации, а  $A_{ik}$  – модули упругости,  $i = \overline{1, 6}$ .

Для компактной записи уравнений (1) и (2) введены следующие обозначения

$$\begin{array}{ll} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 & \text{ДЛЯ } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}; \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 & \text{ДЛЯ } \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}. \end{array}$$

Уравнения (1) или (2) вместе с уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_6 + \partial_3 \sigma_5 + X &= 0, & \partial_1 \sigma_6 + \partial_2 \sigma_2 + \partial_3 \sigma_4 + Y &= 0, \\ \partial_1 \sigma_5 + \partial_2 \sigma_4 + \partial_3 \sigma_3 + Z &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

и уравнениями связи между деформациями и проекциями перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \partial_1 u_1, & \varepsilon_2 &= \partial_2 u_2, & \varepsilon_3 &= \partial_3 u_3, & \varepsilon_4 &= \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2, \\ \varepsilon_5 &= \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1, & \varepsilon_6 &= \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1, \end{aligned} \quad (4)$$

образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропных средах. В уравнениях (3) и (4) введены обозначения:  $\partial_1 = \partial/\partial x$ ,  $\partial_2 = \partial/\partial y$ ,  $\partial_3 = \partial/\partial z$ .

Массив рассматривается как тяжелое упругое полупространство, свободное от напряжений на дневной поверхности, т.е. имеют место граничные условия

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (5)$$

Для определения компонент напряжений и перемещений необходимо проинтегрировать уравнения (1)–(4) при условиях (5).

Проекции вектора перемещений  $u_k(x, y, z)$  и напряжения  $\sigma_i(x, y, z)$  представляются в виде сумм

$$u_k = u_k^0 + u_k^* \quad (k = 1, 2, 3), \quad \sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma_i^* \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (6)$$

где функции  $u_k^0$  и  $\sigma_i^0$  определяют решение в нетронутом массиве, а  $u_k^*$  и  $\sigma_i^*$  – отражают влияние выработок.

Выражения для перемещений и напряжений в сплошном анизотропном массиве от действия сил собственного веса приведены в работе [2].

**2. Перемещения и напряжения в массиве с вертикальными выработками.** Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет появления в массиве вертикальных выработок, описываются функциями  $u_k^*(x, y, z)$ , вид которых определяется в результате интегрирования однородных уравнений равновесия (3) с учетом граничных условий (5).

В случае общей анизотропии, на основе соотношений (2) и (4) представления для напряжений через перемещения будут такими

$$\sigma_i^* = (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2 + A_{i5}\partial_3) u_1^* + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2 + A_{i4}\partial_3) u_2^* + (A_{i5}\partial_1 + A_{i4}\partial_2 + A_{i3}\partial_3) u_3^* \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (7)$$

Далее рассматривается случай, когда материал имеет плоскость упругой симметрии, совпадающую с плоскостью  $Oxy$ . В этом случае для модулей упругости уравнений закона Гука имеют место соотношения

$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{15} = A_{25} = A_{35} = A_{46} = A_{56} = 0,$$

и соотношения (7) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_i^* &= (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2) u_1^* + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2) u_2^* + A_{i3}\partial_3 u_3^* \quad (i = 1, 2, 3, 6), \\ \sigma_i^* &= A_{i5}\partial_3 u_1^* + A_{i4}\partial_3 u_2^* + (A_{i5}\partial_1 + A_{i4}\partial_2) u_3^* \quad (i = 4, 5). \end{aligned}$$

Тогда уравнения равновесия в перемещениях для тела с плоскостью упругой симметрии представляются в форме

$$p_{11}u_1^* + p_{12}u_2^* + p_{13}u_3^* = 0, \quad p_{21}u_1^* + p_{22}u_2^* + p_{23}u_3^* = 0, \quad p_{31}u_1^* + p_{32}u_2^* + p_{33}u_3^* = 0. \quad (8)$$

Здесь  $p_{ik}$  – дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} p_{11} &= L_{11} + A_{55}\partial_3^2, \quad p_{12} = p_{21} = L_{12} + A_{45}\partial_3^2, \quad p_{13} = p_{31} = L_{13}\partial_3, \\ p_{22} &= L_{22} + A_{44}\partial_3^2, \quad p_{23} = p_{32} = L_{23}\partial_3, \quad p_{33} = L_{33} + A_{33}\partial_3^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2, \quad L_{12} = L_{21} = A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{26}\partial_2^2, \\ L_{22} &= A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2, \quad L_{33} = A_{55}\partial_1^2 + 2A_{45}\partial_1\partial_2 + A_{44}\partial_2^2, \\ L_{13} &= L_{31} = (A_{13} + A_{55})\partial_1 + (A_{63} + A_{45})\partial_2, \\ L_{23} &= L_{32} = (A_{36} + A_{45})\partial_1 + (A_{23} + A_{44})\partial_2. \end{aligned}$$

Решение системы (8) ищется в виде

$$u_1^* = P_1 \Psi, \quad u_2^* = P_2 \Psi, \quad u_3^* = P_3 \Psi, \quad (9)$$

где  $\Psi(x, y, z)$  – функция, подлежащая определению; дифференциальные операторы  $P_i$  выбираются таким образом, чтобы при подстановке представлений (9) в систему (8) два уравнения удовлетворялись тождественно. Тогда третье уравнение дает условие, которому будет удовлетворять функция  $\Psi$ .

В качестве таких операторов выбираются алгебраические дополнения для элементов  $j$ -й строки ( $j = 1, 2, 3$ ) матрицы системы (8). В этом случае два уравнения системы, кроме  $j$ -го удовлетворяются тождественно, а  $j$ -е уравнение примет вид

$$\Delta \Psi = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \Psi = [D_0 \partial_3^6 + D_2 \partial_3^4 + D_4 \partial_3^2 + D_6] \Psi = 0. \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} D_0 &= A_{33} (A_{55} A_{44} - A_{45}^2), \quad D_6 = L_{33} (L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}), \\ D_2 &= 2A_{45} L_{13} L_{23} - A_{44} L_{13}^2 - A_{55} L_{23}^2 + (A_{44} A_{55} - A_{45}^2) L_{33} + \\ &\quad + A_{33} (A_{44} L_{11} + A_{55} L_{22} - 2A_{45} L_{12}), \\ D_4 &= 2L_{12} L_{13} L_{23} - L_{22} L_{13}^2 - L_{11} L_{23}^2 + L_{33} (A_{44} L_{11} + A_{55} L_{22}) - \\ &\quad - 2A_{45} L_{33} L_{12} + A_{33} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2). \end{aligned}$$

Для  $j = 1$  представления (9) будут такими

$$u_1^* = (p_{22} p_{33} - p_{23} p_{32}) \Psi_1, \quad u_2^* = (p_{31} p_{23} - p_{21} p_{33}) \Psi_1, \quad u_3^* = (p_{21} p_{32} - p_{31} p_{22}) \Psi_1; \quad (11)$$

для  $j = 2$

$$u_1^* = (p_{32} p_{13} - p_{12} p_{33}) \Psi_2, \quad u_2^* = (p_{11} p_{33} - p_{13} p_{31}) \Psi_2, \quad u_3^* = (p_{12} p_{31} - p_{11} p_{32}) \Psi_2; \quad (12)$$

для  $j = 3$

$$u_1^* = (p_{12} p_{23} - p_{22} p_{13}) \Psi_3, \quad u_2^* = (p_{21} p_{31} - p_{11} p_{23}) \Psi_3, \quad u_3^* = (p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}) \Psi_3. \quad (13)$$

Каждая из функций  $\Psi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), входящих в представления (11)–(13), удовлетворяет уравнению (10).

Решение уравнения (10) строится в области сечения массива глубине  $z = H$ . Функция  $\Psi$  представляется в форме

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 + \frac{z^2}{2} \Psi_2 + \frac{z^4}{4!} \Psi_4, \quad \Psi' = z \Psi_2 + \frac{z^3}{3!} \Psi_4, \quad \Psi'' = \Psi_2 + \frac{z^2}{2} \Psi_4, \\ \Psi''' &= z \Psi_4, \quad \Psi^{IV} = \Psi_4. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда при  $z = H$  уравнение (10) примет вид

$$D_6 \left[ \Psi_0 + \frac{H^2}{2} \Psi_2 + \frac{H^4}{24} \Psi_4 \right] + D_4 \left[ \Psi_2 + \frac{H^2}{2} \Psi_4 \right] + D_2 \Psi_4 = 0.$$

Полагая

$$D_6 \left[ \Psi_0 + \frac{H^2}{2} \Psi_2 + \frac{H^4}{24} \Psi_4 \right] = 0, \quad D_4 \left[ \Psi_2 + \frac{H^2}{2} \Psi_4 \right] = 0, \quad D_2 \Psi_4 = 0,$$

можно получить

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= F_6, \quad \Psi_2 = F_4 + F_5 - \frac{H^2}{2} F_6, \\ \Psi_0 &= F_1 + F_2 + F_3 - \frac{H^2}{2} \left( F_4 + F_5 - \frac{H^2}{2} F_6 \right) - \frac{H^4}{4!} F_6. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $F_k = 2\text{Re}\varphi_k(z_k)$ ,  $z_k = x + \mu_k y$ . Параметры  $\mu_k$  находятся из характеристических уравнений

$$d_2(\mu_6) = 0, \quad d_4(\mu_4) = d_4(\mu_5) = 0, \quad d_6(\mu_1) = d_6(\mu_2) = d_6(\mu_3) = 0.$$

Характеристические функции  $d_2, d_4, d_6$  записываются на основе представлений операторов  $D_2, D_4, D_6$  заменой в последних операций дифференцирования  $\partial_1$  и  $\partial_2$  значениями 1 и  $\mu$  соответственно.

Функция  $\Psi$  и ее производные, представленные соотношениями (14), с учетом представлений (15) будут такими

$$\begin{aligned} \Psi &= F_1 + F_2 + F_3 + \frac{z^2 - H^2}{2} (F_4 + F_5) + \frac{z^4 - 6z^2 H^2 + 5H^4}{24} F_6, \\ \Psi' &= z(F_4 + F_5) + \frac{4z^3 - 12zH^2}{24} F_6, \quad \Psi'' = F_4 + F_5 + \frac{(z^2 - H^2)}{2} F_6, \\ \Psi''' &= zF_6, \quad \Psi^{IV} = F_6. \end{aligned}$$

Функцию (14) можно представить также в форме

$$\begin{aligned} \Psi &= z\Psi_1 + \frac{z^3}{3!} \Psi_3 + \frac{z^5}{5!} \Psi_5, \quad \Psi' = \Psi_1 + \frac{z^2}{2} \Psi_3 + \frac{z^4}{4!} \Psi_5, \quad \Psi'' = z\Psi_3 + \frac{z^3}{3!} \Psi_5, \\ \Psi''' &= \Psi_3 + \frac{z^2}{2} \Psi_5, \quad \Psi^{IV} = z\Psi_5. \end{aligned} \quad (16)$$

На основе выкладок для функции (16), аналогичных проведенным для функции (14), можно получить

$$\begin{aligned} \Psi &= z(F_1 + F_2 + F_3) + \frac{z^3 - zH^2}{6} (F_4 + F_5) + \frac{3z^5 - 10z^3 H^2 + 7zH^4}{360} F_6, \\ \Psi' &= F_1 + F_2 + F_3 + \frac{3z^2 - H^2}{6} (F_4 + F_5) + \frac{15z^4 - 30z^2 H^2 + 7H^4}{360} F_6, \end{aligned}$$



$$\Psi'' = z(F_4 + F_5) + \frac{(z^3 - zH^2)}{6}F_6, \quad \Psi''' = F_4 + F_5 + \frac{3z^2 - H^2}{6}F_6, \quad \Psi^{IV} = zF_6.$$

Функцию (16), при  $\Psi_3 = \Psi_5 = 0$ , можно использовать для записи представления перемещений (11) и (12)

$$u_1^* = L_{22}L_{33}(F_1 + F_2 + F_3)z, \quad u_2^* = -L_{21}L_{33}(F_1 + F_2 + F_3)z, \\ u_3^* = (L_{21}L_{32} - L_{31}L_{22})(F_1 + F_2 + F_3). \quad (17)$$

Функция (14) при  $\Psi_4 = 0$  используется для записи представления перемещений (13)

$$u_1^* = (L_{12}L_{32} - L_{22}L_{13})(F_4 + F_5)z, \quad u_2^* = (L_{21}L_{31} - L_{11}L_{23})(F_4 + F_5)z, \\ u_3^* = (L_{11}L_{22} - L_{12}^2) \left[ \hat{F}_1 + \hat{F}_2 + \hat{F}_3 + \frac{z^2 - H^2}{2}(F_4 + F_5) \right] + \quad (18) \\ + (A_{44}L_{11} + A_{55}L_{22} - 2A_{45}L_{12})(F_4 + F_5), \quad \hat{F}_j = \int F_j(z_j) dz_j.$$

Следует отметить, что функции  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  удовлетворяют уравнению

$$D_6(F_1 + F_2 + F_3) = L_{33}(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)(F_1 + F_2 + F_3) = 0.$$

При этом  $L_{33}F_3 = 0$ ,  $(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)(F_1 + F_2) = 0$ .

Функции  $F_4$  и  $F_5$  удовлетворяют уравнению  $D_4(\Psi_4) = D_4(\Psi_5) = 0$ . Окончательно для перемещений записываются выражения, являющиеся суммой представлений (17) и (18)

$$u_1^* = z[L_{22}L_{33}(F_1 + F_2) + (L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13})(F_4 + F_5)], \\ u_2^* = z[-L_{21}L_{33}(F_1 + F_2) + (L_{21}L_{31} - L_{11}L_{23})(F_4 + F_5)], \quad (19) \\ u_3^* = (L_{21}L_{32} - L_{31}L_{22})(F_1 + F_2 + F_3) + (L_{11}L_{22} - \\ - L_{12}^2) \left[ \hat{F}_3 + \frac{z^2 - H^2}{2}(F_4 + F_5) \right] + (A_{44}L_{11} + A_{55}L_{22} - 2A_{45}L_{12})(F_4 + F_5).$$

Представления для перемещений (19) после переобозначений в свою очередь могут быть записаны в виде

$$u_1^* = 2Re [u_{11}\varphi'_1 + u_{12}\varphi'_2 + u_{14}\varphi'_4 + u_{15}\varphi'_5] z, \\ u_2^* = 2Re [u_{21}\varphi'_1 + u_{22}\varphi'_2 + u_{24}\varphi'_4 + u_{25}\varphi'_5] z, \quad (20) \\ u_3^* = 2Re [u_{31}\varphi_1 + u_{32}\varphi_2 + u_{34}\varphi_4 + u_{35}\varphi_5 + \\ + u_{33}\varphi_3 + \frac{z^2 - H^2}{2}(u_{34}^*\varphi_4'' + u_{35}^*\varphi_5'')].$$

Здесь введены обозначения

$$u_{1j} = l_{22j}l_{33j}, \quad u_{2j} = -l_{21j}l_{33j}, \quad u_{3j} = l_{21j}l_{32j} - l_{31j}l_{22j} \quad (j = 1, 2), \\ u_{1j} = l_{12j}l_{23j} - l_{22j}l_{13j}, \quad u_{2j} = l_{21j}l_{31j} - l_{11j}l_{23j}, \quad u_{3j}^* = l_{11j}l_{22j} - l_{12j}^2,$$

$$u_{3j} = A_{44}l_{11j} + A_{55}l_{22j} - 2A_{45}l_{12j} \quad (j = 4, 5), \quad u_{33} = l_{213}l_{323} - l_{313}l_{223} + l_{113}l_{223} - l_{123}^2,$$

$$\varphi_j = \varphi_j(z_j), \quad \varphi_j' = \frac{d\varphi_j(z_j)}{dz_j}, \quad z_j = x + \mu_j y, \quad l_{ikj} = l_{ik}(\mu_j).$$

Напряжения выражаются через перемещения (20)

$$\sigma_i^* = 2Re [s_{i1}\varphi_1'' + s_{i2}\varphi_2'' + s_{i4}\varphi_4'' + s_{i5}\varphi_5''] z \quad (i = 1, 2, 3, 6), \quad (21)$$

$$\sigma_i^* = 2Re \left[ s_{i1}\varphi_1' + s_{i2}\varphi_2' + s_{i4}\varphi_4' + s_{i5}\varphi_5' + s_{i3}\varphi_3' + \frac{z^2 - H^2}{2} (s_{i4}^*\varphi_4''' + s_{i5}^*\varphi_5''') \right] \\ (i = 4, 5),$$

где

$$s_{i1} = (A_{i1} + A_{i6}\mu_1) u_{11} + (A_{i6} + A_{i2}\mu_1) u_{21},$$

$$s_{i2} = (A_{i1} + A_{i6}\mu_2) u_{12} + (A_{i6} + A_{i2}\mu_2) u_{22},$$

$$s_{i4} = (A_{i1} + A_{i6}\mu_4) u_{14} + (A_{i6} + A_{i2}\mu_4) u_{24} + A_{i3}u_{34}^*,$$

$$s_{i5} = (A_{i1} + A_{i6}\mu_5) u_{15} + (A_{i6} + A_{i2}\mu_5) u_{25} + A_{i3}u_{35}^* \quad (i = 1, 2, 3, 6),$$

$$s_{i1} = A_{i5}u_{11} + A_{i4}u_{21} + (A_{i5} + A_{i4}\mu_1) u_{31}, \quad s_{i2} = A_{i5}u_{12} + A_{i4}u_{22} + (A_{i5} + A_{i4}\mu_2) u_{32},$$

$$s_{i4} = A_{i5}u_{14} + A_{i4}u_{24} + (A_{i5} + A_{i4}\mu_4) u_{34}, \quad s_{i5} = A_{i5}u_{15} + A_{i4}u_{25} + (A_{i5} + A_{i4}\mu_5) u_{35},$$

$$s_{i3} = (A_{i5} + A_{i4}\mu_3) u_{33}, \quad s_{i4}^* = (A_{i5} + A_{i4}\mu_4) u_{34}^*, \quad s_{i5}^* = (A_{i5} + A_{i4}\mu_5) u_{35}^* \quad (i = 4, 5).$$

Перемещения  $u_k(x, y, z)$  и напряжения  $\sigma(x, y, z)$  представляются соотношениями (6). Анализ решений для сплошного массива (7)–(10) показывает, что в случае материалов, имеющих плоскость упругой симметрии, совпадающую с плоскостью  $Oxy$ , перемещения  $u_1^0, u_2^0$ , а также напряжения  $\sigma_4^0$  и  $\sigma_5^0$  равны нулю.

**3. Граничные условия.** Граничные условия на дневной поверхности ( $z = 0$ ) представляются в форме (5). Полагается, что в компоненты перемещений  $u_1, u_2$  и  $u_3$  множителем входит величина  $H$  – глубина, на которой проводятся численные исследования напряженно-деформируемого состояния вертикальной выработки. В этом случае напряжения на дневной поверхности при  $z = H = 0$  будут нулевыми, что соответствует напряжениям от сил гравитации.

Для незакрепленной выработки первые два условия  $n_1\sigma_1 + n_2\sigma_6 = 0, n_1\sigma_6 + n_2\sigma_2 = 0$ , с учетом представлений (6), (7), (21) и выражений для направляющих косинусов  $n_1 = \cos(n, x) = dy/ds, n_2 = \cos(n, y) = -dx/ds$ , в результате интегрирования приводятся к виду

$$2Re \left[ \frac{s_{11}}{\mu_1}\varphi_1' + \frac{s_{12}}{\mu_2}\varphi_2' \right] = \gamma(\tau_1 y - \tau_6 x), \quad 2Re [s_{21}\varphi_1' + s_{22}\varphi_2'] = \gamma(\tau_2 x - \tau_6 y). \quad (22)$$

Функции  $\varphi_4$  и  $\varphi_5$  в представлениях (21) полагаются равными нулю. Условия (22) позволяют независимо от третьего граничного условия

$$n_1\sigma_5 + n_2\sigma_4 = 0 \quad (23)$$

определить функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Напряжения  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 6$ ) вычисляются по формулам (21). Для вычисления напряжений  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  по формулам (21) при  $i = 4$  и  $5$  необходимо определить функцию  $\varphi_3$  из условия (23).

Если уравнение контура задано в параметрической форме  $x = x(\theta)$ ,  $y = y(\theta)$ , то условие (23) можно записать в форме

$$y'\sigma_5 - x'\sigma_4 = 0, \quad dy = y'(\theta) d\theta, \quad dx = x'(\theta) d\theta.$$

Координаты точек эллиптического контура можно выразить через переменную  $\sigma$

$$x = a \cos(\theta) = \frac{a}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad dx = -a \sin(\theta) d\theta, \quad x' = -a \sin(\theta) = \frac{ai}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right),$$

$$y = b \sin(\theta) = -\frac{bi}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad dy = b \cos(\theta) d\theta, \quad y' = b \cos(\theta) = \frac{b}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right).$$

Функции  $\varphi'_j(z_j)$  ( $j = 1, 2$ ) представим в форме  $\varphi'_j(z_j) = A_j/\zeta_j$ . Для постоянных  $A_1$  и  $A_2$  из условий (22) получим систему уравнений

$$\frac{s_{11}}{\mu_1} A_1 + \frac{s_{12}}{\mu_2} A_2 = \gamma(\tau_1 bi - \tau_6 a) / 2, \quad s_{21} A_1 + s_{22} A_2 = \gamma(\tau_2 a - \tau_6 bi) / 2.$$

Граничное условие (23) приводится к виду

$$q_1 + \bar{q}_1 + \frac{1}{\sigma^2} q_2 + \sigma^2 \bar{q}_2 + \delta_1 \sigma \varphi'_3 + \bar{\delta}_1 \frac{1}{\sigma} \bar{\varphi}'_3 + \delta_2 \frac{1}{\sigma} \varphi'_3 + \bar{\delta}_2 \sigma \bar{\varphi}'_3 = 0, \quad (24)$$

где

$$q_1 = A_1 (bs_{51} - ais_{41}) + A_2 (bs_{52} - ais_{42}), \quad \delta_1 = bs_{53} - ais_{43},$$

$$q_2 = A_1 (bs_{51} + ais_{41}) + A_2 (bs_{52} + ais_{42}), \quad \delta_2 = bs_{53} + ais_{43}.$$

Функция  $\varphi'_3$  представляется в форме

$$\varphi'_3 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k / \zeta_3^{2k-1}. \quad (25)$$

Подставим представление (25), с учетом того, что на контуре  $\zeta_3 = \sigma$ , в условие (24) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях переменной  $\sigma$  нулю. В результате получим

$$\delta_1 B_1 + \bar{\delta}_1 \bar{B}_1 = -(q_1 + q_2); \quad (26)$$

$$B_2 = (-q_2 - \delta_2 B_1) / \delta_1, \quad B_k = B_2 (-\delta_2 / \delta_1)^{k-2} \quad (k \geq 3).$$

Для определения коэффициентов  $B_1$  и  $\bar{B}_1$  к уравнению (26) добавим условие однозначности функции  $u_3$ . Это условие имеет вид

$$u_{33} R_3 B_1 - \bar{u}_{33} \bar{R}_3 \bar{B}_1 = - [u_{31} R_1 A_1 - \bar{u}_{31} \bar{R}_1 \bar{A}_1 + u_{32} R_2 A_2 - \bar{u}_{32} \bar{R}_2 \bar{A}_2].$$

**4. Учет свойств ползучести.** При рассмотрении вязкоупругого напряженного состояния уравнения закона Гука (1) следует заменить интегральными уравнениями состояния, которые в развернутом виде имеют вид

$$e_i(t) = a_{ik}s_k(t) + \int_0^t \frac{dP_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_k(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Матрицы функций ползучести представляются в форме

$$P(t) = P_{ik}(t) = a_{ik}p_{ik}(t) \quad (28)$$

Соотношения (27) можно представить в форме

$$e_i = \bar{a}_{ik} \cdot s_k, \quad \bar{a}_{ik} = a_{ik} (1 + p_{ik}^*) \quad (i, k = \overline{1, 6}).$$

Значения функций ползучести  $p_{ik}(t)$  находятся из экспериментов. Значения действия операторов  $p_{ik}^*(t)$  и  $r_{ik}^*(t)$  на единицу определяются через функцию ползучести по формуле

$$p_{ik}^* \cdot 1 = \int_0^t \frac{dp_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau = p_{ik}(t) - 1.$$

Это дает возможность строить матрицы упругих коэффициентов (28) уравнений состояния (27) в любой момент времени и далее решать задачу по алгоритмам обычной теории упругости.

На базе предположения о том, что из опыта получена кривая ползучести для величины

$$\bar{a}_{11} = \frac{1}{E_1} \cdot 1 = \frac{1}{E_1} [1 + p_{11}^* \cdot 1] = \frac{1}{E_1} p_{E1}(t), \quad p_{11}^* \cdot 1 = p_{E1}(t) - 1,$$

где  $p_{E1}(t)$  – таблично заданная кривая ползучести для величины  $\frac{1}{E_1} \cdot 1$ , полученная из эксперимента, в формулах (29)–(32) показаны способы определения функций ползучести для элементов временных матриц трансверсально-изотропного массива.

Считая  $(1 - 2\bar{\nu}_1) / \bar{E}_1 = (1 - 2\nu_1) / E_1$  можно найти

$$\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} = \frac{\nu_1}{E_1} \left[ 1 + \frac{1}{2\nu_1} (p_{E1}(t) - 1) \right]. \quad (29)$$

Из соотношений

$$\frac{1}{\bar{E}_1} - \frac{2\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_1} - \frac{2\nu_2}{E_2}, \quad \frac{1}{\bar{E}_2} - \frac{2\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_2}{E_2}, \quad (30)$$

можно найти

$$\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} \cdot 1 = \frac{\nu_2}{E_2} \left[ 1 + \frac{E_2}{2E_1\nu_2} (p_{E1}(t) - 1) \right], \quad \frac{1}{\bar{E}_2} \cdot 1 = \frac{1}{E_2} \left[ 1 + \frac{E_2}{E_1} (p_{E1}(t) - 1) \right], \quad (31)$$

$$\bar{a}_{66} = 2 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{\bar{\nu}_1}{E_1} \right). \quad (32)$$

С учетом того, что экспериментальные данные о реологических параметрах  $\bar{a}_{13}$ ,  $\bar{a}_{23}$ ,  $\bar{a}_{33}$ ,  $\bar{a}_{16}$ ,  $\bar{a}_{26}$  и  $\bar{a}_{36}$  в уравнениях состояния для известных геоматериалов в литературе отсутствуют, в представляемом решении могут быть использованы различные модельные случаи: считать их постоянными; вычислять, как различные комбинации средних значений через известные параметры геоматериалов.

**Выводы.** В работе рассмотрена методика получения численно-аналитического решения задачи о напряженном состоянии вертикальной выработки в условиях ползучести горных пород для различных модельных или реальных случаев изменений реологических параметров.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Нескородев Р.Н.* Вязкоупругое напряженно-деформированное состояние в трансверсально-изотропном массиве с вертикальной выработкой / Р.Н. Нескородев // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XXI Международной конференции (Ростов-на-Дону, 11-13 октября 2023 г.) – Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, 2023. – С. 86.
2. *Нескородев Р.Н.* Численно-аналитическая методика расчета напряженно-деформированного состояния анизотропного горного массива с вертикальной выработкой / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №4 (85). – С. 31–38. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-4-31-38. – EDN: YLXDQM.

**R.N. NeskoroDev, A.V. Zyza**

**Numerical and analytical methodology for studying the stress-strain state of a rock mass containing a plane of elastic symmetry near vertical excavation under rock creep conditions.**

The paper proposes a numerical and analytical technique for studying the stress-strain state of a rock mass containing a plane of elastic symmetry near vertical excavation under rock creep conditions. The representation of the solution for displacement functions is expressed in terms of three analytical functions of generalized complex variables. The resulting solution satisfies the boundary conditions on the boundary of the half-space and contains an arbitrary one to satisfy the conditions on the side surface.

**Keywords:** *anisotropic rock mass, vertical excavation, generalized complex variables, stress state, creep.*

*Статья поступила в редакцию 09.12.2024;  
доработана 23.12.2024;  
рекомендована к печати 25.12.2024.*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3  
doi:10.24412/0136-4545-2024-4-84-94  
EDN:VPSYOI



©2024. Т.П. Малютина<sup>1</sup>, Д.Д. Полянский<sup>2</sup>, С.В. Сторожев<sup>3</sup>, Чан Ба Ле Хоанг<sup>4</sup>

### НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА ИЗ МАТЕРИАЛА С ТЕМПЕРАТУРОЗАВИСИМЫМИ СВОЙСТВАМИ

Представлены разработка и апробация специализированной методики нечетко-множественного учета погрешностей задания значений исходных физико-механических и геометрических параметров в расчетных соотношениях модели термомеханического деформирования толстостенного упругого изотропного цилиндра из материала с температурозависимыми свойствами. Используется концепция введения нечетко-множественных обобщений для обладающих разбросами значений исходных и результирующих параметров, рассматриваемых в качестве

---

<sup>1</sup>Малютина Татьяна Петровна – канд. техн. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Makeevka, e-mail: t.p.malutina@donnasa.ru.

*Malytina Tatyana Petrovna* – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>2</sup>Полянский Дмитрий Дмитриевич – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Makeevka, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

*Polyansky Dmitry Dmitrievich* – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>3</sup>Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Makeevka, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

*Storozhev Sergey Valerievich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>4</sup>Чан Ба Ле Хоанг – канд. техн. наук, зав. каф. физики ф-та общих наук Университета природных ресурсов и окружающей среды, Хошимин, Вьетнам, e-mail: Hoangtbl@hcmunre.edu.vn

*Tran Ba Le Hoang* – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Ho Chi Minh City University of Natural Resources and Environment, Vietnam, Faculty of General Sciences, Chair of Physics.

аргументов в расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели, распространяемых на этот тип переменных с применением модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения и аппарата нечетко-множественных вычислений. Приведен ряд результатов численной реализации разработанной методики.

**Ключевые слова:** *полый толстостенный цилиндр, термомеханическое деформирование, материал с температурозависимыми свойствами, погрешности значений исходных параметров, нечетко-множественный учет неопределенности, эвристический принцип обобщения.*

**Введение и постановка задачи.** Теоретический анализ напряженно-деформированного состояния конструкционных элементов в форме протяженных толстостенных полых цилиндров концентрического кольцевого сечения при различных видах воздействий, включая термосиловые, несмотря на достаточно обширный ряд посвященных данной проблеме исследований [1–5], является сохраняющей высокую меру актуальности в фундаментальном и в прикладном аспектах задачей математического моделирования в механике деформируемого твердого тела. Это обусловлено самым широким спектром применений таких конструкций в современных высокотехнологичных научно-промышленных отраслях – в строительной индустрии, машиностроении, промышленной энергетике, приборостроении и электронике, индустрии химических производств, аэрокосмической отрасли. Совершенствование методов прочностных расчетов при проектировании конструкций данного типа связано как с введением дополнительных факторов в модели деформирования, так и с необходимостью учета высокой меры параметрической неопределенности в расчетных моделях, обусловленной разбросами значений исходных геометрических и физико-механических параметров – предусматриваемыми при изготовлении конструктивными технологическими допусками, погрешностями экспериментальных данных о физико-механических свойствах используемых материалов, вариативными субъективными экспертными оценками для отдельных базовых характеристик конструкций. Как отмечалось в ранее выполненных исследованиях по учету факторов параметрической неопределенности в моделях термомеханического деформирования толстостенных цилиндрических и сферических конструкций [6, 7], применение в этих целях методов вероятностно-стохастического анализа на практике осложнено отсутствием статистически корректной информации о подлежащих учету разбросах, большим числом подлежащих одновременно учету неконтрастных параметров и необходимостью априорного задания типа вероятностных распределений для экзогенных и эндогенных характеристик расчетных моделей. В этой связи, для решения задачи анализа влияния параметрической неопределенности в моделях температурного деформирования полых цилиндров пространственной геометрии с учетом дополнительных усложняющих факторов, таких как, в частности, непрерывная радиальная неоднородность материала рассматриваемых конструкций [6], предлагается использование методов теории нечетких множеств [8–15] с более мягким уровнем требований к характеру неопределенной исходной информации, в рамках которого предусматривается переход к некон-

трастным исходным параметрам в расчетных соотношениях для результирующих характеристик детерминистических вариантов рассматриваемых моделей посредством применения альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения для расширения областей определения указанных расчетных соотношений на аргументы нечетко-множественного типа [10–15].

Целью исследований, представляемых в данной работе, является учет специального варианта зависимости свойств материала от температуры в модели термомеханического деформирования толстостенного полого изотропного цилиндра при разработке нечетко-множественной методики анализа эффектов влияния комплекса факторов параметрической неопределенности в виде разбросов значений исходных физико-механических и геометрических характеристик в расчетной модели рассматриваемого конструкционного элемента.

### 1. Расчетные соотношения детерминистического варианта модели.

Рассматриваемый специальный вариант детерминистической версии модели осесимметричного термомеханического деформирования толстостенного изотропного цилиндра из материала с температурозависимыми свойствами представлен в работе [3]. В рамках этой модели полагается, что модуль Юнга  $E(T)$  материала цилиндра, занимающего в нормированных цилиндрических координатах  $Or\theta z$  область  $V = \{a \leq r \leq b, \theta \in [0, 2\pi], z \in (-\infty, \infty)\}$ , является функцией параметра распределения температуры по радиусу цилиндра  $T(r)$ , а коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_T$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  данного материала постоянны. Задаваемое представление  $E(T)$  имеет вид

$$E(T) = E_0 \exp(-\beta T), \quad \beta > 0. \quad (1)$$

В случае задания постоянной температуры нагрева цилиндра  $T_a$ , на его внутренней цилиндрической поверхности и поддержания нулевой температуры на внешней граничной поверхности

$$T(a) = T_a, \quad T(b) = 0, \quad (2)$$

радиальное распределение температур описывается соотношениями

$$T(r) = -\vartheta^{-1} \ln(r/b), \quad \vartheta = T_a^{-1} \ln(b/a).$$

Внутренняя и внешняя поверхности цилиндра свободны от механических напряжений

$$\sigma_{rr}(a) = 0, \quad \sigma_{rr}(b) = 0, \quad (3)$$

и записывается условие, характеризующее осевые деформации

$$\int_a^b r \sigma_{zz} dr = 0. \quad (4)$$

В анализируемом эксклюзивном варианте данной модели рассматриваются конструкционные элементы, для которых  $a = b/2$  и  $\beta = \vartheta$ . В этом специальном



случае полученные в работе [3] при анализе уравнений и граничных условий детерминистического варианта рассматриваемой модели представления для напряжений в цилиндре имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= F_{\sigma r}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b) = \\ &= ((E_0\alpha_T)/(b\vartheta))(\lambda_{1r}r^{-(1+\mu)/2} - \lambda_{2r}r^{(\mu-1)/2} + r),\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= F_{\sigma\theta}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b) = \\ &= ((E_0\alpha_T)/(b\vartheta))(\lambda_{1\theta}r^{-(1+\mu)/2} - \lambda_{2\theta}r^{(\mu-1)/2} + 2r),\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= F_{\sigma z}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b) = \\ &= ((E_0\alpha_T)/(b\vartheta))(\lambda_{1z}r^{-(1+\mu)/2} - \lambda_{2z}r^{(\mu-1)/2} + r \ln(r/b) + \omega),\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_{1r} &= (2^{((3-\mu)/2)} - 1)b^{((3+\mu)/2)} / ((1 - 2^{-\mu})2^{((3+\mu)/2)}), \\ \lambda_{2r} &= (2^{((3+\mu)/2)} - 1)b^{((3+\mu)/2)} / ((1 - 2^{-\mu})2^{((3-\mu)/2)});\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1\theta} &= (((\nu\mu_1 + (1 - \nu)) / ((1 - \nu)\mu_1 + \nu)))\lambda_{1r}, \\ \lambda_{2\theta} &= (((\nu\mu_2 + (1 - \nu)) / ((1 - \nu)\mu_2 + \nu)))\lambda_{2r};\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1z} &= ((\nu(\mu_1 + 1)) / ((1 - \nu)\mu_1 + \nu))\lambda_{1r}, \\ \lambda_{2z} &= ((\nu(\mu_2 + 1)) / ((1 - \nu)\mu_2 + \nu))\lambda_{2r};\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\omega &= (3\nu/(1 - 2^{-3})) \times \\ &\times (((1 - \mu)(2^{((3+\mu)/2)} - 1)\lambda_{1r}) / ((3 - \mu)((1 - \nu)\mu_1 + \nu)b^{((3+\mu)/2)}) - \\ &- ((1 + \mu)(2^{((3-\mu)/2)} - 1)\lambda_{2r}) / ((3 + \mu)((1 - \nu)\mu_2 + \nu)b^{((3-\mu)/2)})) + \\ &+ (7 - 3 \ln 2) / ((24(1 - 2^{-3}))); \end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\vartheta &= T_a^{-1} \ln 2, \quad \mu = ((5 - 9\nu)/(1 - \nu))^{1/2}, \\ \mu_1 &= -((\mu + 1)/2), \quad \mu_2 = ((\mu - 1)/2).\end{aligned}\quad (12)$$

Соотношение (1) является предметом нечетко-множественного обобщения для учета в рассматриваемой модели факторов неопределенности в виде разбросов значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров  $\nu$ ,  $E_0$ ,  $\alpha_T$ ,  $T_a$ ,  $b$ .

**2. Нечетко-множественный расчетный алгоритм.** Нечетко-множественная модификация алгоритма расчета температурных напряжений в стенке

цилиндра в качестве предварительного этапа предполагает осуществление процедуры фазсификации имеющихся массивов экспериментальных и экспертных данных [8–15] о разбросах значений неконтрастных исходных параметров  $\nu$ ,  $E_0$ ,  $\alpha_T$ ,  $T_a$ ,  $b$ . Применительно к начальным и результирующим параметрам расчетных соотношений (5)–(7) вводятся в рассмотрение их нечетко-множественные расширения  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{E}_0$ ,  $\tilde{\alpha}_T$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{\sigma}_{rr}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ ,  $\tilde{\sigma}_{zz}$ , представляемые разложениями по множествам  $\alpha$  – уровней

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha], & \tilde{E}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{0\alpha}, \overline{E}_{0\alpha}], \\ \tilde{\alpha}_T &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{\alpha}_{T\alpha}], & \tilde{T}_a &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_{a\alpha}, \overline{T}_{a\alpha}], \\ \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha], & \tilde{\sigma}_{rr} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{rr\alpha}, \overline{\sigma}_{rr\alpha}], \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}, \overline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}], & \tilde{\sigma}_{zz} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{zz\alpha}, \overline{\sigma}_{zz\alpha}].\end{aligned}\tag{13}$$

Далее могут быть применены следующие варианты разрабатываемого алгоритма. При описании параметрических обобщений  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{E}_0$ ,  $\tilde{\alpha}_T$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{b}$  несимметричными квазигауссовыми нормальными нечеткими числами [10, 15], для границ интервалов  $\alpha$  – уровней в разложениях (13) записываются представления

$$\begin{aligned}\underline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} - \sigma_{*l\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} + \sigma_{*r\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{E}_{0\alpha} &= m_{*E_0} - \sigma_{*lE_0}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{E}_{0\alpha} &= m_{*E_0} + \sigma_{*rE_0}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\alpha}_{T\alpha} &= m_{*\alpha_T} - \sigma_{*l\alpha_T}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\alpha}_{T\alpha} &= m_{*\alpha_T} + \sigma_{*r\alpha_T}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{T}_{a\alpha} &= m_{*T_a} - \sigma_{*lT_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{T}_{a\alpha} &= m_{*T_a} + \sigma_{*rT_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{b}_\alpha &= m_{*b} - \sigma_{*lb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{b}_\alpha &= m_{*b} + \sigma_{*rb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.\end{aligned}\tag{14}$$

При описании обобщений  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{E}_0$ ,  $\tilde{\alpha}_T$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{b}$  нормальными трапецидальными нечеткими интервалами [16, 17] с кортежами реперных значений

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \\ \tilde{E}_0 &= (E_{01}, E_{02}, E_{03}, E_{04}), \\ \tilde{\alpha}_T &= (\alpha_{T1}, \alpha_{T2}, \alpha_{T3}, \alpha_{T4}), \\ \tilde{T}_a &= (T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}, T_{a4}), \\ \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4),\end{aligned}\tag{15}$$

соответствующие границы интервалов  $\alpha$  – уровней в разложениях (13) описываются выражениями

$$\begin{aligned}
 \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, & \bar{\nu}_\alpha &= \alpha\nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4; \\
 \underline{E}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)E_{01} + \alpha E_{02}, & \bar{E}_{0\alpha} &= \alpha E_{03} + (1 - \alpha)E_{04}; \\
 \underline{\alpha}_{T\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{T1} + \alpha\alpha_{T2}, & \bar{\alpha}_{T\alpha} &= \alpha\alpha_{T3} + (1 - \alpha)\alpha_{T4}; \\
 \underline{T}_{a\alpha} &= (1 - \alpha)T_{a1} + \alpha T_{a2}, & \bar{T}_{a\alpha} &= \alpha T_{a3} + (1 - \alpha)T_{a4}; \\
 \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= \alpha b_3 + (1 - \alpha)b_4.
 \end{aligned} \tag{16}$$

В случае описания обобщений  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{E}_0$ ,  $\tilde{\alpha}_T$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{b}$  неконтрастных экзогенных параметров треугольными нормальными нечеткими числами

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \\
 \tilde{E}_0 &= (E_{01}, E_{02}, E_{03}), \\
 \tilde{\alpha}_T &= (\alpha_{T1}, \alpha_{T2}, \alpha_{T3}), \\
 \tilde{T}_a &= (T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}), \\
 \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3),
 \end{aligned} \tag{17}$$

границы интервалов  $\alpha$  – уровней имеют вид

$$\begin{aligned}
 \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, & \bar{\nu}_\alpha &= \alpha\nu_2 + (1 - \alpha)\nu_3; \\
 \underline{E}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)E_{01} + \alpha E_{02}, & \bar{E}_{0\alpha} &= \alpha E_{02} + (1 - \alpha)E_{03}; \\
 \underline{\alpha}_{T\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{T1} + \alpha\alpha_{T2}, & \bar{\alpha}_{T\alpha} &= \alpha\alpha_{T2} + (1 - \alpha)\alpha_{T3}; \\
 \underline{T}_{a\alpha} &= (1 - \alpha)T_{a1} + \alpha T_{a2}, & \bar{T}_{a\alpha} &= \alpha T_{a2} + (1 - \alpha)T_{a3}; \\
 \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= \alpha b_2 + (1 - \alpha)b_3.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Общий прием применения ко всем вышеописанным вариантам задания типов нечетко-множественных исходных параметров альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения включает предварительный этап исследования свойств знакоопределенности частных производных [11, 15] от функций  $F_{\sigma r}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)$ ,  $F_{\sigma\theta}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)$ ,  $F_{\sigma z}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)$  по всем аргументам в области их совокупного изменения, в рамках которого получены оценки

$$\begin{aligned}
 \partial F_{\sigma r}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial E_0 &\geq 0, \\
 \partial F_{\sigma r}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial \alpha_T &\geq 0, \\
 \partial F_{\sigma r}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial T_a &\geq 0; \\
 \partial F_{\sigma\theta}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial E_0 &\geq 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \partial F_{\sigma\theta}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial\alpha_T &\geq 0, \\
 \partial F_{\sigma\theta}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial T_a &\geq 0; \\
 \partial F_{\sigma z}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial E_0 &\geq 0, \\
 \partial F_{\sigma z}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial\alpha_T &\geq 0, \\
 \partial F_{\sigma z}(r, \nu, E_0, \alpha_T, T_a, b)/\partial T_a &\geq 0.
 \end{aligned}$$

С учетом (19) и с применением альфа–уровневой модификации эвристического принципа обобщения могут быть записаны следующие представления для величин  $\underline{\sigma}_{rr\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}_{rr\alpha}$ ;  $\underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}_{\theta\theta\alpha}$ ;  $\underline{\sigma}_{zz\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}_{zz\alpha}$  в разложениях результирующих нечетко-множественных характеристик по множествам  $\alpha$  – уровня:

$$\begin{aligned}
 \underline{\sigma}_{rr\alpha} &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\sigma r}(r, \nu, \underline{E}_{0\alpha}, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{T}_{a\alpha}, b), & (20) \\
 \bar{\sigma}_{rr\alpha} &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\sigma r}(r, \nu, \bar{E}_{0\alpha}, \bar{\alpha}_{T\alpha}, \bar{T}_{a\alpha}, b); \\
 \underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha} &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\sigma\theta}(r, \nu, \underline{E}_{0\alpha}, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{T}_{a\alpha}, b), \\
 \bar{\sigma}_{\theta\theta\alpha} &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\sigma\theta}(r, \nu, \bar{E}_{0\alpha}, \bar{\alpha}_{T\alpha}, \bar{T}_{a\alpha}, b); \\
 \underline{\sigma}_{zz\alpha} &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\sigma z}(r, \nu, \underline{E}_{0\alpha}, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{T}_{a\alpha}, b), \\
 \bar{\sigma}_{zz\alpha} &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\sigma z}(r, \nu, \bar{E}_{0\alpha}, \bar{\alpha}_{T\alpha}, \bar{T}_{a\alpha}, b).
 \end{aligned}$$

**3. Результаты вычислительных экспериментов.** Оценки влияния эффектов разброса значений исходных параметров в рассматриваемом частном варианте модели деформирования толстостенного цилиндра из материала с температурозависимыми свойствами на базе применения разработанной нечетко-множественной методики в качестве примера получены для толстостенного цилиндра с не имеющими отклонений геометрическими параметрами  $a = 0.15$  м,  $b = 0.3$  м и описываемыми треугольными нечеткими числами, имеющими разбросы значений физико-механическими параметрами

$$\tilde{\nu} = (0.275, 0.3, 0.325),$$

$$\tilde{E}_0 = (1.78E_*, 2.0E_*, 2.23E_*),$$

Учет неопределенности в модели деформирования толстостенного цилиндра

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_T &= (9.4\alpha_*, 12.0\alpha_*, 15.5\alpha_*), \\ \tilde{T}_a &= (185.0T_*, 200.0T_*, 222.0T_*), \\ E_* &= 10^5 \text{ МПа}, \quad \alpha_* = 10^{-6} \text{ 1/град}, \quad T_* = 1 \text{ град.}\end{aligned}$$

В таблицах 1 и 2 соответственно представлены рассчитанные значения модальных значений  $\sigma_{\theta\theta 1}$ ,  $\sigma_{zz 1}$ , а также границ интервалов разбросов  $\underline{\sigma}_{\theta\theta 0}$ ,  $\overline{\sigma}_{\theta\theta 0}$  и  $\underline{\sigma}_{zz 0}$ ,  $\overline{\sigma}_{zz 0}$  при различных значениях радиальной координаты  $r$  для нечетко-множественных характеристик  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  и  $\tilde{\sigma}_{zz}$ .

Таблица 1.

$r$ [М]	$\sigma_{\theta\theta 1}$ [ $10^{-8}$ Па]	$\underline{\sigma}_{\theta\theta 0}$ [ $10^{-8}$ Па ]	$\overline{\sigma}_{\theta\theta 0}$ [ $10^{-8}$ Па]
0,15	2.62183	1.59987	4.39463
0,18	3.97937	2.47967	6.55645
0,21	5.28553	3.32583	8.63325
0,24	6.56624	4.15729	10.6880
0,27	7.83422	4.98091	12.6818
0,3	9.09616	5.80077	14.6855

Таблица 2.

$r$ [М]	$\sigma_{zz 1}$ [ $10^{-8}$ Па]	$\underline{\sigma}_{zz 0}$ [ $10^{-8}$ Па ]	$\overline{\sigma}_{zz 0}$ [ $10^{-8}$ Па]
0,15	-0.487654	-0.764813	-0.321083
0,18	0.172354	0.103222	0.29325
0,21	0.948318	0.602304	1.53668
0,24	1.82355	1.16542	2.93881
0,27	2.78557	1.78447	4.47968
0,3	3.82469	2.45325	6.14380

В случае описания неконтрастных исходных параметров рассматриваемой модели нечетки нормальными трапецеидальными интервалами

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= (0.273, 0.295, 0.305, 0.327), \\ \tilde{E}_0 &= (1.76E_*, 1.92E_*, 2.03E_*, 2.26E_*), \\ \tilde{\alpha}_T &= (9.3\alpha_*, 11.5\alpha_*, 12.3\alpha_*, 15.7\alpha_*), \\ \tilde{T}_a &= (182.0T_*, 195.0T_*, 204.0T_*, 224.0T_*),\end{aligned}$$

границы интервалов модальных значений нечетко-множественных характеристик  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  и  $\tilde{\sigma}_{zz}$ , а также границы интервалов разбросов их величин при различных значениях радиальной координаты приведены соответственно в таблицах 3 и 4.

Таблица 3.

$r$ [м]	$\underline{\sigma}_{\theta\theta 1}$ [ $10^{-8}$ Па]	$\bar{\sigma}_{\theta\theta 1}$ [ $10^{-8}$ Па]	$\underline{\sigma}_{\theta\theta 0}$ [ $10^{-8}$ Па ]	$\bar{\sigma}_{\theta\theta 0}$ [ $10^{-8}$ Па]
0,15	2.32755	2.81032	1.53227	4.56783
0,18	3.54621	4.24981	2.37827	6.80630
0,21	4.71914	5.63435	3.19394	8.95650
0,24	5.86943	6.99169	3.99458	11.0631
0,27	7.00839	8.33541	4.78769	13.1478
0,3	8.14196	9.67267	5.57721	15.2222

Таблица 4.

$r$ [м]	$\underline{\sigma}_{zz 1}$ [ $10^{-8}$ Па]	$\bar{\sigma}_{zz 1}$ [ $10^{-8}$ Па]	$\underline{\sigma}_{zz 0}$ [ $10^{-8}$ Па ]	$\bar{\sigma}_{zz 0}$ [ $10^{-8}$ Па]
0,15	-0.515422	-0.43921	-0.791062	-0.309529
0,18	0.152461	0.185381	0.098709	0.305079
0,21	0.848144	1.00923	0.578912	1.593220
0,24	1.63287	1.93843	1.120720	3.045740
0,27	2.49544	2.95972	1.716390	4.641960
0,3	3.42718	4.06283	2.359920	6.365840

Расчеты показывают, что разбросы значений представленных таблицах 1–4 величин при рассматриваемых вариантах описания неконтрастности исходных параметров весьма существенно возрастают с увеличением значения параметра  $r$ .

**Выводы.** В результате проведенных исследований разработана нечетко-множественная методика учета разбросов значений исходных геометрических и физико-механических параметров в расчетных соотношениях специального варианта модели определения характеристик термомеханического деформирования толстостенного упругого изотропного цилиндра из материала с температурозависимыми свойствами, как типа конструкций с предъявляемыми повышенными требованиями к оценкам прочности и надежности при проектировании и эксплуатации в связи с разнообразными применениями в строительных сооружениях, в технологическом оборудовании энергетических и химических производств. Реализованный подход базируется на введении нечетко-множественных описаний неконтрастных экзогенных характеристик и использовании их в качестве аргументов в расширяемых на данный тип переменных расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели с применением аппарата нечетко-множественных вычислений и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения. Приведены отдельные результаты численной реализации разработанной методики.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964. – 311 с.
2. Бажанов В.А. Расчет конструкций на тепловые воздействия / В.А. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синюков. – Москва: Машиностроение, 1969. – 599 с.
3. Гурьева Л.А. Исследование температурных напряжений в толстостенной трубе, свойства которой зависят от температуры / Л.А. Гурьева, И.Г. Гурьев, Н.В. Акимова, С.С. Сидорова // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. Механика. – 2002. – Т. 1, № 3. – С. 75–80.
4. Мизонов В.Е. Исследование переходных процессов теплообмена в толстостенных охлаждаемых цилиндрах с импульсным подводом теплоты / В.Е. Мизонов, В.Н. Виноградов, П.В. Жуков // Вестник ИГЭУ. – 2009. – Вып. 3. – С. 17–20.
5. Зоалкфл Д.А. Определение температурных напряжений при возведении монолитных толстостенных цилиндрических оболочек / Д.А. Зоалкфл, А.С. Чепурненко, В.С. Тюрина // Современные тенденции в строительстве, градостроительстве и планировке территорий. – 2024. – Вып. 3 (2). – С. 50–58. – DOI: 10.23947/2949-1835-2024-3-2-50-58.
6. Номбре С.Б. Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №4 (81). – С. 63–76. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN: TOGBNE.
7. Номбре С.Б. Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 56–66. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-56-66. – EDN: TVWFZT.
8. Алтушин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтушин, М.В. Семухин. – Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2002. – 352 с.
9. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. – М.: Изд-во Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
10. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
11. Ротштейн А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: Универсум, 2007. – 215 с.
12. Anastassiou G.A. Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
13. Sonbol A.H. TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42. – P. 702–712.
14. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2013. – 276 p.
15. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
16. Grzegorzewski P. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
17. Ban A.I. Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

T.P. Malutina, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev, Tran Ba Le Hoang

Fuzzy-set analysis of parametric uncertainty effects in a model of deformation of a

**thick-walled cylinder made of a material with temperature-dependent properties.**

The article presents the development and testing of a specialized technique for fuzzy-set accounting of errors in specifying the values of the initial physical, mechanical and geometric parameters in the calculation relationships of the model of thermomechanical deformation of a thick-walled elastic isotropic cylinder made of a material with temperature-dependent properties. The concept of introducing fuzzy-set generalizations for initial and resulting parameters with scattered values, considered as arguments in the calculation expressions of the deterministic version of the model under study, is used. These parameters are extended to this type of variables using a modified alpha-level version of the heuristic principle of generalization and the apparatus of fuzzy-set calculations. A number of results of the numerical implementation of the developed technique are presented.

**Keywords:** *hollow thick-walled cylinder, thermomechanical deformation, material with temperature-dependent properties, errors in the values of the initial parameters, fuzzy-set accounting of uncertainty, heuristic principle of generalization.*

*Статья поступила в редакцию 15.11.2024;  
доработана 17.12.2024;  
рекомендована к печати 20.12.2024.*



ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,  
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ  
ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК 622.831, 622.23.02  
doi:10.24412/0136-4545-2024-4-95-103  
EDN:VZQJVN



©2024. Ф.М. Голубев<sup>1</sup>, В.А. Анциферов<sup>2</sup>, Л.Н. Крижановская<sup>3</sup>

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ  
ПАРАМЕТРОВ ПОДРАБОТАННОГО ГОРНОГО МАССИВА  
НА ХАРАКТЕР ПРОЦЕССА СДВИЖЕНИЯ

В статье описан подход к формированию конечно-элементных моделей горного массива с учетом многократной подработки. Проведен анализ влияния упругих свойств горных пород в зоне беспорядочных обрушений ранее отработанных лав верхних горизонтов на параметры сдвижения при отработке нижних горизонтов. Предложен подход к использованию результатов сейсмоакустических исследований для определения влияния многократной подработки на изменение зон локализации деформаций земной поверхности.

**Ключевые слова:** упругие свойства горных пород, граничные углы, углы полных сдвижений, скорость распространения упругих волн, горная выработка, зона влияния горных работ.

**Введение.** Подземные очистные работы на угольных шахтах вызывают сдвижение горного массива и деформации земной поверхности. Это, в свою очередь, негативно сказывается на объектах социальной и производственной инфраструктуры, расположенных на подрабатываемой территории, приводит к их

---

<sup>1</sup>Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f\_golubev@list.ru.

*Golubev Philipp Maksimovich* – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

<sup>2</sup>Анциферов Вадим Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. эколого-геофизических исследований РАНМИ, Донецк, e-mail: antsiferov\_a@mail.ru.

*Antsiferov Vadim Andreevich* – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Ecological and Geophysical Research.

<sup>3</sup>Крижановская Лариса Николаевна – ученый секретарь РАНМИ, Донецк, e-mail: lnk\_ukrnimi@mail.ru.

*Krizhanovskaya Larisa Nikolaevna* – Scientific Secretary, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

повреждениям, вплоть до утраты ими функционального состояния. Для предотвращения серьёзного ущерба объектам поверхности от вредного влияния очистных горных выработок необходим точный прогноз сдвижений и деформаций земной поверхности, вызванных подземными горными работами. Проблема состоит в том, что применяемые методики такого прогноза [1, 2] не учитывают влияние на массив многократной подработки. Соответственно, в подработанном несколько раз горном массиве не учитывается изменение его физико-механических свойств и их влияние на сдвижения. В результате процесса сдвижения над горными выработками образуются участки повышенной трещиноватости. Профессор Казаковский Д.А. [3] излагает процесс сдвижения в толще горных пород следующим образом: «При выемке пологопадающих и наклонных угольных пластов с обрушением кровли в сдвигающемся массиве можно выделить три основные зоны: зону беспорядочного обрушения пород; зону прогиба пород с разрывом сплошности; зону прогиба без разрыва сплошности». Согласно исследованиям А.А. Борисова [4], механические свойства горного массива в покрывающей толще существенно изменяются, как в зависимости от литологического состава, так и от горнотехнических условий отработки. Разработанная А.А. Борисовым схема развития деформаций представлена на рисунке 1.

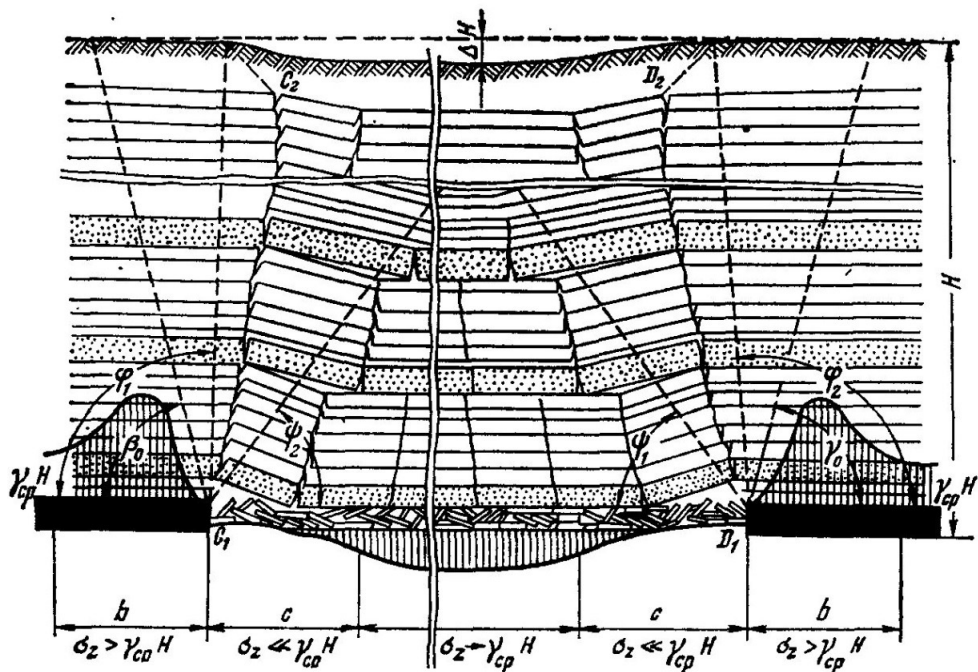


Рис. 1. Характер разрушения пород в режиме установившегося движения по А.А. Борисову

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что в результате первичной подработки участок горного массива над лавой претерпевает существенные изменения и его упругие свойства снижаются, что оказывает влияние на

характер деформирования горного массива при дальнейших его подработках. Целью данной статьи является определение влияния прочностных свойств массива горных пород в зоне беспорядочных обрушений над ранее отработанной лавой на параметры сдвижения при отработке очистных горных выработок на нижележащем горизонте.

**1. Методика исследования.** Для определения влияния многократной подработки на изменения параметров сдвижения земной поверхности необходимо определить характер влияния физических свойств горного массива на развитие процесса деформаций. Определить величину отклонения граничного угла после его пересечения с зоной полных сдвижений возможно при помощи моделирования геомеханических процессов. Формирование модели производилось согласно схеме, представленной на рисунке 2.

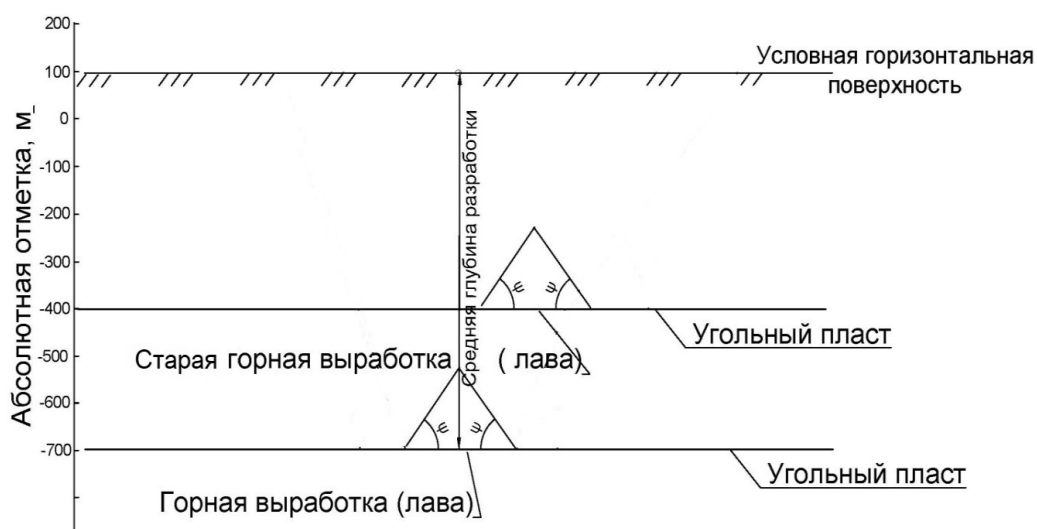


Рис. 2. Схема расположения горных выработок для разработки модели сдвижения земной поверхности, где  $\psi$  – углы полных сдвижений

Для определения характера влияния свойств подработанного горного массива на параметры процесса сдвижения была разработана конечно-элементная модель, граничные условия в которой задавались с учетом принципа суперпозиций сил и подразумевали закрепление от перемещений перпендикулярно крайним площадкам модели. Нагрузка задавалась путем учета веса залегающих пород и силы гравитации. Практика расчетов конечно-элементных моделей горного массива показывает, что модель изотропии его свойств не способна в полной мере описать углепородный массив, так как физико-механические свойства горного массива в различных направлениях могут отличаться в несколько раз, поэтому при формировании геомеханической модели материалы рассматривались как обладающие свойствами ортотропии. Ортотропия позволяет более точно учитывать различия в физико-механических свойствах материала в раз-

личных направлениях, что особенно актуально для геологических образований, где структура, слоистость и проницаемость могут сильно варьироваться. При использовании моделей ортотропных горных массивов учитываются три главные оси симметрии, и для каждой из этих осей могут быть заданы свои значения таких свойств, как модуль упругости, коэффициенты Пуассона и прочие параметры, влияющие на поведение горных пород при нагрузках. Это приводит к более реалистичному и точному моделированию, особенно при анализе механического поведения горных пород под действием различных геологических и инженерных факторов. Согласно исследованиям [5], уравнение обобщенного закона Гука для ортотропных горных пород можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_x = E_1 \cdot \frac{R_{x4}}{R_{x5}} \cdot \varepsilon_x + E_1 \cdot \frac{R_{x2}}{R_{x5}} \cdot \varepsilon_y + E_1 \cdot \frac{R_{x6}}{R_{x5}} \cdot \varepsilon_z, & \tau_{yz} = G_{23} \cdot \gamma_{yz}, \\ \sigma_y = E_2 \cdot \frac{R_{y1}}{R_{y2}} \cdot \varepsilon_x + E_2 \cdot \frac{R_{y3}}{R_{y2}} \cdot \varepsilon_y + E_2 \cdot \frac{R_{y4}}{R_{y2}} \cdot \varepsilon_z, & \tau_{xz} = G_{13} \cdot \gamma_{xz}, \\ \sigma_z = E_3 \cdot \frac{R_{z1}}{R_{z2}} \cdot \varepsilon_x + E_3 \cdot \frac{R_{z3}}{R_{z2}} \cdot \varepsilon_y + E_3 \cdot \frac{R_{z4}}{R_{z2}} \cdot \varepsilon_z, & \tau_{xy} = G_{12} \cdot \gamma_{xy}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E_1, E_2, E_3$  – модули упругости для растяжения-сжатия вдоль главных осей координат X, Y, Z соответственно, МПа;  $G_{23}, G_{13}, G_{12}$  – модули сдвига для главных плоскостей YOZ, XOZ, XOY, МПа.

**2. Построение и расчетный анализ геомеханической модели.** Построение геомеханической модели подрабатываемого массива методом конечных элементов производилось в несколько этапов. На первом этапе производится построение геометрической модели заданного участка стратиграфии горного массива вместе с очистными выработками. На втором этапе формируется база данных горных пород, из которых состоят слои пород в геометрической модели, построенной на первом этапе. Для каждой породы задаётся набор ряда физико-механических свойств, необходимых для расчёта модели. На третьем этапе производится привязка элементов геометрической модели к соответствующим элементам базы данных горных пород, т.е. каждому пространственному блоку ставится в соответствие определённая горная порода со своим набором физико-механических свойств. На этом этапе осуществляется также создание конечно-элементной расчётной сетки, т.е. разбиение пространственных блоков на ряд простых пространственных фигур. На четвёртом этапе задаются граничные условия модели (ограничения смещений в определенных направлениях, исходная нагрузка в виде гравитационной силы). Для установления влияния прочностных свойств массива горных пород в зоне беспорядочных обрушений над ранее отработанной лавой на параметры сдвижения при отработке очистных горных выработок на нижележащем горизонте, высота зоны беспорядочных обрушений задавалась согласно [4]:

$$h = \eta \cdot \frac{h_6 - h_c}{k_{cp} - 1}, \quad (2)$$

где  $\eta$  – коэффициент запаса, принимающий значения 2–3 [4], безразмерная величина;  $h_в$  – вынимаемая мощность пласта, м.;  $h_c$  – предел свободного опускания основной кровли, м.;  $k_{ср}$  – коэффициент разрыхления пород, безразмерная величина. Изменение свойств горного массива в зоне беспорядочных обрушений над лавой производилось последовательно, от меньшего к большему, согласно таблице 1.

Таблица 1. Варианты изменения свойств горных пород

Физико-механические свойства горных пород	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Модуль Юнга по оси Y, МПа	9.00E+08	9.90E+08	1.09E+09	1.45E+09
Коэффициент Пуассона по оси Y, б.в.	0.25	0.275	0.3025	0.4026275
Плотность, кг/см <sup>3</sup>	1800	1900	2000	2100

Расчет оседаний производился для модели со следующими условиями отработки:

- средняя глубина работ 696 метра;
- глубина старых горных работ 496 метров;
- угол падения пласта 0 градусов;
- вынимаемая мощность пласта 1 метр;
- длина лавы 200 метров.

Геомеханическая модель, представленная на рисунках 3 и 4, разрабатывалась в соответствии с «Правилами» [1, 2] и на основании исследований [6].

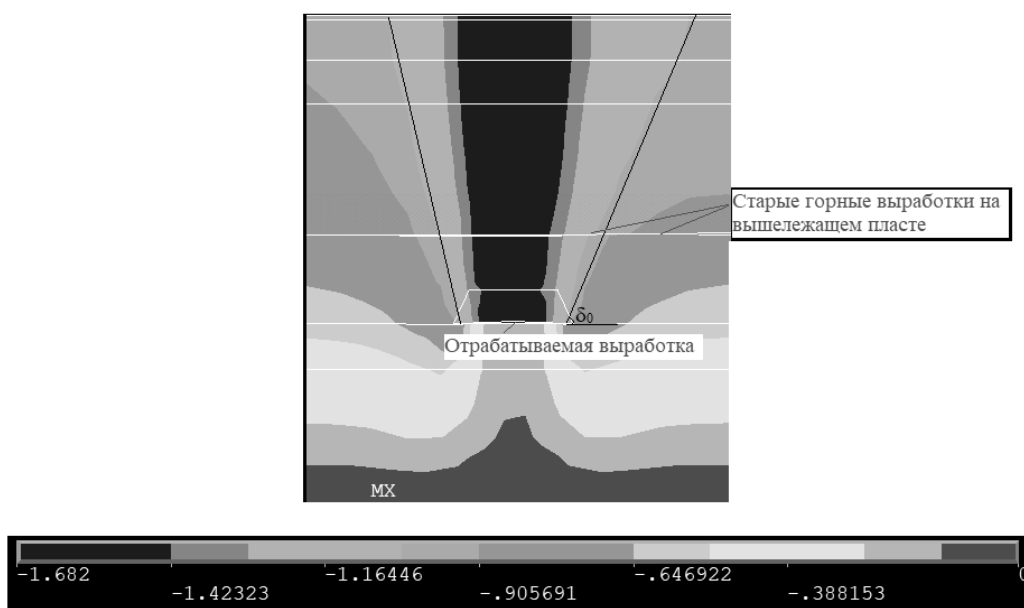


Рис. 3. Модель распространения оседаний при первом варианте физико-механических свойств в зоне беспорядочного обрушения ( $\delta_0$  – граничный угол)

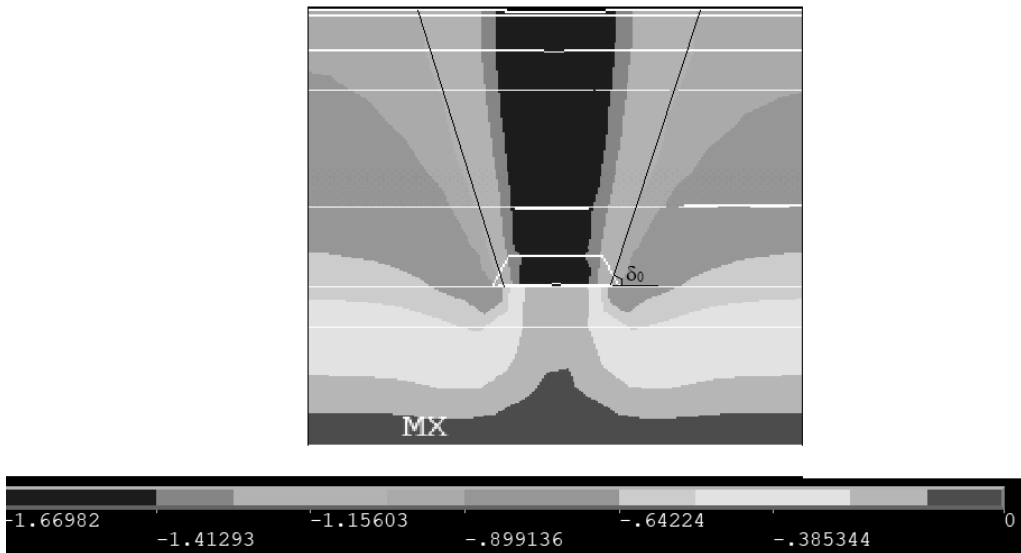


Рис. 4. Модель распространения оседаний при четвёртом варианте физико-механических свойств в зоне беспорядочного обрушения ( $\delta_0$  – граничный угол)

Из рисунков 3 и 4 можно сделать вывод о наличии существенного влияния упругих свойств зоны беспорядочных обрушений над старыми горными выработками на параметры сдвижения. Характер распределения оседаний для каждого из вариантов приведен на рисунке 5.

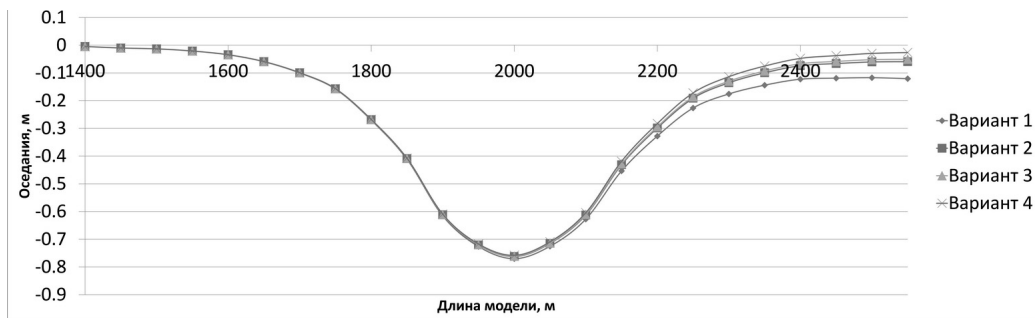


Рис. 5. Характер распределения оседаний для каждого из вариантов свойств горных пород в зоне беспорядочных обрушений

Полученные результаты подтверждают влияние зон разуплотнения горных пород на характер распространения оседаний в массиве. Учитывая, что согласно [1–5] наибольшие изменения в массиве происходят в пределах зон полных сдвижений, характер изменения упругих характеристик горного массива в пределах зоны полных сдвижений будет определять величину отклонения граничного угла  $\delta_0$ . Таким образом, на основании анализа конечно-элементных моделей с различными вариантами физико-механических свойств горного массива над лавой,

взаимосвязь, отражающая влияние упругих характеристик зоны беспорядочных обрушений на параметры деформирования земной поверхности при многократной подработке, может быть описана графиком, представленным на рисунке 6.

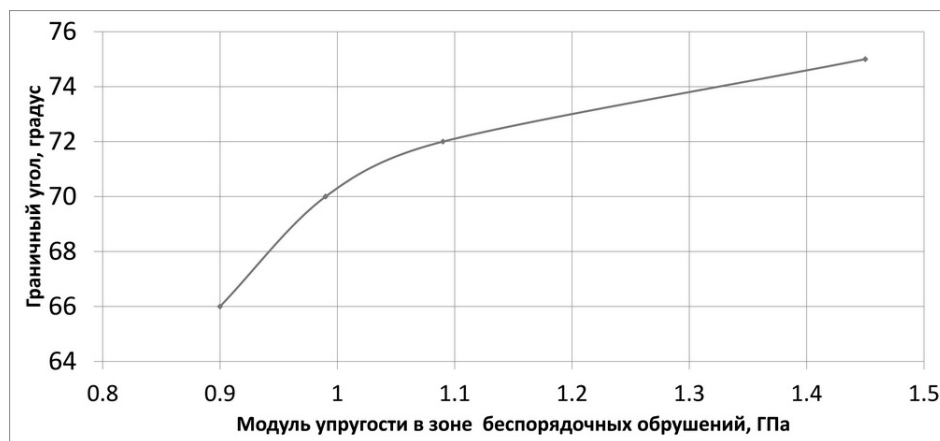


Рис. 6. Взаимосвязь граничного угла с Модулем Юнга в зоне беспорядочных обрушений

Стоит отметить, что на сегодняшний день отсутствуют утвержденные и экспериментально обоснованные данные об изменении параметров горного массива при многократной подработке, однако известно, что фильтрационные характеристики могут изменяться на несколько порядков [7]. Влияние многократной подработки на углы сдвижений также подтверждается аналитическими исследованиями, приведенными в работе [8]. Одним из наиболее эффективных направлений научных исследований, позволяющих конкретизировать информацию об изменении упругих свойств горного массива над отработанными очистными выработками, являются геофизические исследования изменения скорости распространения упругих волн в техногенно-нарушенном массиве. Согласно [9] с увеличением техногенной трещиноватости (нарушенности) горного массива снижается его показатель упругости и соответственно существенно снижается скорость распространения упругих волн. Данная взаимосвязь может быть описана формулой:

$$V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль Юнга, МПа;  $\mu$  – коэффициент Пуассона, безразмерная величина;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>.

При формировании большинства геомеханических моделей величины, описанные в формуле (3), являются базовыми. Если принять коэффициент Пуассона как константу, то возможно на основании геофизических исследований определять упругие свойства горного массива в результате подработки.

Применение подобного подхода позволит установить зависимости геомеханических упругих свойств горных пород от базовых геофизических показателей (рис. 7).

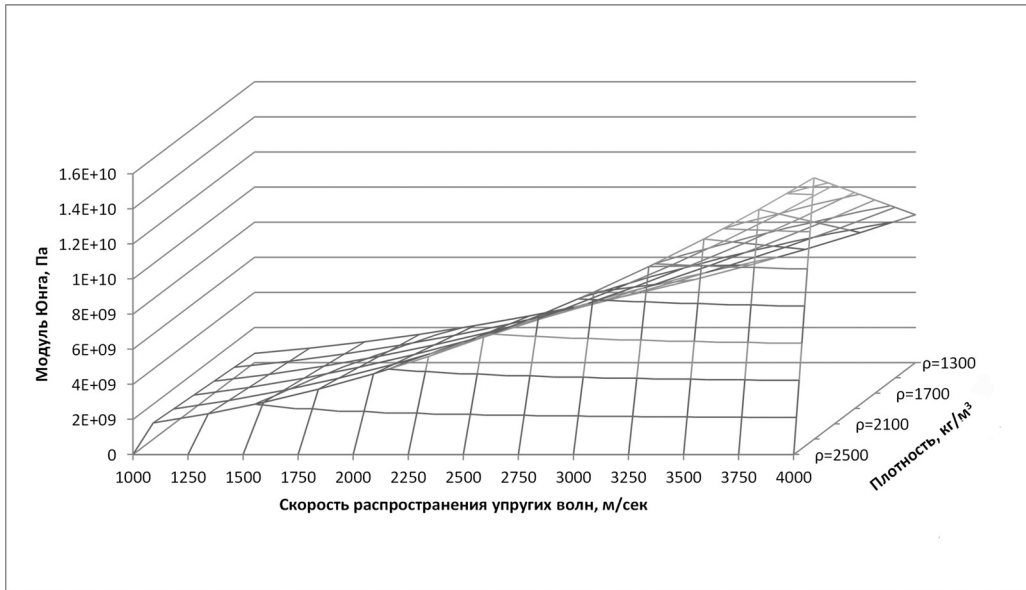


Рис. 7. Графическое отображение взаимосвязи скорости распространения упругих волн с физико-механическими свойствами горного массива

Учет подобных изменений позволит повысить безопасность работы горнодобывающих объектов и обезопасить от разрушительного влияния горных выработок здания и сооружения, расположенные на поверхности подрабатываемых территорий городов и поселков страны.

**Выводы.** Полученные результаты свидетельствуют о наличии влияния на характер распространения оседаний в массиве зон разуплотнения горных пород над лавой и позволяют определять на основании известных скоростей распространения упругих волн базовые физико-механические характеристики горного массива.

В результате анализа геомеханических моделей установлен характер влияния упругих свойств горного массива в зоне беспорядочных обрушений над лавой на параметры сдвижения горного массива и земной поверхности при последующих подработках. Использование полученных результатов может являться базисом для определения параметров деформирования горного массива и земной поверхности с применением геофизических методов исследования. Изменение скорости распространения упругих волн характеризует упругие свойства многократно подработанного массива, что в свою очередь может использоваться для редактирования подходов к определению граничных углов.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124061700022-3).



1. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев, 2004. – 127 с.
2. *ПБ 07-269-98*. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – Введ. 1998-10-01. – М., 1998. – 203 с.
3. *Казаковский Д.А.* Сдвижение земной поверхности под влиянием горных разработок / Д.А. Казаковский. – Углетехиздат, 1953. – 228 с.
4. *Борисов А.А.* Механика горных пород и массивов / А.А. Борисов. – М.: Недра, 1980. – 360 с.
5. *Корнев Е.С.* Разработка комплекса программ и численное моделирование геомеханических процессов в углеродном массиве / Автореф. на соискание уч. степени канд. техн. наук по специальности 05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. – Новокузнецк, 2013. – 19 с.
6. *Мельников Н.В.* Справочник (кадастр) физических свойств горных пород / Н.В. Мельников, В.В. Ржевский, М.М. Протодяконов. – М.: Недра, 1975. – 279 с.
7. *Дрибан В.А.* Фильтрационная модель многократно подработанного массива / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // Сборник научных трудов Донбасского государственного технического университета. – 2017. – № 7(50). – С. 31–37.
8. *Кулибаба С.Б.* Влияние кратности подработки земной поверхности на величину угла сдвижения / С.Б. Кулибаба // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2022. – № 4 – С. 264–273.
9. *Николаев И.Ю.* Геофизические методы при изучении подработанного углеродного массива / И.Ю. Николаев, О.Л. Шалованов // Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр. – М.: ИПКОН РАН, 2024. – С. 176–179.

**Ph.M. Golubev, V.A. Anciferov, L.N. Kriganovskaya**

**On the issue of the influence of the physico-mechanical parameters of the mined mountain range on the nature of the displacement process.**

The article describes an approach to the formation of finite element models of a mountain range, taking into account multiple part-time work. The analysis of the influence of the elastic properties of rocks in the zone of random collapses of previously worked lavas of the upper horizons on the parameters of displacement during the development of the lower horizons is carried out. An approach is proposed to use the results of seismic and acoustic studies to determine the effect of repeated work-up on changes in the localization zones of deformations of the Earth's surface.

**Keywords:** *elastic properties of rocks, boundary angles, angles of total displacement, velocity of propagation of elastic waves, mining, zone of influence rock works.*

*Статья поступила в редакцию 31.10.2024;  
доработана 05.12.2024;  
рекомендована к печати 18.12.2024.*

УДК 622.834:658.011.56  
doi:10.24412/0136-4545-2024-4-104-112  
EDN:XQMGEW



©2024. Н.Н. Грищенко<sup>1</sup>, В.Б. Скаженик<sup>2</sup>, И.В. Чернышенко<sup>3</sup>,  
Ф.М. Голубев<sup>4</sup>

## НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА ПОСЛЕДСТВИЙ ПОДРАБОТКИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В статье рассмотрены вопросы применения нейросетевых методов прогноза сдвижений земной поверхности при подземной отработке угольных пластов. Выделены недостатки применяемых методов прогноза. Проведен анализ используемых нейросетевых моделей в горном деле. Предложена структура нейросети для прогноза оседаний земной поверхности, учитывающая основные влияющие факторы.

**Ключевые слова:** прогноз сдвижений земной поверхности, методы прогноза, состояние горного массива, программное обеспечение, нейросетевые модели.

**Введение.** Проблема адекватного прогноза последствий подработки земной поверхности угольными шахтами обусловлена, прежде всего, низкой точностью исходной информации о характеристиках горного массива и недостатками моделей, описывающих закономерности разрушения горных пород.

---

<sup>1</sup>Грищенко Николай Николаевич – доктор техн. наук, зав. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: gringm@gmail.com.

*Grishchenkov Nikolai Nikolaevich* – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

<sup>2</sup>Скаженик Владимир Борисович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: geosoft.svb@gmail.com.

*Skazhenik Vladimir Borisovich* – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

<sup>3</sup>Чернышенко Иван Владимирович – аспирант каф. разработки месторождений полезных ископаемых ДонНТУ, Донецк, e-mail: i.w.tschernyschenko@gmail.com.

*Chernyshenko Ivan Vladimirovich* – Postgraduate, Donetsk National Technical University, Donetsk, Chair of Development of Mineral Deposits.

<sup>4</sup>Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f\_golubev@list.ru.

*Golubev Philipp Maksimovich* – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Уникальность условий разработки каждого месторождения и множество горно-геологических и горнотехнических факторов, влияющих на процесс сдвижения горных пород, предопределяют невозможность использования однозначного аналитического описания поведения горного массива в различных условиях.

Как правило, при традиционных методиках расчета сдвижений и деформаций земной поверхности значения таких факторов, как глубина разработки, выемочная мощность, угол падения пласта, форма выработанного пространства, усредняются. При расчетах могут не учитываться литологические характеристики и степень нарушенности горных пород, последовательность отработки выемочных столбов, скорость подвигания очистных работ.

В этой связи прогнозные оценки сдвижений и деформаций горных пород и земной поверхности могут существенно отличаться от фактических значений, что в конечном итоге приводит к экономическому ущербу.

Помимо эмпирических методов, в зарубежной практике широко используются интегральные вероятностные методы прогноза оседаний земной поверхности, вызванных подземными горными работами. Однако использование этих методов также сопряжено с ограниченным учетом влияющих факторов [1].

Повышению точности прогноза могут способствовать модели горнодобывающих объектов, построенные в среде горно-геологических информационных систем, отражающие литологические характеристики горных пород, пространственную конфигурацию горных выработок, геологические нарушения, а также динамику развития горных работ. Некоторые программные комплексы, наряду с геометрическим и динамическим моделированием горнодобывающих объектов, включают в себя модули геотехники [2, 3].

Для оценки устойчивости горного массива в программах производится литолого-структурное моделирование, построение геомеханической блочной модели и модели геотехнических доменов. Оценка состояния горного массива в данных программах производится на основе аналитических зависимостей, отражающих связь между горно-геологическими, горнотехническими условиями и возможными деформациями горного массива.

Решение задачи прогноза поведения горного массива с использованием программных средств обычно выполняется в следующем порядке [2, 3]:

- оценка трещиноватости горного массива на основе геологических данных;
- определение качественных и количественных характеристик массива горных пород; при этом используются системы Бартона (Q-индекс), Беньявского (рейтинг RMR), Хука (геологический индекс прочности GSI) а также категории устойчивости ВНИМИ;
- установление системности трещин, компьютерное моделирование ориентации трещин;
- построение каркасных и блочных моделей горных выработок и вмещающих пород с использованием горно-геологических информационных систем;
- численное моделирование напряженно-деформированного состояния массива горных пород;

– калибровка численной модели по данным натуральных наблюдений.

При этом используются эмпирические зависимости и аналитические выражения, позволяющие определить характеристики горных пород и поведение горного массива в узком диапазоне условий и с определенной погрешностью. Оценка состояния горного массива на всем протяжении от глубины ведения горных работ до земной поверхности затруднительна.

Современное развитие методов обработки информации о функционировании горнотехнической системы позволяет выявить зависимости между входными и выходными переменными в неявном виде [4]. В частности, использование нейросетевых моделей на основе машинного обучения создает предпосылки для совершенствования методов прогноза последствий подработки земной поверхности [5].

Цель исследования заключается в анализе существующих методов построения нейросетевых моделей и их применимости для прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности.

**1. Разработка нейросетевой модели.** Отличительной особенностью нейросетевых моделей является возможность установления искомых взаимосвязей на основе обработки статистических данных без аналитического описания зависимостей между входными и выходными переменными. В таблице 1 приведены основные распространенные нейросетевые модели и возможное использование этих моделей в горном деле.

В данной статье в качестве примера использования нейросетей вида «Много-слойный Персептрон» рассмотрена задача прогноза сдвижений земной поверхности при подработке угольными шахтами. Для достижения высокого качества и точности при обучении нейронных сетей необходимо использование выборки, состоящей из большого количества реализаций. Поскольку такой набор статистических данных, отражающих условия производства горных работ и геометрию мульды сдвижений земной поверхности, собрать затруднительно, в рассматриваемом примере исходные данные были сгенерированы программно. Размер выборки сгенерированных данных для обучения нейросети составил 1000 реализаций.

В качестве исходных данных для каждой реализации приняты следующие параметры: мощность пласта (от 0.8 до 2.8 м), длина лавы (от 100 до 300 м), угол падения пласта (от 0 до 20 град), глубина разработки (от 200 до 1100 м) и длина выемочного столба (от 400 до 1100 м). На рисунках 1 и 2 показана изменчивость сгенерированных случайным образом факторов (приведены первые 100 реализаций).

Для каждого отдельного сгенерированного случая были рассчитаны параметры мульды. Расчет максимальных оседаний проводился в соответствии с утвержденными методиками [10, 11]:

$$\eta_m = q_0 m \cos \alpha N_1 N_2,$$

где  $\eta_m$  – максимальные оседания, мм;  $q_0$  – относительная величина максималь-

*Нейросетевые модели прогноза последствий подработки земной поверхности*

ного оседания;  $m$  – вынимаемая мощность пласта, м;  $\alpha$  – угол падения пласта в пределах очистной выработки, град;  $N1$ ,  $N2$  – условные коэффициенты, характеризующие степень подработанности земной поверхности, соответственно вкрест простирания и по простиранию.

Размер сетки для моделирования мульды принят 500 м на 2000 м с шагом 10 м. В результате сетка состоит из 6171 точки. Для каждой точки в зависимости от её удаления от центра и 5-ти входных параметров рассчитывалась величина оседания.

*Таблица 1. Применение нейросетевых моделей*

№ п/п	Вид нейросетевой модели	Описание	Применение
1	Перцептрон (Perceptron)	Однослойная нейронная сеть, состоящая из одного слоя нейронов	Простые задачи классификации.
2	Многослойный Перцептрон (Multilayer Perceptron, MLP)	Сеть с более чем одним слоем (входной, скрытые слои и выходной слой). Нейроны в скрытых слоях связаны с функциями активации	Построение регрессионных моделей, классификация и распознавание объектов.
3	Свёрточная Нейронная Сеть (Convolutional Neural Network, CNN)	Использует свёрточные слои для обработки данных. Специализируется на обработке изображений и видео	Классификация объектов, распознавание изображений. Решение задач фрагментации горных пород [6]. Анализ гранулометрического состава взорванных пород [7].
4	Рекуррентная Нейронная Сеть (Recurrent Neural Network, RNN)	Нейронная сеть с рекуррентными связями, что позволяет обрабатывать последовательности данных	Обработка последовательностей, таких как текст и временные ряды.
5	Долгосрочная Краткосрочная Память (Long Short-Term Memory, LSTM)	Тип RNN, которая может запоминать важную информацию на более длительные периоды времени	Обработка временных рядов, моделирование динамики процессов.
6	Самоорганизующаяся карта Кохонена (Self-Organizing Maps, SOM)	Нейронная сеть с обучением без учителя.	Решение задач визуализации, кластеризации, выявления наборов независимых признаков. Распознавание классов подземных аварий в угольных шахтах [8]. Кластеризация данных опробования руд по литологическому и минералогическому составу с целью прогнозирования технологических показателей извлечения [9].



Рис. 1. Изменчивость мощности и угла падения пласта в генерируемом наборе исходных данных

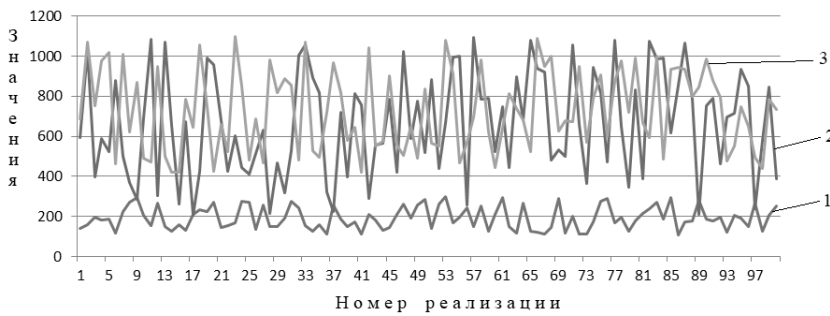


Рис. 2. Изменчивость длины лавы, глубины разработки, длины выемочного столба в генерируемом наборе исходных данных

Архитектура разработанной нейросети представлена на рисунке 3.

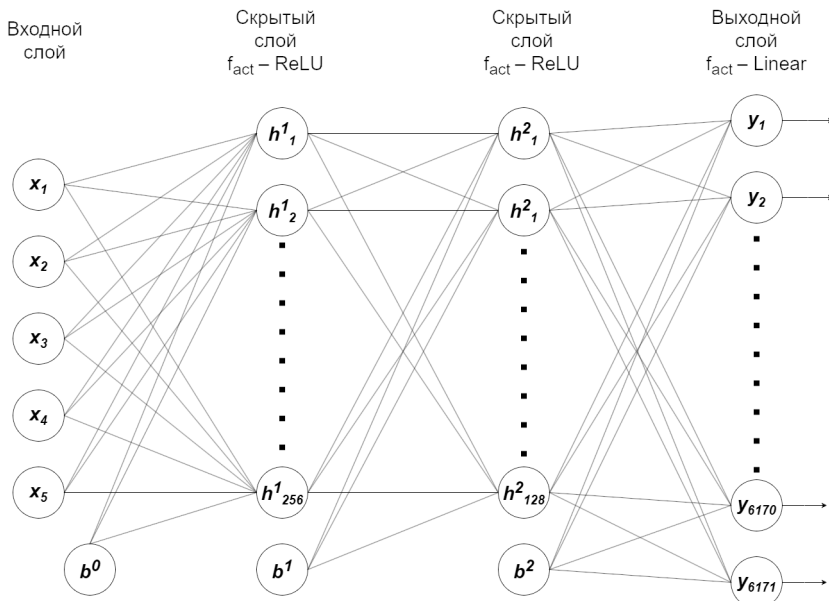


Рис. 3. Архитектура нейронной сети для прогноза сдвижений земной поверхности ( $h_{ij}$  – нейроны;  $b_0, b_1, b_2$  – смещения слоёв)

Входной слой нейросети состоит из 5 переменных  $x_1 \dots x_5$ , соответствующих мощности пласта, длине лавы, углу падения пласта, глубине разработки и длине выемочного столба. Первый скрытый слой состоит из 256 нейронов с функцией активации ReLu, второй скрытый слой состоит из 128 нейронов с функцией активации ReLu и выходной слой состоит из 6171 нейронов с линейной функцией активации. Переменные выходного слоя  $y_1 \dots y_{6171}$  соответствуют точкам сетки моделируемой мульды.

**2. Результаты моделирования.** На рисунке 4 графически представлены моделируемые лавы, расчетные и прогнозные мульды сдвижения земной поверхности. При визуализации мульды масштабный коэффициент по оси Z принят равным 100.

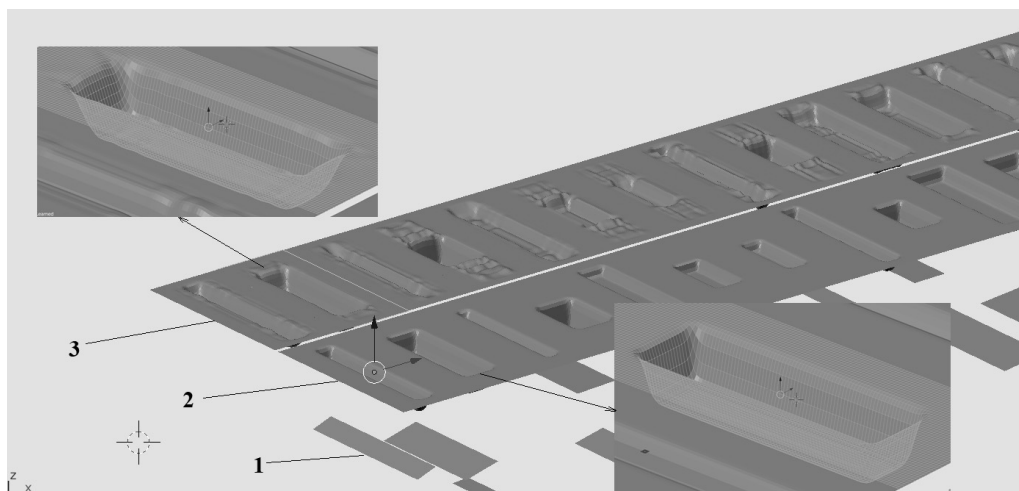


Рис. 4. Графическое представление моделируемых лав, расчетных и прогнозных мульд сдвижения земной поверхности (1 - моделируемые лавы, 2 - расчетные мульды, 3 - прогнозные мульды)

Вся исходная выборка в процессе обучения нейросети разделена на три части: тестовая (50 реализаций), выборка валидации (50 реализаций) и обучающая выборка (900 реализаций). В качестве функции потерь принята среднеквадратичная ошибка (Mean Squared Error, MSE), которая измеряет среднюю величину квадрата ошибки между предсказанными и фактическими значениями. Эта функция потерь широко используется в задачах регрессии и позволяет эффективно минимизировать различия между предсказанными и фактическими значениями.

Для оптимизации параметров модели использован алгоритм адаптивной оптимизации Adam (Adaptive Moment Estimation). Значение шага обучения принято равным 0,001. Количество эпох обучения – 1000.

График изменения функции потерь в зависимости от количества эпох обучения представлен на рисунке 5.

Результаты сопоставления рассчитанной мульды и прогнозной – на рисунке 6.

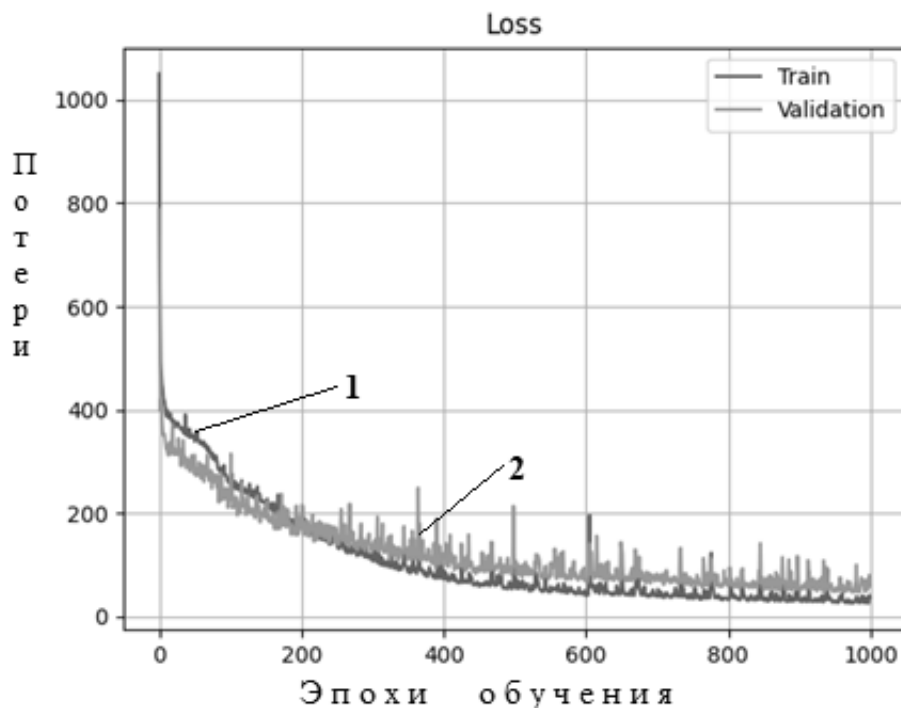


Рис. 5. Функция потерь (1 – потери для обучающей выборки; 2 – потери для выборки валидации)

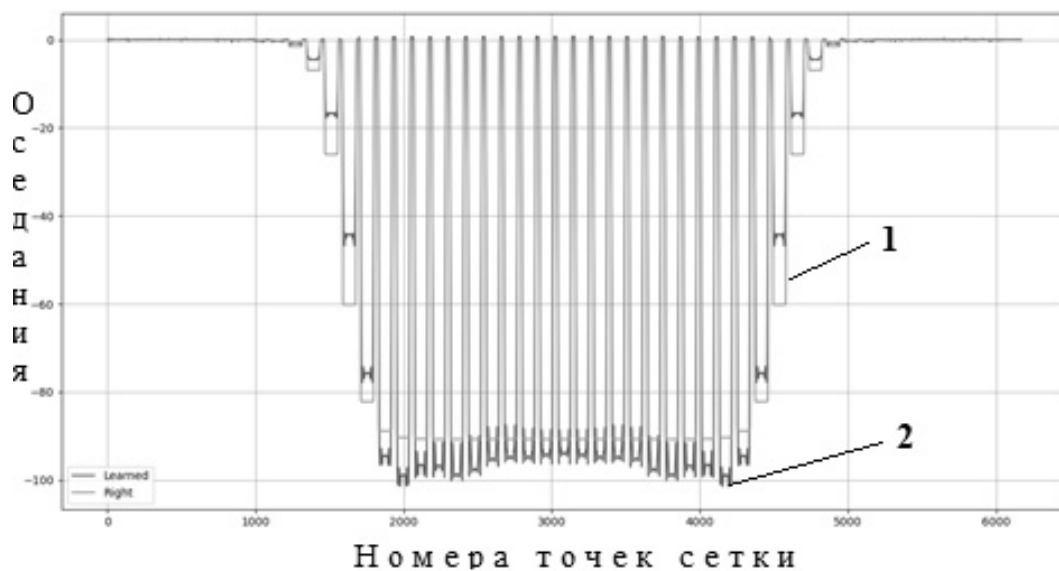


Рис. 6. Результаты сопоставления рассчитанной мульды и прогнозной по всем точкам сетки (1 – расчетные значения оседаний; 2 – прогнозные значения оседаний)



**Выводы.** В результате проведенных исследований были проанализированы существующие методы построения нейросетевых моделей и дана оценка их применимости для прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности. На основании нейросетевого моделирования получена удовлетворительная сходимость расчетных и прогнозных оседаний земной поверхности, что подтверждает применимость рассмотренной архитектуры нейросети для прогноза последствий подработки земной поверхности. При малом количестве статистической информации для обучения нейросетевых моделей целесообразно сочетание наборов данных, полученных в результате расчетов по известным методикам, аккумулирующим имеющиеся знания об объекте, и доступной статистической информации. Для повышения точности нейросетевых моделей в горном деле необходима организация сбора статистической информации и формирования базы данных о функционировании горнодобывающих объектов.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 123092600006-9).

1. *Tan X.* Extraction of Irregularly Shaped Coal Mining Area Induced Ground Subsidence Prediction Based on Probability Integral Method / X. Tan, B. Song, H. Bo, Y. Li, M. Wang, G. Lu // *Applied Sciences*. – 2020. – № 10(18):6623. – DOI: 10.3390/app10186623.
2. *Федотов Г.С.* Создание блочной геомеханической модели района Северомуйского тоннеля в ГГИС Micromine Origin and Beyond / Г.С. Федотов, Б.В. Курцев, А.М. Янбеков, А.Р. Умаров // *Горный журнал*. – 2023. – № 1. – С. 64-68. – DOI: 10.17580/gzh.2023.01.10.
3. *Хажыкылай Ч.В.* Расчет паспорта прочности горных пород, находящихся в естественных условиях массива, с использованием критерия Хука-Брауна и программы RocData / Ч.В. Хажыкылай, В.А. Еременко, М.А. Косырева, А.М. Янбеков // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. – 2018. – № 12. – С. 92–101.
4. *Захаров В.Н.* Анализ методов подготовки и преобразования информации, поступающей в хранилища данных для эффективного управления горнотехнической системой / В.Н. Захаров, Д.А. Клебанов, М.А. Макеев, Д.Н. Радченко // *Горная промышленность*. – 2023. – № (5S). – С. 10–17. – DOI: 10.30686/1609-9192-2023-5S-10-17.
5. *Дрибан В.А.* Прогноз образования провалов на подработанных территориях методом искусственного интеллекта на основе нейронных сетей / В.А. Дрибан, Б.В. Хохлов, А.В. Антипенко // *Проблемы недропользования*. – 2024. – № 3. – С. 51–61.
6. *Ронкин М.В.* Обзор применения глубоких нейронных сетей и параллельных архитектур в задачах фрагментации горных пород / М.В. Ронкин, Е.Н. Акимова, В.Е. Мисилов, К.И. Решетников // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика*. – 2023. – Т. 12, № 4. – С. 5–54. – DOI: 10.14529/cmse230401.
7. *Великанов В.С.* Технологии нейронных сетей в интеллектуальном анализе данных гранулометрического состава взорванных пород / В.С. Великанов, А.В. Дремин, С.А. Чернухин, Н.В. Ломовцева // *Горная промышленность*. – 2024. – № 4. – С. 90–94.
8. *Куприянов В.В.* Распознавание классов подземных аварий в угольных шахтах на основе нейросетевой технологии / В.В. Куприянов // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. – 2022. – № 8. – С. 148–157.
9. *Мальцев Е.Н.* Нейросетевые технологии обработки данных для решения практических задач прогнозирования в ходе геолого-технологического моделирования / Е.Н. Мальцев // *Золото и технологии: информационно-аналитический журнал*. – 2021. – № 1. – С. 74-78.
10. *ПБ 07269-98.* Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – Введ. 1998-10-01. – М., 1998. – 203 с.

Н.Н. Грищенко, В.Б. Скаженник, И.В. Чернышенко, Ф.М. Голубев

11. ГСТУ 101.00159226.001 – 2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 2003-10-28. – К., 2004. – 128 с.

**N.N. Grishchenkov, V.B. Skazhenik, I.V. Chernyshenko, Ph.M. Golubev**  
**Neural network models for predicting the consequences of earth surface working.**

The article deals with the application of neural network methods for predicting movements of the Earth's surface during underground mining of coal seams. The disadvantages of the applied forecasting methods are highlighted. The analysis of the neural network models used in mining is carried out. The structure of a neural network for predicting subsidence of the Earth's surface is proposed, taking into account the main influencing factors.

**Keywords:** *forecast of Earth surface movements, forecasting methods, mountain range condition, software, neural network models.*

*Статья поступила в редакцию 06.11.2024;  
доработана 11.12.2024;  
рекомендована к печати 20.12.2024.*