

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 1 (94)**

**2026**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**  
**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**  
**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

#### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватульян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.В. Георгиевский**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р техн. наук, проф. **Н.Н. Грищенко**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.А. Илюхин**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносевич**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Мазнев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Муцанов**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Р.Н. Нескородев**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыш**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Н. Соловьев**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **С.Н. Царенко**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**.

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**  
**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**  
**EXECUTIVE SECRETARY:** Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

#### **EDITORIAL BOARD:**

*Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of phys. and math., prof. D.V. Georgievskiy, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of tech., prof. N.N. Grishchenkov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., docent A.V. Zyza, Dr. of phys. and math., prof. A.A. Ilyukhin, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., docent A.V. Maznev, Dr. of phys. and math., docent I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of phys. and math., docent R.N. Neskoroedev, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of phys. and math., prof. A.N. Soloviev, Dr. of tech., docent S.V. Storozhev, Dr. of phys. and math., docent S.N. Tsarenko, Dr. of tech., prof. V.P. Shamota.*

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: [jtam\\_donnu@mail.ru](mailto:jtam_donnu@mail.ru), URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки). Квартиль К2 с 23.05.2025. Журнал включен в актуальную версию Единого государственного перечня научных изданий («Белый список» научных журналов) – 4 уровень.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 230-11/2025 от 17 ноября 2025 г.).

Утверждено к изданию ученым советом  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное  
учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет», 2026

№ 1 (94) / 2026

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Механика твердого тела

*Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.* Гироскоп в кардановом подвесе: обобщенная механическая модель П.В. Харламова ..... 5

### Механика деформируемого твердого тела

*Глушанков Е.С.* Действие сосредоточенных источников тепла в бесконечной многосвязной пластинке из пьезоматериала, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой ..... 19

*Калоеров С.А., Полянский М.А.* Электромагнитоупругое состояние полосы с отверстиями, трещинами и выемами ..... 32

*Калоеров С.А., Сошина Е.И.* Циклическая задача о кручении изотропного цилиндра с продольными полостями и плоскими трещинами ..... 45

*Чехов В.В.* Моделирование нелинейных эффектов при статическом нагружении с использованием формализма гибридного автомата ..... 57

### Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

*Антонов В.А.* Геомеханические исследования распора и деструкции пристеночных пород горной выработки ..... 66

*Голубев Ф.М., Николаев И.Ю., Лавренчук Н.В.* Определение взаимосвязи деформаций земной поверхности и акустических свойств горного массива ..... 83

*Грищенков Н.Н., Бардакова Е.А.* Формирование фильтрационных моделей горного массива и определение коэффициента пустотности ..... 94



№ 1 (94) / 2026

*Founded in 1970.*

# JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

### **Rigid Body Dynamics**

- Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Gyroscope in a gimbal suspension: a generalized mechanical model by P.V. Kharlamov ..... 5

### **Solid Mechanics**

- Glushankov E.S.* The concentrated heat sources' action in an infinite multiply connected piezoelectric plate under the convective heat transfer condition 19
- Kaloerov S.A., Polianskii M.A.* Electromagnetic elastic state of a strip with holes, cracks, and recesses ..... 32
- Kaloerov S.A., Soshyna E.I.* The torsion cyclic problem for an isotropic cylinder with a longitudinal cavities and planar cracks ..... 45
- Chekhov V.V.* Simulation of nonlinear effects under static loading using the hybrid automaton formalism ..... 57

### **Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics**

- Antonov V.A.* Geomechanical studies of the expansion and destruction of near-wall rocks in mountain cavity ..... 66
- Golubev Ph.M., Nikolaev I.Yu., Lavrenchuk N.V.* Determining the relationship between surface deformations and the acoustic properties of a rock mass 83
- Grishchenkov N.N., Bardakova E.A.* Formation of filtration models of a rock mass and determination of the void coefficient ..... 94



## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.36

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-5-18

EDN:CUEKFS



©2026. Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц

ГИРОСКОП В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ: ОБОБЩЕННАЯ  
МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ П. В. ХАРЛАМОВА

В работе дан вывод выражений кинетической энергии и потенциальной энергии силы тяжести для обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе. В этой модели гироскоп и элементы карданова подвеса имеют любую форму, внутренняя ось подвеса, вообще говоря, неортогональна наружной оси подвеса и оси гироскопа, и эти три оси не пересекаются в одной точке.

**Ключевые слова:** гироскоп в кардановом подвесе, кинетическая энергия, потенциальная энергия, уравнения Лагранжа.

**Введение.** В 1972 г. П.В. Харламов предложил на семинаре в качестве предмета изучения модель гироскопа в кардановом подвесе, являющуюся наиболее общей в рамках динамики системы абсолютно твердых тел. При этом он наметил в общих чертах технику вывода для такой модели детальных выражений кинетической и потенциальной энергии, необходимых для того, чтобы записать для нее уравнения движения в форме Лагранжа.

Такие детальные выражения получены в статье [1] и приведены в ней без вывода. Вместо него дана ссылка на работу [2], где рассмотрена система твердых тел еще более общего вида — цепочка любого числа гироскопов, последовательно связанных между собой и с неподвижным основанием цилиндрическими шарнирами. В дальнейшем обобщенная модель гироскопа в кардановом подвесе использовалась авторами данной работы в публикациях [3–6] и в ряде других со ссылкой на статью [1].

Формально обобщенная модель гироскопа в кардановом подвесе является частным случаем рассмотренной в [2] цепочки гироскопов, если вместо гироскопов рассматриваются три твердых тела. Однако основные соотношения для

---

*Коносевиц Борис Иванович* – докт. физ.-мат. наук, главн. науч. сотр. отд. прикладной механики ИПММ, Донецк, e-mail: konos.donetsk@yandex.ru, ORCID: 0009-0008-2474-6321.

*Konosevich Boris Ivanovich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Applied Mechanics.

*Коносевиц Юлия Борисовна* – канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. отд. прикладной механики ИПММ, Донецк, e-mail: ipmm.mtt@mail.ru, ORCID: 0009-0001-4080-7744.

*Konosevich Yuliya Borisovna* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Applied Mechanics.

обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе, получаемые из общих формул для цепочки гиристов, оказываются чрезмерно громоздкими, тогда как представленные в [1] основные соотношения имеют обозримый вид. Это достигнуто при независимом выводе этих соотношений благодаря специальному выбору систем координат, связанных с элементами подвеса и гироскопом, что позволило уменьшить число параметров. Но независимый вывод представленных в [1] основных соотношений для обобщенной модели так и не был опубликован. Целью данной работы является устранение этого пробела.

В ней рассматривается механическая система, которая состоит из трех абсолютно твердых тел  $S^1, S^2, S^3$ , последовательно соединенных между собой и с неподвижным основанием  $S^0$  при помощи цилиндрических шарниров с осями  $l^1, l^2, l^3$ . Тело  $S^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) имеет относительно  $S^{k-1}$  одну степень свободы — вращение вокруг общей оси  $l^k$ . Внутренняя ось подвеса  $l^2$ , вообще говоря, неортогональна наружной оси подвеса  $l^1$  и оси гироскопа  $l^3$ , и эти три оси не пересекаются в одной точке. Кроме того, внутренняя ось подвеса  $l^2$  предполагается неколлинеарной наружной оси подвеса  $l^1$  и оси гироскопа  $l^3$ . Наружный и внутренний элементы подвеса  $S^1, S^2$  и гироскоп  $S^3$  могут иметь любую форму. Система помещена в однородное поле силы тяжести, направление вертикали указывает ось  $l^0$ .

На рисунке 1а схематически изображена общепринятая модель гироскопа в кардановом подвесе, а на рисунке 1b показана рассматриваемая здесь обобщенная модель. Через  $\alpha, \beta, \varphi$  обозначены углы поворота тел  $S^1, S^2, S^3$  относительно осей  $l^1, l^2, l^3$ .

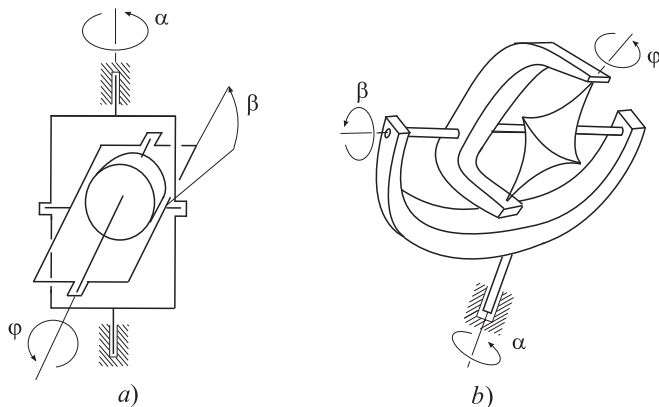


Рис. 1. Гироскоп в кардановом подвесе: (а) общепринятая модель, (б) обобщенная модель.

**1. Сопутствующие базисы и лагранжевы координаты.** С каждым из тел  $S^k$  и с основанием  $S^0$  неизменно связана правая система декартовых координат с началом в некоторой точке  $O^k$  на оси  $l^k$  и единичными базисными векторами  $e_1^k, e_2^k, e_3^k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) (рис. 2). Вектор  $e_1^0$  направлен вверх по вертикальной оси  $l^0$ .

Вектор  $e_1^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) направлен вдоль оси  $l^k$ . Постоянные углы между

осями  $l^k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) обозначаются через  $\theta^k$ :

$$\cos \theta^k = \mathbf{e}_1^k \cdot \mathbf{e}_1^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

При этом из двух возможных направлений вектора  $\mathbf{e}_1^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) вдоль оси  $l^k$  выбирается то, для которого угол  $\theta^k$  между  $\mathbf{e}_1^k$  и  $\mathbf{e}_1^{k-1}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) принадлежит отрезку  $(0, \pi/2]$ . Это требование позволяет однозначно определить вектор  $\mathbf{e}_1^k$  в случае, когда оси  $l^k$ ,  $l^{k-1}$  неортогональны. Так как  $\theta^2 \neq 0$ ,  $\theta^3 \neq 0$  вследствие предположения о неколлинеарности осей  $l^k$  и  $l^{k-1}$  ( $k = 2, 3$ ), то  $\theta^1 \in (0, \pi/2]$ ,  $\theta^2 \in (0, \pi/2]$ ,  $\theta^3 \in (0, \pi/2]$ .

Вектор  $\mathbf{e}_2^k$  вводится соотношением

$$\mathbf{e}_1^{k+1} \times \mathbf{e}_1^k = \mathbf{e}_2^k \sin \theta^{k+1} \quad (k = 0, 1, 2), \quad (2)$$

а вектор  $\mathbf{e}_3^k$  — соотношением

$$\mathbf{e}_3^k = \mathbf{e}_1^k \times \mathbf{e}_2^k \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (3)$$

Приложенный в точке  $O^k$  вектор

$$\mathbf{s}^k = \mathbf{O}^k \mathbf{O}^{k+1} = \sum_{i=1}^3 s_i^k \mathbf{e}_i^k \quad (k = 1, 2)$$

указывает неподвижную в базисе  $\mathbf{e}_i^k$  ( $i = 1, 2, 3$ ) точку  $O^{k+1}$ , а вектор

$$\mathbf{c}^k = \mathbf{O}^k \mathbf{C}^k = \sum_{i=1}^3 c_i^k \mathbf{e}_i^k \quad (k = 1, 2, 3)$$

проведен из  $O^k$  в центр масс  $C^k$  тела  $S^k$ .

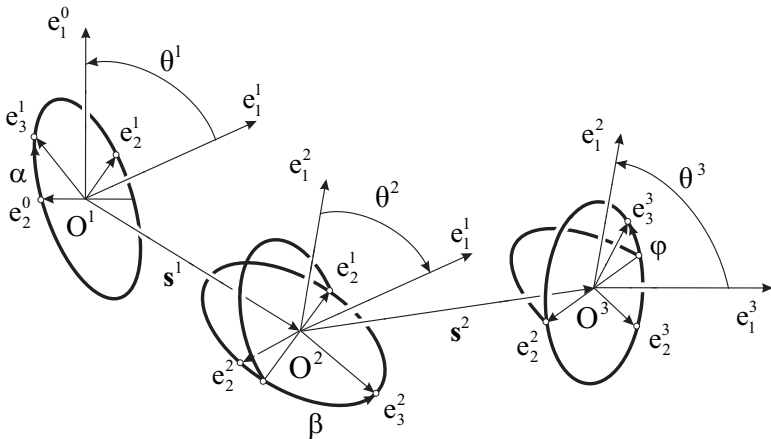


Рис. 2. Определение базисных векторов  $\mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k, \mathbf{e}_3^k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) и углов  $\alpha, \beta, \varphi$ .

Углы  $\alpha, \beta, \varphi$ , принимаемые в качестве обобщенных лагранжевых координат, определены следующим образом (рис. 2). Угол  $\alpha$  отсчитывается в плоскости, ортогональной вектору  $e_1^1$ , от направления вектора  $e_2^0$  до  $e_3^1$ . Иными словами угол  $\alpha$  и плоскость, в которой он отсчитывается, определены соотношениями

$$e_2^0 \cdot e_3^1 = \cos \alpha, \quad e_2^0 \times e_3^1 = e_1^1 \sin \alpha. \quad (4)$$

Углы  $\beta, \varphi$  отсчитываются в плоскостях, ортогональных соответственно векторам  $e_1^2, e_1^3$  от  $-e_2^2$  до  $e_3^2$  и от  $-e_2^3$  до  $e_3^3$ :

$$\begin{aligned} e_2^1 \cdot e_3^2 &= -\cos \beta, & e_2^1 \times e_3^2 &= -e_1^2 \sin \beta, \\ e_2^2 \cdot e_3^3 &= -\cos \varphi, & e_2^2 \times e_3^3 &= -e_1^3 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Пока никак не зафиксировано положение точек  $O^k$  на осях  $l^k$  и направление базисных векторов  $e_2^3, e_3^3$  системы координат, связанной с гироскопом  $S^3$ . Этот произвол устраняется следующим образом.

В случае, когда центр масс  $C^3$  гироскопа  $S^3$  не лежит на оси  $l^3$ , третья координатная ось системы координат, связанной с телом  $S^3$ , проводится через точку  $C^3$ . Таким образом определяется и положение начала координат, точки  $O^3$ , на оси  $l^3$ : она лежит на конце перпендикуляра, опущенного из точки  $C^3$  на ось  $l^3$ . Начала двух других систем координат, точки  $O^2$  и  $O^1$ , выбираются на осях  $l^2$  и  $l^1$  так, чтобы точка  $O^3$  принадлежала координатной плоскости  $O^2 e_2^2 e_3^2$ , а точка  $O^2$  — плоскости  $O^1 e_2^1 e_3^1$ . После этого у вектора  $e^3$  остается отличной от нуля лишь третья компонента  $e_3^3$ , которую будем обозначать  $c$ , а у векторов  $s^2$  и  $s^1$  обращаются в нуль их первые компоненты:

$$c_i^3 = c \delta_{3i}, \quad s_1^2 = s_1^1 = 0, \quad (6)$$

через  $\delta_{ij}$  здесь обозначен символ Кронекера:  $\delta_{ij} = 1$  ( $i = j$ ),  $\delta_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ). Теперь при  $c \neq 0$  остался только произвол в выборе для каждого из векторов  $e_1^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) одного из двух направлений вдоль оси  $l^k$ .

В важном частном случае, когда  $c = 0$ , положение точек  $O^k$  и направление вектора  $e_3^3$  следует выбирать каким-либо иным удобным способом, например так, чтобы в дополнение к (6) выполнялось условие

$$s_3^2 = 0. \quad (7)$$

и в начальный момент угол  $\varphi$  был равен нулю.

Заметим, что начало  $O^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и единичные векторы  $e_i^k$  ( $i = 1, 2, 3$ ) системы координат, связанной с телом  $S^k$ , однозначно определены в случае неортогональности осей  $l^k, l^{k-1}$ , а в случае их ортогональности остается произвол в выборе одного из двух направлений вектора  $e_1^k$  вдоль оси  $l^k$ .

Для общепринятой модели гироскопа в кардановом подвесе данные выше определения приводят (с учетом отмеченного произвола) к общепринятым определениям [7, 8] углов  $\alpha, \beta$  (рис. 1а). Это означает, во-первых, что угол  $\beta$  обращается в нуль в положении, когда ось ротора  $l^3$  ортогональна наружной оси

подвеса  $l^1$ . Кроме того, здесь  $e_3^2 = e_1^3$ , так что для вектора  $s^2 = (0, 0, s_3^2)$  будет  $s_3^2 \geq 0$ .

**2. Формулы перехода между базисами.** Величины  $\alpha_{ij}^{kl}$ , задающие взаимную ориентацию триадров  $e_i^k$  и  $e_j^l$ , определены разложениями

$$e_i^k = \alpha_{ij}^{kl} e_j^l \quad (k, l = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Здесь и далее по нижнему буквенному индексу, дважды повторяющемуся в одночленном выражении, производится суммирование от 1 до 3. Таким образом, величины  $\alpha_{ij}^{kl}$  являются скалярными произведениями базисных векторов:

$$\alpha_{ij}^{kl} = \alpha_{ji}^{lk} = e_i^k \cdot e_j^l. \quad (9)$$

Пользуясь соотношениями (1)-(5), находим  $\alpha_{ij}^{32}$ ,  $\alpha_{ij}^{21}$ ,  $\alpha_{i1}^{10}$  в зависимости от  $\varphi$ ,  $\beta$ . Так, векторно умножая равенства  $e_1^3 \times e_1^2 = e_2^3 \sin \theta^3$  и  $e_2^2 \times e_3^3 = -e_1^3 \sin \varphi$  соответственно на  $e_1^2$  и на  $e_2^2$  и учитывая при этом, что  $e_1^3 \cdot e_1^2 = \cos \theta^3$ ,  $e_2^2 \cdot e_3^3 = -\cos \varphi$ , получаем

$$\begin{aligned} e_1^3 &= e_1^2 \cos \theta^3 + e_3^2 \sin \theta^3, \\ e_3^3 &= -e_2^2 \cos \varphi - e_1^3 \times e_2^2 \sin \varphi = e_1^2 \sin \theta^3 \sin \varphi - e_2^2 \cos \varphi - e_3^2 \cos \theta^3 \sin \varphi, \\ e_2^3 &= e_3^3 \times e_1^3 = -e_1^2 \sin \theta^3 \cos \varphi - e_2^2 \sin \varphi + e_3^2 \cos \theta^3 \cos \varphi. \end{aligned}$$

В этих разложениях коэффициентами при  $e_j^2$  являются величины  $\alpha_{ij}^{32}$ . Аналогично находятся величины  $\alpha_{ij}^{21}$  и  $\alpha_{i1}^{10}$ . В результате будет

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{32} &= \cos \theta^3, & \alpha_{12}^{32} &= 0, & \alpha_{13}^{32} &= \sin \theta^3, \\ \alpha_{21}^{32} &= -\sin \theta^3 \cos \varphi, & \alpha_{22}^{32} &= -\sin \varphi, & \alpha_{23}^{32} &= \cos \theta^3 \cos \varphi, \\ \alpha_{31}^{32} &= \sin \theta^3 \sin \varphi, & \alpha_{32}^{32} &= -\cos \varphi, & \alpha_{33}^{32} &= -\cos \theta^3 \sin \varphi, \\ \alpha_{11}^{21} &= \cos \theta^2, & \alpha_{12}^{21} &= 0, & \alpha_{13}^{21} &= \sin \theta^2, \\ \alpha_{21}^{21} &= -\sin \theta^2 \cos \beta, & \alpha_{22}^{21} &= -\sin \beta, & \alpha_{23}^{21} &= \cos \theta^2 \cos \beta, \\ \alpha_{31}^{21} &= \sin \theta^2 \sin \beta, & \alpha_{32}^{21} &= -\cos \beta, & \alpha_{33}^{21} &= -\cos \theta^2 \sin \beta, \\ \alpha_{11}^{10} &= \cos \theta^1, & \alpha_{21}^{10} &= \sin \theta^1 \cos \alpha, & \alpha_{31}^{10} &= -\sin \theta^1 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (8), (9) следуют формулы

$$\alpha_{ij}^{31} = \alpha_{is}^{32} \alpha_{sj}^{21}, \quad \alpha_{ij}^{kk} = \delta_{ij} \quad (11)$$

Подставив сюда выражения (10), получаем

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}^{31} &= \cos \theta^3 \cos \theta^2 + \sin \theta^3 \sin \theta^2 \sin \beta, \\
 \alpha_{12}^{31} &= -\sin \theta^3 \cos \beta, \\
 \alpha_{13}^{31} &= \cos \theta^3 \sin \theta^2 - \sin \theta^3 \cos \theta^2 \sin \beta, \\
 \alpha_{21}^{31} &= -\sin \theta^3 \cos \theta^2 \cos \varphi + \sin \theta^2 \sin \varphi \cos \beta + \cos \theta^3 \sin \theta^2 \cos \varphi \sin \beta, \\
 \alpha_{22}^{31} &= \sin \varphi \sin \beta - \cos \theta^3 \cos \varphi \cos \beta, \\
 \alpha_{23}^{31} &= -\sin \theta^3 \sin \theta^2 \cos \varphi - \cos \theta^2 \sin \varphi \cos \beta - \cos \theta^3 \cos \theta^2 \cos \varphi \sin \beta, \\
 \alpha_{31}^{31} &= \sin \theta^3 \cos \theta^2 \sin \varphi + \sin \theta^2 \cos \varphi \cos \beta - \cos \theta^3 \sin \theta^2 \sin \varphi \sin \beta, \\
 \alpha_{32}^{31} &= \cos \varphi \sin \beta + \cos \theta^3 \sin \varphi \cos \beta, \\
 \alpha_{33}^{31} &= \sin \theta^3 \sin \theta^2 \sin \varphi - \cos \theta^2 \cos \varphi \cos \beta + \cos \theta^3 \cos \theta^2 \sin \varphi \sin \beta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

**3. Кинетическая энергия.** Удвоенная кинетическая энергия рассматриваемой системы тел равна по определению

$$2T = \sum_{k=1}^3 \int_{S^k} (\mathbf{V}^k + \boldsymbol{\omega}^k \times \boldsymbol{\xi})^2 dm. \tag{13}$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}^k = \omega_i^k \mathbf{e}_i^k$  — вектор угловой скорости тела  $S^k$ :

$$\boldsymbol{\omega}^1 = \dot{\alpha} \mathbf{e}_1^1, \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \dot{\alpha} \mathbf{e}_1^1 + \dot{\beta} \mathbf{e}_1^2, \quad \boldsymbol{\omega}^3 = \dot{\alpha} \mathbf{e}_1^1 + \dot{\beta} \mathbf{e}_1^2 + \dot{\varphi} \mathbf{e}_1^3. \tag{14}$$

Через  $\mathbf{V}^k$  обозначена скорость точки  $O^k$ :

$$\mathbf{V}^1 = 0, \quad \mathbf{V}^2 = \boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{s}^1, \quad \mathbf{V}^3 = \boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{s}^1 + \boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{s}^2. \tag{15}$$

Интегрирование в (13) производится по всему объему, занимаемому телами  $S^k$ . Вектор  $\boldsymbol{\xi}$ , приложенный к точке  $O^k$ , указывает произвольную частицу тела, масса которой равна  $dm$ .

Пусть  $m^k$  — масса тела  $S^k$ ,  $\mathbf{A}^k$  — его тензор инерции в точке  $O^k$ . Компоненты тензора  $\mathbf{A}^k$  в базе  $\mathbf{e}_i^k$  постоянны и обозначаются  $A_{ij}^k$ . Тогда

$$\int_{S^k} \boldsymbol{\xi} dm = m^k \mathbf{c}^k, \quad \int_{S^k} (\boldsymbol{\omega}^k \times \boldsymbol{\xi})^2 dm = \boldsymbol{\omega}^k \cdot \mathbf{A}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k = A_{ij}^k \omega_i^k \omega_j^k,$$

и равенство (13) после подстановки в него выражений (15) принимает вид

$$\begin{aligned}
 2T &= \boldsymbol{\omega}^1 \cdot \mathbf{A}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}^1 + (m^2 + m^3)(\boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{s}^1) \cdot (\boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{s}^1) + \\
 &+ \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \boldsymbol{\omega}^2 + m^3(\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{s}^2) \cdot (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{s}^2) + \boldsymbol{\omega}^3 \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \boldsymbol{\omega}^3 + \\
 &+ 2(\boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{s}^1) \cdot [\boldsymbol{\omega}^2 \times (m^2 \mathbf{c}^2 + m^3 \mathbf{s}^2)] + 2m^3(\boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{s}^1 + \boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{s}^2) \cdot (\boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{c}^3).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Для записи векторных произведений в координатной форме удобно применять трехиндексные символы  $\varepsilon_{ijk}$ . Из двадцати семи величин  $\varepsilon_{ijk}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) по определению только шесть не равны нулю:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$$

При помощи символов  $\varepsilon_{ijk}$  векторное произведение  $\mathbf{e}_i^k$  на  $\mathbf{e}_j^k$  записывается в форме

$$\mathbf{e}_i^k \times \mathbf{e}_j^k = \varepsilon_{ijs} \mathbf{e}_s^k. \quad (17)$$

Укажем два свойства этих символов. Первое: умножая скалярно обе части равенства (17) на обе части аналогичного равенства  $\mathbf{e}_r^k \times \mathbf{e}_l^k = \varepsilon_{rln} \mathbf{e}_n^k$ , имеем

$$\varepsilon_{ijs} \varepsilon_{rls} = \delta_{ir} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jr}. \quad (18)$$

И второе: переходя в (17) к базису  $\mathbf{e}_n^p$  по формуле (8), получаем тождество

$$\varepsilon_{ijs} \alpha_{iu}^{kp} \alpha_{sv}^{kp} = \varepsilon_{unv} \alpha_{jn}^{kp}, \quad (19)$$

которое выражает тот факт, что при фиксированных  $k, p$  каждый элемент в определителе  $|\alpha_{ij}^{kp}|_{i,j=1,2,3}$  равен своему алгебраическому дополнению.

Заменим в выражении (16) удвоенной кинетической энергии векторы  $\boldsymbol{\omega}^k, \mathbf{s}^k, \mathbf{c}^k$  их разложениями по  $\mathbf{e}_i^k$  и воспользуемся формулой векторного умножения (17)

$$\begin{aligned} 2T = & \left[ A_{ir}^1 + (m^2 + m^3) s_j^1 s_l^1 \varepsilon_{ijs} \varepsilon_{rls} \right] \omega_i^1 \omega_r^1 + \\ & + \left[ A_{ir}^2 + m^3 s_j^2 s_l^2 \varepsilon_{ijs} \varepsilon_{rls} \right] \omega_i^2 \omega_r^2 + A_{ij}^3 \omega_i^3 \omega_j^3 + \\ & + 2(m^2 c_j^2 + m^3 s_j^2) s_l^1 \varepsilon_{ijs} \varepsilon_{rln} \alpha_{sn}^{21} \omega_i^2 \omega_r^1 + \\ & + 2m^3 c_j^3 s_l^1 \varepsilon_{ijs} \varepsilon_{rln} \alpha_{sn}^{31} \omega_i^3 \omega_r^1 + 2m^3 c_j^3 s_l^2 \varepsilon_{ijs} \varepsilon_{rln} \alpha_{sn}^{32} \omega_i^3 \omega_r^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (14), (9) следует, что величины  $\omega_i^k = \boldsymbol{\omega}^k \cdot \mathbf{e}_i^k$  выражаются через обобщенные скорости  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$  по формулам

$$\omega_i^1 = \dot{\alpha} \delta_{i1}, \quad \omega_i^2 = \dot{\alpha} \alpha_{i1}^{21} + \dot{\beta} \delta_{i1}, \quad \omega_i^3 = \dot{\alpha} \alpha_{i1}^{31} + \dot{\beta} \alpha_{i1}^{32} + \dot{\varphi} \delta_{i1}.$$

Подставляя эти выражения в (20) и преобразуя получающиеся соотношения при помощи тождеств (18), (19), (11), получаем для удвоенной кинетической энергии выражение

$$2T = G \dot{\alpha}^2 + H \dot{\beta}^2 + A_{11}^3 \dot{\varphi}^2 + 2N \dot{\alpha} \dot{\beta} + 2Q \dot{\alpha} \dot{\varphi} + 2R \dot{\beta} \dot{\varphi}, \quad (21)$$

в котором коэффициенты при произведениях обобщенных скоростей зависят от

механических параметров и величин  $\alpha_{ij}^{kl}$  посредством формул

$$\begin{aligned}
 G = & A_{11}^1 + (m^2 + m^3)(s_2^1 s_2^1 + s_3^1 s_3^1) + \\
 & + [A_{ij}^2 + m^3 s_r^3 s_l^2 (\delta_{ij} \delta_{rl} - \delta_{il} \delta_{jr})] \alpha_{i1}^{21} \alpha_{j1}^{21} + A_{ij}^3 \alpha_{i1}^{31} \alpha_{j1}^{31} + \\
 & + 2(m^2 c_j^2 + m^3 s_j^2) s_l^1 \alpha_{jr}^{21} (\delta_{rl} - \delta_{r1} \delta_{l1}) + \\
 & + 2m^3 c_j^3 s_l^1 \alpha_{jr}^{31} (\delta_{rl} - \delta_{r1} \delta_{l1}) + \\
 & + 2m^3 c_j^3 s_l^2 \alpha_{jn}^{32} \alpha_{k1}^{21} \alpha_{r1}^{21} (\delta_{kr} \delta_{nl} - \delta_{kl} \delta_{rn}),
 \end{aligned}$$

$$H = A_{11}^2 + m^3 (s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + A_{ij}^3 \alpha_{i1}^{32} \alpha_{j1}^{32} + 2m^3 c_j^3 s_l^2 \alpha_{jr}^{32} (\delta_{rl} - \delta_{r1} \delta_{l1}), \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 N = & [A_{11}^2 + m^3 s_j^2 s_l^2 (\delta_{i1} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{j1})] \alpha_{i1}^{21} + A_{ij}^3 \alpha_{i1}^{31} \alpha_{j1}^{32} + \\
 & + (m^2 c_j^2 + m^3 s_j^2) s_l^1 \alpha_{sn}^{21} \varepsilon_{ijs} \varepsilon_{1ln} + m^3 c_j^3 s_l^1 \alpha_{jr}^{32} \alpha_{sn}^{21} \varepsilon_{1rs} \varepsilon_{1ln} + \\
 & + m^3 c_j^3 s_l^2 \alpha_{jr}^{32} \alpha_{k1}^{21} (2\delta_{k1} \delta_{rl} - \delta_{kl} \delta_{r1} - \delta_{kr} \delta_{l1}),
 \end{aligned}$$

$$Q = A_{i1}^3 \alpha_{i1}^{31} + m^3 c_j^3 s_l^1 \alpha_{sn}^{31} \varepsilon_{1js} \varepsilon_{1ln} + m^3 c_j^3 s_l^2 \alpha_{sn}^{32} \alpha_{r1}^{21} \varepsilon_{1js} \varepsilon_{rln},$$

$$R = A_{i1}^3 \alpha_{i1}^{32} + m^3 c_j^3 s_l^2 \alpha_{sn}^{32} \varepsilon_{1js} \varepsilon_{1ln}.$$

**4. Выражения коэффициентов в формуле для кинетической энергии через параметры и углы  $\beta, \varphi$ .** Чтобы завершить вычисление кинетической энергии для обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе, достаточно выполнить в (22) суммирование по нижним индексам при условиях (6), (7) и подставить в полученные выражения значения  $\alpha_{ij}^{kl}$  из (10), (12). В результате для коэффициентов в формуле (21) для кинетической энергии получаем выражения в виде тригонометрических полиномов по  $\beta, \varphi$ , которые запишем, выделяя в них зависимости от угла  $\varphi$ :

$$G(\beta, \varphi) = G_0(\beta) + G_1(\beta) \cos \varphi + G_2(\beta) \sin \varphi + G_3(\beta) \cos 2\varphi + G_4(\beta) \sin 2\varphi,$$

$$H(\varphi) = H_0 + H_1 \cos \varphi + H_2 \sin \varphi + H_3 \cos 2\varphi + H_4 \sin 2\varphi,$$

$$N(\beta, \varphi) = N_0(\beta) + N_1(\beta) \cos \varphi + N_2(\beta) \sin \varphi + N_3(\beta) \cos 2\varphi + N_4(\beta) \sin 2\varphi,$$

$$Q(\beta, \varphi) = Q_0(\beta) + Q_1(\beta) \cos \varphi + Q_2(\beta) \sin \varphi,$$

$$R(\varphi) = R_0 + R_1 \cos \varphi + R_2 \sin \varphi.$$

(23)

В (23) величины  $G_0(\beta), H_0, N_0(\beta), Q_0(\beta), R_0$  выражаются через угол  $\beta$  и механические параметры следующим образом

$$\begin{aligned}
 G_0(\beta) = & A_{11}^1 + (m^2 + m^3)(s_2^1 s_2^1 + s_3^1 s_3^1) + 2m^2 c_1^2 s_3^1 \sin^2 \theta^2 + \\
 & + [A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + A_{11}^3 \cos^2 \theta^3 + \frac{A_{22}^3 + A_{33}^3}{2} \sin^2 \theta^3] \cos^2 \theta^2 - \\
 & - [A_{12}^2 \sin 2\theta^2 + 2s_2^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) - 2s_3^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) \cos \theta^2] \cos \beta + \\
 & + [(A_{13}^2 + \frac{2A_{11}^3 - A_{22}^3 - A_{33}^3}{4} \sin 2\theta^3) \sin 2\theta^2 - 2s_2^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) - \\
 & - 2s_3^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) \cos \theta^2] \sin \beta + (A_{22}^2 + m^3 s_3^2 s_3^2 + \frac{A_{22}^3 + A_{33}^3}{2}) \sin^2 \theta^2 \cos^2 \beta + \\
 & + (A_{33}^2 + m^3 s_2^2 s_2^2 + A_{11}^3 \sin^2 \theta^3 + \frac{A_{22}^3 + A_{33}^3}{2} \cos^2 \theta^3) \sin^2 \theta^2 \sin^2 \beta - \\
 & - (A_{23}^2 - m^3 s_2^2 s_3^2) \sin^2 \theta^2 \sin 2\beta,
 \end{aligned}$$

$$H_0 = A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + A_{11}^3 \cos^2 \theta^3 + \frac{A_{22}^3 + A_{33}^3}{2} \sin^2 \theta^3, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 N_0(\beta) = & [A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + A_{11}^3 \cos^2 \theta^3 + \frac{A_{22}^3 + A_{33}^3}{2} \sin^2 \theta^3] \cos \theta^2 - \\
 & - [A_{12}^2 \sin \theta^2 + s_2^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) \cos \theta^2 - s_3^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2)] \cos \beta + \\
 & + [(A_{13}^2 + \frac{2A_{11}^3 - A_{22}^3 - A_{33}^3}{4} \sin 2\theta^3) \sin \theta^2 - s_2^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) \cos \theta^2 - \\
 & - s_3^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2)] \sin \beta,
 \end{aligned}$$

$$Q_0(\beta) = A_{11}^3 \cos \theta^2 \cos \theta^3 + A_{11}^3 \sin \theta^2 \sin \theta^3 \sin \beta,$$

$$R_0 = A_{11}^3 \cos \theta^3.$$

Коэффициенты при  $\cos n\varphi, \sin n\varphi$  ( $n = 1, 2$ ) в формулах (23) равны

$$\begin{aligned}
 G_1(\beta) = & \frac{A_{12}^3}{2} (1 - 3 \cos^2 \theta^2) \sin 2\theta^3 - m^3 c s_2^2 (\cos^2 \theta^2 + 1) + \\
 & + (A_{13}^3 \sin 2\theta^2 \cos \theta^3 - 2m^3 c s_3^1 \cos \theta^2) \cos \beta + (A_{12}^3 \sin 2\theta^2 \cos 2\theta^3 + \\
 & + 2m^3 c s_2^1) \sin \beta - (A_{12}^3 \sin 2\theta^3 - 2m^3 c s_2^2) \frac{\sin^2 \theta^2}{2} \cos 2\beta + \\
 & + (A_{13}^3 \cos \theta^3 - m^3 c s_3^2) \sin^2 \theta^2 \sin 2\beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_2(\beta) = & \frac{A_{13}^3}{2} (3 \cos^2 \theta^2 - 1) \sin 2\theta^3 + m^3 c [2s_3^1 \sin \theta^2 \sin \theta^3 - \\
 & - s_3^2 (\cos^2 \theta^2 + 1) \cos \theta^3] + [A_{12}^3 \sin 2\theta^2 \cos \theta^3 + m^3 c (s_2^2 \sin 2\theta^2 \sin \theta^3 + \\
 & + 2s_2^1 \cos \theta^3)] \cos \beta - [A_{13}^3 \sin 2\theta^2 \cos 2\theta^3 + m^3 c (s_3^2 \sin 2\theta^2 \sin \theta^3 - \\
 & - s_3^1 \cos \theta^2 \cos \theta^3)] \sin \beta + (A_{13}^3 \sin 2\theta^3 - 2m^3 c s_3^2 \cos \theta^3) \frac{\sin^2 \theta^2}{2} \cos 2\beta + \\
 & + (A_{12}^3 \sin \theta^3 - m^3 c s_2^2 \cos \theta^3) \sin^2 \theta^2 \sin 2\beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_3(\beta) &= \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{4} (3 \cos^2 \theta^2 - 1) \sin^2 \theta^3 - A_{23}^3 \sin 2\theta^2 \sin \theta^3 \cos \beta - \\
 &\quad - \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{4} \sin 2\theta^2 \sin 2\theta^3 \sin \beta - \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{4} (\cos^2 \theta^3 + 1) \sin^2 \theta^2 \cos 2\beta + \\
 &\quad + A_{23}^3 \sin^2 \theta^2 \cos \theta^3 \sin 2\beta, \\
 G_4(\beta) &= \frac{A_{23}^3}{2} (1 - 3 \cos^2 \theta^2) \sin^2 \theta^3 - \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{2} \sin 2\theta^2 \sin \theta^3 \cos \beta + \\
 &\quad + \frac{A_{23}^3}{2} \sin 2\theta^2 \sin 2\theta^3 \sin \beta + \frac{A_{23}^3}{2} (\cos^2 \theta^3 + 1) \sin^2 \theta^2 \cos 2\beta + \\
 &\quad + \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{2} \sin^2 \theta^2 \cos \theta^3 \sin 2\beta, \\
 H_1 &= -A_{12}^3 \sin 2\theta^3 - 2m^3 cs_2^2, \\
 H_2 &= A_{13}^3 \sin 2\theta^3 - 2m^3 cs_3^2 \cos \theta^3, \\
 H_3 &= \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{2} \sin^2 \theta^3, \\
 H_4 &= -A_{23}^3 \sin^2 \theta^3, \\
 N_1(\beta) &= -(A_{12}^3 \sin 2\theta^3 + 2m^3 cs_2^2) \cos \theta^2 + (A_{13}^3 \sin \theta^2 \cos \theta^3 - m^3 cs_3^1) \cos \beta + \\
 &\quad + (A_{12}^3 \sin \theta^2 \cos 2\theta^3 + m^3 cs_2^1 \cos \theta^2) \sin \beta, \\
 N_2(\beta) &= (A_{13}^3 \sin 2\theta^3 - 2m^3 cs_3^2) \cos \theta^2 + [(A_{12}^3 \cos \theta^3 + m^3 cs_2^2 \sin \theta^3) \sin \theta^2 + \\
 &\quad + m^3 cs_2^1 \cos \theta^2 \cos \theta^3] \cos \beta - [(A_{13}^3 \cos 2\theta^3 + m^3 cs_3^2 \sin \theta^3) \sin \theta^2 - \\
 &\quad - m^3 cs_3^1 \cos \theta^3] \sin \beta, \\
 N_3(\beta) &= \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{2} \cos \theta^2 \sin^2 \theta^3 - A_{23}^3 \sin \theta^2 \sin \theta^3 \cos \beta - \\
 &\quad - \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{2} \sin \theta^2 \sin 2\theta^3 \sin \beta, \\
 N_4(\beta) &= -A_{23}^3 \cos \theta^2 \sin^2 \theta^3 - \frac{A_{22}^3 - A_{33}^3}{2} \sin \theta^2 \sin \theta^3 \cos \beta + \\
 &\quad + \frac{A_{23}^3}{2} \sin \theta^2 \sin 2\theta^3 \sin \beta, \\
 Q_1(\beta) &= -(A_{12}^3 \sin \theta^3 + m^3 cs_2^2 \cos \theta^3) \cos \theta^2 + m^3 cs_2^1 \sin \theta^2 \sin \theta^3 + \\
 &\quad + [(A_{13}^3 - m^3 cs_3^2 \sin \theta^3) \sin \theta^2 - m^3 cs_3^1 \cos \theta^3] \cos \beta + [(A_{12}^3 \cos \theta^3 - \\
 &\quad - m^3 cs_2^2 \sin \theta^3) \sin \theta^2 + m^3 cs_2^1 \cos \theta^2 \cos \theta^3] \sin \beta, \\
 Q_2(\beta) &= A_{13}^3 \sin \theta^3 - m^3 cs_3^2 + (A_{12}^3 \sin \theta^2 + m^3 cs_2^1 \cos \theta^2) \cos \beta - \\
 &\quad - (A_{13}^3 \sin \theta^2 \cos \theta^3 - m^3 cs_3^1) \sin \beta, \\
 R_1 &= -A_{12}^3 \sin \theta^3 - m^3 cs_2^2 \cos \theta^3, \\
 R_2 &= A_{13}^3 \sin \theta^3 - m^3 cs_3^2.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы в соответствии с (21), (23) определяется угловыми скоростями  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$  вращения тел  $S^1, S^2, S^3$  вокруг осей  $l^1, l^2, l^3$  и взаимной ориентацией этих тел, определяемой углами  $\beta, \varphi$ . Из (24), (25) следует, что  $T$  не зависит от угла  $\alpha$ , а также от угла  $\theta^1$  между векторами  $e_1^0, e_1^1$ , направленными вдоль вертикали и вдоль оси вращения тела  $S^1$ .

**5. Потенциальная энергия.** При движении рассматриваемой механической системы в однородном поле силы тяжести ее потенциальная энергия выражается формулой  $U = Mgr_C \cdot e_1^0$ . Здесь  $M = m^1 + m^2 + m^3$  — масса всей системы,  $g$  — модуль ускорения силы тяжести,  $r_C$  — радиус-вектор центра масс всей системы, который определен формулой (см. рис. 2)

$$r_C = \frac{1}{M} [m^1 g c^1 + m^2 g (s^1 + c^2) + m^3 g (s^1 + s^2 + c^2)].$$

Таким образом, получаем для потенциальной энергии выражение

$$U = m^1 g c^1 \cdot e_1^0 + m^2 g (s^1 + c^2) \cdot e_1^0 + m^3 g (s^1 + s^2 + c^3) \cdot e_1^0.$$

Воспользовавшись первой из формул (11) и аналогичной ей формулой  $\alpha_{ij}^{k0} = \alpha_{is}^{k1} \alpha_{sj}^{10}$ , представим это выражение в форме

$$U = g \alpha_{i1}^{10} [m^1 c_i^1 + (m^2 + m^3) s_i^1 + (m^2 c_j^2 + m^3 s_j^2 + m^3 c_k^3 \alpha_{kj}^{32}) \alpha_{ji}^{21}].$$

Просуммировав здесь по нижним индексам при условиях (6), заменим величины  $\alpha_{ij}^{kl}$  их значениями (10).

В результате для обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе получаем следующее выражение потенциальной энергии

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \varphi) = & g \cos \theta^1 [m^1 c_1^1 + m^2 c_1^2 \cos \theta^2 + m^3 c \sin \theta^3 \cos \theta^2 \sin \varphi - \\ & - (m^2 c_2^2 + m^3 s_2^2 - m^3 c \cos \varphi) \sin \theta^2 \cos \beta + \\ & + (m^2 c_3^2 + m^3 s_3^2 - m^3 c \cos \theta^3 \sin \varphi) \sin \theta^2 \sin \beta] + \\ & + g \sin \theta^1 \cos \alpha [m^1 c_2^1 + (m^2 + m^3) s_2^1 - (m^2 c_3^2 + m^3 s_3^2 - m^3 c \cos \theta^3 \sin \varphi) \cos \beta - \\ & - (m^2 c_2^2 + m^3 s_2^2 - m^3 c \cos \varphi) \sin \beta] - \\ & - g \sin \theta^1 \sin \alpha [m^1 c_3^1 + (m^2 + m^3) s_3^1 + m^2 c_1^2 \sin \theta^2 + m^3 c \sin \theta^3 \sin \theta^2 \sin \varphi + \\ & + (m^2 c_2^2 + m^3 s_2^2 - m^3 c \cos \varphi) \cos \theta^2 \cos \beta - \\ & - (m^2 c_3^2 + m^3 s_3^2 - m^3 c \cos \theta^3 \sin \varphi) \cos \theta^2 \sin \beta]. \end{aligned} \quad (26)$$

**6. Условия балансировки.** Из приведенных выше формул следует, что величины  $T$  и  $U$  не зависят от углов  $\alpha$  и  $\varphi$  в следующих двух случаях.

*Случай 1.* Наружная ось подвеса вертикальна, то есть  $\theta^1 = 0$ , а гироскоп  $S^3$  динамически симметричен относительно оси  $l^3$  и его центр масс лежит на этой оси, то есть

$$c = 0, \quad A_{22}^3 = A_{33}^3, \quad A_{23}^3 = A_{12}^3 = A_{13}^3 = 0.$$

*Случай 2.* Выполнены условия

$$\begin{aligned} c = 0, \quad m^2 c_2^2 + m^3 s_2^2 = 0, \quad m^2 c_3^2 + m^3 s_3^2 = 0, \\ m^1 c_2^1 + (m^2 + m^3) s_2^1 = 0, \quad m^1 c_3^1 + (m^2 + m^3) s_3^1 + m^2 c_1^2 \sin^2 \theta^2 = 0 \end{aligned}$$

статической уравновешенности всей системы и условия

$$A_{22}^3 = A_{33}^3, \quad A_{23}^3 = A_{12}^3 = A_{13}^3 = 0$$

динамической симметрии гироскопа.

Для динамически симметричного гироскопа его осевой и экваториальный центральные моменты инерции обозначаются через  $C$ ,  $A$ :

$$C = A_{11}^3, \quad A = A_{22}^3 = A_{33}^3.$$

В случае 1 потенциальная энергия зависит только от  $\beta$ :  $U = U(\beta)$ . Этот случай соответствует общепринятой модели неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. В случае 2 будет  $U \equiv \text{const}$ . Этот случай соответствует уравновешенному гироскопу в кардановом подвесе.

Формально случай 1 содержит случай 2 как частный. Поэтому в работах [3–6] рассматривается случай 1. Из формул (21), (23)–(25) следует, что выражение *кинетической энергии* системы в случае 1 имеет вид

$$T = \frac{1}{2} [G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}], \quad (27)$$

где величины  $G(\beta)$ ,  $H$ ,  $N(\beta)$ ,  $Q(\beta)$ ,  $R$  выражаются через угол  $\beta$  и параметры системы по формулам

$$\begin{aligned} G(\beta) = & A_{11}^1 + (m^2 + m^3)(s_2^1 s_2^1 + s_3^1 s_3^1) + 2m^2 c_1^2 s_3^1 \sin^2 \theta^2 + \\ & + [A_{11}^2 + m^3 (s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + C \cos^2 \theta^3 + A \sin^2 \theta^3] \cos^2 \theta^2 - \\ & - [A_{12}^2 \sin 2\theta^2 + 2s_2^1 (m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) - 2s_3^1 (m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) \cos \theta^2] \cos \beta + \\ & + [(A_{13}^2 + \frac{(C - A) \sin 2\theta^3}{2}) \sin 2\theta^2 - 2s_2^1 (m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) - \\ & - 2s_3^1 (m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) \cos \theta^2] \sin \beta + (A_{22}^2 + m^3 s_3^2 s_3^2 + A) \sin^2 \theta^2 \cos^2 \beta + \\ & + (A_{33}^2 + m^3 s_2^2 s_2^2 + C \sin^2 \theta^3 + A \cos^2 \theta^3) \sin^2 \theta^2 \sin^2 \beta - \\ & - (A_{23}^2 - m^3 s_2^2 s_3^2) \sin^2 \theta^2 \sin 2\beta, \end{aligned} \quad (28)$$

$$H = A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + C \cos^2 \theta^3 + A \sin^2 \theta^3,$$

$$\begin{aligned} N(\beta) = & [A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + C \cos^2 \theta^3 + A \sin^2 \theta^3] \cos \theta^2 - \\ & - [A_{12}^2 \sin \theta^2 + s_2^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) \cos \theta^2 - s_3^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2)] \cos \beta + \\ & + [(A_{13}^2 + \frac{C-A}{2} \sin 2\theta^3) \sin \theta^2 - s_2^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) \cos \theta^2 - \\ & - s_3^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2)] \sin \beta, \end{aligned}$$

$$Q(\beta) = C \cos \theta^2 \cos \theta^3 + C \sin \theta^2 \sin \theta^3 \sin \beta,$$

$$R = C \cos \theta^3.$$

Формула (26) для *потенциальной энергии* в случае 1 принимает вид

$$\begin{aligned} U = U(\beta) = g [m^1 c_1^1 + m^2 c_1^2 \cos \theta^2 + (m^2 c_2^2 + m^3 s_2^2) \sin \theta^2 \cos \beta + \\ + (m^2 c_3^2 + m^3 s_3^2) \sin \theta^2 \sin \beta]. \end{aligned} \quad (29)$$

**Заключение.** Общие формулы (24), (25) для коэффициентов  $G(\beta, \varphi)$ ,  $H(\varphi)$ ,  $N(\beta, \varphi)$ ,  $Q(\beta, \varphi)$ ,  $R(\varphi)$  в выражении (21) кинетической энергии обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе могут использоваться при постановке и решении задач о влиянии, которое оказывают на динамику этого прибора разные факторы (например, динамическая асимметрия и статическая неуравновешенность гироскопа, неортогональность и непересечение осей подвеса и гироскопа).

Для гироскопа в кардановом подвесе со статически и динамически уравновешенным ротором и вертикальной наружной осью подвеса в [3–6] рассматривались вопросы устойчивости стационарных движений с учетом влияния электромотора, который поддерживает вращение гироскопа (ротора электромотора) при наличии трения относительно оси его вращения. При любом значении  $\beta$  величины  $G(\beta)$ ,  $H$ ,  $N(\beta)$ ,  $Q(\beta)$ ,  $R$  являются коэффициентами определено положительной по  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\varphi}$  квадратичной формы (27), и поэтому для них выполнены неравенства Сильвестра. В таком случае при изучении задач устойчивости детальные выражения (28) для этих величин не нужны, используется только выражение потенциальной энергии (29). Это позволяет проводить анализ устойчивости с высокой общностью без ненужных подробностей.

### Список литературы

1. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе / Б.И. Коносевич // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 82-92.
2. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 73–82 .
3. *Коносевич Б.И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе / Б.И. Коносевич // Механика твердого тела. – 1977. – Вып. 9. – С. 61–73.

4. Коносеви́ч Ю.Б. Критерий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе / Ю.Б. Коносеви́ч // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 115–123.
5. Коносеви́ч Б.И., Коносеви́ч Ю.Б. Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем / Б.И. Коносеви́ч, Ю.Б. Коносеви́ч // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 3. – С. 57–73. – EDN: QLQICB.
6. Konosevich B. Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope / B. Konosevich, Yu. Konosevich // Nonlinear Dynamics. – 2015. – Vol. 79, no. 3. – P. 2005–2015. – DOI: 10.1007/s11071-014-1789-z.
7. Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов / Я.Л. Лунц. – М.: Наука, 1972. – 296 с.
8. Климов Д.М. Динамика гироскопа в кардановом подвесе / Д.М. Климов, С.А. Харламов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.

### **B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich**

#### **Gyroscope in a gimbal suspension: a generalized mechanical model by P.V. Kharlamov.**

This paper derives expressions for the kinetic energy and potential energy of gravity for a generalized model of a gimbaledd gyroscope. In this model, the gyroscope and gimbal elements can have any shape, the inner axis of the gimbal is generally non-orthogonal to the outer axis of the gimbal and the gyroscope axis, and these three axes do not intersect at a single point.

**Keywords:** *gimbal-mounted gyroscope, kinetic energy, potential energy, Lagrange equations.*

#### **References**

1. Konosevich, B.I. (1972) [Rotor axis drift velocity in a generalized gyroscope problem with a gimbal suspension]. *Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*. 4, 82–92. (In Russian)
2. Kharlamov, P.V. (1972) [Compound spatial pendulum]. *Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*. 4, 73–82. (In Russian)
3. Konosevich, B.I. (1977) [On the stability of stationary motions of an asynchronous gyroscope in a gimbal suspension]. *Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*. 9, 61–73. (In Russian)
4. Konosevich, Yu.B. (2005) [Criterion of stability of stationary motions of a synchronous gyroscope in a gimbal suspension]. *Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*. 35, 115–123. (In Russian)
5. Konosevich, B.I. & Konosevich, Yu.B. (2013) [On the stability of stationary motions of a gyroscope in a gimbal suspension equipped with an electric motor]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela. = Mechanics of Solids*. 3, 57–73, EDN: QLQICB. (In Russian)
6. Konosevich, B. & Konosevich, Yu. (2015) Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope. *Nonlinear Dynamics*. 79 (3), 2005–2015, DOI: 10.1007/s11071-014-1789-z.
7. Lunts, Ya.L. (1972) [Introduction to the Theory of Gyroscopes]. Moscow: Nauka. 296 p. (In Russian).
8. Klimov, D.M. & Kharlamov, S.A. (1978) [Introduction to the Theory of Gyroscopes]. Moscow: Nauka. 208 p. (In Russian).

*Поступила в редакцию / Original submitted 26.03.2026.*

*Доработана / Revision submitted 10.04.2026.*

*Рекомендована к печати / Accepted 15.04.2026.*

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-19-31

EDN:EINIBR



©2026. Е.С. Глушанков

**ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА  
В БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКЕ  
ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ  
КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ**

В данной работе представлено решение задачи определения термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной многосвязной пластинки из пьезоматериала при действии сосредоточенных источников тепла, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Для решения задачи был использован аппарат конформных отображений, теория функций комплексной переменной, метод наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также распределения источников тепла на значения напряжений в пластинке.

**Ключевые слова:** многосвязная пластинка, пьезоматериал, конвективный теплообмен, сосредоточенные источники тепла, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**Введение.** Во многих областях науки и техники в качестве элементов конструкций широко используются тонкие пластинки, изготовленные из пьезоматериалов. Эти пластинки могут содержать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. Под действием тепловых, механических и электромагнитных полей в них могут возникать значительные концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. К настоящему времени разработано множество методов и решено большое количество задач о действии физических полей в упругих телах из пьезоматериалов [1–4], в т.ч. о действии различных температурных полей в многосвязных тонких пластинках [5, 6].

---

*Глушанков Евгений Сергеевич* – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8306-395X.

*Glushankov Evgenij Sergeevich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

В данной работе решена задача определения термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной многосвязной пластинки из пьезоматериала, во внутренних точках которой действуют сосредоточенные источники тепла, а на контурах отверстий имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Для решения задачи использовались конформные отображения областей, функции комплексной переменной, метод наименьших квадратов. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями с установлением закономерностей влияния геометрических характеристик пластинок, свойств материала пластинки, характеристик конвективного теплообмена, распределения источников тепла на значения напряжений в пластинке.

**1. Постановка задачи.** Пусть пластинка из пьезоматериала занимает бесконечную область  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с центрами в точках  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуосями  $a_l, b_l$ , углами поворота  $\varphi_l$  (рис. 1). На контурах отверстий  $L_l$  действует конвективный теплообмен с коэффициентами  $h_l$  с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_l$ . Контур отверстия  $L_l$  не подкреплены или жестко подкреплены, электромагнитные воздействия отсутствуют. В точках пластинки  $O_r^0(x_{0r}^0, y_{0r}^0)$  ( $r = \overline{1, \mathcal{R}}$ ) действуют сосредоточенные источники тепла интенсивности  $q_r^0$ . На бесконечности отсутствуют тепловые, силовые и электромагнитные воздействия.

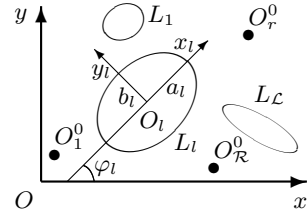


Рис. 1

Задачу термоэлектромагнитоупругости будем решать в несвязанной постановке с применением комплексных потенциалов. Тогда задача сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$  из граничных условий задачи теплопроводности, а затем – комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости. После определения комплексных потенциалов значения основных характеристик температурного поля (относительной температуры  $T$ , плотностей потока тепла  $q_x, q_y$ ) и термоэлектромагнитоупругого состояния (напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , индукций электрического поля  $D_x, D_y$ , индукций магнитного поля  $B_x, B_y$ , напряженностей электрического поля  $E_x, E_y$ , напряженностей магнитного поля  $H_x, H_y$ , перемещений  $u, v$ , потенциала электрического поля  $\varphi$ , потенциала магнитного поля  $\psi$ ) в точках пластинки можно определять по формулам [5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5'(z_5), \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_5, -1) F_5'(z_5), \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь

$$\kappa = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2};$$

$\mu_5$  – корень характеристического уравнения теплопроводности [5]

$$k_{22} \mu^2 + 2k_{12} \mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

$\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – корни характеристического уравнения электромагнитоупругости [5]

$$l_8(\mu) = 0, \quad (8)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11} \mu^4 - 2s_{16} \mu^3 + (2s_{12} + s_{66}) \mu^2 - 2s_{26} \mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11} \mu^3 - (g_{21} + g_{16}) \mu^2 + (g_{12} + g_{26}) \mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11} \mu^3 - (p_{21} + p_{16}) \mu^2 + (p_{12} + p_{26}) \mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11} \mu^2 + 2\beta_{12} \mu - \beta_{22}, \quad l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11} \mu^2 + 2\nu_{12} \mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11} \mu^2 + 2\chi_{12} \mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k) l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k) l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{l_8(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_{\omega}(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2, \quad l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{21} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k + \left(p_{21} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

$k_{ij}$  – коэффициенты теплопроводности материала пластинки;  $s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  – коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости материала;  $\alpha_i$  – коэффициенты теплового расширения материала;  $t_i$  и  $m_i$  – пирозлектрические и пиромагнитные модули материала;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

**2. Комплексные потенциалы.** Функции  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) определяются в многосвязных областях  $S_5$ ,  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями [5]

$$z_5 = x + \mu_5 y. \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

В общем случае эти функции принимают вид [5, 7]

$$F_5(z_5) = N_5(z_5) + c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь

$$N_5(z_5) = \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} D_{5r}^0 w_{5r}^0(z_5);$$

$D_{5r}^0 = -q_r^0/4\pi\kappa$ ;  $w_{5r}^0(z_5) = \ln(z_5 - z_{5r}^0)$ ;  $z_{5r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_5 y_{0r}^0$  – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) точкам  $O_r^0$ ;  $c_5$ ,  $D_{5l}$  – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности, причем

из условия ограниченности температуры в бесконечно удаленной точке следует условие

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} D_{5r}^0 = 0;$$

$w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $c_{5ln}$  – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;  $\zeta_{5l}$  – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) w_{kr}^0(z_k) \quad (k = \overline{1, 4});$$

$\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$ ,  $A_{kr}^0$ ,  $B_{kr}^0$  – комплексные постоянные, определяемые из решений систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = \\ & = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, \mu_5^2, q_5 - \mu_5 p_5, \nu_5, \mu_5 \nu_5, \rho_5, \mu_5 \rho_5) \Gamma_5, \\ & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = \\ & = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i A_{5l}, \\ & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = \\ & = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i B_{5l}, \\ & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kr}^0 = \\ & = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i A_{5r}^0, \\ & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kr}^0 = \\ & = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i B_{5r}^0; \end{aligned}$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$ ;  $A_{5l} = r_5 D_{5l}$ ;  $B_{5l} = r_5 (c_{5l1} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$ ;  $A_{5r}^0 = r_5 D_{5r}^0$ ;  $B_{5r}^0 = -r_5 D_{5r}^0 z_{5r}^0$ ;  $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $w_{kr}^0(z_k) = \ln(z_k - z_{kr}^0)$ ;  $z_{5r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_5 y_{0r}^0$  – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) точкам  $O_r^0$ ;  $a_{kln}$  – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости;  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ ;  $\zeta_{kl}$  – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  уравнения эллипсов (рис. 1) в параметрической форме принимают вид [5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат  $Oxy$  –

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned}$$

где  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) – угловой параметр уравнения эллипса.

Комплексные переменные  $\zeta_{kl}$  ( $k = \overline{1, 5}$ ) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$  [5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция  $F_5(z_5)$  должна удовлетворять граничному условию [6]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_5(\tau_5) + i\kappa \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = h_l \mathfrak{I}_l, \quad (14)$$

где  $\tau_5$  – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (9);  $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$ ,  $s$  – дуга контура отверстия.

Функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) должны удовлетворять граничным условиям [5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) = \\ = \left( \frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau), \frac{df_{l3}}{ds}(\tau), \frac{df_{l4}}{ds}(\tau) \right) - \\ - 2 \operatorname{Re} (d_{5l1}, d_{5l2}, d_{5l3}, d_{5l4}) \delta_{5,s}(\tau_5) r_5 F_5'(\tau_5), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\tau_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (10);  $\tau$  – аффикс граничной точки;  $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$ . Для неподкрепленных контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) &= (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}), \end{aligned}$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) &= (u_l(\tau), v_l(\tau), c_{l3}, c_{l4}); \end{aligned}$$

$c_{lp}$  – неизвестные постоянные интегрирования;  $u_l(\tau), v_l(\tau)$  – заданные на границе значения перемещений.

**3. Определение неизвестных постоянных.** Неизвестные постоянные  $c_5, D_{5l}, c_{5ln}, a_{kln}$ , входящие в разложения функций (11) и (12), будем определять из граничных условий (14) и (15) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах  $L_j$  ( $j = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) выбираем систему точек  $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$  ( $m = \overline{1, \mathcal{M}_j}$ ), в которых следует минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости.

*Задача теплопроводности.* При подстановке функции  $F_5(z_5)$  в виде (11) в граничное условие (14) для определения неизвестных постоянных  $c_5, D_{5l}, c_{5ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re} h_j c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_j w_{5l}(\tau_{5jm}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) w'_{5l}(\tau_{5jm})) D_{5l} + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_j \varphi_{5ln}(\tau_{5jm}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) \varphi'_{5ln}(\tau_{5jm})) c_{5ln} = \\ &= h_j \mathfrak{T}_j - 2 \operatorname{Re} (h_j N_5(\tau_{5jm}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) N'_5(\tau_{5jm})) \quad (j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\tau_{5jm} = x_{jm} + \mu_5 y_{jm}$ . После решения системы (16) с использованием метода сингулярных разложений [8] постоянные  $c_5, D_{5l}, c_{5ln}$ , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции (11) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик температурного поля по формулам (1), (2) [5].

*Задача термоэлектромагнитоупругости.* При подстановке функций  $F_5(z_5)$  и  $\Phi_k(z_k)$  в виде (11) и (12) в граничные условия (15) для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) \varphi'_{kln}(\tau_{kjm}) a_{kln} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) N'_k(\tau_{kjm}) - \\ &- 2 \operatorname{Re} d_{5jp} \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) r_5 F_5(\tau_{5jm}) + \frac{df_{jpp}}{ds}(\tau_{jm}) (j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}, p = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\tau_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}$ ,  $\tau_{jm}$  – аффикс точки  $M_{jm}$ . После решения системы (17) с использованием метода сингулярных разложений [8] постоянные  $a_{kln}$ , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12), будут известны. По известным функциям (12) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния по формулам (3)–(6) [5].

**4. Численные исследования.** Были проведены численные исследования для пластинок из композита на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  [9]:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 7,165s_0, & s_{22} &= 6,797s_0, & s_{66} &= 19,912s_0, & s_{12} &= -2,337s_0, \\ g_{16} &= 2,028g_0, & g_{21} &= -0,496g_0, & g_{22} &= 1,157g_0, \\ p_{16} &= 1,850p_0, & p_{21} &= 0,576p_0, & p_{22} &= 1,186p_0, \\ \beta_{11} &= 0,156\beta_0, & \beta_{22} &= 0,137\beta_0, & \nu_{11} &= -0,190\nu_0, & \nu_{22} &= -0,185\nu_0, \\ \chi_{11} &= 0,336\chi_0, & \chi_{22} &= 0,119\chi_0, & \alpha_1 &= 8,530\alpha_0, & \alpha_2 &= 1,990\alpha_0, \\ t_2 &= 133t_0, & m_2 &= 133m_0, & k_{11} &= 2,5k_0, & k_{22} &= 2,5k_0. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:  $s_0 = 10^{-6}$  МПа $^{-1}$ ,  $g_0 = 10^{-2}$  МКл $^{-1} \cdot$  м $^2$ ,  $p_0 = 10^{-5}$  МТл $^{-1}$ ,  $\beta_0 = 10^3$  МН  $\cdot$  м $^2 \cdot$  МКл $^{-2}$ ,  $\nu_0 = 10^{-1}$  МКл $^{-1} \cdot$  м  $\cdot$  МА,  $\chi_0 = 10^{-1}$  МПа  $\cdot$  МТл $^{-1}$ ,  $\alpha_0 = 10^{-6}$  К $^{-1}$ ,  $t_0 = 10^{-3}$  МН  $\cdot$  (МКл  $\cdot$  К) $^{-1}$ ,  $m_0 = 10^{-3}$  МА  $\cdot$  (м  $\cdot$  К) $^{-1}$ ,  $k_0 = 1$  Вт  $\cdot$  (м  $\cdot$  К) $^{-1}$ .

При проведении расчетов количество членов в рядах в функциях (11), (12) и количество «коллокационных» точек  $M_{jm}$  на контурах  $L_j$  увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого в решаемых задачах необходимо было в рядах Лорана сохранять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1000 «коллокационных» точек. При этом, решались задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала, и термоупругости (ТУ), когда электромагнитные свойства материала не учитываются.

В таблице 1 для пластинки с одним круговым отверстием с неподкрепленным контуром радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a$ ), в которой на расстоянии  $d$  от контура отверстия действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности  $q_1^0$  (рис. 2), когда через контур отверстия действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры  $\mathfrak{T}_1 = 0$  К с коэффициентом теплообмена  $h_1 = h$ , приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s/q_1^0$  в некоторых точках контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения  $ha$  для некоторых значений  $d/a$  для случая задачи ТЭМУ. А в таблице 2 приведены аналогичные значения напряжений  $\sigma_s/q_1^0$  для случая задачи ТУ.

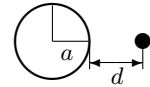


Рис. 2

В таблице 3 для пластинки с двумя круговыми отверстиями с неподкрепленными контурами радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$ ), расстояние между которыми равно  $c$ , в которой на расстоянии  $d = a$  от контура правого отверстия действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности  $q_1^0$  (рис. 3), когда через контуры отверстий действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = 0$  К с коэффициентом теплообмена  $h_1 = h_2 = h$ , приведены значе-

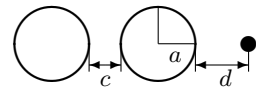


Рис. 3

Действие сосредоточенных источников тепла

Таблица 1. Значения  $\sigma_s/q_1^0$  в точках контура отверстия (задача ТЭМУ)

$ha$	$\theta$ , рад.	Значение $d/a$					
		0,1	0,5	1	2	10	100
0,01	0	0,296	0,130	0,042	-0,050	-0,258	-0,532
	$\pi/6$	0,186	0,090	0,002	-0,079	-0,259	-0,522
	$\pi/3$	0,100	0,080	0,040	-0,021	-0,139	-0,280
	$\pi/2$	0,089	0,095	0,101	0,113	0,185	0,350
	$2\pi/3$	-0,049	-0,054	-0,062	-0,079	-0,149	-0,281
	$5\pi/6$	-0,134	-0,140	-0,151	-0,173	-0,285	-0,525
	$\pi$	-0,153	-0,158	-0,168	-0,189	-0,296	-0,536
0,1	0	0,287	0,124	0,038	-0,053	-0,259	-0,532
	$\pi/6$	0,180	0,086	-0,002	-0,081	-0,260	-0,522
	$\pi/3$	0,099	0,079	0,039	-0,022	-0,139	-0,280
	$\pi/2$	0,088	0,094	0,101	0,113	0,185	0,350
	$2\pi/3$	-0,047	-0,052	-0,061	-0,078	-0,149	-0,281
	$5\pi/6$	-0,128	-0,135	-0,147	-0,171	-0,285	-0,525
	$\pi$	-0,146	-0,153	-0,164	-0,187	-0,295	-0,536
1	0	0,225	0,082	0,008	-0,073	-0,264	-0,532
	$\pi/6$	0,141	0,055	-0,025	-0,097	-0,264	-0,523
	$\pi/3$	0,090	0,072	0,033	-0,026	-0,141	-0,280
	$\pi/2$	0,077	0,088	0,097	0,111	0,185	0,350
	$2\pi/3$	-0,026	-0,038	-0,051	-0,072	-0,148	-0,280
	$5\pi/6$	-0,083	-0,103	-0,123	-0,155	-0,280	-0,525
	$\pi$	-0,098	-0,117	-0,137	-0,168	-0,290	-0,535
10	0	0,071	-0,014	-0,059	-0,115	-0,275	-0,534
	$\pi/6$	0,071	-0,004	-0,073	-0,130	-0,274	-0,524
	$\pi/3$	0,074	0,061	0,024	-0,033	-0,143	-0,280
	$\pi/2$	0,045	0,068	0,086	0,106	0,184	0,350
	$2\pi/3$	0,024	-0,005	-0,028	-0,058	-0,145	-0,280
	$5\pi/6$	0,009	-0,035	-0,072	-0,121	-0,271	-0,524
	$\pi$	0,000	-0,044	-0,082	-0,130	-0,279	-0,534
100	0	-0,014	-0,053	-0,085	-0,130	-0,279	-0,534
	$\pi/6$	0,057	-0,021	-0,088	-0,140	-0,277	-0,524
	$\pi/3$	0,067	0,057	0,022	-0,035	-0,144	-0,280
	$\pi/2$	0,030	0,058	0,080	0,103	0,184	0,350
	$2\pi/3$	0,045	0,009	-0,019	-0,053	-0,143	-0,280
	$5\pi/6$	0,040	-0,012	-0,055	-0,109	-0,268	-0,523
	$\pi$	0,031	-0,021	-0,063	-0,118	-0,276	-0,534
$\infty$	0	-0,034	-0,059	-0,088	-0,133	-0,279	-0,534
	$\pi/6$	0,057	-0,023	-0,089	-0,142	-0,277	-0,524
	$\pi/3$	0,066	0,057	0,021	-0,035	-0,144	-0,280
	$\pi/2$	0,027	0,057	0,079	0,102	0,184	0,350
	$2\pi/3$	0,048	0,011	-0,018	-0,052	-0,143	-0,280
	$5\pi/6$	0,044	-0,009	-0,052	-0,108	-0,267	-0,523
	$\pi$	0,035	-0,017	-0,061	-0,116	-0,275	-0,534

Таблица 2. Значения  $\sigma_s/q_1^0$  в точках контура отверстия (задача ТУ)

$ha$	$\theta$ , рад.	Значение $d/a$					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
0, 01	0	0, 062	0, 031	0, 026	0, 027	0, 046	0, 086
	$\pi/6$	-0, 091	-0, 068	-0, 035	0, 003	0, 071	0, 149
	$\pi/3$	-0, 016	-0, 011	0, 002	0, 031	0, 133	0, 276
	$\pi/2$	0, 079	0, 081	0, 086	0, 100	0, 183	0, 350
	$2\pi/3$	0, 093	0, 095	0, 098	0, 106	0, 156	0, 278
	$5\pi/6$	0, 041	0, 043	0, 047	0, 053	0, 083	0, 150
	$\pi$	0, 006	0, 008	0, 012	0, 019	0, 044	0, 086
0, 1	0	0, 062	0, 032	0, 027	0, 028	0, 046	0, 086
	$\pi/6$	-0, 089	-0, 067	-0, 034	0, 004	0, 071	0, 149
	$\pi/3$	-0, 014	-0, 010	0, 003	0, 032	0, 133	0, 276
	$\pi/2$	0, 079	0, 081	0, 086	0, 100	0, 183	0, 350
	$2\pi/3$	0, 091	0, 094	0, 097	0, 105	0, 155	0, 278
	$5\pi/6$	0, 039	0, 042	0, 046	0, 053	0, 083	0, 150
	$\pi$	0, 004	0, 007	0, 011	0, 019	0, 044	0, 086
1	0	0, 067	0, 036	0, 030	0, 030	0, 047	0, 086
	$\pi/6$	-0, 074	-0, 057	-0, 026	0, 008	0, 072	0, 149
	$\pi/3$	0, 000	0, 000	0, 010	0, 037	0, 134	0, 276
	$\pi/2$	0, 077	0, 080	0, 085	0, 100	0, 183	0, 350
	$2\pi/3$	0, 079	0, 084	0, 090	0, 101	0, 154	0, 278
	$5\pi/6$	0, 027	0, 033	0, 039	0, 048	0, 082	0, 150
	$\pi$	-0, 005	0, 000	0, 006	0, 015	0, 043	0, 086
10	0	0, 067	0, 043	0, 037	0, 036	0, 049	0, 086
	$\pi/6$	-0, 039	-0, 034	-0, 010	0, 019	0, 075	0, 149
	$\pi/3$	0, 027	0, 021	0, 026	0, 048	0, 137	0, 276
	$\pi/2$	0, 073	0, 077	0, 084	0, 099	0, 183	0, 350
	$2\pi/3$	0, 054	0, 065	0, 076	0, 091	0, 151	0, 278
	$5\pi/6$	0, 002	0, 015	0, 025	0, 039	0, 079	0, 150
	$\pi$	-0, 027	-0, 015	-0, 005	0, 008	0, 041	0, 086
100	0	0, 056	0, 043	0, 039	0, 037	0, 049	0, 086
	$\pi/6$	-0, 023	-0, 025	-0, 004	0, 022	0, 076	0, 149
	$\pi/3$	0, 036	0, 028	0, 032	0, 051	0, 138	0, 276
	$\pi/2$	0, 070	0, 076	0, 083	0, 099	0, 183	0, 350
	$2\pi/3$	0, 046	0, 059	0, 071	0, 087	0, 150	0, 278
	$5\pi/6$	-0, 006	0, 008	0, 020	0, 036	0, 079	0, 150
	$\pi$	-0, 035	-0, 020	-0, 009	0, 006	0, 040	0, 086
$\infty$	0	0, 051	0, 043	0, 039	0, 037	0, 049	0, 086
	$\pi/6$	-0, 021	-0, 023	-0, 003	0, 023	0, 076	0, 149
	$\pi/3$	0, 037	0, 029	0, 032	0, 052	0, 138	0, 276
	$\pi/2$	0, 070	0, 075	0, 083	0, 099	0, 183	0, 350
	$2\pi/3$	0, 045	0, 059	0, 070	0, 087	0, 150	0, 278
	$5\pi/6$	-0, 007	0, 008	0, 020	0, 035	0, 078	0, 150
	$\pi$	-0, 036	-0, 021	-0, 009	0, 005	0, 040	0, 086

Таблица 3. Значения  $\sigma_s/q_1^0$  в точках контуров отверстий

$ha$	$\theta$ , рад.	Значение $c/a$					
		0, 1	1	10	0, 1	1	10
		Левое отверстие			Правое отверстие		
Задача ТЭМУ							
0, 1	0	-0, 487	-0, 127	-0, 122	0, 116	0, 147	0, 205
	$\pi/6$	-0, 170	-0, 139	-0, 116	0, 068	0, 101	0, 163
	$\pi/3$	0, 001	-0, 060	-0, 047	0, 052	0, 086	0, 136
	$\pi/2$	0, 107	0, 093	0, 112	0, 071	0, 046	0, 016
	$2\pi/3$	-0, 075	-0, 050	-0, 050	0, 009	-0, 049	0, 030
	$5\pi/6$	-0, 126	-0, 108	-0, 123	-0, 171	-0, 129	0, 006
	$\pi$	-0, 132	-0, 115	-0, 132	-0, 484	-0, 105	-0, 012
10	0	-0, 127	-0, 024	-0, 011	-0, 034	-0, 023	-0, 008
	$\pi/6$	-0, 050	-0, 043	-0, 004	-0, 050	-0, 038	-0, 022
	$\pi/3$	0, 005	-0, 014	0, 019	0, 029	0, 041	0, 055
	$\pi/2$	0, 057	0, 049	0, 051	0, 071	0, 063	0, 059
	$2\pi/3$	-0, 015	0, 000	0, 020	0, 002	-0, 020	0, 002
	$5\pi/6$	-0, 040	-0, 025	-0, 004	-0, 051	-0, 050	-0, 021
	$\pi$	-0, 045	-0, 031	-0, 012	-0, 133	-0, 039	-0, 030
Задача ТУ							
0, 1	0	0, 130	0, 031	0, 004	0, 018	0, 008	-0, 012
	$\pi/6$	0, 033	0, 032	0, 036	-0, 049	-0, 059	-0, 078
	$\pi/3$	0, 057	0, 072	0, 099	-0, 024	-0, 031	-0, 053
	$\pi/2$	0, 105	0, 112	0, 138	0, 053	0, 051	0, 027
	$2\pi/3$	0, 092	0, 092	0, 106	0, 055	0, 067	0, 050
	$5\pi/6$	0, 042	0, 037	0, 039	0, 033	0, 030	0, 006
	$\pi$	0, 012	0, 006	0, 003	0, 129	0, 025	-0, 028
10	0	0, 032	0, 004	-0, 024	0, 036	0, 033	0, 026
	$\pi/6$	0, 006	0, 007	0, 006	-0, 014	-0, 017	-0, 024
	$\pi/3$	0, 038	0, 050	0, 064	0, 016	0, 013	0, 008
	$\pi/2$	0, 084	0, 087	0, 095	0, 062	0, 063	0, 064
	$2\pi/3$	0, 068	0, 066	0, 064	0, 037	0, 049	0, 059
	$5\pi/6$	0, 018	0, 014	0, 006	0, 006	0, 010	0, 012
	$\pi$	-0, 011	-0, 015	-0, 025	0, 034	0, 009	-0, 017

ния нормальных напряжений  $\sigma_s/q_1^0$  в некоторых точках контуров отверстий в зависимости от значения  $c/a$  для некоторых значений  $ha$ .

**Выводы.** Из полученных данных видно, что действующие в пластинке сосредоточенные источники тепла оказывают значительное влияние на значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки. Особенно сильно это влияние в том случае, когда источники тепла располагаются поблизости контуров отверстий. При этом, концентрация напряжений также сильно зависит от значения коэффициента теплообмена  $h$  (точнее, значения  $ha$ , являющегося в сущности критерием Био) на контурах отверстий и от свойств материала пластинки.

Видно, что при расстоянии  $d/a < 10$  уменьшение значения  $ha$  приводит к существенному возрастанию концентрации напряжений вблизи контура, а ко-

гда  $d/a \geq 10$ , то значения напряжений слабо изменяются в зависимости от  $ha$ . При этом, если  $d/a < 1$ , то в области, обращенной к сосредоточенному источнику тепла, возникают растягивающие напряжения. В противоположной же зоне преобладают сжимающие напряжения. При увеличении же расстояния  $d/a$  имеет место тенденция к формированию распределения напряжений, симметричного как вдоль, так и поперек относительно направления положения источника тепла. Причём в вышеуказанном распределении преобладают сжимающие напряжений вокруг всего контура отверстия, кроме окрестностей точек  $\theta = \pi/2$  рад и  $\theta = 3\pi/2$  рад (при решении задачи ТЭМУ), что, видимо, обусловлено специфическим влиянием электромагнитных свойств материала пластинки, в т.ч. пирозлектрических и пиромагнитных свойств, поскольку в случае пренебрежения этими свойствами (при решении задачи ТУ) численными исследованиями выявляется область растягивающих напряжений вокруг всего контура отверстия. Поэтому при проведении исследований с пластинками и пьезоматериалов необходимо учитывать все свойства материала пластинки.

Для случая пластинок с несколькими отверстиями, уменьшение расстояния отверстий приводит к существенному росту концентрации напряжений в зоне между контурами отверстий и менее заметному росту вне этой зоны. При этом, для малых значений  $ha$  концентрация напряжений возрастает более заметно. При этом, значения напряжений выше для отверстий, расположенных более близко к источнику тепла.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ FRRE-2026-0021).

### Список литературы

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
4. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
5. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
6. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2021. – № 2 (75). – С. 18–29.
7. Глушанков Е.С. Действие сосредоточенных источников тепла в бесконечной многосвязной анизотропной пластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2025. – № 2 (91). – С. 52–63. – DOI:10.24412/0136-4545-2025-2-52-63
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

E.S. Glushankov

**The concentrated heat sources' action in an infinite multiply connected piezoelectric plate under the convective heat transfer condition.**

In the paper, a solution is presented for the problem of evaluation of thermo-electro-magneto-elastic state of infinite multiply connected piezoelectric plate under the action of concentrated heat sources under convective heat transfer condition. The conformal mappings, the functions of complex variable, and the least squares were applied for obtaining of the solution of the problem. Through the numerical studies, the effects of plates's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the distribution of heat sources on the values of the stresses in the plate were investigated.

**Keywords:** multiply connected plate, piezoelectric material, convective heat transfer, reinforced contours of holes, thermal stresses, complex potentials.

**References**

1. Berlincourt D.A., Curran D.R. & Jaffe H. (1964) Piezoelectric and Piezomagnetical Materials and Their Function in Transducers. In: Mason W.P. (ed.) *Physical Acoustics*. 1A, 169–270.
2. Maugin G.A. (1988) *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. Amsterdam; New York: North Holland, xxii, 598 p. ISBN 978-0-44470-399-3.
3. Grinchenko V.T., Ulitko A. F. & Shul'ga N.A. (1989). *Electroelasticity*. In: Guz' A.N. (ed.) *Mechanics of Coupled Fields in Structural Elements*. Kiev: Naukova Dumka, 5, 280 p. (In Russian)
4. Parton V.Z. & Kudryavtsev B.A. (1988) *Electromagnetoelasticity: Piezoelectric and Electrically Conductive Solids*. Moscow: Nauka, 472 p. (In Russian)
5. Kaloerov S.A. & Sorochan O.A. (2009) Plane problem of thermoelectromagnetoelasticity for multiply connected bodies. *Int. Appl. Mech.* 45 (4), 413–423. DOI: 10.1007/s10778-009-0194-7.
6. Glushankov E.S. (2021) The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the convective heat transfer under linear heat flow action. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = J. Theoret. Appl. Mech.* 2 (75), 18–29. (In Russian).
7. Glushankov E.S. (2025) The concentrated heat sources' action in an infinite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = J. Theoret. Appl. Mech.* 2 (91), 52–63. DOI: 10.24412/0136-4545-2025-2-52-63. (In Russian).
8. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p. ISBN 978-0-13165-332-0.
9. Tian W.-Y. & Gabbert U. (2004) Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids. *Europ. J. Mech. Part A*. 23, 599–614. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002.

Поступила в редакцию / Original submitted 24.03.2026.

Доработана / Revision submitted 06.04.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 15.04.2026.

УДК 539.33

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-32-44

EDN:GVHNVZ



©2026. С.А. Калоеров, М.А. Полянский

## ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЯМИ, ТРЕЩИНАМИ И ВЫЕМАМИ

Приведено решение задачи об электромагнитоупругом состоянии полосы с произвольными эллиптическими отверстиями, в том числе переходящими в трещины, с пересекающимися контурами и пересекающимися прямолинейные границы. Решение построено с использованием комплексных потенциалов, разложений функций в ряды Лорана и удовлетворения граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов, приводящего задачу к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Даны описания результатов численных исследований для полосы с круговым отверстием, с круговым отверстием и краевой трещиной из его контура. Рассмотрены случаи полосы с круговым выемом на одной прямолинейной границе, с круговым отверстием и разрезом между ними и прямолинейной границей. Изучены закономерности изменения основных характеристик электромагнитоупругого состояния полосы в зависимости от геометрических характеристик и физико-механических свойств ее материала.

**Ключевые слова:** электромагнитоупругая пластинка, полоса, отверстия, трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

**Введение.** Современные пьезоматериалы широко используются при изготовлении элементов различных конструкций [1–4]. Зачастую эти элементы имеют отверстия и трещины, около которых при эксплуатации конструкций возникают высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании конструкций. Следовательно, нужно иметь достаточно надежные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пластин с отверстиями и трещинами. А такие методы получаются при решении соответствующих задач методами комплексных потенциалов электромагнитоупругости [5] с использованием для определения этих функций обобщенного метода наимень-

---

*Калоеров Стефан Алексеевич* – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1339-6035.

*Kaloerov Stefan Alekseevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

*Полянский Максим Алексеевич* – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: m4xpolyan@yandex.ru, ORCID: 0009-0007-2281-3220.

*Polianskii Maxim Alekseevich* – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

ших квадратов (ОМНК) [6–8], обеспечивающего достаточно высокую точность удовлетворения граничным условиям.

В данной статье решена задача электромагнитоупругости для полосы с произвольными отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием или с круговым отверстием и краевой трещиной из контура отверстия. Изучены закономерности изменения ЭМУС полосы в зависимости от ее пьезосвойств и геометрических характеристик полосы, отверстий и трещин.

**1. Постановка и решение задачи.** Рассмотрим узкую полосу из пьезоматериала, занимающую область  $S$  с прямолинейными границами  $L^+$ ,  $L^-$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \vec{\mathcal{L}}}$ ) с полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  (рис. 1). Выберем основную прямоугольную систему координат  $Oxy$  с началом в произвольной точке полосы на расстояниях  $h^+$ ,  $h^-$  от границ  $L^+$ ,  $L^-$  соответственно и осью  $Ox$ , параллельной прямолинейным границам. Отнесем эллипсы  $L_l$  к локальным системам координат  $O_lx_ly_l$  с началами в их центрах и направлениями осей  $Ox_l$  вдоль полуосей эллипсов  $a_l$ . Тогда в локальных и в основной системах координат параметрические уравнения  $L_l$  имеют вид

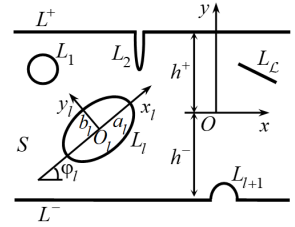


Рис. 1.

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta$  - параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до  $2\pi$ ;  $x_{0l}$ ,  $y_{0l}$  - координаты начала локальной системы координат  $O_lx_ly_l$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\varphi_l$  - угол между направлениями осей  $Ox$  и  $O_lx_l$ , отсчитываемый от оси  $Ox$  против часовой стрелки. Будем считать, что прямолинейные границы не нагружены, каждый из контуров отверстий не нагружен или жестко подкреплен; на бесконечности полоса растягивается усилиями  $\sigma_x^\infty = p$ , в связи с чем  $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$ .

Решение задачи об определении ЭМУС рассматриваемой пьезополосы будем проводить методом комплексных потенциалов. Тогда оно сводится к определению функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где  $\mu_k$  - корни известного характеристического уравнения, из граничных условий на контурах

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \Phi_k(t_k) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (4)$$

в которых

$$g_{ik} = (1, \mu_k, -\nu_k, -\rho_k),$$

$$(f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) = \mp \int_0^s (Y_n, X_n, D_n, B_n) ds + (c_1, c_2, c_3, c_4), \quad (5)$$

если на соответствующем контуре заданы внешние усилия  $X_n, Y_n$  и индукции  $D_n, B_n$ ,

$$g_{ik} = (p_{k0}, q_{k0}, -\nu_k, -\rho_k),$$

$$(f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) = \left( u^*, v^*, \mp \int_0^s (D_n, B_n) ds \right) + (c_1, c_2, c_3, c_4), \quad (6)$$

когда на контуре заданы перемещения  $u^*, v^*$  и индукции  $D_n, B_n$ ;

$$p_k = \mu_k^2 s_{11} - s_{16} \mu_k + (g_{11} \mu_k - g_{21}) \nu_k + (p_{11} \mu_k - p_{21}) \rho_k,$$

$$q_k = \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + \left( g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) \nu_k + \left( p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k; \quad (7)$$

$s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала пластинки;  $g_{ki}$  и  $p_{ki}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей электрического и магнитного полей;  $\nu_k, \rho_k$  – постоянные, которые выражаются через  $g_{ki}, p_{ki}$ , а также через коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости [5];  $c_i$  – постоянные, произвольные на одном из контуров области  $S$ .

Функции  $\Phi_k(z_k)$  определены и голоморфны в областях  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными преобразованиями (3) и ограниченных прямолинейными границами  $L_k^+, L_k^-$  и контурами  $L_{kl}$ , соответствующими при этих преобразованиях заданным контурам  $L^+, L^-$  и  $L_l$ . Исходя из общих представлений комплексных потенциалов [9], эти функции представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) + b_{kln} \varphi_{kln}^+(z_k) + c_{kln} \varphi_{kln}^-(z_k)], \quad (8)$$

в котором  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые решением систем линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{\nu_k}{s_{22}} \left( g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left( p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_k =$$

$$= \left\{ 0, 0, \sigma_x^\infty, \frac{s_{16} \sigma_x^\infty}{2s_{22}}, 0, D_x^\infty, 0, B_x^\infty \right\}; \quad (9)$$

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \varphi_{kln}^+(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{kl}^+)^n}, \quad \varphi_{kln}^-(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{kl}^-)^n};$$

$\zeta_{kl}, \zeta_{kl}^+, \zeta_{kl}^-$  – переменные, определяемые из неявных зависимостей [10]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (10)$$

$$z_k = -(\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left( \zeta_{kl}^+ + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}^+} \right); \quad (11)$$

$$z_k = (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^- + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left( \zeta_{kl}^- + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}^-} \right); \quad (12)$$

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}};$$

$a_{kln}, b_{kln}, c_{kln}$  ( $k = 1, 4; l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots$ ) – неизвестные коэффициенты рядов Лорана. Последние определим из граничных условий на контурах отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) и на отрезках прямолинейных границ  $L^+, L^-$ , где влияние  $L_l$  на напряженное состояние полосы значительно. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянные  $c_l$ . Эта форма, полученная дифференцированием условий (4) по дуге  $s$  контуров и имеет вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_i(t)}{ds}, \quad (13)$$

в котором  $\delta_{k,s} = \frac{dt_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ ;  $x', y'$  – производные переменных (2) по параметру  $\theta$ ;  $s$  – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки;

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} + \varphi'^+_{kln}(z_k) b_{kln} + \varphi'^-_{kln}(z_k) c_{kln} \right]; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \varphi'^+_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{(\zeta_{kl}^+)^{n-1} \overline{R_{kl}} \left( (\zeta_{kl}^+)^2 - \overline{m_{kl}} \right)}, \\ \varphi'^-_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{(\zeta_{kl}^-)^{n-1} \overline{R_{kl}} \left( (\zeta_{kl}^-)^2 - \overline{m_{kl}} \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Граничным условиям (13) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [6–8]. Для этого выберем на контурах отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) и на выбранных отрезках прямолинейных границ  $L^+$ ,  $L^-$  систему точек  $M_m(x_m, y_m)$  ( $m = \overline{1, M}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (8). Тогда для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$ ,  $b_{kln}$  и  $c_{kln}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik} \delta_{k,s} \left[ \varphi'_{kln}(t_{km}) a_{kln} + \varphi'_{kln}{}^+(t_{km}) b_{kln} + \varphi'_{kln}{}^-(t_{km}) c_{kln} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = 1, 4; m = \overline{1, M}). \end{aligned} \quad (16)$$

Систему (16) будем решать методом сингулярного разложения [11, 12]. После нахождения псевдорешений этой системы комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  станут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС по формулам [5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (17)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, r_k, \mu_k r_k) \Phi'_k(z_k); \quad (18)$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\rho_k \mu_k, -\rho_k, h_k, \mu_k h_k) \Phi'_k(z_k). \quad (19)$$

По основным характеристикам можно найти также напряжения и индукции на произвольных площадках с нормалью  $n$  и касательной  $s$  по известным формулам [13, 14]. При этом, если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН), используя формулы [15].

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl}, \\ k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$M_{kl} = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}.$$

В качестве частных случаев из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются, если в приведенном решении принять равными нулю  $p_{ki}, \nu_{ki}$  (в задаче ЭУ),  $g_{ki}, \nu_{ki}$  (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но при проведении численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными [16]

$$g'_{ki} = \lambda_g g_{ki}, \quad p'_{ki} = \lambda_p p_{ki}, \quad \nu'_{ki} = \lambda_{gp} \nu_{ki},$$

где  $\lambda_g, \lambda_p, \lambda_{gp}$  – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$ , а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими:  $\lambda_g = 1, \lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ЭУ;  $\lambda_p = 1, \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач МУ;  $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ТУ.

**2. Описание результатов численных исследований.** Проведены численные исследования ЭМУС пьезополосы из «слабо анизотропного и пьезоактивного» композита на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  (материал М1) [17, 18], «сильно анизотропного и пьезоактивного» композита, упругие и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия  $CdSe$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $BaTiO_3$  (материал М2) [19], композита, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные –  $CoFe_2O_4$  (М3) [19].

В численных исследованиях количество членов в рядах (14) для каждого отверстия  $L_p$  и количество точек  $M_p$  на этом контуре, для которых составлялись уравнения (16), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений и индукций на площадках, касательных к контурам, не были менее  $10^{-3}$ , а соответствующих деформаций не менее  $10^{-10}$ ). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 100 членов, и на каждом из контуров и на отрезке длины 2 диаметра отверстия брать от 100 до 1000 «коллокационных точек».

В таблице 1 для растяжения усилиями  $\sigma_x^\infty = p$  полосы с центральным круговым отверстием радиуса  $a_1$  (рис. 2) с точностью до множителя  $p$  приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения  $c_1/a_1$ , где  $c_1$  – длина перемычки между контуром отверстия и границей полосы. При этом характерными были точки  $B(a_1, 0), C(0, a_1), D(0, a_1 + c_1/2), E^+(0, a_1 + c_1), K^+(a_1, a_1 + c_1), M^+(2a_1, a_1 + c_1)$ . Для некоторых значений  $c_1/a_1$  на рисунке 3 изображены графики

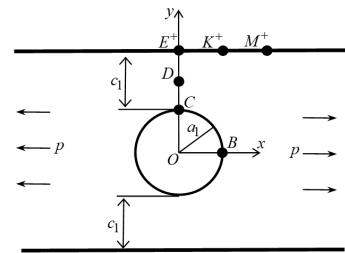


Рис. 2.

распределения нормальных напряжений  $\sigma_s$  около контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру (из-за имеющейся симметрии только для точек первой четверти), а на рисунке 4 напряжений  $\sigma_x$  по отрезку прямолинейной границы.

Таблица 1. Значения напряжений в точках полосы с центральным круговым отверстием в зависимости от  $c_1/a_1$

Точка	Величина	Задача	$c_1/a_1$						
			$\infty$	5	2	1	0,5	0,1	0,05
B	$\sigma_y$	ЭМУ	-0,866	-0,915	-1,065	-1,267	-1,456	-1,463	-1,336
		ЭУ	-0,885	-0,933	-1,074	-1,250	-1,401	-1,373	-1,221
		МУ	-1,190	-1,272	-1,513	-1,810	-2,079	-2,123	-1,772
		ТУ	-1,205	-1,292	-1,517	-1,788	-2,029	-1,961	-1,742
C	$\sigma_x$	ЭМУ	3,133	3,197	3,528	4,287	5,883	16,281	27,011
		ЭУ	2,573	2,654	2,992	3,728	5,277	15,721	25,919
		МУ	2,751	2,819	3,162	3,924	5,527	16,210	24,943
		ТУ	2,377	2,467	2,801	3,547	5,151	15,400	25,494
D	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,058	1,278	1,723	2,552	7,744	13,116
		ЭУ	1,000	1,058	1,267	1,732	2,628	7,966	13,108
		МУ	1,000	1,061	1,299	1,760	2,601	7,992	12,363
		ТУ	1,000	1,066	1,293	1,778	2,672	7,892	12,970
E <sup>+</sup>	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	0,950	0,832	0,663	0,490	0,181	0,078
		ЭУ	1,000	0,963	0,855	0,663	0,436	0,350	0,406
		МУ	1,000	0,946	0,819	0,660	0,532	0,387	0,273
		ТУ	1,000	0,963	0,837	0,652	0,444	0,493	0,528
K <sup>+</sup>	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	0,965	1,071	1,604	2,640	4,532	4,517
		ЭУ	1,000	0,971	1,034	1,584	2,602	4,145	3,978
		МУ	1,000	0,967	1,115	1,691	2,691	4,385	3,962
		ТУ	1,000	0,977	1,085	1,677	2,658	3,968	3,778
M <sup>+</sup>	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,005	1,317	1,673	1,777	1,368	1,179
		ЭУ	1,000	0,997	1,307	1,669	1,696	1,254	1,048
		МУ	1,000	1,018	1,344	1,603	1,593	1,162	0,911
		ТУ	1,000	1,015	1,343	1,592	1,541	1,053	0,872

Из данных о таблице 1, рисунках 3 и 4 следует, что при уменьшении ширины полосы (длины перемычек между отверстием и прямолинейными границами) значения напряжений в точках перемычек, кроме ближайших окрестностей точек прямолинейных границ, резко растут, достигая при малых длинах перемычек весьма больших значений; при этом в точках перемычек вблизи прямолинейных границ напряжения уменьшаются. Вдали от перемычек, как около контура отверстия, так и на прямолинейной границе значения напряжений при уменьшении длины перемычек изменяются незначительно. Влияние отверстия

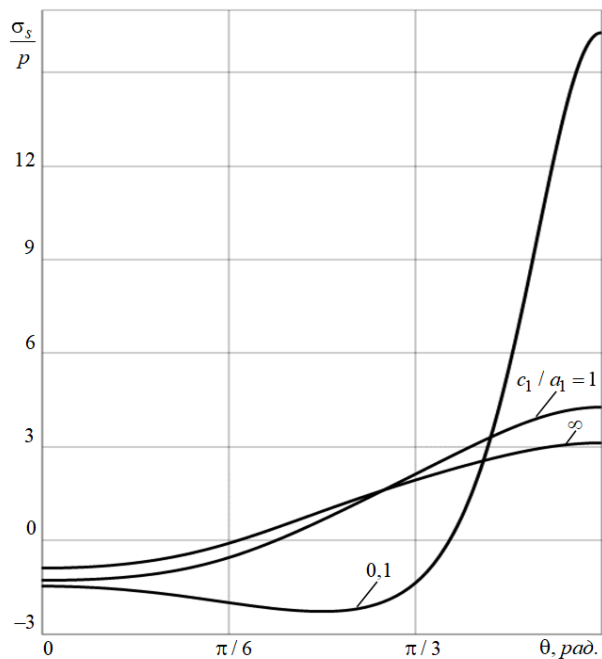


Рис. 3.

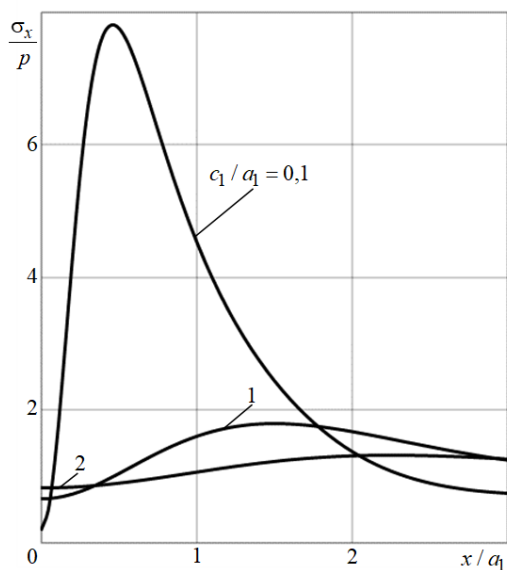


Рис. 4.

на напряженное состояние около прямолинейных границ значительно на расстояниях менее диаметра отверстия от перемычек. Учет электромагнитных свойств несколько повышает значения напряжений в зонах наибольшей концентрации

напряжений, учет только магнитных свойств уменьшает значения напряжений.

В таблице 2 для растяжения усилиями  $\sigma_x^\infty = p$  пьезополосы (задача ЭМУ) с произвольным круговым отверстием радиуса  $a_1$  (рис. 5) с точностью до множителя  $p$  приведены значения напряжений в некоторых характерных точках в зависимости от отношения  $c_1/a_1$ , где  $c_1$  – длина перемычки между контуром отверстия и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна  $4a_1$ ,  $c_2 = 2a_1 - c_1$ , а характерными были точки  $A(0, -a_1)$ ,  $B(a_1, 0)$ ,  $C(0, a_1)$ ,  $E^+(0, a_1+c_1)$ ,  $K^+(a_1, a_1+c_1)$ ,  $M^+(2a_1, a_1+c_1)$ ,  $E^-(0, -a_1 - c_2)$ ,  $K^-(a_1, -a_1 - c_2)$ ,  $M^-(2a_1, -a_1-c_2)$ . Результаты для  $c_1/a_1 = 1, 5$  соответствуют случаю полосы с центральным отверстием, отрицательные значения  $c_1/a_1$  относятся к полосе с круговым выемом глубины  $2a_1 + c_1$ , например,  $c_1/a_1 = -1$  соответствует случаю, когда отверстие выходит на край до его горизонтального диаметра.

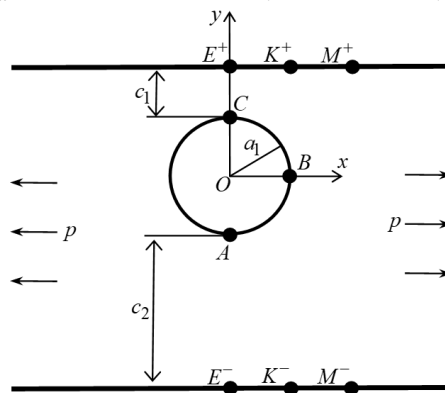


Рис. 5

Как видно из таблицы 2, при приближении отверстия к верхней прямолинейной границе полосы (с уменьшением  $c_1/a_1$ ) закономерности изменения значений напряжений в окрестности верхней перемычки такие же, как и в случае центрального отверстия; при этом в точках окрестности нижней перемычки зна-

Таблица 2. Значения напряжений в точках полосы с круговым отверстием или выемом в зависимости от  $c_1/a_1$

Точка	Величина	$c_1/a_1$									
		1	0,5	0,1	0,05	-0,05	-0,2	-0,5	-0,7	-0,9	-1
A	$\sigma_x$	4,287	4,197	5,173	5,577	6,941	6,167	3,884	1,004	0,882	0,123
B	$\sigma_y$	-1,267	-1,303	-1,113	-0,926	-0,132	-0,116	-0,082	-0,006	0,005	-
C	$\sigma_x$	4,287	5,743	14,587	21,789	-	-	-	-	-	-
$E^+$	$\sigma_x$	0,663	0,629	0,442	0,304	-	-	-	-	-	-
$K^+$	$\sigma_x$	1,604	2,702	4,143	3,493	-0,005	-0,002	0,001	0,001	0,001	-
$M^+$	$\sigma_x$	1,673	1,826	1,306	0,939	-0,103	-0,060	0,025	0,157	0,292	0,760
$E^-$	$\sigma_x$	0,663	0,620	0,180	0,044	-0,532	-0,301	0,247	0,665	0,742	1,080
$K^-$	$\sigma_x$	1,604	1,103	0,644	0,511	0,076	0,170	0,462	0,810	0,838	1,044
$M^-$	$\sigma_x$	1,673	1,441	1,202	1,114	0,982	0,916	0,841	1,064	0,994	0,982

чения напряжений значительно меньше и они изменяются незначительно, за исключением точек нижней прямолинейной границы, где напряжения изменяются значительно; выход отверстия на верхнюю границу полосы сопровождается появлением зон сжатия (отрицательных значений напряжений) как на верхней, так и на нижней границе полосы вблизи перемычек; с уменьшение глубины

выема (с уменьшением  $c_1/a_1$ ) резко уменьшаются значения напряжений около точек выема с незначительным изменением из значений вблизи нижней границы полосы.

В таблице 3 для растяжения усилиями  $\sigma_x^\infty = p$  полосы из материала МЗ с круговым отверстием радиуса  $a_1$  и краевой трещиной длины  $l_2 = a_1$  (рис. 6) с точностью до множителя  $p$  приведены значения напряжений и КИН  $k_1^+$  в некоторых характерных точках в зависимости от отношения  $c_1/a_1$ , где  $c_1$  – длина перемычки между вершиной трещины и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна  $5a_1$ , а  $c_2 = 2a_1 - c_1$ . Характерными были точки  $A(0, -a_1)$ ,  $B(a_1, 0)$ ,  $F(0, 2a_1)$ ,  $E^+(0, 2a_1 + c_1)$ ,  $K^+(a_1, 2a_1 + c_1)$ ,  $M^+(2a_1, 2a_1 + c_1)$ ,  $E^-(0, -a_1 - c_2)$ ,  $K^-(a_1, -a_1 - c_2)$ ,  $M^-(2a_1, -a_1 - c_2)$ . Отрицательные значения  $c_1/a_1$  относятся к случаям разреза между отверстием и верхней границей полосы, например,  $c_1/a_1 = -0,5$  относится к случаю, когда глубина разреза равна половине радиуса отверстия.

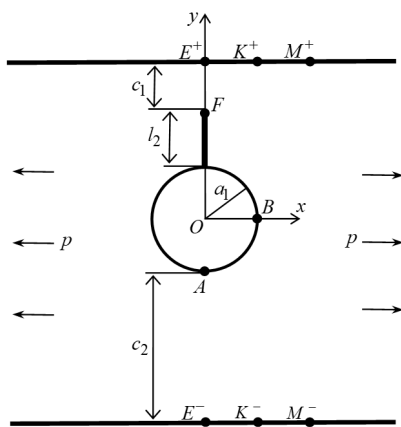


Рис. 6

Из таблицы 3 видно, что при приближении отверстия с краевой трещиной в перемычке с верхней прямолинейной границей полосы закономерности изменения значений напряжений в окрестности верхней перемычки такие же, как и в случае приближения отверстия без трещины.

Только выход трещины на верхнюю прямолинейную границу сопровождается более резкими изменениями напряженного состояния около этой границы, вплоть до возникновения вблизи точек перемычки зон отрицательных напряжений (сжатия).

Таблица 3. Значения напряжений и КИН в полосе с круговым отверстием и краевой трещиной из него в зависимости от  $c_1/a_1$

Точка	Величина	$c_1/a_1$									
		1	0,5	0,3	0,1	0,05	-0,05	-0,1	-0,2	-0,3	-0,5
A	$\sigma_x$	5,198	4,399	4,269	3,186	2,007	8,214	6,710	5,085	3,888	3,504
B	$\sigma_y$	-1,441	-1,217	-1,110	-0,687	-0,323	-0,232	-0,525	-1,455	-1,345	-1,108
F	$k_1^+$	0,416	0,721	1,046	2,588	-20,671	-	-	-	-	-
$E^+$	$\sigma_x$	0,513	0,237	0,148	-0,067	-0,285	-	-	-	-	-
$K^+$	$\sigma_x$	1,801	2,208	2,486	1,522	0,439	0,123	0,567	4,039	3,277	1,937
$M^+$	$\sigma_x$	1,832	1,599	1,591	0,849	0,171	-0,049	0,258	1,920	1,997	1,685
$E^-$	$\sigma_x$	0,661	0,693	0,610	0,563	0,362	-0,266	-0,129	0,476	0,771	0,859
$K^-$	$\sigma_x$	1,750	1,200	0,924	0,734	0,717	0,220	0,307	0,821	0,962	0,934
$M^-$	$\sigma_x$	1,934	1,570	1,298	1,004	1,201	0,962	1,065	1,291	1,226	1,045

**Выводы.** Таким образом, с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости решена задача об ЭМУС пьезополосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе с пересекающимися контурами и пересекающих прямолинейные границы полосы. При этом граничные условия на как на контурах отверстий, так и на прямолинейных границах удовлетворены обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием и для полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из его контура в перемычке. Для указанных задач установлены закономерности влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, их взаиморасположения на значения напряжений.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ FRRE-2026-0021).

### Список литературы

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностранная литература, 1949. – 717 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток. – 2011. – 232 с.
6. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Калоеров С.А. Основные соотношения для комплексных потенциалов электромагнитоупругости и их использование при решении задач о действии сосредоточенных сил / С.А. Калоеров, М.А. Полянский // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2025. – № 6. – С. 152–175. DOI: 10.7868/S3034543X25060097
10. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
11. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
12. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
14. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
15. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
16. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких

- плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
17. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
  18. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
  19. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

**S.A. Kaloerov, M.A. Polianskii**

**Electromagnetic elastic state of a strip with holes, cracks, and recesses.**

Electromagnetic-elastic state of a strip with holes, cracks, and notches. The solution of the problem of the electromagnetic-elastic state of a strip with arbitrary elliptical holes, including those that turn into cracks, with intersecting contours and intersecting straight-line boundaries, is presented. The solution is constructed using complex potentials, Laurent series expansions of functions, and satisfying the boundary conditions using the generalized least squares method, which reduces the problem to an overdetermined system of linear algebraic equations that can be solved using the singular value decomposition method. The results of numerical studies are described for a strip with a circular hole, with a circular hole and an edge crack from its contour. The cases of a strip with a circular notch on one rectilinear border, with a circular hole and a cut between them and the rectilinear border are considered. The patterns of changes in the main characteristics of the electromagnetelastic state of the strip, depending on the geometric characteristics, are studied.

**Keywords:** *electromagnetically elastic plate, strip, holes, cracks, complex potentials, generalized least squares method.*

**References**

1. Cady, W. (1949). *Piezoelectricity and its practical applications*. Moscow: Foreign Literature Publishing House. 717 p. (In Russian)
2. Berlincourt D.A., Curran D.R. & Jaffe H. (1964) Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers. In: Mason W.P. (ed.) *Physical Acoustics*. 1A, 169–270.
3. Bichurin, M.I., Petrov, V.M., Filippov, D.A., et al. (2006). *Magnetolectric materials*. Moscow: Academy of Natural Sciences. 296 p. (In Russian)
4. Pyatakov, A.P. (2006). [Magnetolectric materials and their practical applications]. *Bulletin Ros. Magnit. Obshchestva*, 5(2), 1–3. (In Russian)
5. Kaloerov, S.A., & Petrenko, A.V. (2011). *Two-dimensional problems of electromagnetoelasticity for multiply connected bodies*. Donetsk: Yugo-Vostok. 232 p. (In Russian)
6. Kaloerov, S.A., & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*, 48(3), 319–331.
7. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian)
8. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
9. Kaloerov, S.A., & Polyansky, M.A. (2025). [Fundamental relations for complex potentials of electromagnetoviscoelasticity and their application to problems of concentrated forces]. *Mechanics of Solids*, 6, 152–175. DOI: 10.7868/S3034543X25060097. (In Russian)
10. Kaloerov, S.A., & Goryanskaya, E.S. (1995). [Two-dimensional stress state of a multiply connected anisotropic body with cavities and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 25, 45–56. (In Russian)
11. Drmac, Z., & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(4), 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.

12. Drmac, Z., & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(4), 1343–1362. <https://doi.org/10.1137/05063920X>
13. Lekhnitskii, S.G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow: Nauka. 416 p. (In Russian)
14. Muskhelishvili, N.I. (1966). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Moscow: Nauka. 708 p. (In Russian)
15. Kaloerov, S.A. (2007). Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media. *International Applied Mechanics*, 43(6), 631–637.
16. Kaloerov, S. A. (2019). Problems of electroelastic, magnetoelastic, and elastic bending of thin plates as special cases of electromagnetoelastic bending. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 3–4, 58–79. (In Russian)
17. Yamamoto, Y., & Miya, K. (1987). *Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures*. Amsterdam: Elsevier Science-North Holland. 450 p.
18. Tian, W.-Y., & Gabbert, U. (2004). Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23, 599–614.
19. Hou, P.F., Teng, G.-H., & Chen, H.-R. (2009). Three-dimensional Green's function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material. *Mechanics of Materials*, 41, 329–338.

Поступила в редакцию / Original submitted 03.03.2026.

Доработана / Revision submitted 16.03.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 24.03.2026.

УДК 539.33

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-45-56

EDN:IPBDYO



©2026. С.А. Калоеров, Е.И. Сошина

## ЦИКЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ПРОДОЛЬНЫМИ ПОЛОСТЯМИ И ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ

С использованием комплексного потенциала теории кручения решена задача теории упругости о кручении кругового кольцевого изотропного цилиндра с циклически расположенными эллиптическими полостями и плоскими трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и степенные ряды, удовлетворения граничным условиям на контурах первого цикла обобщенным методом наименьших квадратов задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Описаны результаты численных исследований для случаев, когда круговой кольцевой цилиндр ослаблен циклическим рядом круговых или эллиптических полостей, циклическим рядом плоских трещин. Рассмотрены случаи циклических выемов по внешней или внутренней поверхностям цилиндра. Установлены закономерности распределения напряжений в зависимости от геометрических характеристик полостей циклического пояса, их количества и месторасположения.

**Ключевые слова:** кручение цилиндра, полости и плоские трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, коэффициенты интенсивности напряжений, циклическая задача.

**Введение.** В качестве элементов современных конструкций часто встречаются упругие цилиндрические тела с продольными полостями и трещинами, эксплуатируемые в условиях чистого кручения, когда в теле возникают лишь касательные напряжения. При эксплуатации конструкций вблизи этих полостей и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Следовательно, нужно иметь методы решения соответствующих задач теории упругости. Поэтому

---

*Калоеров Стефан Алексеевич* – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1339-6035.

*Kaloerov Stefan Alekseevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

*Сошина Евгения Игоревна* – ст. препод. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: ye.soshyna.tuvm@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-5673-1433.

*Soshyna Evgeniya Igorevna* – Senior Lecturer, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

еще в середине XIX века была разработана общая теория чистого кручения [1]. Но решения первых частных задач чистого кручения были получены лишь в 30-50-е годы XX века. В эти же годы были решены различные задачи для кручения кругового цилиндра с полостями кругового или криволинейного сечений [2–4], эллиптического цилиндра с полостью эллиптического сечения [5] или с двумя круговыми полостями [6]. Во второй половине XX века по кручению изотропных цилиндров по чистому кручению были опубликованы уже монографии [7–9].

Как показывают наши исследования, наиболее достоверные результаты по определению напряженно-деформированного состояния цилиндров многосвязного поперечного сечения получаются при использовании комплексного потенциала кручения [10] с определением этих функций обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [11]. В статьях [12, 13] с использованием этого подхода решены различные задачи по кручению многосвязного цилиндра с полостями разного очертания, в том числе с плоскими трещинами.

В данной работе с использованием комплексного потенциала кручения и ОМНК дано решение циклической задачи о кручении изотропного кольцевого цилиндра с эллиптическими полостями и плоскими трещинами при их произвольном сочетании и расположении. Описаны результаты численных исследований с установлением закономерностей распределения напряжений в зависимости от геометрических характеристик полостей и трещин, их сочетания и расположения.

**1. Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим находящийся в условиях кручения изотропный круговой кольцевой цилиндр с  $\mathcal{L}$  циклически расположенными вдоль оси цилиндра сочетаниями продольных полостей эллиптического сечения и углом циклическости  $\alpha = 2\pi/\mathcal{L}$ . Как частный случай, когда радиус внутренней кольцевой полости равен нулю, будем рассматривать круговой цилиндр с циклическим рядом полостей. Отнесем цилиндр к прямоугольной системе координат  $Oxuz$  с началом в центре кольца и осью  $Oz$  вдоль оси цилиндра. В поперечном сечении цилиндра (рис. 1) будем иметь многосвязную область  $S$ , ограниченную круговыми контурами кольца  $L^0$  (внешним),  $L^1$  (внутренним) с радиусами  $r^0, r^1$  и циклически расположенными совокупностями эллиптических контуров  $L_{lq}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), каждая из которых содержит  $Q$  контуров ( $q = \overline{1, Q}$ ) с центрами на окружностях радиусов  $r_q$  с полуосями  $a_{1q}, b_{1q}$  так, что в локальных системах координат  $O_{lq}x_{lq}y_{lq}$  с началами в центрах эллипсов  $L_{lq}$  и осями  $O_{lq}x_{lq}$  вдоль полуосей  $a_{lq}$  параметрические уравнения эллипсов имеют вид

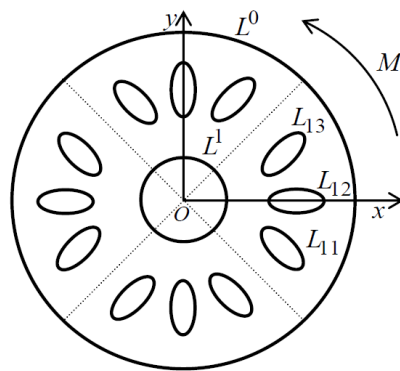


Рис. 1.

$$x_{lq} = a_{lq} \cos \theta, \quad y_{lq} = b_{lq} \sin \theta \quad (1)$$

а в основной системе координат будут такими:

$$\begin{aligned}x &= x_{0lq} + x_{lq} \cos \varphi_{lq} - y_{lq} \sin \varphi_{lq}, \\y &= y_{0lq} + x_{lq} \sin \varphi_{lq} + y_{lq} \cos \varphi_{lq},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\varphi_{lq}$  – углы между направлениями осей  $Ox$  и  $O_{lq}x_{lq}$ , отсчитываемые от направления  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0lq} = r_q \cos \varphi_{lq}$ ,  $y_{0lq} = r_q \sin \varphi_{lq}$  – координаты начала локальной системы координат  $O_{lq}x_{lq}y_{lq}$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\theta$  – параметр параметрического задания эллипсов, изменяющийся от 0 до  $2\pi$ . Эллиптические полости могут переходить в плоские разрезы-трещины (будем считать, что при  $b_{lq} = 0$ ), если  $L_{lq}$  являются криволинейными контурами, то они могут аппроксимироваться дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов. Поверхности кругового кольца и поверхности циклических полостей свободны от внешних усилий; один из концов цилиндра жестко закреплен, на другом приложены усилия, приводящие к кручению цилиндра моментом  $M$ .

Если для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемого цилиндра использовать комплексный потенциал кручения, то оно сводится к нахождению функции  $\Phi(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$  из граничных условий на контурах  $L^0, L^1, L_{lq}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}; q = \overline{1, \mathcal{Q}}$ ) вида [10, 12]

$$2\operatorname{Re}\Phi(t) = A_l - \gamma t \bar{t},\quad (3)$$

в котором  $\gamma = -G\vartheta/2$ ,  $G$  – модуль сдвига материала цилиндра при скручивании;  $\vartheta = M/C$  – крутка цилиндра,  $C$  – постоянная, называемая жесткостью цилиндра и зависящая от геометрических свойств его поперечного сечения;  $A_l$  – постоянные, одна из которых произвольна и может быть принята равной нулю.

После определения комплексного потенциала  $\Phi(z)$  основные касательные напряжения находятся по формулам [10, 12]

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= 2\operatorname{Re} i (\Phi'(z) + \gamma \bar{z}), \\ \tau_{yz} &= -2\operatorname{Re} (\Phi'(z) + \gamma \bar{z}),\end{aligned}\quad (4)$$

а касательные напряжения на произвольных площадках с нормальными  $n$  и касательными  $s$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\tau_{nz} &= \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny, \\ \tau_{sz} &= -\tau_{xz} \cos ny + \tau_{yz} \cos nx.\end{aligned}\quad (5)$$

Функция  $\Phi(z)$  определена и голоморфна в области  $S$ , ограниченной контурами  $L^0, L^1, L_{lq}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}; q = \overline{1, \mathcal{Q}}$ ) и может быть представлена в виде [10, 12]

$$\Phi(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^0 z^n + \frac{a_n^1}{z^n} \right) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{lqn}}{\zeta_{lq}^n},\quad (6)$$

где  $\zeta_{lq}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ;  $q = \overline{1, \mathcal{Q}}$ ) – переменные, определяемые из конформных отображений внешностей единичных кругов  $|\zeta_{lq}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{lq}$  [14]

$$z = r_{lq}e^{i\varphi_{lq}} + R_{lq} \left( \zeta_{lq} + \frac{m_{1q}}{\zeta_{lq}} \right); \quad (7)$$

$$\varphi_{lq} = (l-1)\alpha + \varphi_{1q}, \quad R_{lq} = R_{1q}e^{i\varphi_{lq}},$$

$$R_{1q} = \frac{a_{1q} + b_{1q}}{2}, \quad m_{1q} = \frac{a_{1q} - b_{1q}}{a_{1q} + b_{1q}};$$

$a_n^0, a_n^1, a_{lqn}$  – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана.

В силу цикличности напряженного состояния цилиндра напряжения в точках  $z$  и  $ze^{i\alpha}$  одинаковы, откуда на основе (4) и (6) с точностью до аддитивных постоянных следует равенство  $\Phi(z) = \Phi(ze^{i\alpha})$  или

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ z^n a_n^0 + \frac{a_n^1}{z^n} \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{lqn}}{\zeta_{lq}^n(z)} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ z^n e^{in\alpha} a_n^0 + \frac{a_n^1}{z^n e^{in\alpha}} \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{lqn}}{\zeta_{lq}^n(ze^{i\alpha})}, \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнивая в равенстве (8) коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получим соотношения

$$a_n^0 = e^{in\alpha} a_n^0, \quad a_n^1 = e^{-in\alpha} a_n^1,$$

из которых следует уравнение  $e^{in\alpha} = 1$ , решением которого будет  $n\alpha = 2\pi k$ . Подставляя в это равенство значения угла цикличности, найдем  $n = k\mathcal{L}$  и выражения

$$\varphi_n^0(z) = z^{n\mathcal{L}}, \quad \varphi_n^1(z) = z^{-n\mathcal{L}}$$

Кроме того, учитывая конформные отображения (7), найдем равенство

$$ze^{i\alpha} = r_{lq}e^{i(\varphi_{lq}+\alpha)} + R_{1q}e^{i(\varphi_{lq}+\alpha)} \left( \zeta_{lq} + \frac{m_{1q}}{\zeta_{lq}} \right),$$

которое по конформному отображению (7) соответствует эллипсу  $L_{l+1}$ :

$$z = r_{lq}e^{i\varphi_{l+1q}} + R_{1q}e^{i\varphi_{l+1q}} \left( \zeta_{l+1q} + \frac{m_{1q}}{\zeta_{l+1q}} \right) \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}).$$

Тогда из сравнения тройных сумм в равенстве (8) получим связи

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{lqn}}{\zeta_{lq}^n(z)} = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{lqn}}{\zeta_{lq}^n(ze^{i\alpha})} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{lqn}}{\zeta_{l+1q}^n(z)} = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{l-1,qn}}{\zeta_{lq}^n(z)},$$

из которых следуют равенства  $a_{lqn} = a_{l-1,qn}$ , показывающее, что все коэффициенты  $a_{lqn}$  одинаковы и равны  $a_{1qn}$ .

Таким образом, с точностью до аддитивной постоянной искомый комплексный потенциал рассматриваемой циклической задачи имеет вид

$$\Phi(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_n^0(z) a_n^0 + \varphi_n^1(z) a_n^1 + \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} a_{1qn} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{lqn}(z) \right), \quad (9)$$

где

$$\varphi_n^0(z) = z^{\mathcal{L}n}, \quad \varphi_n^1(z) = z^{-\mathcal{L}n}, \quad \varphi_{lqn}(z) = \frac{1}{\zeta_{lq}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}; q = \overline{1, \mathcal{Q}}); \quad (10)$$

$\zeta_{lq}$  – переменные, определяемые из конформных отображений (7);  $a_n^0, a_n^1, a_{1qn}$  – неизвестные коэффициенты, которые будем определять из граничных условий (3) на первой циклической части контуров  $L^0, L^1$  и на контурах  $L_{1q}$ . Для многосвязной области этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая получится из (3) дифференцированием по дуге контура и имеет вид

$$\delta_s \Phi'(t) + \overline{\delta_s \overline{\Phi'(t)}} = -\gamma (\delta_s \bar{t} + \overline{\delta_s t}), \quad (11)$$

в котором

$$\Phi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n^{\prime 0}(z) a_n^0 + \varphi_n^{\prime 1}(z) a_n^1 + \sum_{q=1}^{\mathcal{Q}} a_{1qn} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{lqn}'(z) \right\}, \quad (12)$$

$$\delta_s = \frac{dt}{ds}, \quad \varphi_n^{\prime 0}(z) = n\mathcal{L} z^{n\mathcal{L}-1}, \quad \varphi_n^{\prime 1}(z) = -n\mathcal{L} z^{-n\mathcal{L}-1},$$

$$\varphi_{lqn}'(z) = -\frac{n}{\zeta_{lq}^{n-1} R_{lq} (\zeta_{lq}^2 - m_{1q})}.$$

Граничным условиям (11) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [11, 15, 16]. Для этого выберем на первой циклической части дуг контуров  $L^0, L^1$  и на контурах  $L_{1q}$  систему точек  $M_m(x_m, y_m)$  ( $m = \overline{1, M_0}$ ), в которых удовлетворим условиям (11). Подставляя функции (12) в граничные условия (11) в точках  $M_m(x_m, y_m)$ , для определения неизвестных постоянных  $a_n^0, a_n^1, a_{1qn}$  получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_s \varphi_n^{\prime 0}(t_m) a_n^0 + \overline{\delta_s \overline{\varphi_n^{\prime 0}(t_m) a_n^0}} + \delta_s \varphi_n^{\prime 1}(t_m) a_n^1 + \overline{\delta_s \overline{\varphi_n^{\prime 1}(t_m) a_n^1}} + \right.$$

$$+ \left. \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^Q \left[ \delta_s a_{1qn} \varphi'_{lqn}(t_m) + \overline{\delta_s} \overline{\varphi'_{lqn}(t_m)} \overline{a_{1qn}} \right] \right\} = -\gamma (\delta_s \overline{t_m} + \overline{\delta_s} t_m) \quad (m = \overline{1, M_0}). \quad (13)$$

Систему (13), будем решать методом сингулярных разложений [17, 18]. После нахождения псевдорешений этой системы комплексный потенциал (9) будет известен и по нему можно вычислять основные напряжения (4), а также напряжения (5) на произвольной площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$ . При этом, если некоторая эллиптическая полость  $L_{lq}$  переходит в плоский разрез-трещину длины  $2a_{lq}$  (полуось  $b_{lq} = 0$ ), то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности напряжений (КИН)  $k_{lq}$  по формуле [19]

$$k_{lq}^{\pm} = \sqrt{a_{lq}} Re \left( e^{i\varphi_{lq}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n \frac{a_{3lqn}}{R_{lq}} \right), \quad (14)$$

в которой верхний знак относится к правому концу разреза в локальной системе координат  $O_{lq}x_{lq}y_{lq}$ , нижний знак – к левому его концу.

Если в области цикличности одно отверстие, то формулы несколько упрощаются. В этом случае производные комплексных потенциалов (12) будут такими

$$\Phi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n^{\prime 0}(z) a_n^0 + \varphi_n^{\prime 1}(z) a_n^1 + a_{1n} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{ln}'(z) \right\}, \quad (15)$$

$$\delta_s = \frac{dt}{ds}, \quad \varphi_n^{\prime 0}(z) = n\mathcal{L}z^{n\mathcal{L}-1}, \quad \varphi_n^{\prime 1}(z) = -n\mathcal{L}z^{-n\mathcal{L}-1},$$

$$\varphi_{ln}'(z) = -\frac{n}{\zeta_l^{n-1} R_l (\zeta_l^2 - m_1)},$$

а система уравнений (13) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_s \varphi_n^{\prime 0}(t_m) a_n^0 + \overline{\delta_s} \overline{\varphi_n^{\prime 0}(t_m)} \overline{a_n^0} + \delta_s \varphi_n^{\prime 1}(t_m) a_n^1 + \overline{\delta_s} \overline{\varphi_n^{\prime 1}(t_m)} \overline{a_n^1} + \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ \delta_s a_{1ln} \varphi_{ln}'(t_m) + \overline{\delta_s} \overline{\varphi_{ln}'(t_m)} \overline{a_{1ln}} \right] \right\} = \\ & = -\gamma (\delta_s \overline{t_m} + \overline{\delta_s} t_m) \quad (m = \overline{1, M_0}). \end{aligned} \quad (16)$$

**2. Описание результатов численных исследований.** Численные исследования были проведены для различных радиусов  $r^1$  внутреннего контура кольца  $L^1$ , конфигураций и места расположения эллипсов  $L_{lq}$  циклического ряда, в том числе эллипсов, переходящих в трещины и выходящих на контуры кольца  $L^1$ ,  $L^0$ . При проведении расчетов количество членов в бесконечных рядах (9), (15) и количество точек  $M_0$  на первой циклической части дуг контуров  $L^1$ ,  $L^0$

и на контурах  $L_{q1}$ , в которых удовлетворялись граничные условия при составлении уравнений системы (13), (16), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал  $10^{-3}$ ). Для получения таких результатов в описываемых ниже случаях достаточно было оставлять от 10 до 100 членов в каждом из рядов (9), (15) и на каждом из указанных контуров брать от 50 до 1000 равномерно удаленных по параметру  $\theta$  параметрического задания (1) точек. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для случая, когда циклический ряд отверстий содержал лишь одно отверстие  $L_{11}$ . Значения напряжений приведены с точностью до множителя  $M/C$ . Все геометрические характеристики отнесены к радиусу внешнего контура кольца  $r^0$ , т. е. считалось, что  $r^0 = 1, 0$ .

Как следует из численных исследований, напряжения в цилиндре своих наибольших значений достигают в точках перемычек между контурами  $L^1$ ,  $L_{11}$  и  $L^0$ . Поэтому при анализе напряженного состояния кольца можно ограничиться анализом значений напряжений в крайних точках этих перемычек А, В и С, D (рис. 2), где достигаются наибольшие и наименьшие значения этих напряжений.

В таблице 1 для кольцевого цилиндра с внутренним контуром  $L^1$  радиуса  $r^1 = 0, 2$  и круговыми отверстиями  $L_{11}$  циклического ряда радиусов  $a_1 = 0, 2$  с центрами на расстоянии  $r_1$  от центра  $L^1$  (рис. 2,а) приведены значения напряжений  $\tau_{yz}$  (для этих точек, напряжений  $\tau_{sz}$  по контурам цикла). Данные для  $r_1 < r^1 + a_1 = 0, 4$  соответствуют цилиндру с выемами глубины  $r_1 - r^1 + a_1$  из внутреннего контура  $L^1$ , для  $r_1 > r^0 - a_1 = 0, 8$  - цилиндру с выемами глубины  $r^0 - r_1 - a_1 = 0, 2$  из внешнего контура кольца.

В таблице 2 для кольцевого цилиндра с внутренним радиусом  $r^1 = 0, 2$  и радиальными трещинами циклического ряда  $L_{11}$  полудлины  $a_1 = 0, 2$  (при  $b_1 = 10^{-6}$ ) для различных значений расстояния  $r_1$  от центра кольца (рис. 2,б) приведены значения напряжений  $\tau_{yz}$  в точках А и D (для этих точек напряжений  $\tau_{sz}$ ) и КИН для концов В и С трещины. Как и в табл. 1, данные для  $r_1 < r^1 + a_1 = 0, 4$  соответствуют цилиндру с краевой трещиной длины  $r_1 - r^1 + a_1$  из внутреннего контура  $L^1$ , для  $r_1 > r^0 - a_1 = 0, 8$  - цилиндру с трещиной длины  $r^0 - r_1 - a_1 = 0, 2$  из внешнего контура  $L^0$  кольца.

Как видно из данных таблицы 1 при уменьшении длины перемычки АВ (при приближении круговых отверстий  $L_{11}$  цикла к внутреннему контуру кольца) значения напряжений вблизи точки А увеличиваются, вблизи остальных точек уменьшаются, причем значительные изменения этих величин наблюдаются вблизи точек А и D; выход отверстий цикла на внутренний контур кольца и уменьшение глубины выемов на этом контуре сопровождается значительным

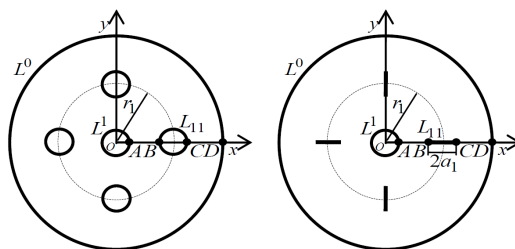


Рис. 2.

Таблица 1.

Значения напряжений  $\tau_{yz}$  в точках цилиндра с круговыми полостями в цикле

$\mathcal{L}$	$r_1$										
	0,1	0,2	0,3	0,45	0,5	0,6	0,7	0,75	0,9	1,0	1,1
	В точке А										
1	–	–	–	1,044	0,794	0,621	0,568	0,565	0,471	0,328	0,239
2	–	–	–	0,762	0,590	0,458	0,407	0,401	0,343	0,268	0,221
4	–	–	–	0,411	0,335	0,270	0,242	0,235	0,220	0,209	0,203
8	–	–	–	0,281	0,245	0,202	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
	В точке В										
1	–	–	–	1,161	1,168	1,176	1,412	1,578	1,915	1,809	1,627
2	–	–	–	0,879	0,897	1,033	1,287	1,452	1,830	1,776	1,620
4	–	–	–	0,528	0,597	0,818	1,066	1,210	1,621	1,683	1,596
8	–	–	–	0,394	0,476	0,599	0,790	0,893	1,370	1,428	1,557
	В точке С										
1	0,398	0,622	0,876	1,229	1,342	1,629	2,141	2,804	–	–	–
2	0,375	0,571	0,788	1,133	1,254	1,546	2,048	2,681	–	–	–
4	0,346	0,512	0,695	1,002	1,116	1,385	1,837	2,403	–	–	–
8	0,339	0,492	0,657	0,933	1,033	1,150	1,457	1,829	–	–	–
	В точке D										
1	1,008	1,026	1,064	1,150	1,193	1,358	1,818	2,510	–	–	–
2	1,003	1,012	1,034	1,107	1,149	1,307	1,748	2,403	–	–	–
4	1,000	1,002	1,009	1,049	1,081	1,209	1,588	2,166	–	–	–
8	1,000	1,001	1,004	1,027	1,047	1,073	1,299	1,669	–	–	–

Таблица 2. Значения

напряжений  $\tau_{yz}$  и КИН в точках цилиндра с круговыми отверстиями в цикле

$\mathcal{L}$	$r_1$										
	0,1	0,2	0,3	0,45	0,5	0,6	0,7	0,75	0,9	1,0	1,1
	Напряжения в точке А										
1	–	–	–	0,840	0,575	0,428	0,383	0,373	0,360	0,267	0,216
2	–	–	–	0,719	0,488	0,355	0,312	0,303	0,287	0,236	0,208
4	–	–	–	0,522	0,351	0,257	0,229	0,223	0,214	0,205	0,201
8	–	–	–	0,304	0,229	0,204	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
	КИН в точке В										
1	–	–	–	0,192	0,201	0,242	0,295	0,329	0,465	0,401	0,299
2	–	–	–	0,171	0,184	0,229	0,284	0,318	0,454	0,397	0,299
4	–	–	–	0,136	0,156	0,206	0,260	0,293	0,425	0,387	0,297
8	–	–	–	0,090	0,114	0,163	0,213	0,241	0,351	0,354	0,291
	КИН в точке С										
1	0,104	0,142	0,203	0,263	0,284	0,335	0,405	0,468	–	–	–
2	0,085	0,135	0,187	0,250	0,273	0,326	0,396	0,458	–	–	–
4	0,066	0,132	0,180	0,230	0,254	0,306	0,374	0,434	–	–	–
8	0,001	0,101	0,135	0,199	0,221	0,269	0,327	0,375	–	–	–
	Напряжения в точке D										
1	1,003	1,014	1,039	1,082	1,107	1,212	1,543	2,090	–	–	–
2	1,001	1,008	1,024	1,063	1,089	1,191	1,513	2,045	–	–	–
4	1,001	1,001	1,007	1,035	1,056	1,147	1,448	1,958	–	–	–
8	1,000	1,000	1,000	1,008	1,017	1,072	1,298	1,701	–	–	–

уменьшением значений напряжений вблизи точки С и незначительным их изменением вблизи точки D; при уменьшении длины перемычки CD наблюдается резкая концентрация напряжений в точках этой перемычки с незначительными изменениями их значений в точках перемычки АВ; выход отверстий на внешний контур и уменьшение глубины выема из внешнего контура не приводят к значительным изменениям напряжений в точках перемычки АВ; во всех случаях увеличение количества  $\mathcal{L}$  отверстий в цикле сопровождается уменьшением напряжений. Как следует из данных табл. 2, аналогичные закономерности имеют место в случае кольца с радиальными трещинами в цикле. Только в случае трещин закономерности изменения напряжений в точках В и С переносятся на КИН для концов трещин.

В таблице 3 для кольцевого цилиндра с внутренним контуром  $L^1$  радиуса  $r^1 = 0,2$  и узкими эллиптическими отверстиями  $L_{l1}$  циклического ряда (рис. 3) с полуосями  $a_1 = 0,35$  и  $b_1 = 0,03$  при различных значениях расстояния  $r_1$  от центра кольца до центра  $L_{l1}$  приведены значения напряжений  $\tau_{yz}$  (для этих точек напряжений  $\tau_{sz}$ ). При этом данные для  $r_1 = 0,5$  соответствуют случаю цилиндра с выемами глубины 0,65 из внутреннего контура  $L^1$ , для  $r_1 = 0,7$  – случаю цилиндра с выемами глубины 0,65 из внешнего контура кольца.

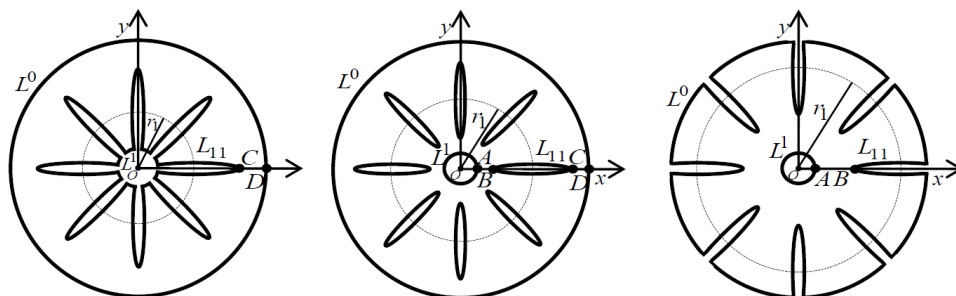


Рис. 3.

Таблица 3. Значения напряжений  $\tau_{yz}$  в точках цилиндра с эллиптическими отверстиями цикла

Точки	$r_1$	$\mathcal{L}$					
		1	2	4	8	10	12
A	0,6	2,046	1,424	0,719	0,311	0,302	0,247
	0,7	1,427	0,937	0,401	0,214	0,157	0,107
B	0,6	9,141	6,706	3,855	1,900	1,767	1,687
	0,7	11,630	9,293	5,924	3,135	2,627	2,225
C	0,5	11,959	10,020	8,226	6,657	6,166	5,748
	0,6	15,065	13,564	11,412	8,770	7,784	6,962
D	0,5	1,763	1,545	1,343	1,167	1,137	1,111
	0,6	3,034	2,756	2,356	1,834	1,658	1,511

Как следует из данных таблицы 3, в цилиндре с узкими радиальными эллиптическими полостями в цикле вблизи точек обеих перемычек между контурами кольца и полостями возникают высокие концентрации напряжений. Эти напряжения особенно велики вблизи точек В и С.

**Заключение.** Таким образом, решена задача о кручении кругового кольцевого цилиндра с циклически расположенными эллиптическими полостями или плоскими трещинами. Задача решена с использованием комплексного потенциала кручения, который представлен рядами Лорана (для отверстий циклического ряда) и степенными рядами (для кругового кольца). Неизвестные коэффициенты рядов определяются из граничных условий на дугах циклическости внешнего и внутреннего контуров кольца и на конурах первого цикла циклического ряда отверстий. Удовлетворением этих условий обобщенным методом наименьших квадратов задача приведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, которая решается методом сингулярных разложений. Для случая, когда циклический ряд содержит одно отверстие или трещину, проведены многочисленные исследования, с помощью которых изучены закономерности распределения напряжений в зависимости от геометрических характеристик полостей циклического пояса, их количества и месторасположения.

#### Список литературы

1. *Saint-Venant B.* Memoire sur la torsion des prismes. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, Institut de France. Sciences math. et phys. 14, Paris, 1856, 233-560.
2. *Найман М.И.* Напряжения в балке с криволинейным отверстием / М.И. Найман. – М.: Изд-во ЦАГИ, 1937. – 86 с. – (Тр. ЦАГИ. – Вып. 313.)
3. *Степанов Р.Д.* Кручение круглого бруса, ослабленного продольными цилиндрическими круговыми полостями / Р.Д. Степанов, Д.И. Шерман // Инж. сб. – 1952. – Т. 11. – С. 127–150.
4. *Шерман Д.И.* О напряжениях в скручиваемом круговом брус, ослабленном призматической полостью / Д.И. Шерман // Изв. АН СССР, ОТН. – 1951. – № 7. – С. 969–995.
5. *Шерман Д.И.* К вопросу о кручении эллиптического бруса, продольно ослабленного эллиптической же полостью / Д.И. Шерман // Инж. сб. – 1959. – Т. 25, – С. 3–19.
6. *Космодамианский А.С.* Кручение эллиптического стержня с двумя круговыми полостями / А.С. Космодамианский // Инж. сб. – 1961. – Т. 31, – С. 76–79.
7. *Арутюнян Н.Х.* Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. – М.: Физматгиз, 1963. – 686 с.
8. *Weber C.* Torsionstheorie / C. Weber, W. Gunther. – Braunschweig: Vieweg; Berlin: Akademie-Verlag, 1958. – 307 p.
9. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
10. *Горянская Е.С.* Кручение анизотропных стержней с полостями и плоскими трещинами / Е.С. Горянская, С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 36–43
11. *Калоеров С.А.* Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
12. *Калоеров С.А.* Кручение анизотропного цилиндра с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, Е.И. Сошина // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – № 6(52). – С. 45–51.
13. *Калоеров С.А.* Кручение анизотропного цилиндра с продольными полостями и плоскими трещинами / С.А. Калоеров, Е.И. Сошина, А.Б. Мироненко // Вестн. ДОНУ. Сер. А.

- Естеств. науки.– 2024.– № 2.– С. 108–122. – DOI: 10.5281/zenodo.13752268.
14. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
  15. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
  16. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Муллер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
  17. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
  18. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.
  19. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 56–62.

**S.A. Kaloerov, E.I. Soshyna**

**The torsion cyclic problem for an isotropic cylinder with a longitudinal cavities and planar cracks.**

The elasticity theory problem concerning the torsion of a circular isotropic cylinder with cyclically arranged elliptical cavities and planar cracks was solved using the complex potential of torsion theory. The problem is reduced to an over determined system of linear algebraic equations, solved by the method of singular decompositions using conformal mappings, decompositions of holomorphic functions into Laurent series and power series, satisfying boundary conditions on the contours of the first cycle by the generalized least squares method. The results of numerical research are described for cases where a circular ring cylinder is weakened by a cyclic series of circular or elliptical cavities, or a cyclic series of planar cracks. Cases of cyclic cavities on the outer or inner surfaces of the cylinder are considered. The patterns of stress distribution depending on the geometric characteristics of the cavities in the cyclic belt, their number and location have been established.

**Keywords:** *cylinder torsion, cavities and planar cracks, complex potentials, generalized least squares method, stress intensity factors, cyclic problem.*

**References**

1. Saint-Venant, B. (1856). Memoire sur la torsion des prismes. *Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, Institut de France. Sciences mathematiques et physiques*, 14, 233–560. (In France).
2. Naiman, M.I. (1937). [Stresses in a beam with a curvilinear hole]. *Proceedings of the Central Aero-Hydrodynamic Institute*, 313, 1–86. (In Russian)
3. Stepanov, R.D., & Sherman, D.I. (1952). [Torsion of a circular bar weakened by longitudinal cylindrical cavities]. *Inzhenernyi Sbornik = Engineering Collection*, 11, 127–150. (In Russian)
4. Sherman, D.I. (1951). [On stresses in a twisted circular bar weakened by a prismatic cavity]. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Department of Technical Sciences*, 7, 969–995. (In Russian)
5. Sherman, D.I. (1959). [On the torsion of an elliptical bar weakened by an elliptical cavity]. *Inzhenernyi Sbornik = Engineering Collection*, 25, 3–19. (In Russian)
6. Kosmodamianskii, A.S. (1961). [Torsion of an elliptical rod with two circular cavities]. *Inzhenernyi Sbornik = Engineering Collection*, 31, 76–79. (In Russian)
7. Arutyunyan, N.Kh., & Abramyan, B.L. (1963). *Torsion of elastic bodies*. Moscow: Fizmatgiz. 686 p. (In Russian)
8. Weber, C., & Gunther, W. (1958). *Torsionstheorie*. Braunschweig: Vieweg; Berlin: Akademie-Verlag. 307 p. (In German).

9. Lekhnitskii, S.G. (1971). *Torsion of anisotropic and inhomogeneous rods*. Moscow: Nauka. 240 p. (In Russian)
10. Goryanskaya, E.S., & Kaloerov, S.A. (1996). [Torsion of anisotropic rods with cavities and planar cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 26, 36–43. (In Russian)
11. Kaloerov, S.A., & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*, 48(3), 319–331.
12. Kaloerov, S.A., Avdyushina, E.V., & Soshina, E.I. (2013). [Torsion of an anisotropic cylinder with holes and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 6(52), 45–51. (In Russian)
13. Kaloerov, S.A., Soshina, E.I., & Mironenko, A.B. (2024). Torsion of an anisotropic cylinder with longitudinal cavities and planar cracks. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 2, 108–122. – DOI: 10.5281/zenodo.13752268. (In Russian)
14. Kaloerov, S.A., & Goryanskaya, E.S. (1995). [Two-dimensional stress state of a multiply connected anisotropic body with cavities and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 25, 45–56. (In Russian)
15. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian)
16. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
17. Drmac, Z., & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(4), 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
18. Drmac, Z., & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(4), 1343–1362. <https://doi.org/10.1137/05063920X>
19. Kaloerov, S.A. (2007). Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media. *International Applied Mechanics*, 43(6), 631–637.

Поступила в редакцию / Original submitted 11.02.2026.

Доработана / Revision submitted 05.03.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 24.03.2026.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-57-65

EDN:GGUDXS



©2026. В.В. Чехов

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМАЛИЗМА ГИБРИДНОГО АВТОМАТА

Формализм гибридного автомата, используемый в имитационном моделировании динамических систем различной природы, может оказаться полезным в области механики деформируемого твёрдого тела для случаев (квази-)статического нагружения, с точки зрения моделирования нелинейных эффектов. В данной работе рассматриваются примеры построения моделей физической (гистерезис при пластичности) и геометрической (явление прощёлкивания) нелинейностей поведения деформируемых систем, с построением диаграммы состояний и демонстрацией работы имитационной модели.

**Ключевые слова:** гибридный автомат, статическое нагружение, пластический гистерезис, ферма Мизеса, прощёлкивание

**Введение.** При практическом моделировании динамических процессов достаточно распространено понятие гибридной динамической системы [1, 2]. Оно сочетает элементы непрерывного и дискретного во времени поведения, что отражает свойства многих процессов из различных предметных областей. Например, модели электронных устройств, сочетающие в себе аналоговый непрерывный процесс и цифровой контроллер, механические системы с соударениями, биологические, социальные и технические системы со сменой режимов, и т.д. Одной из формализаций таких систем является модель гибридного автомата. Эта модель также известна как диаграммы состояний или формализм Харела [2, 3].

Модель гибридного автомата совмещает в себе соотношения, описывающие непрерывное поведение (такие, как обыкновенные дифференциальные уравнения, алгебраические уравнения, заданные функции времени и др.), и аппарат конечных автоматов для описания дискретных изменений состояния. Модель гибридного автомата включена в унифицированный язык моделирования UML [4], применяемый для описания сложных информационных систем. Язык состоит из различных видов визуальных диаграмм, и модель гибридного автомата включена в него в виде диаграммы состояний (statechart diagram). В каждом из состояний непрерывное поведение задаётся (при необходимости) меткой внутреннего действия `do`. Существуют системы имитационного моделирования, базирующие-

---

Чехов Владимир Валерьевич – канд. техн. наук, доц. каф. информатики КФУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, e-mail: chekhovvv@cfuv.ru, ORCID: 0000-0002-5519-2543.

*Chekhov Vladimir Valer'evich* – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, V.I.Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Chair of Computer Science.

ся на диаграммах UML и содержащие методы численного решения задачи Коши «на лету», с одновременным построением временных и фазовых диаграмм, различных видов анимации и др. Это позволяет, создав модель, производить её запуски и исследовать динамику в реальном либо модельном времени. Применение модели гибридного автомата позволяет освободить численный решатель от проблем обработки очень быстро изменяющихся подпроцессов, заменив их дискретными переходами автомата.

Наряду с преимуществами, модель гибридного автомата обладает некоторыми особенностями. Например, некоторые виды гибридного поведения — такие как цикл переходов (когда переходы срабатывают сразу один за другим и «непрерывное» время останавливается), автомат Зенона (когда промежутки времени между последовательными срабатываниями переходов имеют вид бесконечной последовательности, сходящейся за конечное время) [1, 2], не соответствуют процессам, имеющим место в реальном мире.

В области механики деформируемого твёрдого тела модель гибридного автомата проблематично использовать для континуальных краевых задач с распределёнными параметрами, однако она вполне подходит для задач, представленных конечным числом переменных состояния (например, ферменные, либо любые другие дискретно описанные конструкции). С точки зрения комбинирования непрерывных и дискретных изменений во времени подходящим объектом для применения модели гибридного автомата являются, например, виброударные системы.

Для случая статического (или квазистатического) нагружения, когда изменение величины внешней нагрузки полагается настолько медленным, что отсутствуют динамические эффекты, результативное использование модели гибридного автомата возможно при рассмотрении существенно нелинейных задач.

**1. Особенности гибридного автомата для задач статического нагружения.** Одним из достоинств модели гибридного автомата является возможность достаточно просто и наглядно моделировать нелинейные эффекты, сопровождающиеся мгновенным изменением свойств системы, вплоть до смены основополагающих уравнений. При статическом нагружении непрерывное поведение деформируемого тела задаётся уравнениями состояния, которые могут иметь различный вид на разных участках диаграммы нагружения. Такие участки удобно формализовать различными состояниями гибридного автомата. Наряду с определением состояний следует также задать допустимые переходы между ними, условия их срабатывания, а также (при необходимости) выполняемые при этом дискретные разовые действия. Этот аппарат может быть расширен использованием составных состояний/подсостояний, объектно-ориентированным представлением системы в виде совокупности компонентов, и др. [4].

При моделировании каждого из видов нелинейности, выделяемых в строительной механике (физической, геометрической и конструктивной), использование модели гибридного автомата может быть достаточно эффективным. Рассмотрим некоторые примеры реализации этого подхода.

**2. Моделирование физической нелинейности (пластичность при циклическом нагружении).** При использовании деформационной теории пластичности её соотношения достаточно просты и хорошо описывают явление при активном нагружении, но не позволяют адекватно описывать процесс разгрузки и сопутствующие ему эффекты, такие как появление остаточных деформаций, эффект Баушингера, петля гистерезиса и т.п. Однако, если соотношения деформационной теории пластичности включить в модель гибридного автомата, у которой смена знака приращения прикладываемой нагрузки может привести к смене состояний, то появляется возможность построить реалистичную диаграмму циклического нагружения, с наличием указанных эффектов. В простейшем случае диаграмма состояний автомата очевидно будет содержать как минимум два состояния — упругости и пластичности. Их можно дополнить ещё третьим — состоянием разрушения, в которое автомат должен перейти по превышении предела прочности материала. На рисунке 1 приведен пример гибридного автомата, содержащего соотношения модели линейного упрочнения [5]. Здесь через  $p$  и  $p'$

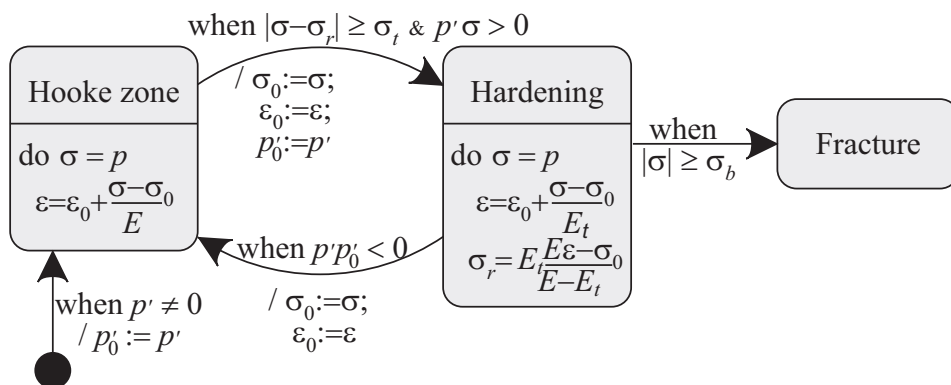


Рис. 1. Диаграмма состояний модели пластичности с линейным упрочнением

обозначены внешняя нагрузка и скорость её изменения,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — текущие уровни напряжения и деформации,  $E$  и  $E_t$  — модуль упругости и касательный модуль области упрочнения,  $\sigma_r$  и  $\sigma_b$  — пластическая составляющая напряжения и предел прочности материала, нуликама в нижнем индексе обозначены значения переменных, запоминаемые в конце предыдущего состояния. В каждом из состояний упругости и пластичности действует своё (линейное) уравнение состояния. Величина приложенной внешней нагрузки может изменяться во времени по произвольному закону, и автомат отслеживает достижение критических значений напряжения, при которых должна происходить дискретная смена состояния. На рисунке 2 показана работа этой модели для стали 30ХГСА в системе имитационного моделирования [6]. При запуске модели можно наблюдать и исследовать эффект гистерезиса при циклическом нагружении. На рисунке 3 показана структура гибридного автомата, основанного на модели идеальной пластичности. Как и предыдущая, она тоже содержит состояния упругости и пластичности, а так-

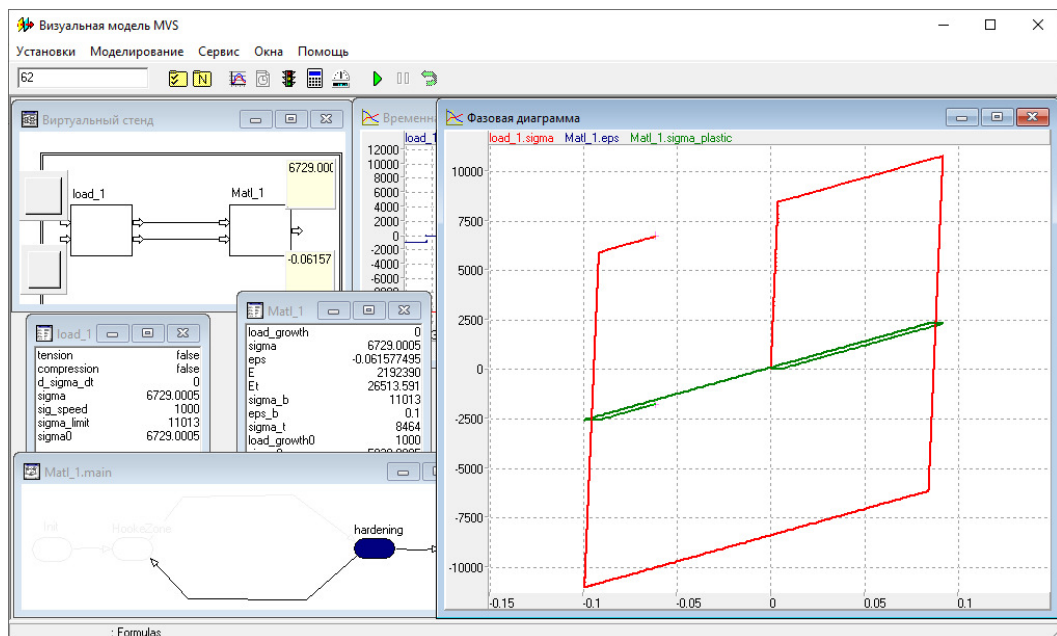


Рис. 2. Поведение модели пластичности с линейным упрочнением

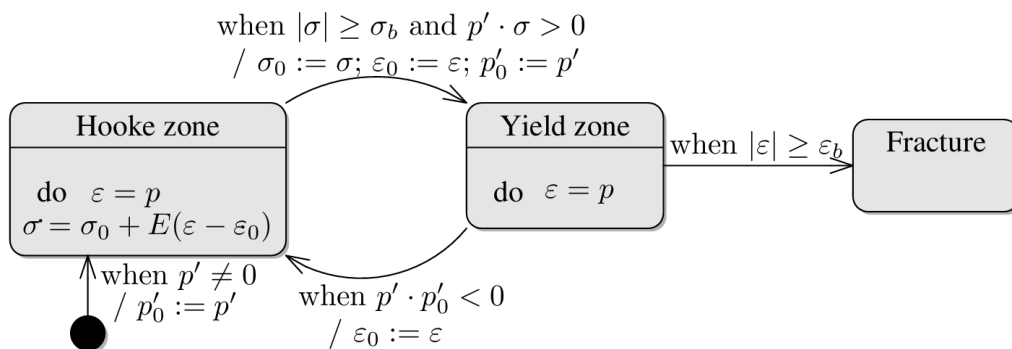


Рис. 3. Диаграмма состояний модели идеальной пластичности

же разрушения. Здесь внешняя нагрузка задаёт величину уже не напряжения, а деформации, ввиду неоднозначности уровня напряжения в пластическом состоянии. На рисунке 4 слева можно видеть работу имитационной модели этой системы. Справа показана аналогичная работа более реалистичной модели Мазинга [7], основанной на совместной работе нескольких идеально пластических моделей. Она здесь реализована с использованием объектно-ориентированного подхода, когда в диаграмме классов используется отношение агрегации (включения одних объектов в другие).

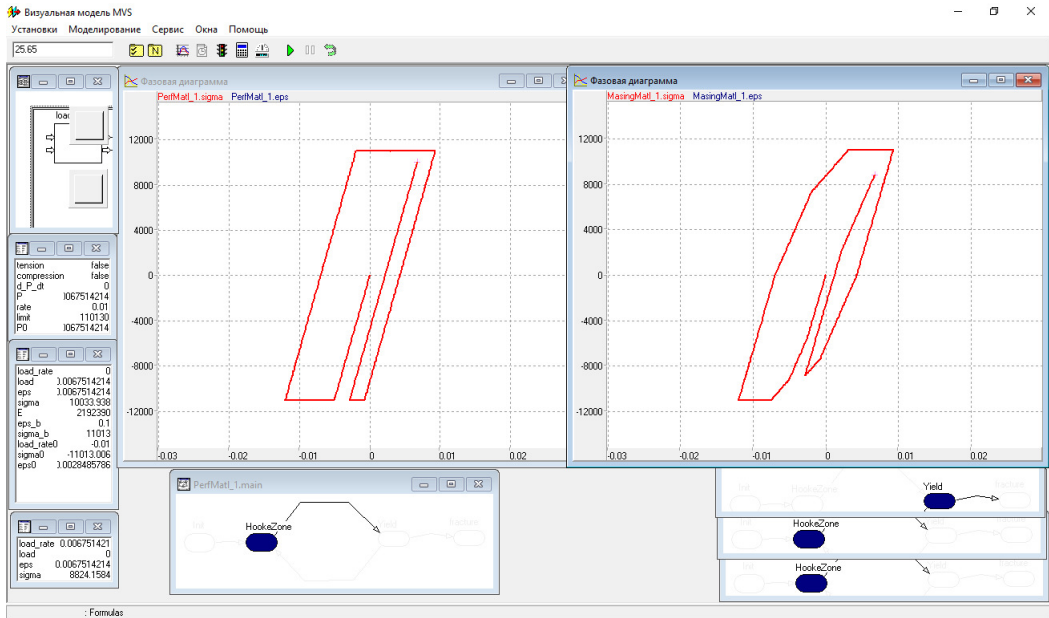


Рис. 4. Поведение моделей идеальной пластичности и Мазинга

**3. Моделирование геометрической нелинейности (эффект прощёлкивания).** Ферма Мизеса, показанная на рисунке 5, является достаточно популярной моделью для демонстрации и исследования нелинейных эффектов, связанных с наличием нескольких различных положений равновесия при одном и том же уровне внешней нагрузки. Рассмотрим эту модель в наиболее простом варианте с линейно-упругими стержнями и симметричным случаем деформирования [8] посредством статического нагружения сосредоточенной силой  $P$ , приложенной к центральному узлу фермы. Сила  $P$  может произвольно изменяться по величине и имеет характер толкающей нагрузки («жёсткое» нагружение с контролем перемещения со стороны приложения силы и «мягкое» без контроля перемещения по направлению вектора силы), подобно процессу нажатия на кнопку. При смене знака нагрузки изменяется также и сторона её приложения, чтобы нагрузка оставалась толкающей. При таком способе нагружения в системе могут возникать перескоки (прощёлкивания), когда ферма быстро меняет одно равновесное положение (неустойчивое) на другое, устойчивое. Диаграмма равновесных состояний данной фермы в зависимости от нагрузки описывается одним нелинейным соотношением

$$P = 2EFy \left( \frac{\sin \alpha_0}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) \quad (1)$$

где  $E$  — модуль упругости материала,  $F$  — площадь поперечного сечения каждого из стержней,  $\alpha_0$  — угол между направлением нагрузки и осью стержня

в начальном ненагруженном состоянии,  $a$  — полуширина фермы, и имеет вид, показанный на рисунке 6. С точки зрения возможных перескоков её можно разделить на четыре участка (равновесные 1–2–3 и 5–6–7 и неравновесные 3–4 и 4–5) [4].

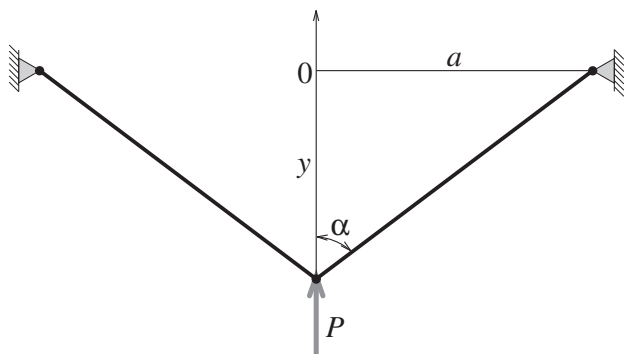


Рис. 5. Ферма Мизеса

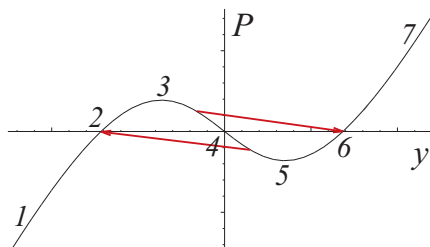


Рис. 6. Кривая равновесных состояний фермы Мизеса

Вид возможных перескоков при рассматриваемом здесь характере внешней нагрузки показан на рисунке 6 стрелками. Каждый перескок обусловлен локальным нарушением равновесия при приращении нагрузки, совершется главным образом не за счёт внешней силы, а за счёт упругой энергии, накопленной в сжатых стержнях, и является неравновесным динамическим процессом, масштабом времени которого можно пренебречь по сравнению со статическим характером изменения величины внешней силы. При этом центральный узел фермы практически мгновенно перескакивает в устойчивое положение, оставляя рабочий орган нагружения позади. Таким образом, приложенная к узлу внешняя сила мгновенно сбрасывается, и он оказывается в новом положении равновесия уже при нулевом уровне внешней нагрузки, с которого и должно теперь начинаться последующее её изменение. То есть, в моменты перескоков принудительно нарушается заданный статический характер изменения величины внешней нагрузки. На диаграмме состояний такое мгновенное изменение нагрузки можно формализовать посылкой сигнала (действие `send`), приписываемого к соответствующему переходу между состояниями. Гибридный автомат, описывающий динамику фермы Мизеса, показан на рисунке 7. В нём равновесным участкам 1–2–3 и 5–6–7 соответствуют состояния автомата `Stable1` и `Stable2`, а неравновесным участкам 3–4 и 4–5 — соответственно, состояния `Unstable1` и `Unstable2`, которые выполнены составными, с целью моделирования их реалистичного прохождения с возможным появлением перескоков. Если, находясь в точке 3, начать уменьшать нагрузку, то математически из диаграммы равновесия невозможно определить, в какую сторону пойдёт процесс — в сторону точки 2 или точки 4. Привлечём эвристические соображения, основанные на мысленном эксперименте. Чтобы из

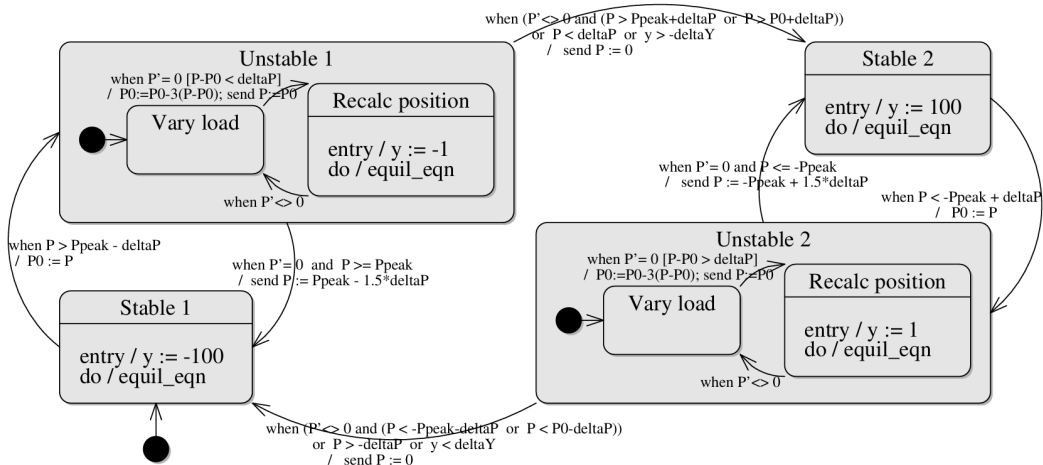


Рис. 7. Диаграмма состояний фермы Мизеса с толкающим нагружением

точки 3 начать движение в сторону точки 4, следует слегка увеличить перемещение. Поскольку внешняя нагрузка в этом направлении прикладывается с контролем перемещения, то будем считать, что небольшое приращение нагрузки продвинет нас как раз вправо по неустойчивой ветви. После этого нужно будет остановиться и зафиксировать положение, при этом пересчитать (методом Ньютона либо одной из его модификаций) величину нагрузки, чтобы при сделанном перемещении вернуться на кривую равновесия. Для этого придётся в состояние, соответствующее неравновесному участку кривой, ввести вложенные подсостояния «шаг-пересчёт». Таким образом можно будет осторожно, небольшими (в пределах заданного ограничения, определяемого на основе тестовых запусков) приращениями нагрузки, пройти весь участок 2–4. При этом слишком большое приращение нагрузки (выше допустимой величины) должно привести к прощёлкиванию. По достижении положения неустойчивого равновесия 4 уже любое её положительное приращение будет приводить к прощёлкиванию. Аналогичные соображения касаются и ветви 4–5, только с противоположным знаком у нагрузки. Очевидно, что с практической точки зрения все проверки достижения критических точек 3, 4 и 5 должны выполняться с учётом некоторого люфта, который обычно имеет место в реальных конструкциях.

Работа имитационной модели фермы показана на рисунке 8 в момент прохождения неравновесного участка 4–5 после одного прощёлкивания. Детализацию данной модели можно повысить, если посреди переходов, соответствующим перескокам, вставить дополнительные состояния, описывающие реальную динамику перескока (затухающий колебательный переходный процесс, представляющий собой решение соответствующей задачи Коши).

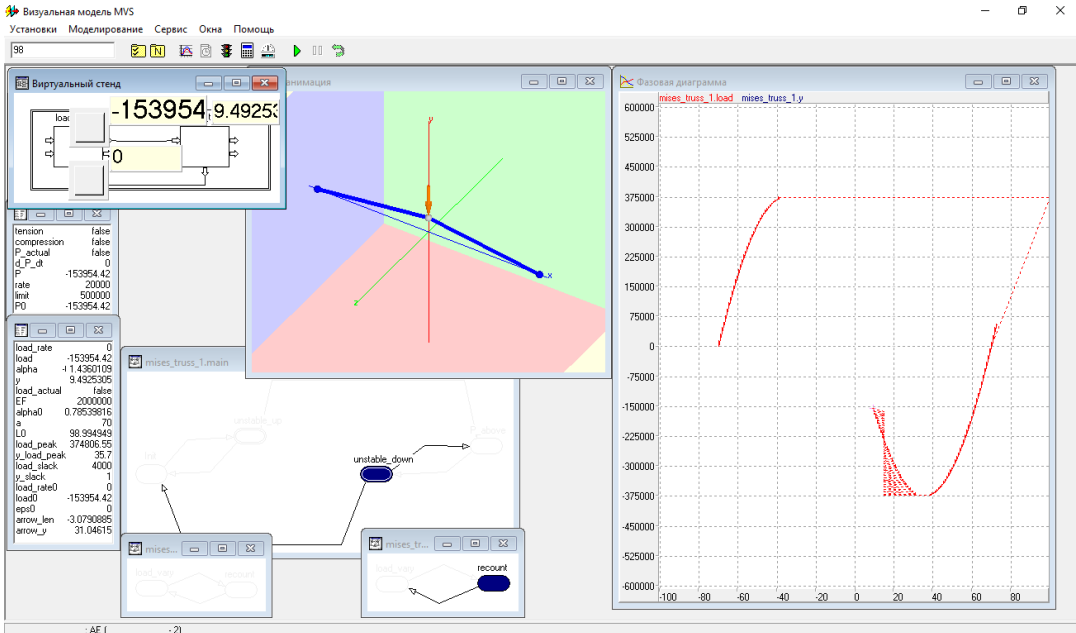


Рис. 8. Исследование поведения фермы Мизеса

**Заключение.** Приведенные в данной работе примеры иллюстрируют эффективность использования формализма гибридного автомата при статическом нагружении для реализации и исследования нелинейных эффектов различной природы. Помимо формального описания математической модели, данный подход позволяет создать «быстрый прототип» явления в виде имитационной модели, запуски которой позволяют наглядно продемонстрировать и исследовать особенности её поведения.

### Список литературы

1. *Schaft A.* An Introduction to Hybrid Dynamical Systems / A. Schaft, H. Schumacher. – Springer-Verlag London, 2000. – 174 p. – DOI: 10.1007/BFb0109998.
2. *Сениченков Ю.Б.* Численное моделирование гибридных систем / Ю.Б. Сениченков. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2004. – 206 с.
3. *Harel D.* Statecharts: a visual formalism for complex systems / D. Harel // Science of Computer Programming. – 1987. – Vol. 8, No 3. – P. 231–274. – DOI: 10.1016/0167-6423(87)90035-9.
4. *Буч Г.* Язык UML. Руководство пользователя : руководство / Г. Буч, Д. Рамбо, И. Якобсон. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 496 с. – ISBN 5-94074-334-X. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/1246> (дата обращения: 15.12.2025). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. *Chekhov V.V.* Use of the hyperelastic model for plastic materials by example of the three-bar truss / V.V. Chekhov // Acta et commentationes universitatis tartuensis de mathematica. – 2020. – Vol. 24, No. 2. – P. 163–182. – DOI: 10.12697/ACUTM.2020.24.11
6. AnyDynamics – высокопроизводительная среда для создания и отладки интерактивных многокомпонентных моделей сложных динамических систем: /[сайт]. – URL: <https://mvstudium.com> (дата обращения: 15.12.2025).
7. *Москвитин В.В.* Пластичность при переменных нагружениях / В.В. Москвитин. – М.: Изд-во Московского университета., 1965. – 264 с.

8. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова; 4-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 352 с.
9. Чехов В.В. Моделирование динамики фермы Мизеса с использованием модели гибридного автомата / В.В. Чехов, А.И. Шевченко // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование (МИКМО-2025) : Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции, Симферополь, 16–19 апреля 2025 года. – Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2025. – С. 437–444.

## V.V. Chekhov

### Simulation of nonlinear effects under static loading using the hybrid automaton formalism.

The hybrid automaton formalism used in simulation modeling of dynamic systems of diverse nature may prove useful in the field of solid mechanics for cases of (quasi-)static loading, in terms of modeling nonlinear effects. This paper examines examples of constructing models of physical (hysteresis under plasticity) and geometric (the snap-through phenomenon) nonlinearity of the behavior of deformable systems, constructing a state diagram and demonstrating the operation of the simulation model.

**Keywords:** *hybrid automation, static loading, plastic hysteresis, von Mises truss, snap-through phenomenon.*

### References

1. Schaft, A., & Schumacher, H. (2000). *An introduction to hybrid dynamical systems*. London: Springer. 174 p. DOI: 10.1007/BFb0109998.
2. Senichenkov, Yu.B. (2004). *Numerical modeling of hybrid systems*. St. Petersburg: Polytechnic University Publishing House. 206 p. (In Russian)
3. Harel, D. (1987). Statecharts: A visual formalism for complex systems. *Science of Computer Programming*, 8(3), 231–274. [https://doi.org/10.1016/0167-6423\(87\)90035-9](https://doi.org/10.1016/0167-6423(87)90035-9)
4. Booch, G., Rumbaugh, J., & Jacobson, I. (2008). *The unified modeling language user guide*. Moscow: DMK Press. Retrieved December 15, 2025, from <https://e.lanbook.com/book/1246>. (In Russian)
5. Chekhov, V.V. (2020). Use of the hyperelastic model for plastic materials by example of the three-bar truss. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 24(2), 163–182. DOI: 10.12697/ACUTM.2020.24.11
6. MvStudium. (n.d.). *AnyDynamics – High-performance environment for creating and debugging interactive multicomponent models of complex dynamical systems*. Retrieved December 15, 2025, from <https://mvstudium.com>. (In Russian)
7. Moskvitin, V.V. (1965). *Plasticity under variable loading*. Moscow: Moscow University Press. 264 p. (In Russian)
8. Panovko, Ya.G., & Gubanov, I.I. (1987). *Stability and vibrations of elastic systems: Modern concepts, paradoxes, and errors* (4th ed.). Moscow: Nauka. 352 p. (In Russian)
9. Chekhov, V.V., & Shevchenko, A.I. (2025). Modeling the dynamics of the Mises truss using a hybrid automaton model. In *Mathematics, Informatics, Computer Science, Modeling, Education (MIKMO-2025)*: Proceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference, 16–19 April 2026, Simferopol, Russia. Simferopol: IP Kornienko A.A., pp. 437–444. (In Russian)

*Поступила в редакцию / Original submitted 21.12.2025.*

*Доработана / Revision submitted 02.03.2026.*

*Рекомендована к печати / Accepted 24.03.2026.*

## ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК 622.02.113

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-66-82

EDN:UFQТJI



©2026. В.А. Антонов

### ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПОРА И ДЕСТРУКЦИИ ПРИСТЕНОЧНЫХ ПОРОД ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

Приведены результаты геомеханических исследований пространственного распределения коэффициентов горизонтального распора горных пород, изменяющихся в подрабатываемом горном массиве. Исследования основаны на представлениях о влиянии на формирование распора свободного пространства, образованного уступом карьера или подземной горной выработкой. В результате получены математические функциональные выражения, описывающие изменение бокового распора горной породы в пристеночном пространстве борта карьера и углубленной выработки при наличии гравитационного и тектонического напряжения. По граничным значениям горизонтально ориентированного распора к стенке выработки дано аналитическое описание конфигураций зон растяжения и деструкции пристеночной породы, в пределах которых происходит ее смещение и разрушение. На практических примерах показано соответствие расчетных определений отмеченных зон экспериментальным наблюдениям, что подтверждает возможность применения выводов исследований в оценках устойчивости стенок горной выработки и необходимых мер их крепления, обеспечивающих безопасность горных работ.

**Ключевые слова:** горная выработка, уступ карьера, горная порода, боковой распор, зона растяжения, деструкция.

**Введение.** Для решения вопроса безопасности горных работ в техногенной выработке, находящейся на поверхности или некоторой глубине горного массива, требуется оценка степени устойчивости или возможного разрушения приграничной горной породы. Данной задаче посвящены многие экспериментальные и теоретические исследования, проведенные методами функционально-математического [1–5] и численного [6, 7] моделирования, а также непосредственными измерениями [8–10].

---

*Антонов Владимир Александрович* – докт. техн. наук, гл. науч. сотр. ИГД УрО РАН, Екатеринбург, e-mail: Antonov@igduran.ru, Researcher ID: E-6048-2014, Scopus AuthorID: 7201814221.

*Antonov Vladimir Aleksandrovich* – Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher, Institute of Mining, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg.

Основным положением, влияющим на достоверность модельных выводов о размерах зон деформации и деструкции пристеночных к выработке горных пород, является допускаяемое условие суперпозиции напряжений их сжатия в нетронутом массиве и противоположно направленного растяжения свободного пространства выработки. В результате принимают уравновешенное состояние ее контура с нулевыми, т.е. отсутствующими напряжениями. Тем не менее, в отмеченных зонах боковой распор задают фиксированным и по нему получают расчетные напряжения сжатия горной породы. Однако на практике наблюдается конвергенция стенок, приводящая к их разрушению и вывалам горной породы в сторону свободного пространства выработки, что свидетельствует о наличии в ее пристеночной зоне растягивающего распора.

Очевидно, что боковой распор породы в зоне влияния горной выработки изменяется от сжатия до растяжения в зависимости от ее вертикального расположения и расстояния до ее стенок и так же, как коэффициенты концентрации напряжений, изменяется, принимая положительные и отрицательные значения. В данной статье в качестве восполнения отмеченных модельных недостатков приведены результаты исследований приконтурных изменений сжимающего и растягивающего распора.

Определены размеры соответствующих зон деформации и деструкции боковых пород карьерных уступов и горизонтальных подземных выработок с учетом действующего тектонического напряжения, их высоты и глубины залегания.

**1. Боковой распор в нетронутом горном массиве.** Горная порода, расположенная в глубине нетронутого массива, находится под действием гравитационного и тектонического напряжения. Его вертикальная составляющая  $\sigma_z$  определяется следующей суммой гравитационного и отвесного тектонического  $\sigma_{Tz}$  напряжения

$$\sigma_z = \gamma H + \sigma_{Tz},$$

где  $\gamma$  – вес единичного объема налегающей горной породы;  $H$  – глубина в массиве. По горизонтали направлены сжимающие напряжения реактивно-гравитационные и тектонические, состоящие из соответствующих компонент  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , и  $\sigma_{Tx}$ ,  $\sigma_{Ty}$ .

Коэффициент гравитационного распора  $\lambda_r$  с учетом равенства сжимающих напряжений  $\sigma_x = \sigma_y$  определяется по известной формуле А. Н. Динника

$$\lambda_r = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \frac{\mu}{1 - \mu},$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

С учетом тектонического напряжения коэффициенты горизонтального распора в нетронутом горном массиве  $\lambda_{mx}$  и  $\lambda_{my}$  становятся различными в ориентациях по осям  $x$  и  $y$  со следующим составом

$$\lambda_{mx} = \lambda_r + \lambda_{Tx}, \quad \lambda_{my} = \lambda_r + \lambda_{Ty},$$

где включены коэффициенты тектонических распоров:  $\lambda_{Tx} = \sigma_{Tx}/\sigma_z$ ;  $\lambda_{Ty} = \sigma_{Ty}/\sigma_z$ .

**2. Боковой распор на стенке горной выработки.** В зоне горного массива, примыкающей к стенке горной выработки со свободным пространством, расчет бокового распора проводится с учетом изменившихся условий. Распор становится зависимым не только от его направления, но и от пространственного влияния выработки. С учетом этого выделим распор, горизонтально ориентированный по оси  $x$  к ее стенке, и продольный, ориентированный по оси  $y$  вдоль стенки. С приближением по оси  $x$  со стороны горного массива к стенке выработки горизонтальное давление из массива остается прежним, а давление со стороны выработки снижается. В результате горизонтально ориентированный к стенке распор изменяется от сжатия к растяжению, что приводит к известному выпиранию стенки внутрь выработки [11–13].

Выделим объемный элемент пространства и расположим его на середине стенки горизонтальной горной выработки, имеющей ширину намного больше ее высоты. Напряжение сжатия горной породы будем считать положительным, а растяжения – отрицательным. Распределение стеночных напряжений показано на рисунке 1. Здесь обозначено:  $H_B$  – глубина расположения середины стенки;  $h$  – полуввысота горной выработки. Положено, что горизонтальная компонента тектонического напряжения ориентирована по оси  $x$ . В пристеночной горной породе она становится растягивающей, поэтому показана с учетом смены знака ( $-\sigma_{tx}$ ). Соответствующий коэффициент стеночного тектонического распора так же становится отрицательным ( $-\lambda_{tx}$ ).

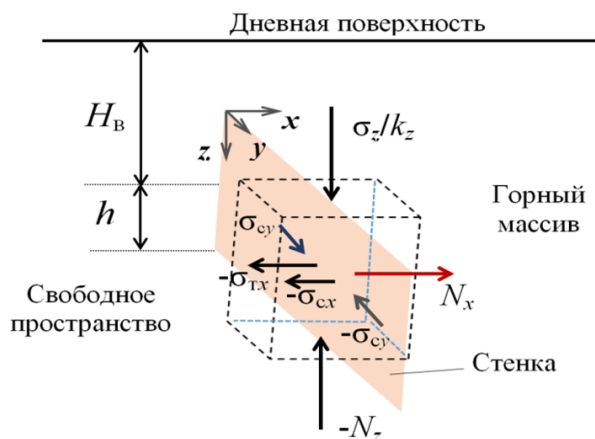


Рис. 1. Расположение напряжений на стенке горной выработки

Реактивные напряжения  $-\sigma_{cx}$  и  $\sigma_{cy}$  состоят в прямой зависимости от вертикального давления на глубине  $H_B$ . В связи с влиянием свободного пространства оно уменьшается в  $k_z$  раз по сравнению со значением в нетронутым массиве и компенсируется ответным напряжением опоры  $-N_z$  сжимающихся нижних пород. Стеночные горизонтальные давления  $-\sigma_{tx}$  и  $-\sigma_{cx}$  приводят к появлению противодействующего напряжения упругости  $N_x$  растянутой горной породы, примыкающей к стенке.

В результате баланса гравитационных напряжений на середине стенки получаем их связь в виде следующих уравнений

$$\sigma_{cx} + \mu\sigma_{cy} + \mu\frac{\sigma_z}{k_z} = 0;$$

$$\sigma_{cy} + \mu\sigma_{cx} - \mu\frac{\sigma_z}{k_z} = 0.$$

В приведенных равенствах учтено, что растягивающее напряжение на стенке ( $\sigma_{cx} < 0$ ) сопряжено с ее сжатием по осям  $y$  и  $z$ . Соответственно сжатие вдоль поперечной оси  $y$  вызывает растяжение по осям  $x$  и  $z$ . Обозначив соотношения горизонтального и вертикального напряжения коэффициентами стеночных боковых распоров

$$\lambda_{cx} = \frac{\sigma_{cx}}{\sigma_z}; \quad \lambda_{cy} = \frac{\sigma_{cy}}{\sigma_z},$$

получаем из уравнений их систему

$$\lambda_{cx} + \mu\lambda_{cy} + \frac{\mu}{k_z} = 0;$$

$$\lambda_{cy} + \mu\lambda_{cx} - \frac{\mu}{k_z} = 0.$$

Ее решение представляется в следующем виде

$$\lambda_{cx} = -\frac{\mu}{(1-\mu)k_z} = -\frac{\lambda_\Gamma}{k_z};$$

$$\lambda_{cy} = \frac{\mu}{(1-\mu)k_z} = \frac{\lambda_\Gamma}{k_z}.$$

Получается, что в результате действия гравитационных сил в средней части стенки горной выработки коэффициент продольного к ней бокового распора  $\lambda_{cy}$  (сжатия) равен коэффициенту бокового распора в нетронutom массиве, деленному на поправку  $k_z$ . Коэффициент ориентированного к ней бокового распора  $\lambda_{cx}$  (растяжения) определяется таким же, но с отрицательным знаком.

Поправочный коэффициент  $k_z$  зависит от расположения свободного пространства, занятого выработкой. Схема ее поперечного сечения показана на рисунке 2.

Коэффициент  $k_z$  определяется отношением суммы двух одинаковых площадей  $2S_{1/2}$ , занятых горной породой в нетронutom массиве на глубине подошвы будущей выработки и примыкающих слева и справа к середине ее стенки, к сумме площадей  $S_{1/2}$  и  $S$ , занятых горной породой после образования выработки. Согласно схеме, приведенной на рисунке 2, это отношение имеет следующий вид

$$k_z = \frac{2S_{1/2}}{S_{1/2} + S}.$$

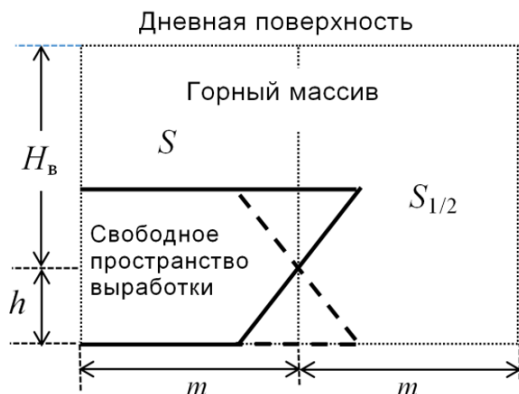


Рис. 2. Контур нормального сечения горной выработки

Отмеченные площади определяются по формулам:

$$S_{1/2} = (H_B + h)m;$$

$$S = (H_B - h)m.$$

Подставляя эти формулы в схему расчета коэффициента  $k_z$ , получаем его выражение

$$k_z = 1 + \frac{h}{H_B}.$$

В условиях карьерного уступа выполняется равенство  $H = h$ . Налгающие горные породы отсутствуют ( $S = 0$ ). Левое пространство  $S_{1/2}$ , ранее отнесенное к нетронутому горному массиву, становится свободным. Поэтому получаем значение поправочного коэффициента  $k_z = 2$ , т.е. вертикальное гравитационное давление на стенке борта карьера уменьшается по сравнению с нетронутым массивом в два раза. По мере углубления выработки в массив ( $H_B > h$ ) давление налегающих горных пород нарастает, а относительная доля, занимаемого в нем свободного пространства выработки уменьшается. Ее влияние на вертикальное стеночное давление слабеет, и коэффициент  $k_z$  снижается до единицы. Таким образом, его значение изменяется от 1 до 2.

При вертикальном смещении от середины стенки влияние заключенного в выработке свободного пространства на боковой распор уменьшается. По данным экспериментальных наблюдений, функционального и численного моделирования [5, 12, 14–16] растяжение горной породы в сторону выработки на уровнях ее подошвы и кровли заканчивается. Соответственно, направленный на стенку распор приближается по непрерывному распределению Гаусса из области отрицательных значений к нулю, а распор сжатия вдоль стенки выработки – к состоянию нетронутого массива. При этом коэффициент продольного тектонического распора  $\lambda_{ту}$  не изменяется. Допуская относительную погрешность краевых приближений коэффициентов распора не больше  $e^{-4} = 0,018$ , получаем следующие

формулы их изменения на стенке

$$\lambda_{cx} = - \left( \frac{\lambda_{\Gamma}}{1 + h/H_B} + \lambda_{Tx} \right) e^{-n_x(d/h)^2}; \quad (1)$$

$$\lambda_{cy} = \lambda_{My} - \frac{\lambda_{\Gamma}(h/H_B)e^{-n_y(d/h)^2}}{1 + h/H_B}, \quad (2)$$

где  $d$  – вертикальное отклонение от середины стенки ( $d \leq h$ );

$$n_x = 4 - \ln \left( \frac{\lambda_{Mx}}{\lambda_{\Gamma}/(1+h/H_B) + \lambda_{Tx}} \right); \quad n_y = 4 - \ln \left( \frac{(1 + h/H_B)\lambda_{My}}{\lambda_{\Gamma}(h/H_B)} \right).$$

Распределение относительных распоров на стенке горной выработки в отсутствии тектонического напряжения показано на рисунке 3.

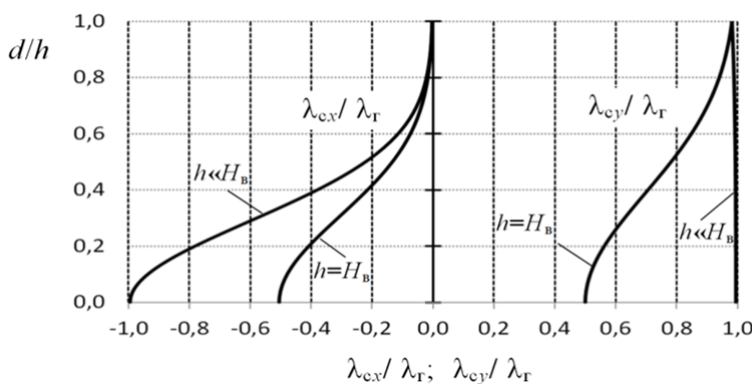


Рис. 3. Распределение относительного бокового распора на стенке горной выработки в отсутствии тектонического напряжения ( $\lambda_{Tx} = \lambda_{Ty} = 0$ )

При нарастании горизонтального тектонического напряжения зависимость распределения распора на стенке от глубины расположения выработки утрачивается. Интервал изменения соотношения  $\lambda_{cx}/\lambda_{Mx}$  устанавливается от -1 до 0, а соотношения  $\lambda_{cy}/\lambda_{My}$  – сокращается до постоянного единичного значения.

### 3. Распор, деформация и деструкция пристеночных горных пород.

По мере горизонтального удаления от стенки выработки в горный массив ее влияние на боковой распор горной породы слабеет до полного исчезновения. В зоне влияния коэффициенты боковых распоров нелинейно увеличиваются от стеночных значений до величин в нетронутом массиве. Соответствующие их изменения описываются следующими переходными квазиступенчатыми функциями

$$\lambda_x = \lambda_{cx} + \frac{\lambda_{Mx} - \lambda_{cx}}{1 + e^{-\frac{x-x_{CP}}{\Delta}}}; \quad (3)$$

$$\lambda_y = \lambda_{cy} + \frac{\lambda_{My} - \lambda_{cy}}{1 + e^{-\frac{x-x_{CP}}{\Delta}}}, \quad (4)$$

где  $x_{\text{ср}}$  – средняя координата на оси  $x$ , в которой коэффициенты  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  равны половине суммы их значений в нетронутом массиве  $\lambda_{\text{мх}}$ ,  $\lambda_{\text{мы}}$  с соответствующим стеночным значением  $\lambda_{\text{сх}}$  и  $\lambda_{\text{сy}}$ ;  $\Delta$  – интервал релаксации напряжений, равный расстоянию  $x$  от  $x_{\text{ср}}$ , при котором отношение разностей  $\lambda_{\text{мх}} - \lambda_x$  ( $\lambda_{\text{мы}} - \lambda_y$ ) к разностям  $\lambda_x - \lambda_{\text{сх}}$  ( $\lambda_y - \lambda_{\text{сy}}$ ) изменяется в  $e$  раз, где  $e$  – основание натурального логарифма ( $e \approx 2,72$ ).

Выразим отмеченные координаты на оси  $x$  в долях интервала релаксации  $\Delta$  изменяющегося распора, т.е. параметрами относительного расстояния  $\xi_x$  от стенки выработки и его среднего значения  $\xi_{\text{ср}}$  в зоне ее влияния

$$\xi_x = \frac{x}{\Delta}; \quad \xi_{\text{ср}} = \frac{x_{\text{ср}}}{\Delta}.$$

При отклонении координатного параметра  $\xi_x$  от среднего значения  $\xi_{\text{ср}}$  на  $n$  единиц (параметров релаксации) отношение меньшей разности полученного коэффициента бокового распора с его крайним значением к большей разности с противоположным крайним значением уменьшается в  $e^n$  раз. Приняв отклонение координаты справа и слева от среднего значения равное четырем параметрам релаксации ( $n = 4$ ), получаем отмеченное соотношение разностных распоров 0,018, которое показывает достаточное асимптотическое приближение коэффициентов  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  к их краевым значениям. Поэтому принимаем с допустимой погрешностью для практики, что горизонтальный относительный размер зоны влияния горной выработки равен  $8\Delta$ , т.е. координата  $\xi_x$  со средним значением  $\xi_{\text{ср}} = 4$  изменяется в интервале от 0 до 8.

Подставляя выражения стеночных распоров (1), (2) в переходные функции (3), (4), получаем следующие выражения изменяющихся коэффициентов бокового распора в пристеночной горной породе

$$\lambda_x = \frac{\lambda_{\text{мх}}}{1 + e^{4-\xi_x}} - \frac{e^{-n_x(d/h)^2}}{1 + e^{\xi_x-4}} \left( \frac{\lambda_{\Gamma}}{1 + h/H_{\text{в}}} + \lambda_{\text{тх}} \right); \quad (5)$$

$$\lambda_y = \lambda_{\text{мы}} - \frac{\lambda_{\Gamma}(h/H_{\text{в}})e^{-n_y(d/h)^2}}{(1 + h/H_{\text{в}})(1 + e^{\xi_x-4})}. \quad (6)$$

На рисунке 4 представлены соответствующие графики относительного изменения коэффициентов гравитационных боковых распоров в пристеночной зоне на уровне середины ( $d = 0$ ) стенки выработки при отсутствии тектонического напряжения.

Оценим реальные координаты  $x$ , соответствующие размеру зоны бокового влияния горной выработки на распор пристеночной породы. Связь интервала релаксации  $\Delta$  с размером этой зоны установим по известным теоретическим представлениям и результатам практических экспериментов [17–22]. Из них следует, что горизонтальный размер отмеченной зоны в углубленной выработке ориентировочно равен соответствующей хорде окружности, встроенной в ее поперечное сечение. Поэтому принимаем, что в условиях глубокого залегания выработки ( $H_{\text{в}} \gg h$ ) интервал влияния  $8\Delta$  на уровне середины стенки заканчивается

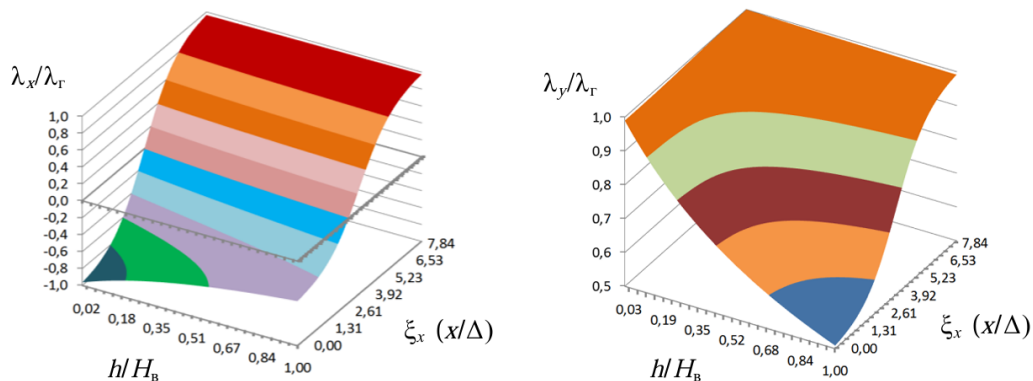


Рис. 4. Относительное изменение коэффициентов бокового гравитационного распора горной породы в зоне влияния горной выработки ( $\lambda_{\Gamma x} = \lambda_{\Gamma y} = d = 0$ )

в среднем на расстоянии от нее  $2h$ . В условиях карьерных уступов ( $H_B = h$ ) из-за относительного ослабления вертикального стеночного давления в два раза такое расстояние равно  $h$ . По мере смещения к подошве или кровли выработки ее горизонтальное влияние на распор уменьшается. С учетом этого получаем соотношение отмеченных интервалов

$$\Delta = \frac{0,25h \sqrt{1 - (d/h)^2}}{1 + h/H_B},$$

которое используется в расчете координаты

$$x = \xi_x \Delta.$$

Деформированное состояние и связанная с ним устойчивость горных пород в боковой пристеночной зоне горной выработки определяется в основном распором горизонтально ориентированном на стенку. По значению его коэффициента  $\lambda_x$  с учетом высоты горной выработки, глубины ее залегания и уровня тектонического напряжения получаем следующую формулу расчета расстояния  $x$  до стенки выработки

$$x = \frac{h \sqrt{1 - (d/h)^2}}{1 + h/H_B} \left[ 1 - \ln \left( \frac{\lambda_{\Gamma x} + (\lambda_{\Gamma}/1+h/H_B + \lambda_{\Gamma x})e^{-n_x(d/h)^2}}{\lambda_x + (\lambda_{\Gamma}/1+h/H_B + \lambda_{\Gamma x})e^{-n_x(d/h)^2}} - 1 \right)^{1/4} \right]. \quad (7)$$

Нулевому распору ( $\lambda_x = 0$ ) соответствует интервал растяжения приконтурной горной породы, т.е. расстояние  $x_0$  до стенки выработки, на котором сжатие породы изменяется на растяжение. На уровнях подошвы и кровли выработки получаем  $x_0 = 0$ . На уровне середины ее стенки, расположенной на относительно большой глубине ( $H_B \gg h$ ), растяжение начинается на расстоянии  $h$  от нее, а в

условиях карьерного уступа ( $H_B = h$ ) при отсутствии тектонического напряжения – на расстоянии  $0,41h$  от борта. По мере роста коэффициента тектонического распора  $\lambda_{Tx}$  это расстояние увеличивается от  $0,41h$  до  $0,5h$ . Дополнительно отметим, что при увеличении коэффициентов  $\lambda_r$  и  $\lambda_{Tx}$  координата  $x$  с фиксированным значением  $\lambda_x$  смещается к положению  $x_0$ . Таким образом, около точек с нулевым распором ( $\lambda_x = 0$ ), в том числе в углах подошвы и кровли выработки, распор уплотняется. Поэтому возникает высокая концентрация напряжений, что соответствует известным результатам его моделирования [23].

Стенка горной выработки из-за упруго-пластичного растяжения и развития трещиноватой деструкции пристеночных пород, спустя некоторое время после ее проходки, смещается от первоначального положения на интервал  $\Delta x$  в сторону свободного пространства. Его расчет с учетом стеночного распора проводится по следующей квазиупругой связи

$$\Delta x = \frac{\lambda_{cx}\sigma_z x_0}{Ek_c},$$

где  $E$  – модуль упругости горной породы при растяжении, определенный на ее образцах;  $k_c$  – коэффициент структурного ослабления массива. В условиях углубленной выработки ( $H_B \gg h$ ) получаем следующую оценку смещения стенки

$$\Delta x = -\frac{h\sigma_z\lambda_{mx}}{Ek_c} \left(1 - (d/h)^2\right)^{3/2} e^{-4(d/h)^2}. \quad (8)$$

Смещение зависит от наличия тектонического напряжения, упругих свойств и структурного ослабления массива. Оно наибольшее на середине стенки, где  $d = 0$ , и уменьшается до нуля при равенстве  $d = h$  на уровнях подошвы и кровли выработки.

Если квазиупругие связи пристеночной породы меньше растягивающих ее сил, а коэффициент бокового распора равен или меньше значения разрушающего ее распора  $\lambda_p$ , то по формулам (5), (7) и следующему критерию

$$\lambda_x \leq \lambda_p, \quad (9)$$

где  $\lambda_p = \sigma_p k_c / \sigma_z$ ;  $\sigma_p$  – прочность образцов пристеночной горной породы на растяжение, определяется расстояние до стенки  $x_d$ , на котором в массиве начинают развиваться процессы его трещиноватой деструкции и разрушения. По мере приближения к стенке растяжение и деструкция горной породы растет. В квазистатическом режиме такого развития горная порода сохраняет устойчивость. Однако при его скоротечном развитии вблизи стенки нарастают трещины отрыва. Тогда горная порода разрушается с образованием призмы сползания, приводящей к ее крошению и вывалам в выработку. В породах со слабой прочностью, например, глины, пески, зона деструкции практически не отличается от зоны растяжения. В крепких связанных породах эта зона может проявляться лишь вблизи со стенкой на ее полувысоте, либо вовсе отсутствовать.

Задав условие  $x_d = 0$  и  $d = 0$ , получаем следующие выражения предельной прочности горной породы на растяжение  $\sigma_{рп}$ , при которой зона деструкции не образуется

$$\sigma_{рп} = -\frac{1}{k_c} \left( \frac{(\gamma H_B + \sigma_{tz})\lambda_r}{1 + h/H_B} + \sigma_{tx} \right). \quad (10)$$

В качестве иллюстрации ограничений деструкции на рисунке 5 показан пример характерных изменений предельной прочности  $\sigma_{рп}$  на стенке выработки со следующими параметрами:  $h = 20$  м,  $\gamma = 0,027$  МН/м<sup>3</sup>,  $\sigma_{tz} = 0$ ,  $\lambda_r = 0,3$ ,  $k_c = 0,5$ . В условиях слабого влияния тектонического напряжения (фрагмент а) модуль прочности горной породы  $\sigma_{рп}$  линейно увеличивается с ростом глубины  $H_B$ . На глубине 500 м образуются зоны деструкции стеночных горных пород, имеющих прочность при растяжении по модулю меньше 8 МПа. По мере увеличения тектонического напряжения (фрагмент б) модуль прочность  $\sigma_{рп}$  дополнительно и существенно увеличивается в связи с ростом его компоненты  $\sigma_{tx}$ . Теперь в средней части стенки той же выработки при наличии напряжения  $\sigma_{tx} = 10$  МПа образуются зоны деструкции пород с модулем прочности на растяжение меньше 27 МПа. Поскольку таких пород большинство, то при долгосрочном использовании выработки необходимо ее крепление.

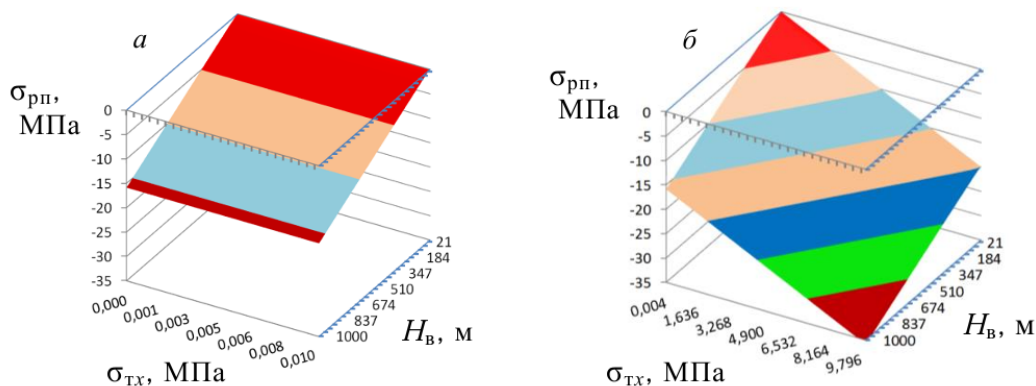


Рис. 5. Графики изменения предельной прочности горной породы на стенке выработки

Отметим, что предельная прочность  $\sigma_{рп}$  существенно зависит от полувысоты горной выработки  $h$  в условиях карьерного уступа и практически не зависит от нее в подземных выработках. Тем не менее, от полувысоты  $h$  главным образом зависит ширина  $x_d$  пристеночной зоны массива, на границе которой в горной породе с прочностью  $\sigma_p$  начинается деструкция и разрушение.

**4. Практические примеры определения боковых зон распора и деструкции.** Приведем примеры практического применения изложенных положений и выводов в определении горизонтально ориентированного растягивающего распора пристеночной породы горной выработки и связанных с ним смещений стенки, а также размеров образованных зон ее растяжения и деструкции.

*Пример 1.* На графических изображениях результатов численного моделирования напряжённо-деформированного состояния горных пород карьера [24, 25] выделяются прибортовые зоны их растяжения и деструкции. Установлено, что в средней части карьерного уступа границы зон в нормальных его сечениях горизонтально удалены от стенки на интервал не больший его полувысоты. По мере вертикального смещения от середины уступа зоны становятся уже и на уровнях земной поверхности и подошвы уступа полностью исчезают. Дадим более определенное описание отмеченных зон на примере карьерного уступа с высотой 100 м, сложенного скальной породой со следующими геомеханическими параметрами:  $\gamma = 0,03 \text{ МН/м}^3$ ,  $\mu = 0,17$ ,  $\lambda_r = 0,2$ ,  $k_c = 0,8$ .

Результаты расчетов представлены на рисунке 6 в двух вариантах – в отсутствии и при наличии тектонического напряжения. Положение границ зон деструкции горной породы в сечении уступа определено по критерию (9) с разными значениями их прочности  $\sigma_p$ . При отсутствии тектонического напряжения предельная прочность  $\sigma_{pн}$  равна  $-0,18 \text{ МПа}$ . В таких условиях могут разрушаться слабосвязанные породы с меньшей прочностью. В скальной породе уступа, обладающей существенно большей прочностью, зоны деструкции не образуются. Наличие показанного на рисунке тектонического напряжения приводит к существенному росту  $\sigma_{pн}$  до  $-5,5 \text{ МПа}$ . Тогда могут развиваться зоны деструкции и разрушения горных пород уступа с прочностью  $\sigma_{pн} > -5,5 \text{ МПа}$ , например, в мраморе, сланцах или известняках.

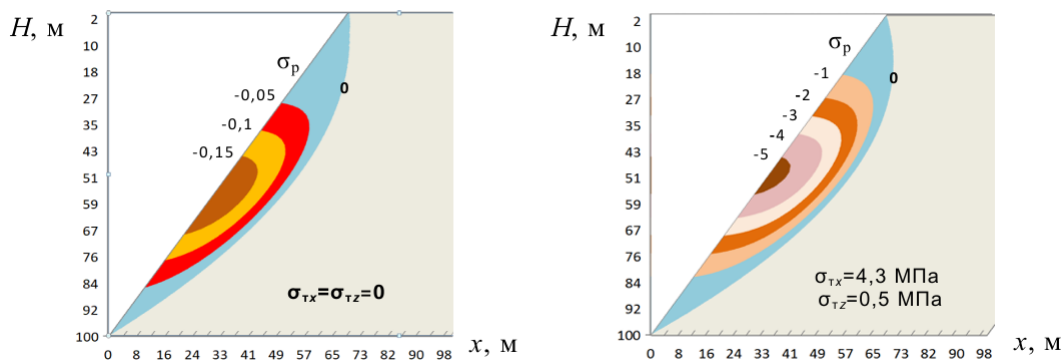


Рис. 6. Расположение границ зон деструкции прибортовой горной породы карьерного уступа с шифром  $\sigma_p$  (МПа)

*Пример 2.* На Тишинском свинцово-цинковом руднике в процессе проходки горизонтальной подготовительной выработки с высотой 3,2 м, расположенной на глубине 420 м горного массива, проведены измерения конвергенции ее стенок, вогнуто нарастающей по мере удаления от движущегося забоя [26]. На расстоянии от него 35 м смещение середины каждой стенки в выработку от первоначального положения составило 30 мм.

Сравним отмеченные смещения стенок с теоретическими выводами по приведенной методологии. При этом учитывается высокая деструкция тектонически

напряжённых и гидростатически уравновешенных вмещающих горных пород, сложенных карбонатным серицит-кварцитовым сланцем. Их геомеханические параметры приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Геомеханические параметры пристеночной горной породы

$\gamma$ , МН/м <sup>3</sup>	$\mu$	$\lambda_{\Gamma}$	$\lambda_{\Gamma x}$	$\sigma_z$ , МПа	$E$ , МПа	$k_c$
0,027	0,3	0,43	0,6	13,1	2100	0,28

Результаты расчета по формуле (8) показаны в графической форме на рисунке 7. Завышенное смещение  $\Delta x$  средней части стенок 36,6 мм получено оценочно, поскольку по приведенной методологии рассчитывается стационарная деформация, которая установится в них за более длительное время и на большем расстоянии от удаляющегося забоя, чем отмеченном в измерениях.

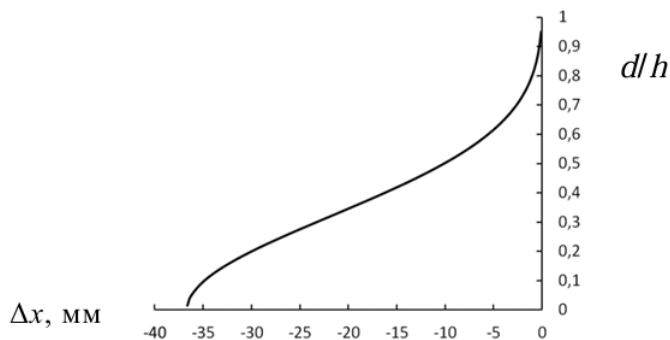


Рис. 7. График горизонтального смещения стенки выработки

*Пример 3.* В процессах проектирования и формирования паспорта анкерного крепления боковой горной породы в подготовительных и очистных выработках необходимы сведения о горизонтальном расположении структурно ослабленной ее пристеночной зоны, влияющей на выбор параметров крепления. Определим размеры и положения такой зоны в пристеночных породах откаточного штрека очистной выемки руды с полувысотой 1,7 м, находящейся на глубине 500 м горного массива со следующими геомеханическими параметрами:  $\gamma = 0,03$  МН/м<sup>3</sup>,  $\lambda_{\Gamma} = 0,4$ ,  $\sigma_p = -11$  МПа,  $\sigma_{tz} = 0,5$  МПа,  $\sigma_{tx} = 5$  МПа,  $k_c = 0,5$ . Результаты расчета размеров зоны деструкции боковых пород штрека показаны на рисунке 8.

Предельная прочность  $\sigma_{pp}$  горной породы на растяжение, при которой зона ее пристеночной деструкции не образуется, составляет -21,5 МПа. Модуль реальной прочности (-11 МПа) существенно меньше. Поэтому деструкция начинается в удалении от стенки. С учетом значения реальной прочности, определено по формулам (5) и (9) положение в массиве границы зоны ( $x < x_d$ ), в пределах которой деструкция горной породы происходит. Она максимально удалена от

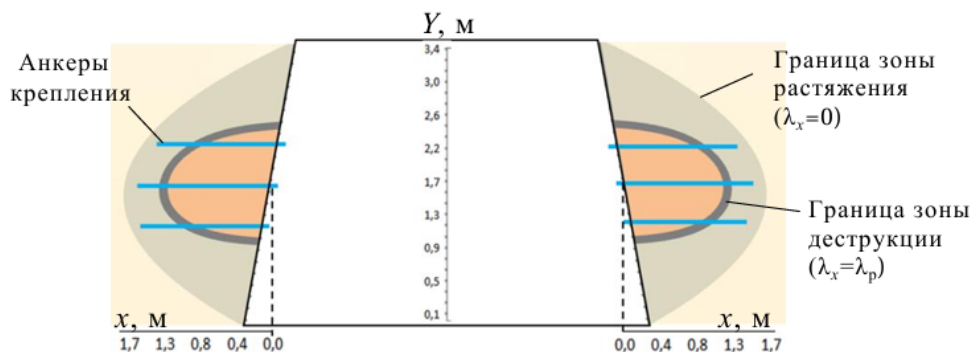


Рис. 8. Расположение зон растяжения и деструкции пристеночной горной породы штрека

стенки на расстояние 1,25 м. Размеры анкеров и места их крепления определяются так, чтобы удерживающая их распорная часть находилась за границей отмеченной зоны, где  $x > x_d$ .

**Заключение.** В представленных исследованиях обосновано существование и дано аналитическое геопространственное описание зон растяжения и деструкции пристеночных пород горной выработки, в пределах которой возникает наблюдаемое смещение стенок и их разрушение.

Исследования основаны на представлениях о влиянии свободного пространства, образованного горной выработкой, на горизонтальный распор и его направление в прилегающем горном массиве.

В результате получены математические функциональные выражения, описывающие закономерности изменения коэффициентов бокового распора, происходящего в пристеночном пространстве борта карьера и углубленной выработки под воздействием гравитационного и тектонического напряжения. По условиям нулевого или разрушающего горизонтального распора горных пород определяется расположение в пристеночном пространстве соответствующих зон их деформации и деструкции. На практических примерах показано соответствие расчетных определений отмеченных зон экспериментальным наблюдениям, что подтверждает возможность применения выводов исследований в оценках устойчивости стенок горной выработки и необходимых мер их крепления, обеспечивающих безопасность горных работ.

Исследования проведены в рамках выполнения фундаментальной научно-исследовательской работы по теме «Выявление закономерностей развития геодинамических процессов в условиях техногенного преобразования недр и разработка мер по повышению безопасности горного производства» (FUWE-2025-0003).

#### Список литературы

1. Динник А.Н. Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок / А.Н. Динник, А.Б. Моргаевский, Г.Н. Савин // Труды совещания по управлению горным давлением. – М. – АН СССР. – 1938. – 306 с.

2. *Цымбаревич П.М.* Механика горных пород. / П.М. Цымбаревич. – М. : Углетехиздат. – 1948. – 183 с.
3. *Баклашов И.В.* Геомеханика, т. 2. Геомеханические процессы / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия, А.Н. Шашенко, В.Н. Борисов. – М.: МГГУ. – 2004. – 249 с.
4. *Бульчев Н.С.* Механика подземных сооружений / Н.С. Бульчев. – М.: Недра – 1982. – 270 с.
5. *Богомолов А.Н.* Определение напряжений в точках внешности односвязной области, имитирующей контур подземной горизонтальной выработки / А.Н. Богомолов, А.Н. Ушаков, О.А. Богомолова, С.И. Шиян, О.В. Ермаков // Вестник ВолгГАСУ. Сер.: Стр-во и архит. – 2013. – Вып. 32(51). – С. 6-15.
6. *Миренков В.Е.* Численный расчет деформирования массива около выработок / В.Е. Миренков // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2022. – Т. 9. – № 2. – С. 19-23. – DOI: 10.15372/FPVGN2022090203.
7. *Халимендик А.В.* Оценка влияния коэффициента бокового распора на напряженно-деформированное состояние приконтурного породного массива в окрестности одиночной горной выработки / А.В. Халимендик, Г.Г. Сторчак, А.В. Халимендик, А.О. Логунова, В.В. Панченко // Горные науки и технологи. – 2014. – № 1. – С. 57-66.
8. *Яцыняк С.Д.* Устройство для измерения деформаций на стенках горной выработки / С.Д. Яцыняк, Е.А. Ермолович // Известия ТулГУ. Науки о Земле. – 2022. – Вып. 2 – С. 466-474. – DOI: 10.46689/2218-5194-2022-2-1-466-474.
9. *Кузьмин Е.В.* Определение параметров геомеханического состояния породного массива на контурах выемочных камер / Е.В. Кузьмин, В.С. Святецкий, А.В. Стародумов, А.М. Иоффе, Д.В. Величко // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2014. – № 12. – С. 177-186.
10. *Иоффе А.М.* Оценка устойчивости горных выработок с использованием методов численного моделирования / А.М. Иоффе, Д.В. Величко // Вестник РАН. – 2015. – Т. 15. – № 4. – С. 53-58.
11. *Смирнов А.В.* Обобщение натурных исследований процесса деформирования породного массива в окрестности протяженных выработок / А.В. Смирнов // Известия ВУЗов. Горный журнал. – 2015. – № 5. – С. 75-80.
12. *Синкевич Н.И.* Исследование деформаций контура горизонтальных выработок при их проходке на больших базах. / Н.И. Синкевич // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2005. – № 5. – С. 326-328.
13. *Харисов Т.Ф.* Геомеханическое обоснование параметров устойчивых камер и целиков в сложных горно-геологических условиях / Т.Ф. Харисов, О.Д. Харисова // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2019. – Т. 330. – № 7. – С. 25–33. – DOI: 10.18799/24131830/2019/7/2173.
14. *Демин В.Ф.* Расчет проявлений горного давления в приконтурном массиве подземных горных выработок / В.Ф. Демин, Р.А. Мусин, Э.Р. Халикова, Р.К. Торемуратова // Труды университета. – 2019. – № 4. – С. 36-42. – EDN: BGPVJI.
15. *Серяков В.М.* Расчет напряженного состояния породного массива и крепи при поэтапном оформлении поперечных сечений выработок / В.М. Серяков, Б.Р. Жамалова // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2017. – Том 4. – № 1. – С. 159-163. – EDN: ZBNUQJ.
16. *Тажигаев К.Т.* Результаты исследования закономерности распределения напряжений вокруг горизонтальных камер / К.Т. Тажибаев, Г.О. Казакбаева, А.К. Жамангапова, Б.Ж. Жумабаев // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2021. – Том 21. – № 4. – С. 72-79.
17. *Фисенко Г.Л.* Предельные состояния горных пород вокруг выработок / Г.Л. Фисенко. – М.: Недра, 1976. – 272 с.
18. *Казикаев Д.М.* Управление геомеханическими процессами при разработке месторождений полезных ископаемых / Д.М. Казикаев, А.А. Козырев, Э.В. Каспарьян, М.А. Иофис. – М.: Горная книга, 2016. – 490 с.

19. Ксендзенко Л.С. Зональное разрушение массива горных пород вокруг подземных выработок (обзор) / Л.С. Ксендзенко, В.В. Макаров // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2017. – № 4 (33). – С. 118-130. – DOI: 10.5281/zenodo.1119185.
20. Ксендзенко Л.С. Закономерности деформирования и разрушения сильно сжатых горных пород и массивов: монография / Л.С. Ксендзенко, В.В. Макаров, Н.А. Опанасюк, А.М. Голосов. – Владивосток: Дальневосточный федеральный университет. – 2014. – 192 с.
21. Турчанинов И.А. Основы механики горных пород / И.А. Турчанинов, М.А. Иофис., Э.В. Каспарьян // Л.: Недра. – 1989. – 488 с.
22. Корчак П.А. Геомеханический прогноз развития зон хрупкого разрушения в окрестности сопряжения горных выработок в перенапряженном породном массиве / П.А. Корчак // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – № 5. – С. 85–98. – DOI: 10.25018/0236\_1493\_2021\_5\_0\_85.
23. Рахимов В.Р. Оценка напряженно-деформированного состояния массива с учетом тектонических напряжений методом конечных элементов / В.Р. Рахимов, А.Н. Казаков // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2014. – № 10. – С. 151-162.
24. Козырев А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния массива пород численными методами на основе данных натуральных измерений в окрестности крупной карьерной выемки / А.А. Козырев, И.Э. Семенова, В.В. Рыбин, И.М. Аветисян // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2011. – № 11. – С. 78-89.
25. Ильясов Б.Т. Определение предельных параметров деформаций участка борта карьера методом конечно-дискретных элементов / Б.Т. Ильясов // Известия ВУЗов. Горный журнал. – 2016 – № 3. – С. 33-38.
26. Кашников Ю.А. Геомеханическая оценка состояния ответственных сооружений Тишинского рудника при отработке глубоких горизонтов / Ю.А. Кашников, С.Г. Ашихмин, Д.В. Шустов, А.Е. Фандеев, А.И. Ананин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2010. – № 2. – С. 43–52.

## V.A. Antonov

### Geomechanical studies of the expansion and destruction of near-wall rocks in mountain cavity.

The article presents the results of geomechanical studies of the spatial distribution of horizontal rock thrust coefficients varying within an undermining rock mass. The study is based on concepts regarding the influence of free space formed by a quarry bench or underground working on thrust formation. Mathematical functional expressions are derived that describe changes in lateral thrust in the near-wall space of a quarry wall and a deep working under gravitational and tectonic stress. Using the boundary values of horizontally oriented thrust against the working wall, an analytical description is provided of the configurations of the extension and destruction zones of the wall rock within which displacement and failure occur. Practical examples demonstrate the correspondence between the calculated definitions of these zones and experimental observations, confirming the applicability of the research findings to assessing the stability of working walls and the necessary measures for their support, ensuring the safety of mining operations.

**Keywords:** *mountain cutting, pit bench, rock, lateral thrust, extension zone, destruction.*

### References

1. Dinnik, A.N., Morgaevskii, A.B., & Savin, G.N. (1938). [Stress distribution around underground mine workings]. *Trudy soveshchaniya po upravleniyu gornym davleniem = Proceedings of the Conference on Rock Pressure Control*. Moscow: Academy of Sciences of the USSR. 306 p. (In Russian)
2. Tsybmarevich, P.M. (1948). *Mechanics of rocks*. Moscow: Ugletekhizdat. 183 p. (In Russian)
3. Baklashov, I.V., Kartoziya, B.A., Shashenko, A.N., & Borisov, V.N. (2004). *Geomechanics*

- (Vol. 2: Geomechanical processes). Moscow: Moscow State Mining University. 249 p. (In Russian)
4. Bulychev, N.S. (1982). *Mechanics of underground structures*. Moscow: Nedra. 270 p. (In Russian)
  5. Bogomolov, A.N., Ushakov, A.N., Bogomolova, O.A., Shiyan, S.I., & Ermakov, O.V. (2013). Stress calculation in points of outside simply-connected area imitating the contour of underground horizontal mine. *Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering*, 32(51), 6–15. (In Russian)
  6. Mirenkov, V.E. (2022). Numerical calculation of rock deformation during mining operations. *Journal of Fundamental and Applied Mining Science*, 9(2), 19–23. DOI: 10.15372/FPVGN2022090203. (In Russian)
  7. Khalimendik, A.V., Storchak, G.G., Khalimendik, A.V., Logunova, A.O., & Panchenko, V.V. (2014). Estimation of influence coefficient of lateral spreading out on the stress-deformed condition rock mass in the vicinity a single mine working. *Mining Science and Technology*, 1, 57–66. (In Russian)
  8. Yatsynyak, S.D., & Ermolovich, E.A. (2022). Device for measuring deformations on the walls of a mine. *Izvestiya TulGU. Earth Sciences*, 2, 466–474. DOI: 10.46689/2218-5194-2022-2-1-466-474 (In Russian)
  9. Kuz'min, E.V., Svyatetskii, V.S., Starodumov, A.V., Ioffe, A.M., & Velichko, D.V. (2014). Estimate of geomechanical state parameters in stope-adjacent rocks. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 12, 177–186. (In Russian)
  10. Ioffe, A.M., & Velichko, D.V. (2015). Estimation of stability of mine workings using methods of numerical simulation. *Bulletin of Russian Academy of Natural Sciences*, 15(4), 53–58. (In Russian)
  11. Smirnov, A.V. (2015). Generalization of field studies of the rock mass deformation process in the vicinity of extended workings *Minerals and Mining Engineering*, 5, 75–80. (In Russian)
  12. Sinkevich, N.I. (2005). Investigation of the deformation of the horizontal output circuits at their pro-driving on large bases. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 5, 326–328. (In Russian)
  13. Kharisov, T.F., & Kharisova, O.D. (2019). Geomechanical substantiation of parameters of stable chambers and pillars in complex mining and geological conditions. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 330(7), 25–33. DOI: 10.18799/24131830/2019/7/2173. (In Russian)
  14. Demin, V.F., Musin, R.A., Khalikova, E.R., & Toremuratova, R. K. (2019). [Calculation of rock pressure manifestations in the marginal mass of underground mine workings]. *Trudy Universiteta = University Proceedings*, 4, 36–42. – EDN BGPVJI. (In Russian)
  15. Seryakov, V.M., & Zhamalova, B.R. (2017). Calculation of stresses in rock mass and lining in stagewise face drivage. *Journal of Fundamental and Applied Mining Science*, 4(1), 159–163. EDN: ZBNUQJ. (In Russian)
  16. Tazhibayev, K.T., Kazakbaeva, G.O., Zhamangapova, A.K., & Zhumabaev, B.Zh. (2021). Results of research of regularities stress distribution around of horizontal cameras. *Vestnik KRSU = Bulletin of the Kyrgyz-Russian Slavic University*, 21(4), 72–79. (In Russian)
  17. Fisenko, G.L. (1976). *Limit states of rocks around mine workings*. Moscow: Nedra. 272 p. (In Russian)
  18. Kazikaev, D.M., Kozyrev, A.A., Kasparyan, E.V., & Iofis, M.A. (2016). *Management of geomechanical processes in mineral deposit development*. Moscow: Gornaya Kniga. 490 p. (In Russian)
  19. Ksendzenko, L.S., & Makarov, V.V. (2017). Zonal failure of rock mass around underground openings (review). *Far Eastern Federal University: School of Engineering Bulletin*, 4(33), 118–130. – DOI: 10.5281/zenodo.1119185. (In Russian)
  20. Ksendzenko, L.S., Makarov, V.V., Opanasyuk, N.A., & Golosov, A.M. (2014). *Regularities of deformation and failure of highly compressed rocks and rock masses*. Vladivostok: Far Eastern Federal University. 192 p. (In Russian)
  21. Turchaninov, I.A., Iofis, M.A., & Kasparyan, E.V. (1989). *Fundamentals of rock mechanics*. Leningrad: Nedra. 488 p. (In Russian)

22. Korchak, P.A. (2021). Geomechanical prediction of growth of brittle fracture zones in the vicinity of underground excavations in over-stress rock mass. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 5, 85–98. – DOI: 10.25018/0236\_1493\_2021\_5\_0\_85. (In Russian)
23. Rakhimov, V.R., & Kazakov, A.N. (2014). Finite element analysis of stress–strain state of rocks, considering tectonic stresses. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 10, 151–162. (In Russian)
24. Kozyrev, A.A., Semenova, I.E., Rybin, V.V., & Avetisyan, I.M. (2011). [Study of the stress-strain state of rock mass by numerical methods based on in-situ measurements in the vicinity of a large open-pit mine]. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 11, 78–89. (In Russian)
25. Il'yasov, B.T. (2016). Determination of limit deformation parameters of open-pit wall section by finite-discrete element method. *Minerals and Mining Engineering*, 3, 33–38. (In Russian)
26. Kashnikov, Yu.A., Ashikhmin, S.G., Shustov, D.V., Fandeev, A.E., & Ananin, A.I. (2010). Geomechanical assessment of the state of critical structures of the Tishinsky mine during the development of deep horizons. *Physical and Technical Problems of Mining*, 2, 43–52. (In Russian)

*Поступила в редакцию / Original submitted 23.03.2026.*

*Доработана / Revision submitted 13.04.2026.*

*Рекомендована к печати / Accepted 15.04.2026.*

УДК 622.831, 622.23.02

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-83-93

EDN:MFDDIP



©2026. Ф.М. Голубев, И.Ю. Николаев, Н.В. Лавренчук

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ДЕФОРМАЦИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И АКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНОГО МАССИВА

В работе представлены результаты комплексной верификации геофизических данных путем сопоставления с прогнозными расчетами деформаций земной поверхности, выполненными в соответствии с действующими нормативными требованиями. Для 14 расчетных точек, соответствующих пикетажу сейсмоакустического профиля, определены величины оседания и горизонтальных сдвижений, а также деформации растяжения-сжатия. Проведен сопоставительный анализ результатов геофизических наблюдений с расчетами процесса сдвижений.

**Ключевые слова:** верификация геофизических данных, деформации земной поверхности, сдвижение горного массива, подработка, сейсмоакустические исследования, скорость упругих волн, зоны разуплотнения, оседания, горизонтальные деформации, расчетные точки, граничные углы.

**Введение.** Обеспечение безопасности эксплуатируемых объектов в условиях подработки земной поверхности горными выработками требует высокой точности прогнозирования геомеханических процессов. Существующие нормативные методики [1, 2] позволяют рассчитывать ожидаемые деформации земной поверхности, однако верификация этих расчетов с актуальным состоянием массива остается сложной научно-технической задачей. Инструментальные наблюдения за сдвигами земной поверхности часто отличаются от проектных в связи с тем, что действующая методика не всегда отражает изменения в толще пород, такие как формирование зон разуплотнения и трещинообразования.

---

*Голубев Филипп Максимович* – канд. техн. наук, зав. отд. геодинамических и геофизических процессов РАНМИ, Донецк, e-mail: f\_golubev@list.ru, ORCID: 0009-0008-5093-4916.

*Golubev Philipp Maksimovich* – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

*Николаев Иван Юрьевич* – канд. геол.-мин. наук, вед. науч. сотр. отд. геодинамических и геофизических процессов РАНМИ, Донецк, e-mail: nikolaevoegi@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2208-0032.

*Nikolaev Ivan Yurievich* – Candidate of Geological and Mineralogical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

*Лавренчук Никита Викторович* – лаборант отд. геодинамических и геофизических процессов РАНМИ, Донецк, e-mail: macterme4anikebuy@mail.ru.

*Lavrenchuk Nikita Viktorovich* – Laboratory Assistant, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

Стоит отметить, что рядом исследователей было зафиксировано изменение фильтрационных свойств горного массива при многократной подработке в несколько раз [3, 4]. При этом экспериментально доказано, что свойства горных пород могут оказывать существенное влияние на параметры процесса сдвижения [5, 6]. Значительный вклад в развитие теоретических и прикладных аспектов прогнозирования сдвижений горного массива внесли исследования Ю.А. Кашникова и О.О. Лебедевой, в которых обоснованы принципы интегральной оценки геомеханических процессов при подземной разработке месторождений на основании результатов геофизических исследований [7, 8].

Учитывая, что в условиях Донбасса широко развита многократная подработка застроенных участков земной поверхности [9, 10], однако связь параметров сдвижения, вызванного подземной добычей угля, с геофизическими свойствами горного массива практически не изучалась, актуальным направлением является сопоставление геомеханических расчетов с данными полевой геофизики в связи с тем, что сейсмоакустические методы, фиксирующие скорость распространения упругих волн, позволяют косвенно оценивать нарушенность массива. Целью данной работы является количественная оценка соответствия между прогнозными деформациями, рассчитанными по нормативной методике и реальными геофизическими аномалиями для идеальных условий первичной отработки, а также определение степени влияния выявленных зон разуплотнения на параметры мульды сдвижения.

**1. Методика исследования.** Для определения влияния многократной подработки на изменения физических свойств горного массива необходимо определить характер изменения его свойств в природном напряженно-деформированном состоянии. Проведение таких исследований возможно с применением геофизических методов. Для возможности правильной интерпретации результатов геофизических исследований, направленных на определение характеристик геофизических полей подработанного угленосного массива необходимо, чтобы исследуемая горная выработка удовлетворяла ряду следующих требований:

- выработка не должна быть надработана и подработана;
- глубина выработки не более 600 м (обусловлено параметрами методики проведения геофизических исследований);
- массив от поверхности до выработки не должны пересекать тектонические нарушения;
- выработка должна подрабатывать незастроенный участок поверхности.

Изучение горнотехнических условий добычи угля позволило определить в качестве участка проведения геофизических исследований горный отвод шахты им. Кирова, а именно участок земной поверхности, попадающий в зону влияния 5-й, 6-й и 7-й восточных лав пласта  $h_{10в}$ , вблизи пгт Пролетарское. Данный участок не подрабатывался по другим пластам. Глубина горных работ на данном участке составляет от 324 до 430 м. Угол падения пласта  $9^\circ$ , вынимаемая мощность 1,20 – 1,25 м. Для участка присутствуют геологоразведочные данные по 11-ти скважинам.

С целью верификации и количественной оценки соответствия геофизических данных теоретическим и нормативным положениям о поведении горного массива при подработке выполнен комплексный расчет ожидаемых деформаций земной поверхности. Расчет проведен в строгом соответствии с актуальными нормативными документами, регламентирующими прогнозирование сдвижений [1, 2]. В процессе расчетов также учитывалось влияние угла падения пластов на параметры мульды сдвижения за счет введения глубины разработки в каждой расчетной точке, т.е. вертикальное расстояние от точки земной поверхности до почвы пласта зависит от ординаты этой точки в системе координат очистной выработки (согласно методике, описанной в [11]). Центр этой системы совпадает с центром лавы, оси  $X$  и  $Y$  лежат в горизонтальной плоскости, при этом ось  $X$  совпадает с линией простирания, а ось  $Y$  направлена в сторону восстания. Значение глубины разработки в  $i$ -ой расчетной точке ( $H_i$ , м) вычисляют по формуле:

$$H_i = H + y_i \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

где  $H$  – глубина разработки в центре лавы, м;  $y_i$  – ордината  $i$ -ой точки.

В ходе определения геометрических параметров полумульд замена величины  $H$  на  $H_i$  позволяет уточнить конфигурацию мульды сдвижения с учетом угла падения угольного пласта. При наклонном залегании пласта мульда сдвижения приобретает форму, близкую к трапеции, с расширением основания в сторону падения.

Глубину залегания угольного пласта под  $i$ -ой точкой земной поверхности ( $H_i^{\text{д}}$ , м) определяют по формуле:

$$H_i^{\text{д}} = Z_i - Z_{\text{ц.л.}} = H + \Delta H_i \quad (2)$$

где  $Z_i$  – высотная отметка земной поверхности в  $i$ -ой точке, м;  $Z_{\text{ц.л.}}$  – высотная отметка центра лавы (в почве пласта), м;  $H$  – глубина разработки в центре лавы, м;  $\Delta H_i$  – превышение  $i$ -ой точки над точкой земной поверхности, расположенной над центром лавы, м.

Величину  $\Delta H_i$  определяют по формуле:

$$\Delta H_i = Z_i - (Z_{\text{ц.л.}} + H) \quad (3)$$

Под длиной полумульды понимается расстояние, измеряемое в пределах главного сечения мульды сдвижения на разрезе, ориентированном либо вкост простирания, либо по простиранию пласта. Данный параметр определяется как интервал между внешней границей мульды и точкой пересечения дневной поверхности с линией, проведенной от границы очистной выработки под характерным углом. Характер указанного угла зависит от степени подработанности массива: при полной подработке используется угол полных сдвижений, тогда как в условиях неполной подработки применяется угол максимальных оседаний. Таким образом, длина полумульды отражает горизонтальное проявление сдвижений

в зависимости от пространственного положения расчетного сечения и горно-геологических условий ведения работ.

Для исследуемого участка, детально изученного сейсмоакустическими методами, выполнен расчет деформаций (вертикальные перемещения, наклоны, кривизна, горизонтальные деформации) по 14 расчетным точкам. Выбор точек методически обоснован их привязкой к пикетам сейсмоакустического профиля, что обеспечивает пространственную связь между геофизическими аномалиями (зонами разуплотнения) и расчетными механическими показателями. Схематическое расположение точек приведено на рисунке 1.

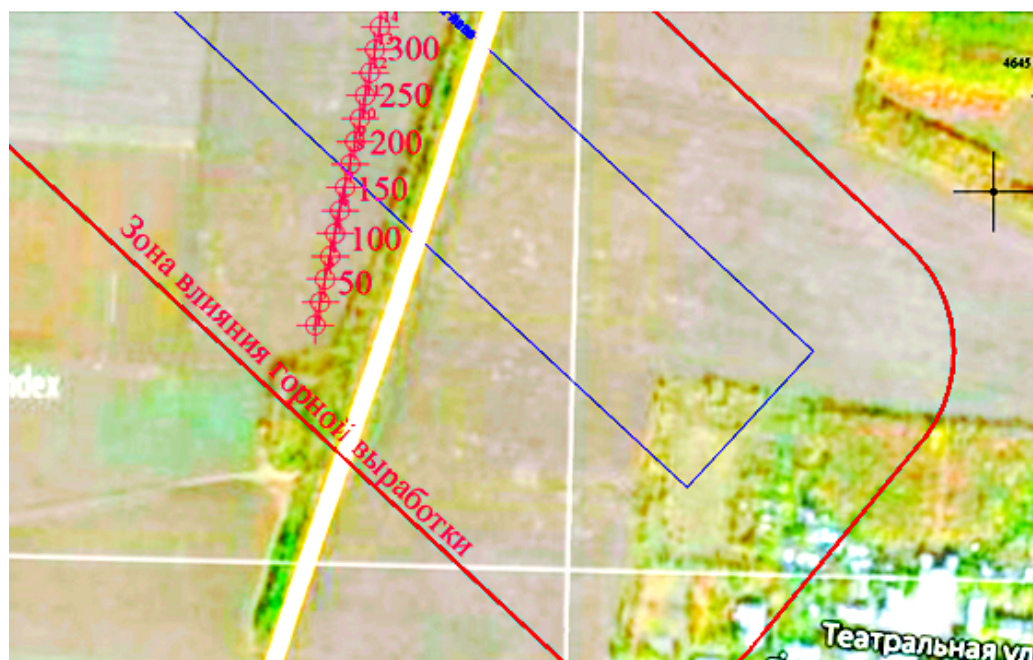


Рис. 1. Расположение расчетных точек на подрабатываемом участке

Проведенные расчеты формируют базу для установления количественных взаимосвязей между нарушением сплошности среды и величиной ее деформации. Максимальные значения оседаний, горизонтальных сдвижений и деформаций вдоль линии геофизических работ представлены на рисунках 2–5.

Проведенный анализ представленных результатов расчетов прогнозных деформаций и данных акустических исследований массива, позволяет выявить и зафиксировать ряд статистически значимых корреляций между ключевыми параметрами процесса сдвижения и динамическими характеристиками горных пород. Совместный анализ двух разнородных массивов данных – геомеханического (оседания, сдвижения и относительные деформации) и геофизического (скорость распространения упругих волн) – дает возможность комплексно рассматривать процесс подработки с учетом характера распределения деформаций не только на земной поверхности, но и в массиве горных пород.

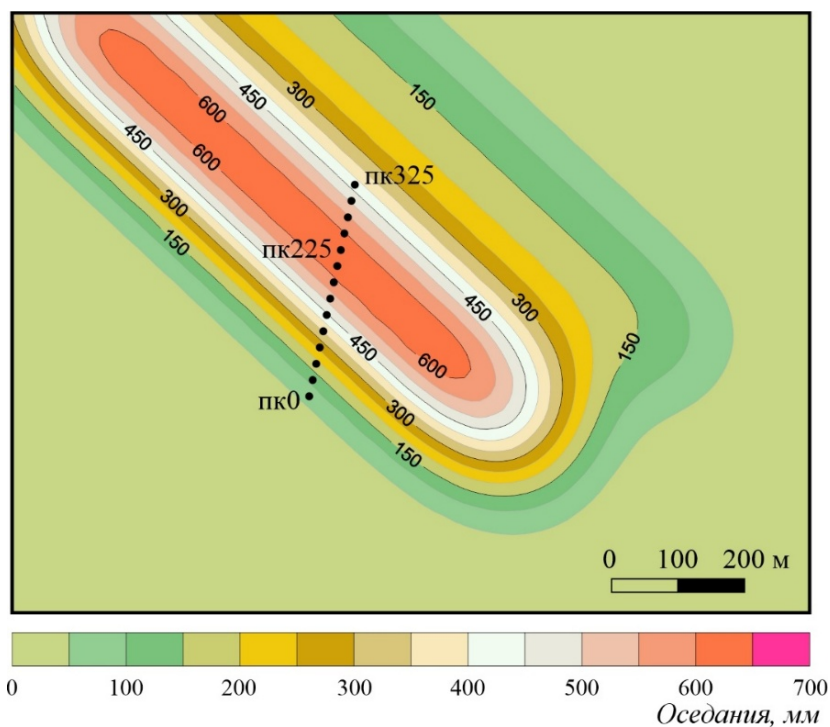


Рис. 2. Результаты расчета оседаний по сетке 50 на 50 от 6-й западной лавы пласта  $h_{10^8}$

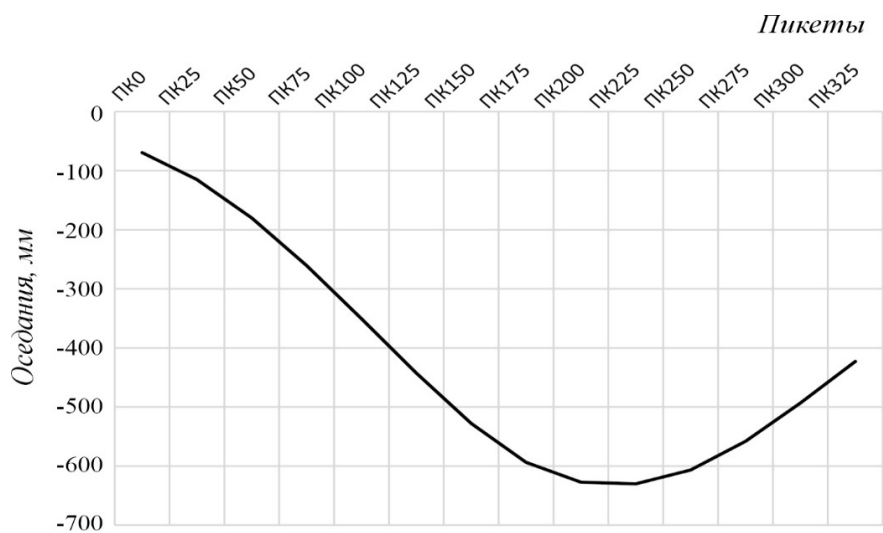


Рис. 3. График оседаний земной поверхности в зоне влияния выработки

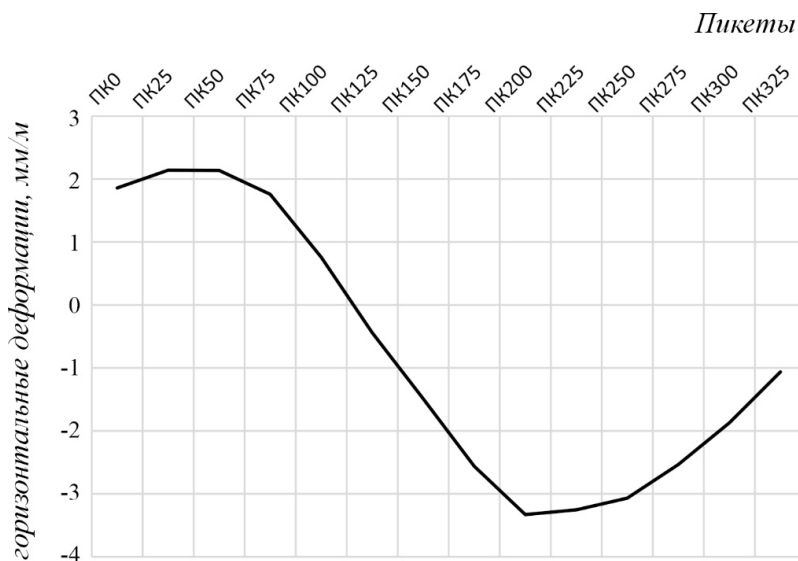


Рис. 4. График горизонтальных деформаций земной поверхности в зоне влияния выработки

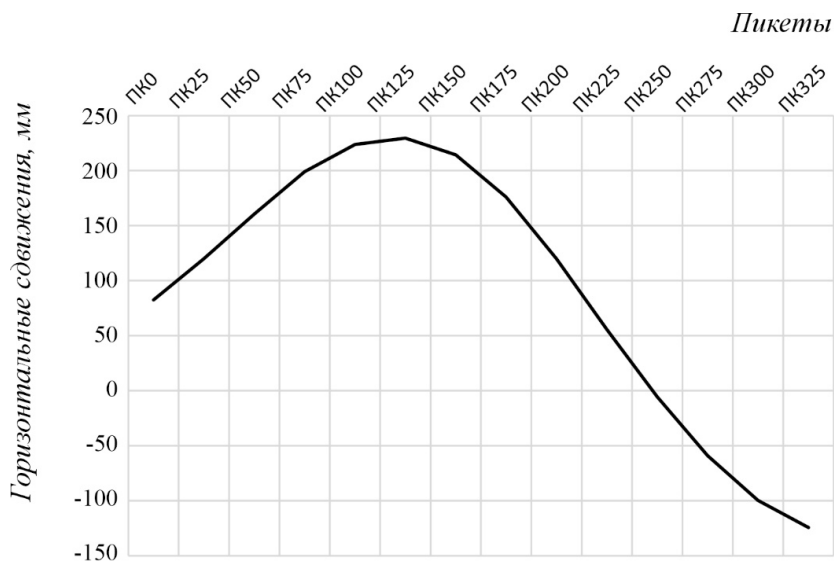


Рис. 5. График горизонтальных сдвижений земной поверхности в зоне влияния выработки

Наиболее наглядно эта взаимосвязь приведена на сводном графике (рис. 6), где совместно представлены кривые оседаний земной поверхности и соответствующие им значения скорости упругих волн, зарегистрированные в толще пород над горной выработкой. Особенно показательным является взаимосвязь угловых параметров системы с полученными при полевых работах акустическими

характеристиками массива. Рассчитать угол максимальных оседаний, с учетом фактического угла падения пластов, который в данном случае составляет  $9^\circ$ , можно воспользовавшись выражением:

$$Q = 90 - 0,8\alpha \quad (4)$$

где  $Q$  – угол максимальных оседаний;  $\alpha$  – угол падения угольного пласта.

Анализ графиков свидетельствует, что максимальные вертикальные перемещения поверхности закономерно соответствуют зонам, где фиксируются наиболее значимые изменения скоростных параметров среды. Это указывает на то, что области наибольшего прогиба кровли и сдвижения дневной поверхности являются одновременно и зонами максимального нарушения сплошности и разуплотнения массива, что и фиксируется методами сейсмоакустики в виде снижения эффективной скорости распространения волн.

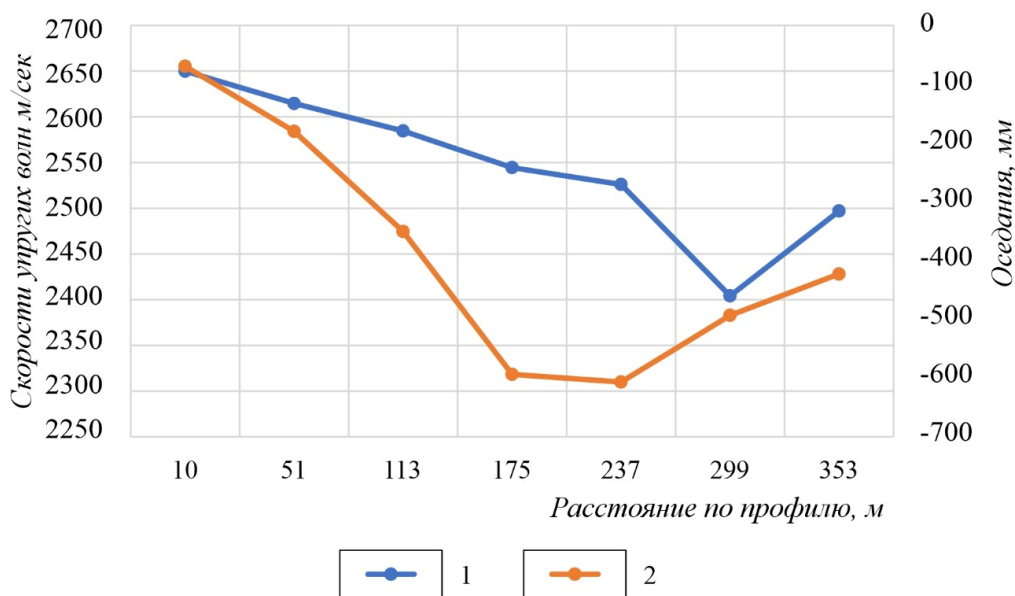


Рис. 6. Максимальные расчетные оседания вдоль профиля сейморазведочных работ №2 и график изменения скорости упругих волн (1 – скорость упругих волн в массиве горных пород в первых 100 м над очистной выработкой; 2 – оседания)

Расчет зоны влияния горной выработки и линии максимальных оседаний позволяет констатировать, что точка максимальных оседаний смещается относительно центра лавы в данных горно-геологических и горнотехнических условиях на 59 м (рис. 7). Анализ результатов полевых геофизических работ позволяет констатировать, что по натурным наблюдениям описываемая величина составляет 62 м. Отклонение натуральных и расчетных данных менее чем на 5% свидетельствует о достаточно высокой сходимости полученных результатов с классическими представлениями о сдвигении, что подтверждает геометрическую правильность полученных физических параметров.

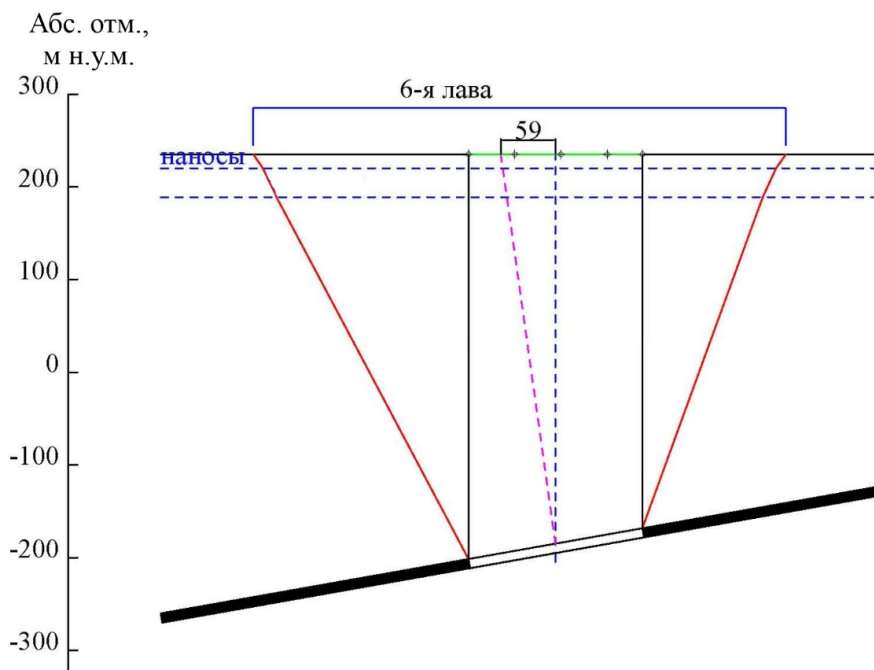


Рис. 7. Разрез зоны сдвижения вдоль профиля сейсморазведочных работ

Установленная зависимость не только подтверждает физическую обоснованность применяемых методов, но и открывает возможность использования скоростных аномалий в качестве косвенных количественных индикаторов для оценки интенсивности деформационных процессов и уточнения границ областей потенциального проявления опасных сдвижений.

**Выводы.** В результате выполненных исследований установлена принципиальная возможность верификации нормативных геомеханических расчетов с использованием данных полевой сейсмоакустики. Экспериментально подтверждено, что зоны интенсивных деформаций земной поверхности, прогнозируемые согласно действующим методикам [1, 2], пространственно совпадают с областями устойчивого снижения скорости распространения упругих волн в подработанной толще пород.

1. Ключевым количественным результатом работы является установление высокой сходимости прогнозных и натуральных данных о положении точки максимальных оседаний. Согласно нормативному расчету, смещение данной точки относительно центра лавы составляет 59 м, тогда как по данным геофизических наблюдений — 62 м. Отклонение 5,1 % для условий натурального эксперимента следует признать весьма высоким показателем достоверности, что подтверждает корректность выбранных методических подходов и геометрическую обоснованность интерпретации геофизических полей.

2. Снижение эффективной скорости упругих волн в зоне максимальных оседаний носит закономерный характер и может быть количественно интерпретировано как интегральный показатель степени нарушенности горного массива. Полученные результаты открывают возможность перехода от качественных описаний геофизических аномалий к их использованию в качестве количественных индикаторов величины сдвижений.

3. Обоснованы и апробированы критерии выбора участка для проведения опытных комплексных геомеханико-геофизических исследований (отсутствие многократной подработки, глубина менее 600 м, наличие геологоразведочных данных, отсутствие тектонических нарушений). Доказано, что соблюдение данных условий обеспечивает чистоту эксперимента и достоверность устанавливаемых зависимостей.

4. Практическая значимость работы заключается в разработке подхода к оперативной диагностике состояния подрабатываемого массива. Использование скоростных аномалий в качестве косвенных индикаторов деформационных процессов позволяет определить области потенциального проявления непрогнозируемых деформаций, что создает предпосылки для совершенствования систем геомеханического мониторинга на угледобывающих предприятиях.

5. Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением диапазона горно-геологических условий, для которых установлены корреляционные зависимости, а также с разработкой регрессионных моделей, позволяющих по параметрам скоростного разреза количественно прогнозировать ожидаемые величины оседаний и деформаций.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания FRSR-2024-0002.

## Список литературы

1. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев, 2004. – 127 с.
2. ЛБ 07-269-98. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – Введ. 1998-10-01. – М., 1998. – 203 с.
3. Николаев И.Ю. Геофизические методы при изучении подработанного угленосного массива / И.Ю. Николаев, О.Л. Шалованов // Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр: сборник материалов 6-й конференции международной научной школы академика РАН К.Н.Трубецкого, (Москва, 17–21 июня 2024) – М.: ИПКОН РАН, 2024. – С. 176–179.
4. Дрибан В.А. Фильтрационная модель многократно подработанного массива / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // Сборник научных трудов Донбасского государственного технического университета. – 2017. – № 7 (50). – С. 31–37.
5. Посыльный Ю.В. Методика исследования влияния толщи горных пород на максимальное оседание земной поверхности / Ю.В. Посыльный // Неделя горняка. – 2007. – № 2. – С. 115–123.
6. Посыльный Ю.В. Расчет граничных углов сдвижения по новым геометрическим элементам мульды в условиях шахты восточная ОАО «Ростовуголь» / Ю.В. Посыльный // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2000. – № 6. – С. 123–126.
7. Лебедева О.О. Прогноз деформационных процессов междушахтных целиков калийного

- месторождения на основе комплекса натуральных исследований: дис. ... канд. техн. наук: 2.8.6. / О.О. Лебедева. – Санкт-Петербург, 2024. – 131 с. – EDN: LKJMEE.
8. Шустов Д.В. О связи коэффициента Пуассона с геофизическими характеристиками горных пород / Д.В. Шустов, Ю.А. Кашников, А.Э. Кухтинский, А.А. Ефимов // Георесурсы. – 2024. – Т. 26, № 2. – С. 69–75. – DOI: 10.18599/grs.2024.2.7. – EDN: DUJFVP.
  9. Скаженик В.Б. Совершенствование методики прогноза последствий подработки территорий угольными шахтами на основе цифровых моделей / В.Б. Скаженик, Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев, Л.А. Иванова // Труды РАНМИИ. – 2024. – № 3(41). Vol. 1. – С. 35–48. – DOI 10.24412/2519-2418-2024-341-35-48
  10. Голубев Ф.М. К вопросу о влиянии физико-механических параметров подработанного горного массива на характер процесса сдвижения / Ф.М. Голубев, В.А. Анциферов, Л.Н. Крижановская // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 4 (89). – С. 95–103. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-4-95-103. – EDN: VZQJVN.
  11. Грищенко Н.Н. Геометрия построения мульды сдвижения над очистной выработкой прямоугольной формы / Н.Н. Грищенко, В.Р. Шнеер, Е.В. Блинникова // Наукові праці ДонНТУ. Серія «Гірничо-геологічна». – 2010. – Вип. 11(161). – С. 195–203.

**F.M. Golubev, I.Yu. Nikolaev, N.V. Lavrenchuk**

**Determining the relationship between surface deformations and the acoustic properties of a rock mass.**

The paper presents the results of a comprehensive verification of geophysical data by comparing them with forecast calculations of earth surface deformations performed in accordance with current regulatory requirements. For 14 calculation points corresponding to the seismoacoustic profile's pikets, the values of subsidence and horizontal shifts, as well as tensile-compression deformations, have been determined. A comparative analysis of the results of geophysical observations with the calculations of the shift process has been conducted.

**Keywords:** verification of geophysical data, deformation of the earth's surface, displacement of the rock mass, undercutting, seismoacoustic studies, velocity of elastic waves, zones of decompaction, subsidence, horizontal deformations, calculation points, boundary angles.

**References**

1. Rules for undermining buildings, structures, and natural objects during underground coal mining. (2004). Kyiv. 127 p. (In Russian)
2. PB 07-269-98. Rules for the protection of structures and natural objects from harmful effects of underground mining at coal deposits. (1998). Moscow. 203 p. (In Russian)
3. Nikolaev, I.Yu., & Shalovanov, O.L. (2024). Geophysical methods in the study of undermined coal-rock massifs. In *Problems and prospects of integrated development and conservation of mineral resources: Proceedings of the 6th Conference of the International Scientific School of Academician K.N. Trubetskoy*, 17-21 June 2024, Moscow, pp. 176–179. (In Russian)
4. Driban, V.A., & Dubrova, N.A. (2017). Filtration model of a repeatedly undermined rock mass. *Proceedings of Donbass State Technical University*, 7(50), 31–37. (In Russian)
5. Posylny, Yu.V. (2007). Methodology for studying the influence of rock strata on maximum surface subsidence. *Mining Week*, 2, 115–123. (In Russian)
6. Posylny, Yu.V. (2000). Calculation of boundary displacement angles based on new geometric elements of the subsidence trough under conditions of the Vostochnaya mine of OAO Rostovugol. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 6, 123–126. (In Russian)
7. Lebedeva, O.O. (2024). *Prediction of deformation processes of inter-mine pillars in a potash deposit based on a complex of field studies* (Candidate's thesis). St. Petersburg. 131 p. EDN: LKJMEE. (In Russian)
8. Shustov, D.V., Kashnikov, Yu.A., Kukhtinskii, A.E., & Efimov, A.A. (2024). On the relationship between Poisson's ratio and geophysical characteristics of rocks. *Georesources*, 26(2), 69–75.

DOI: 10.18599/grs.2024.2.7. (In Russian)

9. Skazhenik, V.B., Grishchenkov, N.N., Golubev, F.M., & Ivanova, L.A. (2024). Improvement of methods for predicting the consequences of undermining territories by coal mines based on digital models. *Transactions of Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI)*, 1(3), 35–48. – DOI 10.24412/2519-2418-2024-341-35-48 (In Russian)
10. Golubev, F.M., Antsiferov, V.A., & Krizhanovskaya, L.N. (2024). On the influence of physico-mechanical parameters of an undermined rock mass on displacement processes. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 4(89), 95–103. DOI: 10.24412/0136-4545-2024-4-95-103 (In Russian)
11. Grishchenkov, N.N., Shneer, V.R., & Blinnikova, E.V. (2010). Geometry of constructing a subsidence trough above a rectangular longwall. *Scientific Papers of Donetsk National Technical University. Series: Mining and Geology*, 11(161), 195–203. (In Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 26.02.2026.

Доработана / Revision submitted 13.03.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 24.03.2026.

УДК 622.837

doi:10.24412/0136-4545-2026-1-94-105

EDN:WLZIJC



©2026. Н.Н. Грищенко, Е.А. Бардакова

## ФОРМИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ГОРНОГО МАССИВА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУСТОТНОСТИ

В статье проведен анализ и обобщены фундаментальные работы в области геомеханики и гидрогеологии. Предложена структурная модель затапливаемого массива, выделяющая три зоны с различными фильтрационными характеристиками: зона прогиба, зона водопроницающих трещин (ЗВТ) и зона обрушения. Выполнен анализ существующих зависимостей для определения геометрических параметров этих зон и их пустотности. Для количественной оценки фильтрационных свойств использованы взаимосвязи законов Дарси и Пуазейля, а также эмпирические формулы, связывающие коэффициент фильтрации с мощностью пласта и глубиной. Предложены расчетные выражения для определения времени затопления интервалов и величины активизации оседаний.

**Ключевые слова:** угольные шахты, Донбасс, затопление, фильтрация подземных вод, зона водопроницающих трещин, сдвигание земной поверхности, техногенная пустотность, коэффициент фильтрации, геомеханические процессы, математическое моделирование.

**Введение.** В условиях интенсивной эксплуатации угольных месторождений Донбасса, характеризующейся значительными объемами подземных выработок и последующим затоплением шахт, проблема фильтрации подземных вод в горном массиве приобретает особую актуальность. Фильтрационные процессы напрямую влияют на геомеханическое состояние массива, определяя динамику сдвижений земной поверхности, устойчивость пород и риски для окружающей среды. Недооценка этих процессов может привести к непредсказуемым гидрогеомеханическим явлениям, что подчёркивает необходимость выбора адекватных математических моделей для прогнозирования и снижения геомеханических и гидрогеологических последствий ликвидации угледобывающих предприятий.

---

*Грищенко Николай Николаевич* – докт. техн. наук, зав. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: gringm@gmail.com.

*Grishchenkov Nikolai Nikolaevich* – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

*Бардакова Елена Александровна* – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru, ORCID: 0009-0009-9446-4925.

*Bardakova Elena Aleksandrovna* – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

В основе современных представлений о механизме разрушения породного массива при подземной разработке угольных месторождений лежат работы Г.Н. Кузнецова, Д.А. Казаковского, А.А. Борисова, Н.М. Зори, С.Г. Авершина и др. [1–5]. Обобщая данные работы можно выделить над очистной выработкой три зоны. Непосредственно над лавой располагается область хаотического (беспорядочного) обрушения пород, характеризующаяся максимальной степенью дезинтеграции геоматериала. Выше нее формируется зона трещин и разломов, в которой разрушение происходит с образованием дискретных блоков, формирующих многосвязную шарнирную систему, сохраняющую определенную структурную организацию и именуемую рядом ученых зоной водопроницающих трещин. Над этой зоной формируется зона прогиба горных пород без разрыва сплошности, которая доходит до поверхности. Согласно исследованиям Д.А. Илюхина, В.Н. Гусева, Е.И. Питаленко [6–8] и ряда других ученых, в условиях Донбасса суммарная высота над лавой зоны водопроницающих трещин (ЗВТ) колеблется от 50 до 100 метров. При многократной подработке такие участки массива могут объединяться в единые системы трещин, образуя совершенно иную гидравлическую систему фильтрации [9].

Учитывая, что сроки затопления горного массива и величины деформаций земной поверхности зависят от параметров техногенной пустотности [10–11], актуальной проблемой в условиях массового затопления горных выработок является уточнение особенностей формирования участков техногенной пустотности и разработка нового подхода к расчету параметров сдвижения.

**1. Методика исследования.** В результате анализа литературных источников можно сделать вывод, что физический смысл модели гидрогеомеханического прогноза заключается в рассмотрении затапливаемого горного массива, закрывающихся угольных шахт, как неоднородной структуры, включающей в себя отдельные зоны (рис. 1).

На рисунке 1 цифрами показаны эти зоны; 1 – зона сдвижений горного массива без формирования систем трещин (зона прогиба породных слоёв); 2 – зона водопроницающих трещин в массиве, 3 – зона обрушений и разломов в выработанном пространстве. В соответствии с приведенной схемой участок массива над лавой, с наибольшими изменениями упругих свойств имеет форму трапеции (зоны 2 и 3, рисунок 1). Верхнее основание трапеции ограничивается областью распространения зоны водопроницающих трещин, а боковые стороны формируются под углами полных сдвижений.

Для обеспечения геометрического критерия подобия в модели, высота зоны водопроницающих трещин определялась на основании анализа ряда существующих исследований в данном вопросе. При вычислении размеров зон водопроницающих трещин, согласно исследованиям Е.И. Питаленко, должны учитываться способ управления кровлей и степень метаморфизма угля. Как указано в исследованиях [8], изменение высоты распространения ЗВТ при различных марках разрабатываемого угля происходит согласно диаграмме, приведенной на рисунке 2.

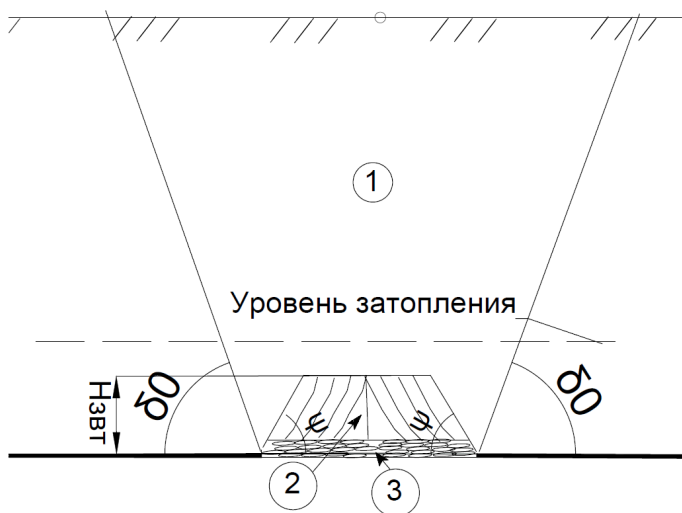


Рис. 1. Схема формирования зон различной фильтрации поднимающихся подземных вод вокруг очистной выработки ( $\delta\theta$  – граничные углы,  $\Psi$  – углы полных сдвижений,  $H_{звт}$  – высота зоны водопроницаемых трещин)

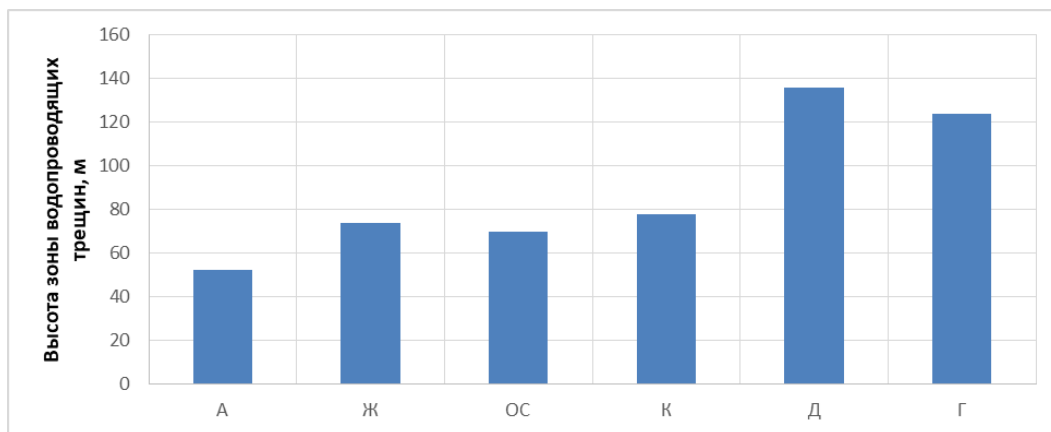


Рис. 2. Зависимость высоты зоны водопроницаемых трещин от степени катагенеза угля

Авторы работы [7] предложили методику расчёта высоты ЗВТ, учитывающую прочностные характеристики горных пород и фактор мощности слоёв горных пород, ключевой формулой в которой является:

$$H_{звт} = \frac{100 \cdot c^{-1} \cdot m \cdot e^{-1.1A}}{(1.6 \cdot e^{-0.06f} - 0,009)}$$

где  $H_{звт}$  – высота зоны водопроницаемых трещин, м;  $c$  – относительный центр распределения пород по их мощности в подрабатываемой толще, безразмерная величина;  $m$  – мощность отрабатываемого пласта, м;  $A$  – содержание пород

глинистого состава в долях от подрабатываемой толщи;  $f$  – средневзвешенная крепость горных пород, безразмерная величина.

Исследования В.Н. Гусева [6,7] по определению влияния количества глинистых пород в массиве на величину ЗВТ позволяют построить график взаимосвязи крепости горных пород с высотой зоны водопроводящих трещин (рис. 3).

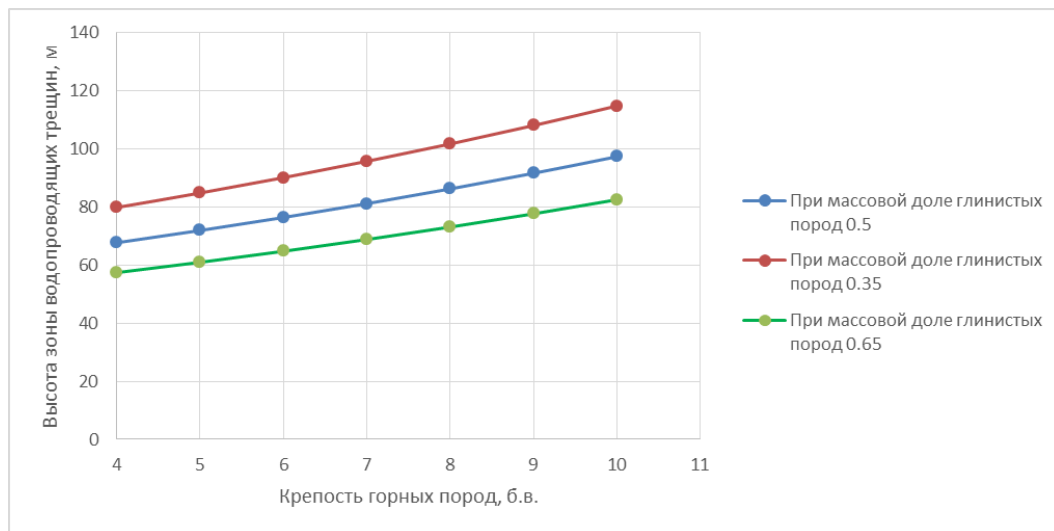


Рис. 3. Взаимосвязь крепости горных пород с высотой зоны водопроводящих трещин

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что согласно исследованиям ведущих специалистов в области прогноза параметров зон водопроводящих трещин, для условий глубоких шахт Донбасса, средней величиной ЗВТ является 75 метров, что было принято в качестве суммарной высоты зон 2 и 3.

На основании описанного подхода к зонированию подработанного горного массива определялись коэффициенты пустотности  $K_{31}$ ,  $K_{32}$ ,  $K_{33}$  для каждой из описанных зон. Коэффициент пустотности  $K_{31}$  в зоне 1 (зона прогиба породных слоёв без разрыва сплошности) в основном зависит от природной пустотности массива и может быть определён из имеющихся табличных данных для горно-геологических условий месторождения, согласно паспортам скважин или табличным значениям, приведенным в работах Ю.Н. Гавриленко и А.В. Мохова. Коэффициент пустотности  $K_{32}$  в зоне 2 (зона трещиноватого массива с системой водопроводящих трещин) возможно определить с применением взаимосвязи пористости и фильтрации, описанных в законах Дарси и Пуазейля [12]:

$$\frac{K_{\phi} \cdot (\mu \cdot 1000)}{a \cdot \gamma} = \frac{k_{\Pi} \cdot r^2}{8}$$

где  $K_{\phi}$  – коэффициент фильтрации, м<sup>3</sup>/сут;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости жидкости, мПа·с;  $a$  – коэффициент размерности; если  $K_{\phi}$  выражен в сантиметрах в секунду, то  $a = 1$ ; если в метрах в сутки, то  $a = 864$ ;  $\gamma$  – удельная

масса воды,  $1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $k_{\text{п}}$  – коэффициент пористости, безразмерная величина;  $r$  – радиус порового канала, м;

Коэффициент фильтрации в зоне водопроводящих трещин (ЗВТ) в формуле (2) определяется на основании исследований, приведенных в работах С.А. Черниковой [13]. В пределах техногенно нарушенного массива коэффициент фильтрации может отличаться в несколько раз, в сравнении с ненарушенным массивом. Определение значения коэффициента фильтрации в данном случае рационально производить с использованием выражения:

$$K_{\text{фзвт}} = K_{\text{ф}} \cdot (H_{\text{звт}} \cdot t/H)^3$$

где  $K_{\text{фзвт}}$  – коэффициент фильтрации в зоне водопроводящих трещин,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $K_{\text{ф}}$  – коэффициент фильтрации,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $H_{\text{звт}}$  – высота зоны водопроводящих трещин, м;  $t$  – вынимаемая мощность пласта, м;  $H$  – расстояние от выработанного пространства до выработанного слоя, расположенного в пределах зоны водопроводящих трещин, м.

Стоит отметить, что применение данного подхода к определению коэффициента фильтрации в зонах водопроводящих трещин позволяет выделить три принципиальных участка данной зоны, в каждом из которых происходит изменение фильтрации более чем на порядок (рис. 4–5).

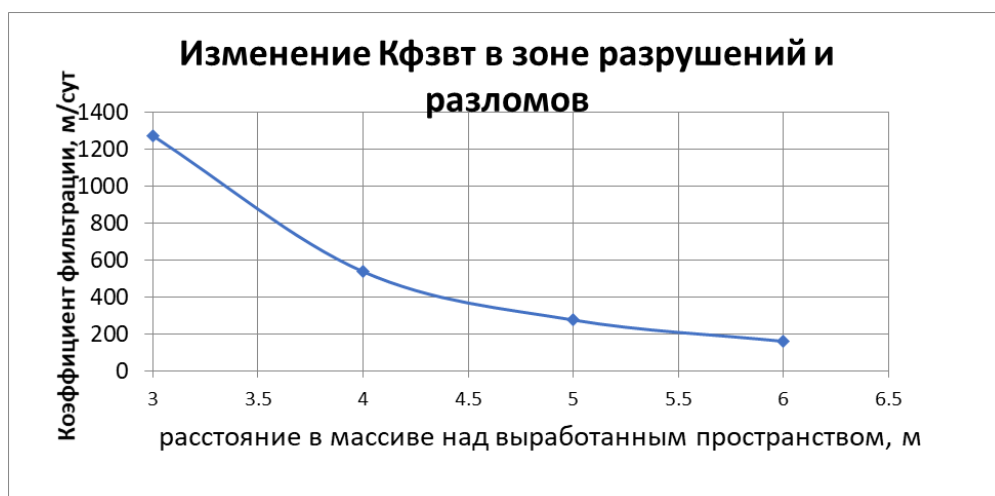


Рис. 4. Коэффициент фильтрации в пределах 6 м над выработанным пространством (зона 3)

Исходя из детального анализа графических материалов, представленных на рисунках 4 и 5, можно сделать обоснованный вывод о том, что подавляющая часть шахтных вод – а именно более 95 % от общего объема – аккумулируется в относительно небольшом интервале, ограниченном зачастую первыми шестью метрами от кровли выработки. Этот факт приобретает особую значимость на фоне того, что общая величина зоны водопроводящих трещин, образующихся в результате ведения очистных работ, может достигать сотни метров.

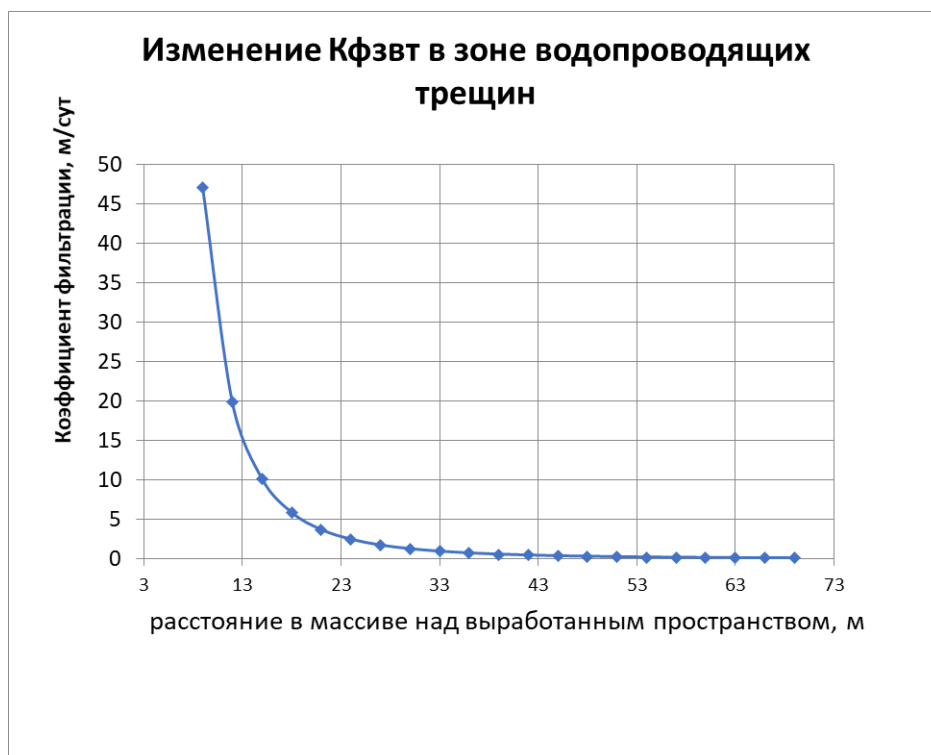


Рис. 5. Коэффициент фильтрации в пределах зоны водопрводящих трещин над выработанным пространством (зона 2)

Такое неравномерное распределение трещиноватости свидетельствует о крайне высокой степени неоднородности фильтрационных свойств нарушенного массива, где основная транспортная магистраль для подземных вод сосредоточена в непосредственной близости от горной выработки. В условиях многократной подработки массива, характерной для отработки нескольких пластов, ситуация существенно усложняется. Связь коэффициента пустотности с коэффициентом пористости согласно [14] может быть выражена следующим образом:

$$k_{\text{п}} = \frac{V_v}{V_T} = \frac{V_v}{V_s + V_v} = \frac{k_{32}}{1 + k_{32}}$$

где  $k_{32}$  – коэффициент пустотности, безразмерная величина;  $k_{\text{п}}$  – коэффициент пористости, безразмерная величина;  $V_v$  – объём пустот (воздух и вода),  $\text{м}^3$ ;  $V_s$  – объём твёрдых частиц,  $\text{м}^3$ ;  $V_T$  – общий объём,  $\text{м}^3$ .

Для определения величин коэффициента пустотности в пределах зоны разрушений и разломов (зона 3) рационально использовать следующую зависимость:

$$K_{33} = k_{\text{рок}} - 1$$

где  $K_{33}$  – коэффициент пустотности в зоне разрушений и разломов (зона 3), безразмерная величина;  $k_{\text{рок}}$  – средневзвешенный коэффициент разрыхления

горных пород в зоне разрушений и разломов, м. Определение  $k_{\text{рок}}$  следует производить в пределах интервала, который возможно определить из выражения:

$$h_{33} = \frac{m}{(k_{\text{рок}} - 1)}$$

где  $h_{33}$  – высота в зоне разрушений и разломов (зона 3), м;  $k_{\text{рок}}$  – средневзвешенный коэффициент разрыхления горных пород в зоне разрушений и разломов, м;  $m$  – мощность пласта, м.

Для определения коэффициента пустотности  $K_3$  в методике, изложенной в нормативном документе КД-12-12.004-98 следует учитывать параметры изменения пустотности в каждой из указанных зон, что можно сделать, основываясь на выражении:

$$K_3 = \frac{K_{31} \cdot R_1 + K_{32} \cdot R_2 + K_{33} \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

где  $K_3$  – средневзвешенный коэффициент пустотности в зоне водопродводящих трещин;  $K_{31}$  – коэффициент пустотности в зоне сдвижений горного массива без формирования систем трещин (зона 1), безразмерная величина;  $K_{32}$  – коэффициент пустотности в зоне водопродводящих трещин (зона 2) безразмерная величина;  $K_{33}$  – коэффициент пустотности в зоне разрушений и разломов (зона 3), безразмерная величина;  $R_1, R_2, R_3$  – линейные размеры каждой из зон, м.

Для количественного описания изменения упругих свойств горных пород в пределах выделенных зон, при необходимости проведения конечно-элементного моделирования, необходимо использовать расчетные зависимости, учитывающие взаимосвязь деформационных и фильтрационных характеристик. В частности, предлагается применять формулу, приведенную в [15], которая позволяет определить модуль Юнга ( $E$ ) как комплексный параметр. Эта зависимость увязывает в себе эффективную поверхностную энергию разрушения породы ( $T_s$ ), характеризующую ее способность сопротивляться зарождению трещин, и коэффициент фильтрации ( $k_f$ ), который является прямой характеристикой водопроницаемости среды. Полное выражение для расчета выглядит следующим образом:

$$E = 8,1 \cdot T_s((\rho \cdot g)/(k_f \cdot \mu))^{1/2}$$

где  $E$  – модуль Юнга, Па;  $T_s$  – эффективная поверхностная энергия, Дж/м<sup>2</sup>;  $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $k_f$  – коэффициент фильтрации, м/сут;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости, мПа·с;

Время затопления того или иного интервала шахты связано с приведенными параметрами пустотности и оценивается согласно исследованиям [10] по следующей формуле:

$$t_i = \frac{k_3 \cdot V_i}{Q_{\text{ср}} - \sum Q_i}$$

где  $t_i$  – время затопления  $i$ -го интервала шахты, сут.;  $k_3$  – коэффициент заполнения объема горных выработок, безразмерная величина;  $V_i$  – объем горных

выработок в интервале затопления,  $\text{м}^3$ ;  $Q_{\text{ср}}$  – средняя величина водопритока в шахту для рассматриваемого интервала затопления,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $\sum Q_i$  – средняя величина общего перетока из затопляемой шахты в смежные для того же интервала глубины,  $\text{м}^3/\text{сут}$ .

Средняя величина водопритока в шахту для рассматриваемого интервала может быть определена из выражения:

$$Q_{\text{ср}} = (Q_{\text{српр}} + Q_{\text{ф}})/2$$

где  $Q_{\text{ср}}$  – средняя величина водопритока в шахту,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $Q_{\text{српр}}$  – средний проектный водоприток,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $Q_{\text{ф}}$  – фактический водоприток,  $\text{м}^3/\text{сут}$ .

Среднюю проектную величину водопритока ( $Q_{\text{српр}}$ ) в шахту для рассматриваемого проектного уровня затопления согласно [16] возможно определить из выражения:

$$Q_{\text{српр}} = Q_{\text{ф}} \cdot \sqrt{\frac{H_{\text{ф}}}{H_{\text{пр}}}}$$

где  $Q_{\text{српр}}$  – средний проектный водоприток,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $Q_{\text{ф}}$  – фактический водоприток,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $H_{\text{ф}}$  – фактическая глубина затопления, м;  $H_{\text{пр}}$  – проектная глубина затопления, м.

Когда участок подработанного массива затопляется, вода может проникнуть в соседние выработки двумя путями: – через барьерные целики (оставленные нетронутые участки горной породы) – в этом случае скорость перетока оценивают по формуле Дарси, которая учитывает свойства породы; – через скважины, крупные трещины или соединительные выработки – например, через разведочные, дренажные или старые технологические стволы, связывающие шахты.

Определение средней величины общего перетока ( $\sum Q_i$ ) из затопляемой шахты в смежные для некоторого интервала глубины можно представить как сумму:

$$\sum Q_i = Q_{\text{пгс}} + q_i$$

где  $Q_i$  – величина общего перетока,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $Q_{\text{пгс}}$  – расход воды, поступающей через прямые гидравлические связи,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $q_i$  – объем воды фильтрующейся через разделяющий выработки массив,  $\text{м}^3/\text{сут}$ .

В подобных ситуациях объем перетока через прямые гидравлические связи следует рассчитывать, опираясь на следующую формулу:

$$Q_{\text{пгс}} = 4 \cdot 10^3 \cdot b^2 \sqrt{\frac{Kg}{0,03L}}$$

где  $Q_{\text{пгс}}$  – расход воды, поступающей через выработку,  $\text{м}^3/\text{сут}$ ;  $b$  – диаметр выработки, м;  $K$  – начальный напор над устьем выработки, м;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  $L$  – длина скважины от устья до затопленной выработки, м.

Обобщение приведенных формул позволяет определять время затопления рассматриваемого при прогнозе интервала горного массива с учетом его техногенной нарушенности. Данный методологический подход создает основу для решения важной практической задачи - определения временных рамок затопления и как следствие, активизации процесса сдвижения, вызванного мокрой консервацией закрывающихся угольных шахт. Определение величины оседаний для каждого интервала затопления также связано с приведенными параметрами пустотности, и осуществляется с применением зависимости, приведенной в [11]

$$m_0 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot m_b$$

где  $m_0$  – остаточная мощность пласта, м;  $K_1$  – коэффициент, зависящий от степени метаморфизма углей (угли марки А –  $K_1 = 1,0$ ; угли марок ТС, Т, ОС, КС, КЖ, К, Ж –  $K_1=0,8$ ; угли марок ГЖС, ГЖ, Г, ДГ, Д –  $K_1 = 0,6$ );  $K_2$  – коэффициент, зависящий от последующих подработок горной выработки нижележащими пластами ( $K_2 = 1,0$ , если выработка не была подработана;  $K_2 = 0,8$ , если выработка подработана одним пластом;  $K_2 = 0,5$ , если выработка была подработана 2-мя и более пластами);  $K_3$  – коэффициент, зависящий от наличия пустот и зон разуплотнений (принимается по результатам дополнительных исследований);  $K_4$  – коэффициент, зависящий от обводнённости горных пород ( $K_4 = 0,5$ , если горные выработки затоплены, и  $K_4 = 1,0$ , если горные выработки не затоплены);  $K_5$  – коэффициент, зависящий от глубины горных работ, м;  $m_b$  – вынимаемая мощность пласта, м.

Учитывая сложную морфологию пласта процесс активизации сдвижений земной поверхности при затоплении горных выработок возможно разделить на три этапа:

- начальная стадия активизации от затопления определенного интервала глубин;
- совместное влияние вновь активизировавшихся от затопления интервалов и ранее затопленных участков;
- затухание сдвижений на участках, расположенных в пределах влияния выработок, исчерпавших потенциал активизации.

Стоит отметить, что активизация процесса сдвижения от затопления, как и при подработке земной поверхности происходит не мгновенно. Учитывая гипотезу об идентичности базовых параметров процессов сдвижения при добыче угля и при затоплении горных работ, следует считать, что начало активизации геомеханических процессов от затопления горных выработок, имеет определенные условия объема затопления, который может определяться согласно приведенной формуле:

$$C = A_0 \cdot H_{cp}$$

где  $C$  – скорость подъема воды, м/сут;  $A_0$  – коэффициент, определяемый по таблице 5.4 [17] данного приложения в зависимости от величины граничного угла;  $H_{cp}$  – средняя глубина затопления, м.

Учитывая гипотезу об идентичности базовых параметров процессов сдвижения при добыче угля и при затоплении горных работ [18–19], следует считать, что начало активизации геомеханических процессов от затопления горных выработок также имеет определенные условия объема затопления, который может определяться согласно формуле (15).

**Выводы.** В результате проведенных исследований представлена методика прогноза деформаций земной поверхности с учетом фактора времени затопления горных выработок. Данная методика позволяет прогнозировать момент активизации сдвижения земной поверхности при затоплении шахт и своевременно разрабатывать меры по снижению рисков проявления деформаций объектов поверхности. Анализ литературных источников и эмпирических данных позволил количественно описать фильтрационные параметры для трех характерных зон техногенно-нарушенного массива: зоны прогиба, зоны водопроводящих трещин и зоны обрушения. Установлено, что основная фильтрация (более 95 %) происходит в призабойной части (зона 3 и нижняя часть зоны 2), что критически важно для расчетов времени затопления. В статье систематизированы расчетные зависимости для определения средневзвешенного коэффициента пустотности, времени затопления интервалов и объемов перетоков между шахтами через барьерные целики и прямые гидравлические связи; предложен подход к прогнозированию момента активизации сдвижения, разделяющий процесс на три этапа: начальная стадия, совместное влияние вновь активизировавшихся от затопления интервалов и ранее затопленных участков и затухание, что позволяет своевременно разрабатывать меры по снижению геомеханических рисков в регионах закрытия угольных шахт.

### Список литературы

1. Казаковский Д.А. Сдвижение земной поверхности под влиянием горных разработок / Д.А. Казаковский. – Углетехиздат, 1953.
2. Методы и средства решения задач горной геомеханики / Г.Н. Кузнецов, К.А. Ардашев, Н.А. Филатов [и др.]. – М.: Недра, 1987. – 248с.
3. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов / А.А. Борисов. – М.: Недра, 1980. – 360 с.
4. Авершин С.Г. Сдвижение горных пород при подземных разработках / С.Г. Авершин — Москва: Углетехиздат, 1947. – 245 с.
5. Зоря Н.М. Исследование методом моделирования эквивалентными материалами процесса сдвижения горных пород и земной поверхности при выемке одного пологопадающего пласта угля в условиях Донбасса: Автореферат дис. работы, представленный на соискание ученой степени кандидата технических наук / М-во высш. образования УССР. Донецкий ордена Труд. Красного Знамени индустр. ин-т им. Н.С. Хрущева. - Сталино: [б. и.], 1958. – 28 с.
6. Гусев В.Н. Определение параметров зоны водопроводящих трещин через горизонтальные деформации подрабатываемой толщи / В.Н. Гусев, Д.А. Илюхин, А.Г. Алексенко // Записки горного института. – 2013. – Т. 204. – С. 69–73.
7. Илюхин Д.А. Расчет зоны водопроводящих трещин для железорудных месторождений на основе данных геомеханического мониторинга / Д.А. Илюхин, Е.М. Малюхина // Маркшейдерский вестник. – 2015. – № 4(107). – С. 56–59. – EDN UKXUSX.
8. Геомеханические процессы отработки крутых пластов: новые исследования и решения /

- Е.И. Питаленко [и др.] // НАН Украины, Украинский гос. научно-исследовательский и проектно-конструкторский ин-т горной геологии, геомеханики и маркшейдерского дела, УкрНИМИ. – Донецк: [б.и.], 2007. – 378 с.
9. Дрибан В.А. Фильтрационная модель многократно подработанного массива / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // Сборник научных трудов Донбасского государственного технического университета. – 2017. – № 7 (50). – С. 31–37.
  10. Техногенные последствия закрытия угольных шахт: Монография // Под ред. Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермакова. Донецк, 2004. – 631 с.
  11. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004-98: утв. Министерством угольной промышленности Украины: 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.
  12. Коновалова Л.Н. Физика пласта / Л.Н. Коновалова, Л.М. Зиновьева, Т.К. Гукасян. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2016. – 120 с.
  13. Черникова С.А. Геогидродинамическое обоснование мониторинга процесса затопления угольных шахт Донбасса (на примере Стахановско-Брянковского региона): автореф. дисс. / С.А. Черникова // Специальность 25.00.16. Горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика, маркшейдерское дело и геометрия недр. – Пермь, 2004. – 21 с.
  14. Craig R.F. Craig's Soil Mechanics / R.F. Craig. – London: Spon, 2004. – p.18.
  15. Семашко С.В. Современные движения флюидов в земной коре / С.В. Семашко // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2011. – № 2. – С. 51–67.
  16. Методические положения по решению гидрогеологических задач при разработке проекта ликвидации шахты (пособие проектировщику) РТМ 6.04.95. – Донецк: Донгипрошахт, 1995. – 17 с.
  17. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев, 2004. – 127 с.
  18. Скаженник В.Б. Совершенствование методики прогноза последствий подработки территорий угольными шахтами на основе цифровых моделей / В.Б. Скаженник, Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев, Л.А. Иванова // Труды РАНИМИ. – 2024. – № 3(41). Vol. 1. – С. 35–48. – DOI 10.24412/2519-2418-2024-341-35-48
  19. Скаженник В.Б. Пространственное и нейросетевое моделирование влияния затопления угольных шахт на активизацию процесса сдвижения земной поверхности / В.Б. Скаженник, Н.Н. Грищенко, Е.А. Бардакова // ТРУДЫ РАНИМИ: сб. научн. трудов. – Донецк, 2025. – № 7 (45). – С. 121–135. – DOI: 10.24412/2519-2418-2025-745-121-135

**N.N. Grishchenkov, E.A. Bardakova**

### **Formation of filtration models of a rock mass and determination of the void coefficient.**

The article analyzes and summarizes fundamental works in the field of geomechanics and hydrogeology. It proposes a structural model of a flooded massif that distinguishes three zones with different filtration characteristics: the deflection zone, the zone of water-conducting cracks (WCC), and the collapse zone. The article analyzes existing dependencies to determine the geometric parameters of these zones and their voidness. To quantify the filtration properties, the article uses the relationships between the Darcy and Poiseuille laws, as well as empirical formulas that relate the filtration coefficient to the thickness of the formation and its depth. Calculation expressions are proposed for determining the flooding time of intervals and the magnitude of subsidence activation.

**Keywords:** coal mines, Donbas, flooding, groundwater filtration, zone of conductive cracks, displacement of the earth's surface, technogenic voids, filtration coefficient, geomechanical processes, and mathematical modeling.

### **References**

1. Kazakovskii, D.A. (1953). *Subsidence of the earth surface under the influence of mining operations*. Ugletekhizdat. 1953 p. (In Russian)

2. Kuznetsov, G.N., Ardashev, K.A., Filatov, N.A., et al. (1987). *Methods and tools for solving problems of mining geomechanics*. Moscow: Nedra. 248 p. (In Russian)
3. Borisov, A.A. (1980). *Mechanics of rocks and rock masses*. Moscow: Nedra. 360 p. (In Russian)
4. Avershin, S.G. (1947). *Rock mass subsidence during underground mining*. Moscow: Ugletekhizdat. 245 p. (In Russian)
5. Zorya, N.M. (1958). *Study of rock and surface subsidence processes using equivalent material modeling during extraction of a gently dipping coal seam in Donbass* (Abstract of Candidate dissertation). Stalino: Donetsk Industrial Institute. 28 p. (In Russian)
6. Gusev, V.N., Ilyukhin, D.A., & Aleksenko, A.G. (2013). Determination of the water-conducting fracture zone parameters through horizontal deformations of the overlying strata. *Journal of Mining Institute*, 204, 69–73. (In Russian)
7. Ilyukhin, D.A., & Malyukhina, E.M. (2015). Determination of the water-conducting fracture zone for iron ore deposits based on geomechanical monitoring data. *Mine Surveying Bulletin*, 4(107), 56–59. (In Russian)
8. Pitalenko, E.I., et al. (2007). *Geomechanical processes of steep coal seam mining: new studies and solutions*. Donetsk: Ukrainian Research Institute of Mining Geology, Geomechanics and Surveying. 378 p. (In Russian)
9. Driban, V.A., & Dubrova, N.A. (2017). Filtration model of a repeatedly undermined rock mass. *Collection of Scientific Papers of Donbass State Technical University*, 7(50), 31–37. (In Russian)
10. Gavrilenko, Yu.N., & Ermakov, V.N. (Eds.). (2004). *Technogenic consequences of coal mine closure*. Donetsk. 631 p. (In Russian)
11. Ministry of Coal Industry of Ukraine. (1998). *Liquidation of coal mines: Protection of the earth surface from flooding of mine workings. Guidelines КД 12.12.004-98*. Donetsk. 46 p. (In Russian)
12. Konovalova, L.N., Zinovyeva, L.M., & Gukasian, T.K. (2016). *Reservoir physics*. Stavropol: North Caucasus Federal University Press. 120 p. (In Russian)
13. Chernikova, S.A. (2004). *Geohydrodynamic substantiation of monitoring the flooding of coal mines in the Donbass region (case study of the Stakhanov–Bryanka region)* (Abstract of Candidate dissertation). Perm. 21 p. (In Russian)
14. Craig, R.F. (2004). *Craig's soil mechanics*. London: Spon. 18 p.
15. Semashko, S.V. (2011). Modern fluid movements in the Earth's crust. *Proceedings of Tula State University. Earth Sciences*, 2, 51–67. (In Russian)
16. *Methodological guidelines for solving hydrogeological problems in mine closure design (design manual RTM 6.04.95)*. (1995). Donetsk: DonGiproShakht. 17 p. (In Russian)
17. *Rules for undermining buildings, structures, and natural objects during underground coal mining*. (2004). Kyiv. 127 p. (In Russian)
18. Skazhenik, V.B., Grishchenkov, N.N., Golubev, F.M., & Ivanova, L.A. (2024). Improvement of methods for predicting the consequences of undermining territories by coal mines based on digital models. *Transactions of Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI)*, 1(3), 35–48. – DOI 10.24412/2519-2418-2024-341-35-48 (In Russian)
19. Skazhenik, V.B., Grishchenkov, N.N., & Bardakova, E.A. (2025). Spatial and neural network modeling of the influence of coal mine flooding on the activation of the earth's surface displacement process. *Transactions of Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI)*, 7(45), 121–135. – DOI: 10.24412/2519-2418-2025-745-121-135 (In Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 02.03.2026.

Доработана / Revision submitted 20.03.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 24.03.2026.

ФГБОУ ВО  
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ЖУРНАЛ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ**

Научный журнал

Основан в 1970 г

№ 1 (94) / 2026

Подписано в печать 20.04.2026

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
(83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24;  
тел.: технический редактор: +7 856 302 92 71,  
тел.: ответственный секретарь: +7 856 302 92 71,  
e-mail: [jtam\\_donnu@mail.ru](mailto:jtam_donnu@mail.ru),  
URL: <http://donnu.ru/jtam>, <http://dongu-jtam.ru/>)