

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Журнал ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

№ 2 (91)

2025

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватульян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.В. Георгиевский**, д-р техн. наук, проф. **В.А. Глазунов**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**, д-р техн. наук, проф. **Н.Н. Грищенко**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносеви**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Мазнев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Муцанов**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Р.Н. Нескороев**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыш**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Н. Соловьев**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **С.Н. Царенко**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of phys. and math., prof. **D.V. Georgievskiy**, Dr. of tech., prof. **V.A. Glazunov**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**, Dr. of tech., prof. **N.N. Grishchenkov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Maznev**, Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of phys. and math., docent **R.N. Neskoro**, Dr. of tech., prof. **V.N. Pavlysh**, Dr. of phys. and math., prof. **A.N. Soloviev**, Dr. of tech., docent **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., docent **S.N. Tsarenko**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки). Квартиль К2 с 23.05.2025.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет», 2025

№ 2 (91) / 2025

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Механика твердого тела

- Мазнев А.В., Зыза А.В., Нескороев Р.Н., Белоконь Т.В.* Свойства резонансных прецессионных движений динамически симметричного тела в трех однородных силовых полях 5

Механика деформируемого твердого тела

- Бондаренко Н.С.* Фундаментальное решение задачи статики для ортотропной пластины, подверженной действию поперечной сосредоточенной силы, на базе обобщенной теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации 21

- Калоеров С.А., Гапотченко Я.И.* Основные соотношения для комплексного потенциала антиплоской деформации тела и их использование при решении задач 35

- Глушанков Е.С.* Действие сосредоточенных источников тепла в бесконечной многосвязной анизотропной пластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой 52

- Глухов А.А., Сторожев В.И.* Влияние характеристик анизотропии и неоднородности компонентов составного волновода на свойства обобщенных поверхностных волн Лява 64

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Полянский Д.Д., Сторожев С.В., Чан Ба Ле Хоанг* Учет влияния разбросов экзогенных параметров в модели локальной устойчивости сферической оболочки с заполнителем при силовом и температурном нагружении 76

- Малютина Т.П., Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В.* Учет влияния разбросов экзогенных параметров в модели резонансных колебаний плат радиоэлектронных систем с демпфирующими полимерными ребрами 84

**Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

<i>Азаров Н.Я., Голубев Ф.М., Украинский И.А., Ребенок Е.В.</i> Моделирование геомеханических процессов при отработке одиночной лавы на основании данных физико-геологической модели горного массива	93
<i>Антонов В.А.</i> Методология определения прочности пород горного массива в условиях гравитационного и тектонического напряжения	101
<i>Бардакова Е.А., Бакман Е.Б., Голубев Ф.М.</i> Гидрогеомеханический прогноз активизации оседаний земной поверхности при затоплении очистных горных выработок закрывающихся угольных шахт	115

№ 2 (91) / 2025

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

- Maznev A.V., Zyza A.V., Neskorodev R.N., Belokon T.V.* Investigation of the equations of motion of a solid body in three homogeneous force fields 5

Solid Mechanics

- Bondarenko N.S.* Fundamental solution of the static problem for an orthotropic plate subjected to the action of a longitudinal concentrated force, based on the generalized theory in the $\{1,0\}$ -approximation version 21
- Kaloerov S.A., Gapotchenko Y.I.* Main relations for the complex potential of antiplane deformation in solids and their application to problem solving 35
- Glushankov E.S.* The concentrated heat sources' action in an infinite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition . 52
- Glukhov A.A., Storozhev V.I.* Influence of anisotropy and heterogeneity characteristics of components of waveguide on the properties generalized surface Love waves 64

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Polyansky D.D., Storozhev S.V., Tran Ba Le Hoang* Taking into account the influence of exogenous parameters variations in the local stability model of a spherical shell with a filler under force and temperature loading 76
- Malutina T.P., Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V.* Accounting of influence scattering errors exogenous parameters in the model of resonant oscillations of radio electronic system boards with damping polymer stiffeners 84

**Geomechanics, Rock Damage,
Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics**

<i>Azarov N.Y., Golubev Ph.M., Ukrainsky I.A., Rebenok E.V.</i> Modeling of geomechanical processes during the development of a single longwall based on data from a physical-geological model of a rock mass	93
<i>Antonov V.A.</i> Methodology for determining the strength of rock massif rocks under gravitational and tectonic stress conditions	101
<i>Bardakova E.A., Bakman E.B., Golubev Ph.M.</i> Hydrogeomechanical forecast of increased subsidence of the earth's surface during flooding of the mine workings of closing coal mines	115

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-5-20

EDN:SZPTDD

©2025. А.В. Мазнев¹, А.В. Зыза², Р.Н. Нескороев³, Т.В. Белоконь⁴СВОЙСТВА РЕЗОНАНСНЫХ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ
ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В ТРЕХ
ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

В статье рассматривается задача о движении динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных силовых полей. Изучены условия существования резонансных прецессий, характеризующихся соизмеримостью скоростей прецессий и собственного вращения тела. Построены новые решения уравнений движения при резонансах, которые выражаются в виде эллиптических функций Якоби.

Ключевые слова: резонансы, прецессии, динамическая симметрия, однородные силовые поля.

¹Мазнев Александр Владимирович – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: o.mazniev.dongu@mail.ru.

Mazniev Oleksandr Vladimirovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

²Нескороев Роман Николаевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nrnm72@mail.ru.

Neskorodev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Зыза Александр Васильевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: z9125494@mail.ru.

Zyza Alexander Vasilievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

⁴Белоконь Татьяна Валериевна – ст. преподаватель каф. высшей и прикладной математики ДонНУЭТ им. М. Туган-Барановского, Донецк, e-mail: B.Tatyana13@mail.ru.

Belokon Tatyana Valerievna – Senior Lecturer, Donetsk National University of Economics and Trade named after M. Tugan-Baranovsky, Donetsk, Chair of High and Applied Mathematics.

Введение. Прецессионные движения твердых тел известны не только в моделировании движений сложных механических систем (роботы, манипуляторы) но и в небесной механике (прецессии оси Земли). Например, теория гироскопических систем, описанная А.Ю. Ишлинским [1], базируется на техническом применении данных движений. В динамике твердого тела прецессионные движения (по терминологии Г.Г. Аппельрота – безнутаационные движения) определяются как движения, при которых постоянен угол между двумя осями g_1 и g_2 (ось g_1 неизменно связана с телом, ось g_2 неподвижна в пространстве). Ф. Кляйн и А. Зоммерфельд [2] изучили регулярные прецессии гироскопа Лагранжа как в теоретическом плане, так и при движении гироскопа с учетом сил трения. Регулярные прецессии тяжелого твердого тела относительно наклонной оси нашел Д. Гриоли [3]. Исследования прецессии общего вида тяжелого твердого тела, как отмечено в [4], показали существование прецессий гироскопа Гесса относительно горизонтальной оси (А. Брессан [5]) и относительно вертикали [6]. Отметим, что прецессия А.И. Докшевича [6] характеризуется постоянством произведения скоростей прецессии тела и его собственного вращения. В динамике систем связанных твердых тел под действием силы тяжести имеет место прецессия [7]. Представляет интерес конструкция данной системы и ее свойства: она состоит из гироскопов Лагранжа, которые совершают регулярные прецессии и гироскопов Гесса, которые совершают полурегулярные прецессии первого типа. В монографиях [8–11] приведены постановки задач, относящихся к обобщениям классической задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Структура правых частей дифференциальных уравнений движения гиригостата в полях сложного вида позволила построить многие классы прецессий, которые являются не только обобщениями известных решений, но и получить новые, более разнообразные классы прецессий. Особый интерес представляют результаты, посвященные изучению прецессий гиригостата с учетом переменности гиригостатического момента.

Важным классом прецессионных движений являются резонансные прецессии, которые характеризуются соизмеримостью скоростей прецессии и собственного вращения тела. В данной статье изучаются резонансные прецессии тела в задаче о движении тела под действием сил трех однородных силовых полей. Ранее, в статьях [12–14], рассмотрены только регулярные прецессии твердого тела в указанной задаче. Поскольку случаи резонансных прецессий тела в классической задаче имеют место (например, в решении Д. Гриоли [3] скорость прецессии тела равна его скорости собственного вращения), то актуальность исследования прецессий тела в тройном однородном поле не вызывает сомнений. Отметим, что резонансные движения в механике широко известны; это относится к небесной механике (законы Кассини), к теории Гамильтовых систем и т.д.

Статья продолжает цикл работ [15, 16], посвященных изучению условий существования резонансных прецессий динамически симметричного тела в трех однородных силовых полях. Получены новые решения исходных уравнений в эллиптических функциях времени в случаях $\dot{\psi} = \dot{\phi}$, $\dot{\phi} = 2\dot{\psi}$. Доказана динамиче-

ская невозможность прецессий $\dot{\phi} = k\dot{\psi}$ ($k \in \mathbb{N}, N > 2$) ($\dot{\psi}$ —скорость прецессии, $\dot{\phi}$ —скорость собственного вращения тела).

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку в силовом поле, являющемся суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Для удобства сохраним обозначения, принятые в работах [15, 16]. Обозначим через $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^{(1)}$, $\bar{\gamma}^{(2)}$ — единичные векторы, характеризующие направления сил \bar{P} , \bar{P}_1 , \bar{P}_2 каждого из полей; C, C_1, C_2 — центры приведения сил; $\bar{s} = POC$; $\bar{r} = P_1OC_1$; $\bar{p} = P_2OC_2$; $Oxyz$ — подвижная система координат; O — неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе $Oxyz$ имеет значение $A = (A_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$). Тело вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\bar{\omega} = \omega_1\bar{i}_1 + \omega_2\bar{i}_2 + \omega_3\bar{i}_3$ ($\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ — единичные векторы системы $Oxyz$). Для векторов \bar{s} , \bar{r} , \bar{p} запишем соотношения

$$\bar{s} = s_1\bar{i}_1 + s_2\bar{i}_2 + s_3\bar{i}_3, \quad \bar{r} = r_1\bar{i}_1 + r_2\bar{i}_2 + r_3\bar{i}_3, \quad \bar{p} = p_1\bar{i}_1 + p_2\bar{i}_2 + p_3\bar{i}_3. \quad (1)$$

Тогда уравнения движения тела представим в виде

$$A\dot{\bar{\omega}} = A\bar{\omega} \times \bar{\omega} + \bar{s} \times \bar{\gamma} + \bar{r} \times \bar{\gamma}^{(1)} + \bar{p} \times \bar{\gamma}^{(2)}, \quad (2)$$

$$\dot{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma} \times \bar{\omega}, \quad \dot{\bar{\gamma}}^{(1)} = \bar{\gamma}^{(1)} \times \bar{\omega}, \quad \dot{\bar{\gamma}}^{(2)} = \bar{\gamma}^{(2)} \times \bar{\omega}, \quad (3)$$

где точка над переменными $\bar{\omega}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^{(1)}$, $\bar{\gamma}^{(2)}$ обозначает дифференцирование по времени t . В формулах (2), (3) полагаем

$$\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}^{(1)} = 0, \quad \bar{\gamma}^{(2)} = \bar{\gamma} \times \bar{\gamma}^{(1)}, \quad |\bar{\gamma}| = 1, \quad |\bar{\gamma}^{(1)}| = 1, \quad (4)$$

то есть направления силовых полей будет характеризовать тройка единичных векторов $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^{(i)}$ ($i = \overline{1, 2}$). Тогда очевидны равенства $\bar{P} = P\bar{\gamma}$, $\bar{P}_i = P_i\bar{\gamma}^{(i)}$ ($i = \overline{1, 2}$).

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора $\bar{\gamma}$. Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС)

$$\bar{a} \cdot \bar{\gamma} = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0), \quad (5)$$

где θ_0 — угол между векторами \bar{a} и $\bar{\gamma}$ ($\dot{\bar{a}} = \bar{0}$, $|\bar{a}| = 1$).

Вектор угловой скорости тела на ИС (5) представим так

$$\bar{\omega} = \dot{\phi}\bar{a} + \dot{\psi}\bar{\gamma}. \quad (6)$$

Переменные ϕ , ψ и постоянную θ_0 можно трактовать, как углы Эйлера. Следуя [9], запишем значение вектора $\bar{\gamma}^{(1)}$

$$\bar{\gamma}^{(1)} = b_0 [a_0\bar{\gamma} \sin(\psi + \psi_0) - \bar{a} \sin(\psi + \psi_0) + (\bar{a} \times \bar{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0)], \quad (7)$$

где $b_0 = 1/a'_0$ ($a'_0 = \sin \theta_0$), ψ_0 — постоянная.

Значение вектора $\bar{\gamma}^{(2)}$ найдем по второй формуле системы (4)

$$\bar{\gamma}^{(2)} = b_0 [\bar{a} \cos(\psi + \psi_0) - a_0 \bar{\gamma} \cos(\psi + \psi_0) + (\bar{a} \times \bar{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)]. \quad (8)$$

Таким образом, при получении (7), (8) полагалось, что $\bar{a} \times \bar{\gamma} \neq 0$, то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом – направим вектор \bar{i}_3 по вектору \bar{a} . Тогда на основании ИС (5) и первого уравнения из (3) имеем [9]

$$\bar{\gamma} = a'_0 \sin \phi \cdot \bar{i}_1 + a'_0 \cos \phi \cdot \bar{i}_2 + a_0 \bar{i}_3 \quad (\bar{i}_3 = \bar{a}). \quad (9)$$

В качестве единичных векторов неподвижной системы координат $O_{\varepsilon\eta\zeta}$ примем векторы $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^{(i)}$ ($i = 1, 2$). Тогда, в силу соотношений (6), (9), подвижный и неподвижный годографы вектора $\bar{\omega}$ запишем в виде

$$\bar{\omega} = a'_0 \dot{\psi} \sin \phi \cdot \bar{i}_1 + a'_0 \dot{\psi} \cos \phi \cdot \bar{i}_2 + (\dot{\phi} + a_0 \dot{\psi}) \cdot \bar{i}_3, \quad (10)$$

$$\bar{\omega} = a'_0 \dot{\psi} \sin \psi \cdot \bar{\gamma} - a'_0 \dot{\phi} \cos \psi \cdot \bar{\gamma}^{(1)} + (\dot{\psi} + a_0 \dot{\phi}) \cdot \bar{\gamma}^{(2)}.$$

Замечание 1. При описании кинематических свойств в виде соотношений (5)–(10) использован метод [9, 10], который отличается от методов, применяемых в [12–14].

Замечание 2. Уравнения (2), (3) имеют интеграл энергии

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2 \left(\bar{s} \cdot \bar{\gamma} + \bar{r} \cdot \bar{\gamma}^{(1)} + \bar{p} \cdot \bar{\gamma}^{(2)} \right) = 2E, \quad (11)$$

где E – постоянная. Как показано в [9], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (11) значительно упрощается.

На рисунке 1 приведена геометрическая трактовка прецессии тела относительно вектора $\bar{\gamma}$ ($O_{\varepsilon\eta\zeta}$ – неподвижная система координат).

Выполним преобразование уравнения (2) на ИС (5), (6). Внесем в уравнение (2) значение $\bar{\omega}$ из (6) и рассмотрим полученное уравнение в базисе \bar{a} , $\bar{\gamma}$, $\bar{a} \times \bar{\gamma}$ с учетом (7), (8)

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\bar{a} \cdot \bar{a}) + \ddot{\psi}(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) - \dot{\psi}^2 [\bar{a} \cdot (A\bar{\gamma} \times \bar{\gamma})] - [(\bar{a} \cdot (\bar{s} \times \bar{\gamma})) - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0 [\bar{a} \cdot (\bar{r} \times \bar{\gamma}) - (\bar{a} \cdot \bar{p})] + \bar{p} \cdot \bar{\gamma}\} - \\ & - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{\bar{r} \cdot \bar{\gamma} - a_0 [(\bar{r} \cdot \bar{a}) + \bar{a} \cdot (\bar{p} \times \bar{\gamma})]\} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}) + 2\dot{\phi}\dot{\psi} [\bar{a} \cdot (A\bar{\gamma} \times \bar{\gamma})] + \dot{\phi}^2 [(\bar{\gamma} \cdot (\bar{a} \times A\bar{a})) - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0 (\bar{p} \cdot \bar{\gamma}) + [\bar{a} \cdot (\bar{r} \times \bar{\gamma}) - (\bar{a} \cdot \bar{p})]\} - \\ & - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0 (\bar{r} \cdot \bar{\gamma}) - (\bar{a} \cdot \bar{r}) + [\bar{a} \cdot (\bar{\gamma} \cdot \bar{p})]\} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

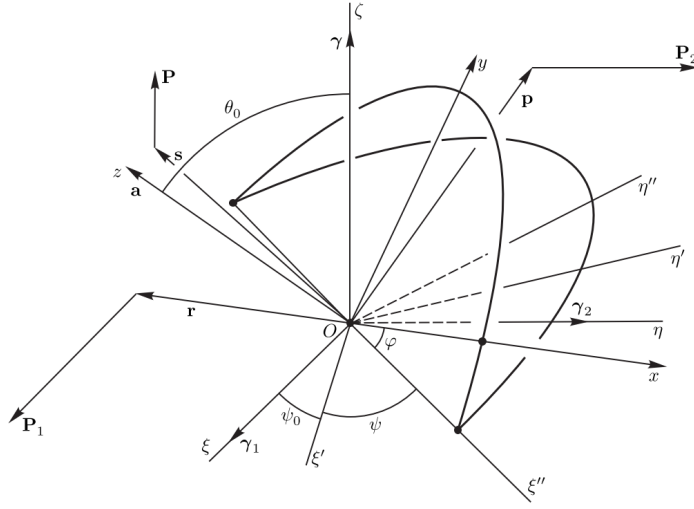


Рис. 1. Геометрическая трактовка прецессии тела относительно вектора $\bar{\gamma}$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi} [A\bar{a} \cdot (\bar{\gamma} \times \bar{a})] + \ddot{\psi} [A\bar{\gamma} \cdot (\bar{a} \times \bar{\gamma})] + \dot{\phi}\dot{\psi} \left[2(A\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}) - a_0'^2 Sp(A) - 2a_0(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) \right] + \\ & + \dot{\phi}^2 [(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) - a_0(A\bar{a} \cdot \bar{a})] + \dot{\psi}^2 [a_0(A\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}) - (A\bar{a} \cdot \bar{\gamma})] - (\bar{a} \cdot \bar{s}) + \\ & + a_0(\bar{s} \cdot \bar{\gamma}) - a_0'[(\bar{p} \cdot \bar{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0) - (\bar{r} \cdot \bar{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $Sp(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ – след матрицы A .

По аналогии с (12)–(14) распишем интеграл (11) на ИС (5) с учетом значений $\bar{\gamma}^{(1)}, \bar{\gamma}^{(2)}$ из (7), (8)

$$\begin{aligned} & (A\bar{a} \cdot \bar{a}) \dot{\phi}^2 + 2(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) \dot{\phi}\dot{\psi} + (A\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}) \dot{\psi}^2 - 2\{(\bar{s} \cdot \bar{\gamma}) + b_0[\sin(\psi + \psi_0) \cdot (a_0(\bar{r} \cdot \bar{\gamma}) - \\ & - (\bar{r} \cdot \bar{a}) - \bar{p} \cdot (\bar{\gamma} \times \bar{a})) + \cos(\psi + \psi_0) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{p} - a_0(\bar{p} \cdot \bar{\gamma}) + \bar{r} \cdot (\bar{a} \times \bar{\gamma}))]\} = 2E. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0(\phi) &= a_0'(s_1 \sin \phi + s_2 \cos \phi) + a_0 s_3, \\ \tilde{f}_0(\phi) &= a_0'(s_2 \sin \phi - s_1 \cos \phi), \\ f_1(\phi) &= a_0'[(a_0 r_1 + p_2) \sin \phi + (a_0 r_2 - p_1) \cos \phi - a_0' r_3], \\ f_2(\phi) &= a_0'[(r_2 - a_0 p_1) \sin \phi - (a_0 p_2 + r_1) \cos \phi + a_0' p_3], \\ f_3(\phi) &= a_0'[(p_1 - a_0 r_2) \sin \phi + (p_2 + a_0 r_1) \cos \phi], \\ f_4(\phi) &= a_0'[(r_1 + a_0 p_2) \sin \phi + (r_2 - a_0 p_1) \cos \phi], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f_5(\phi) &= a'_0 \left[a_0 (s_1 \sin \phi + s_2 \cos \phi) - a'_0 s_3 \right], \\ f_6(\phi) &= -a'_0 \left[a'_0 (r_1 \sin \phi + r_2 \cos \phi) + a_0 r_3 \right], \\ f_7(\phi) &= a'_0 [a_0 (p_1 \sin \phi + p_2 \cos \phi) + a_0 p_3]. \end{aligned}$$

Сначала запишем интеграл (15) в силу (16)

$$\begin{aligned} & (A\bar{a} \cdot \bar{a}) \dot{\phi}^2 + 2(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) \dot{\phi} \dot{\psi} + (A\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}) \dot{\psi}^2 - \\ & - 2[f_0(\phi) + b_0(f_1(\phi) \sin(\psi + \psi_0) + f_2(\phi) \cos(\psi + \psi_0))] = 2E. \end{aligned} \quad (17)$$

Затем обратимся к уравнениям (12)–(14). На основании (16) имеем

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\bar{a} \cdot \bar{a}) + \ddot{\psi}(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) - \dot{\psi}^2 [\bar{a} \cdot (A\bar{\gamma} \times \bar{\gamma})] + \tilde{f}_0(\phi) - b_0(f_3(\phi) \sin(\psi + \psi_0) + \\ & + f_4(\phi) \cos(\psi + \psi_0)) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}) - 2\dot{\phi} \dot{\psi} [\bar{a} \cdot (\bar{\gamma} \times A\bar{\gamma})] - \dot{\phi}^2 [\bar{a} \cdot (\bar{\gamma} \times A\bar{a})] - \\ & - b_0(f_1(\phi) \cos(\psi + \psi_0) - f_2(\phi) \sin(\psi + \psi_0)) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi} [\bar{a} \cdot (\bar{\gamma} \times A\bar{a})] + \ddot{\psi} [\bar{a} \cdot (\bar{\gamma} \times A\bar{\gamma})] + \dot{\phi} \dot{\psi} [2(A\bar{\gamma} \times \bar{\gamma}) - a_0'^2 Sp(A) - 2a_0(A\bar{a} \cdot \gamma)] + \\ & \dot{\phi}^2 [(A\bar{a} \cdot \bar{\gamma}) - a_0(A\bar{a} \cdot \bar{a})] + \dot{\psi}^2 [a_0(A\bar{\gamma} \times \bar{\gamma}) - (A\bar{a} \cdot \gamma)] + \\ & + f_5(\phi) + f_6(\phi) \sin(\psi + \psi_0) + f_7(\phi) \cos(\psi + \psi_0) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Представление уравнений (12)–(15) в виде (17)–(20) связано с решением задачи о замене одного из уравнений (18)–(20) интегралом (17). Используя производные по времени

$$\dot{\gamma} = \dot{\phi}(\bar{\gamma} \times \bar{a}), \quad \dot{f}_0 = -\dot{\phi} \tilde{f}_0(\phi), \quad \dot{f}_1(\phi) = \dot{\phi} f_3(\phi), \quad \dot{f}_2(\phi) = \dot{\phi} f_4(\phi),$$

вычислим производную по времени от левой части уравнения (17). Учтем в полученном уравнении соотношения (18), (19). В результате, при условии невырожденности уравнений (18), (19) (т.е. при исключении множества решений, на котором уравнения (18), (19) становятся тождествами), приходим к заключению, что одно из уравнений (18), (19) можно заменить интегралом (17). Следовательно, уравнение (20) рассматривать необходимо всегда. В ряде случаев целесообразно привлекать оба уравнения (18), (19); это зависит от вида дополнительных ИС.

2. Случай $\dot{\psi} = n\dot{\phi}$. Для того, чтобы объединить в один класс рассматриваемые резонансные прецессии, целесообразно исследовать случай

$$\dot{\psi} = n\dot{\phi}, \quad (21)$$

где параметр n имеет значения

$$n \in N (n > 2), \quad n = \frac{1}{k} (k \in N, k > 2). \quad (22)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Phi_1(\phi) &= f_1(\phi) \cos(n\phi + \psi_0) - f_2(\phi) \sin(n\phi + \psi_0) = \\ &= H_{n+1} \sin(n+1)\phi + G_{n+1} \cos(n+1)\phi + H_n \sin n\phi + G_n \cos n\phi + \\ &\quad + H_{n-1} \sin(n-1)\phi + G_{n-1} \cos(n-1)\phi, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \frac{1}{2} [(b_1 - c_2) \cos \psi_0 - (b_2 + c_1) \sin \psi_0], \\ G_{n+1} &= \frac{1}{2} [(b_1 - c_2) \sin \psi_0 + (b_2 + c_1) \cos \psi_0], \\ H_n &= -(b_0 \sin \psi_0 + c_0 \cos \psi_0), \quad G_n = b_0 \cos \psi_0 - c_0 \sin \psi_0, \\ H_{n-1} &= \frac{1}{2} [(c_1 - b_2) \sin \psi_0 - (b_1 + c_2) \cos \psi_0], \\ G_{n-1} &= \frac{1}{2} [(b_2 - c_1) \cos \psi_0 - (b_1 + c_2) \sin \psi_0]. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом (23), (24) запишем выражения функций $\Phi_2(\phi)$, $\Phi_3(\phi)$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\phi) &= f_1(\phi) \sin(n\phi + \psi_0) + f_2(\phi) \cos(n\phi + \psi_0) = \\ &= G_{n+1} \sin(n+1)\phi - H_{n+1} \cos(n+1)\phi + G_n \sin n\phi - H_n \cos n\phi + \\ &\quad + G_{n-1} \sin(n-1)\phi - H_{n-1} \cos(n-1)\phi, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(\phi) &= f_3(\phi) \sin(n\phi + \psi_0) + f_4(\phi) \cos(n\phi + \psi_0) = \\ &= H_{n+1} \sin(n+1)\phi + G_{n+1} \cos(n+1)\phi - H_{n-1} \sin(n-1)\phi - \\ &\quad - G_{n-1} \cos(n-1)\phi. \end{aligned} \quad (26)$$

В соотношениях (24), в силу (16), значения $b_1 - c_2$, $b_2 + c_1$, $b_1 + c_2$ таковы

$$\begin{aligned} b_1 - c_2 &= a'_0 (a_0 + 1) (r_1 + p_2), \quad b_2 + c_1 = a'_0 (a_0 + 1) (r_2 - p_1), \\ b_1 + c_2 &= a'_0 (1 - a_0) (p_2 - r_1), \quad c_1 - b_2 = a'_0 (1 - a_0) (p_1 + r_2). \end{aligned} \quad (27)$$

На основании (27) величины (24) запишем в виде

$$H_{n+1} = (a_0 + 1) \tilde{H}_{n+1}, \quad \tilde{H}_{n+1} = \frac{a'_0}{2} [(r_1 + p_2) \cos \psi_0 - (r_2 - p_1) \sin \psi_0],$$

$$G_{n+1} = (a_0 + 1) \tilde{G}_{n+1}, \quad \tilde{G}_{n+1} = \frac{a_0'}{2} [(r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0], \quad (28)$$

$$H_n = a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_n = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0),$$

$$H_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{H}_{n-1}, \quad \tilde{H}_{n-1} = \frac{a_0'}{2} [(p_1 + r_2) \sin \psi_0 - (p_2 - r_1) \cos \psi_0],$$

$$G_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{G}_{n-1}, \quad \tilde{G}_{n-1} = -\frac{a_0'}{2} [(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0].$$

Переход от обозначений (24) к обозначениям (28) связан с представлением функции

$$\begin{aligned} \Phi_4(\phi) &= f_6(\phi) \sin(n\phi + \psi_0) + f_7(\phi) \cos(n\phi + \psi_0) = \\ &= a_0' [-\tilde{G}_{n+1} \sin(n+1)\phi + \tilde{H}_{n+1} \cos(n+1)\phi + b_0^2 a_0 (G_n \sin n\phi - H_n \cos n\phi) - \\ &\quad - \tilde{G}_{n-1} \sin(n-1)\phi + \tilde{H}_{n-1} \cos(n-1)\phi]. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнения (17)–(20) запишем для случая динамически симметричного твердого тела, то есть при условиях

$$A_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad A_2 = A_1, \quad (30)$$

где для простоты записи положено $A_2 = A_{22}$, $A_1 = A_{11}$; кроме этих равенств далее A_{33} будем обозначать через A_3 . Тогда уравнения (17)–(20) представим в виде

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2F_1(\phi)}{L_0}, \quad (31)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\lambda}{\mu_0} F_2(\phi), \quad (32)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{b_0}{N_0} \phi_1(\phi), \quad (33)$$

$$na_0'^2 K_0 \dot{\phi}^2 + F_3(\phi) = 0, \quad (34)$$

где

$$F_1(\phi) = (a_0 s_3 + E) + a_0' (s_1 \sin \phi + s_2 \cos \phi) + b_0 \Phi_2(\phi), \quad (35)$$

$$L_0 = a_0'^2 n^2 A_1 + (1 + a_0 n)^2 A_3, \quad (36)$$

$$F_2(\phi) = b_0 \Phi_3(\phi) + a_0' (s_1 \cos \phi - s_2 \sin \phi), \quad (37)$$

$$\mu_0 = (\lambda + a_0 n) A_3, \quad (38)$$

$$N_0 = a_0'^2 n (A_3 - A_1) + n A_1 + a_0 A_3, \quad (39)$$

$$F_3(\phi) = \Phi_4(\phi) + a_0' [a_0 (s_1 \sin \phi + s_2 \cos \phi) - a_0' s_3], \quad (40)$$

$$K_0 = a_0 n A_1 - (\lambda + a_0 n) A_3. \quad (41)$$

3. Случай $n=1$. Из (21) при $n = 1$ следует

$$\dot{\psi} = \dot{\phi}. \quad (42)$$

При выполнении условия (42) подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости (10) симметричны друг другу относительно касательной плоскости к соответствующим аксоидам, проходящей через неподвижную точку O . Такое движение тела называется изоконическим [9, 11]. Следовательно, в рассматриваемом случае движение тела будет прецессионно-изоконическим. Уравнения (31)–(34) совместны, если выполнены следующие условия на параметры p_i , r_i ($i = 1, 2$) и s_1 , s_2

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1, \quad r_2 \cos \psi_0 - r_1 \sin \psi_0 = 0, \quad (43)$$

$$s_1 = \frac{1}{\mu_0} (p_3 \sin \psi_0 + r_3 \cos \psi_0), \quad s_2 = \frac{1}{\mu_0} (p_3 \cos \psi_0 - r_3 \sin \psi_0), \quad (44)$$

где

$$\mu_0 = -\frac{1}{A_3} [(1 - a_0) A_1 + a_0 A_3]. \quad (45)$$

Параметр μ_0 из (45) не обращается в нуль, так как в силу (30) $2A_1 > A_3$. В противном случае a_0 не принадлежит промежутку $(-1, 1)$.

Значение параметра a_0 находим из уравнения

$$F(a) = a_0^2 (A_3 - A_1) + a_0 (3A_1 + A_3) - 2A_3 = 0. \quad (46)$$

Функция $\phi(t)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{h_0} \left[a_0 (\mu_0 - 1) (s_1 \sin \phi + s_2 \cos \phi) + a_0' (s_3 + r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) \right], \quad (47)$$

где

$$h_0 = a_0' [a_0 (A_1 - A_3) - A_3]. \quad (48)$$

Отметим, что при получении формул (43)–(47) были использованы обозначения (23)–(29), (36), (38), (40), (41). Параметр h_0 из (48) не обращается в нуль, так как при $h_0 = 0$ из формулы (47) следуют равенства $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Обращаясь к уравнению (31), на основании условий (43), (44), получим $\dot{\phi} = \text{const}$, что исключается из рассмотрения в силу постановки задачи.

Положим в уравнении (46) $A_3 = A_1$. Тогда из (46) имеем

$$a_0 = \frac{1}{2} (\theta_0 = 60^\circ). \quad (49)$$

Для исследования уравнения (46) при $a_0 \neq \frac{1}{2}$ целесообразно ввести параметр $y = \frac{A_1}{A_3}$, а параметр a_0 обозначить через x . Следовательно, зависимость $y(x)$ такова

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x(x - 3)}. \quad (50)$$

На основании свойств главных моментов инерции тела с учетом неравенств треугольника получим $y > \frac{1}{2}$. Из свойства функции (50) следует, что параметр $a_0 \in (0, x_*)$, где

$$x_* = \frac{1}{2} \left(-5 + \sqrt{41} \right). \quad (51)$$

Из первых двух равенств системы (43) можно сделать заключение, что векторы $\bar{r} = (r_1, r_2, 0)$ и $\bar{p} = (r_2, -r, 0_1)$ ортогональны; третье равенство из (43) служит для определения параметра $\psi_0 = \arctg \frac{r_2}{r_1}$. Поскольку ограничений на параметр s_3 нет, то выбором значений этого параметра можно добиться условия действительности функции $\phi(t)$ из уравнения (47). В общем случае $\phi(t)$ является эллиптической функцией времени.

4. Случай $n = \frac{1}{2}$. Пусть скорости прецессии и собственного вращения тела удовлетворяют условию

$$\dot{\phi} = 2\dot{\psi}, \quad (52)$$

то есть, во всех функциях п. 2 необходимо положить $n = \frac{1}{2}$. Однако, для наглядности запишем их, принимая за вспомогательную переменную угол прецессии ψ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} f_0(\psi) &= a_0' (s_1 \sin 2\psi + s_2 \cos 2\psi) + a_0 s_3, \\ \tilde{f}_0(\psi) &= a_0' (s_2 \sin 2\psi - s_1 \cos 2\psi), \\ f_1(\psi) &= b_1 \sin 2\psi + b_2 \cos 2\psi + b_0, \\ f_2(\psi) &= c_1 \sin 2\psi + c_2 \cos 2\psi + c_0, \\ f_3(\psi) &= -b_2 \sin 2\psi + b_1 \cos 2\psi, \\ f_4(\psi) &= -c_2 \sin 2\psi + c_1 \cos 2\psi, \\ f_5(\psi) &= a_0' \left[a_0 (s_1 \sin 2\psi + s_2 \cos 2\psi) - a_0' s_3 \right], \\ f_6(\psi) &= -a_0' [a_0 (r_1 \sin 2\psi + r_2 \cos 2\psi) + a_0 r_3], \\ f_7(\psi) &= a_0' \left[a_0' (p_1 \sin 2\psi + p_2 \cos 2\psi) + a_0 p_3 \right], \end{aligned} \quad (53)$$

где b_i ($i = \overline{0, 2}$), c_i ($i = \overline{0, 2}$) имеют значения, которые можно получить из (16). Укажем вид функций $\Phi_2(\psi)$ и $\Phi_3(\psi)$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\psi) &= f_1(\psi) \sin(\psi + \psi_0) + f_2(\psi) \cos(\psi + \psi_0) = \\ &= H_3 \sin 3\psi + G_3 \cos 3\psi + H_1 \sin \psi + G_1 \cos \psi, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(\psi) &= f_3(\psi) \sin(\psi + \psi_0) + f_4(\psi) \cos(\psi + \psi_0) = \\ &= -G_3 \sin 3\psi + H_3 \cos 3\psi - \tilde{G}_1 \sin \psi + \tilde{H}_1 \cos \psi, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$H_3 = \frac{a_0'(a_0 + 1)}{2} [(r_2 - p_1) \cos \psi_0 + (r_1 + p_2) \sin \psi_0], \quad (56)$$

$$G_3 = \frac{a_0' (a_0 + 1)}{2} [(r_2 - p_1) \sin \psi_0 - (r_1 + p_2) \cos \psi_0],$$

$$H_1 = \tilde{H}_1 + H_1^*, \quad G_1 = \tilde{G}_1 + G_1^*, \quad (57)$$

$$\tilde{H}_1 = \frac{1}{2} a_0' (1 - a_0) [(p_1 + r_2) \cos \psi_o + (p_2 - r_1) \sin \psi_o], \quad (58)$$

$$\tilde{G}_1 = \frac{1}{2} a_0' (1 - a_0) [(p_2 - r_1) \cos \psi_o - (p_1 + r_2) \sin \psi_o],$$

$$H_2^* = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0), \quad G_1^* = a_0'^2 (p_3 \cos \psi_0 - r_3 \sin \psi_0). \quad (59)$$

Так как параметры H_1^* , G_1^* выражены через первоначальные параметры (см. (59)), то и параметры H_1 , G_1 целесообразно записать в виде

$$H_1 = (1 - a_0) [m_1 + (1 + a_0) m_2], \quad G_1 = (1 - a_0) [l_1 + (1 + a_0) l_2], \quad (60)$$

где

$$m_1 = \frac{a_0'}{2} [(p_1 + r_2) \cos \psi_o - (p_2 - r_1) \sin \psi_o], \quad (61)$$

$$l_1 = \frac{a_0'}{2} [(p_2 - r_1) \cos \psi_o + (p_1 + r_2) \sin \psi_o],$$

$$m_2 = -(r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0), \quad l_2 = p_3 \cos \psi_0 - r_3 \sin \psi_0. \quad (62)$$

Связь между параметрами H_1^* , G_1^* из (59) и параметрами m_2 , l_2 из (62) очевидна

$$H_1^* = a_0'^2 m_2, \quad G_1^* = a_0'^2 l_2. \quad (63)$$

При изучении уравнения (40) необходимо использовать и функцию

$$\begin{aligned} \Phi_4(\psi) &= f_6(\psi) \sin(\psi + \psi_0) + f_7(\psi) \cos(\psi + \psi_0) = \\ &= N_3 \sin 3\psi + K_3 \cos 3\psi + N_1 \sin \psi + K_1 \cos \psi, \end{aligned} \quad (64)$$

в которой введены обозначения

$$\begin{aligned} N_3 &= -a_0' n_1, \quad K_3 = -a_0' n_2, \\ N_1 &= a_0' (a_0' m_1 + a_0 m_2), \quad K_1 = a_0' (a_0' l_1 + a_0 l_2), \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$n_1 = \frac{1}{2} a_0' [(r_2 - p_1) \cos \psi_0 + (p_2 + r_1) \sin \psi_0], \quad (66)$$

$$n_2 = \frac{1}{2} a_0' [(r_2 - p_1) \sin \psi_0 - (p_2 + r_1) \cos \psi_0].$$

Связь параметров H_3 , G_3 из (56) и параметров n_1 , n_2 из (66) такова

$$H_3 = (1 + a_0) n_1, \quad G_3 = (1 + a_0) n_2. \quad (67)$$

Рассмотрим интеграл (31) при условии (52). Переходя в нем к переменной ψ , получим

$$B_0 \dot{\psi}^2 = 2R(\psi). \quad (68)$$

Здесь, в силу структуры (31) и вида функции $\Phi_2(\psi)$ из (54), обозначено

$$B_0 = a_0'^2 A_1 + (1 + 2a_0)^2 A_3, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} R(\psi) = & R_3 \sin 3\psi + P_3 \cos 3\psi + R_2 \sin 2\psi + P_2 \cos 2\psi + \\ & + R_1 \sin \psi + P_1 \cos \psi + R_0^*, \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$R_3 = b_0 H_3, \quad P_3 = b_0 G_3, \quad R_2 = a_0' s_1, \quad P_2 = a_0' s_2, \quad (71)$$

$$R_1 = b_0 H_1, \quad P_1 = b_0 G_1, \quad R_0^* = a_0 s_3 + E.$$

Преобразуем уравнения (32), (34) к новой вспомогательной переменной ψ . Вначале запишем результат преобразования (32)

$$C_0 \ddot{\psi} = \Phi_5(\psi). \quad (72)$$

Здесь обозначения имеют следующий вид

$$C_0 = (a_0 + 2) A_3, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \Phi_5(\psi) = & -P_3 \sin 3\psi + R_3 \cos 3\psi - P_2 \sin 2\psi + R_2 \cos 2\psi - \\ & - b_0 \tilde{G}_1 \sin \psi + b_0 \tilde{H}_1 \cos \psi. \end{aligned} \quad (74)$$

Затем приведем итоговое уравнение для (34)

$$D_0 \dot{\psi}^2 + \Phi_6(\psi) = 0, \quad (75)$$

$$D_0 = a_0'^2 [a_0 A_1 - (a_0 + 2) A_3], \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \Phi_6(\psi) = & N_3 \sin 3\psi + K_3 \cos 3\psi + G_0 a_0' (s_1 \sin 2\psi + s_2 \cos 2\psi) + \\ & + N_1 \sin \psi + K_1 \cos \psi - a_0'^2 s_3. \end{aligned} \quad (77)$$

Если в уравнении (75) положить $D_0 = 0$, то тогда равенство $\Phi_6(\psi) = 0$ должно выполняться для всех значений ψ . Из формулы (77) следует $N_3 = 0$, $K_3 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $N_1 = 0$, $K_1 = 0$, $s_3 = 0$ (очевидно при $a_0 = 0$ параметр $D_0 \neq 0$). Поскольку вектор $\vec{s} = \vec{0}$, то одно силовое поле отсутствует. Этот вариант не представляет интереса.

Рассмотрим условия совместности уравнений (68), (72), (75). Если продифференцируем обе части уравнения (68) по времени и подставим $\ddot{\psi}$ из (72) ($C_0 \neq 0$), то получим уравнение, которое будет тождеством по переменной ψ при выполнении условий $H_3 = 0$ и $G_3 = 0$. Остальные условия выпишем ниже, что упрощает вычисления.

Тогда из соотношений (56) следуют равенства

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1. \quad (78)$$

Выражения для m_1 и l_1 из (61) упрощаются

$$m_1 = a'_0 (r_2 \cos \psi_0 + r_1 \sin \psi_0), \quad l_1 = a'_0 (r_2 \sin \psi_0 - r_1 \cos \psi_0). \quad (79)$$

Аналогичные свойства имеют и параметры \tilde{H}_1, \tilde{G}_1 из формул (58)

$$\tilde{H}_1 = (1 - a_0) m_1, \quad \tilde{G}_1 = (1 - a_0) l_1. \quad (80)$$

В силу выражений H_1, G_1 из (60), а также формул (80), выпишем два остальные условия, вытекающие из рассмотрения (68), (72), и равенства, которые следуют в результате подстановки ψ^2 из (68) в уравнение (75)

$$(B_0 - C_0) m_1 - (\lambda + a_0) C_0 m_2 = 0, \\ [2D_0 + (\lambda + a_0) B_0] m_1 + (\lambda + a_0) (2D_0 + a_0 B_0) m_2 = 0, \quad (81)$$

$$(B_0 - C_0) l_1 - (1 + a_0) C_0 l_2 = 0, \\ [2D_0 + (\lambda + a_0) B_0] l_1 + (\lambda + a_0) (2D_0 + a_0 B_0) l_2 = 0, \\ (B_0 - 2C_0) s_i = 0, \quad (2D_0 + a_0 B_0) s_i = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (82)$$

Предположим, что в системе (81), (82) выполняется равенство

$$2D_0 + a_0 B_0 = 0.$$

Тогда получим условия $m_i = 0, l_i = 0$ ($i = 1, 2$). В этом случае из равенств (62), (79) следует $r_i = 0, p_i = 0$ ($i = \overline{1, 3}$), то есть $\bar{r} = \bar{0}, \bar{p} = \bar{0}$, что исключено в данной задаче. Поэтому необходимо считать, что $2D_0 + a_0 B_0 \neq 0$. Следовательно, из (82) найдем равенство $s_i = 0$ ($i = \overline{1, 2}$), то есть вектор $\hat{s} = (0, 0, s_3)$ принадлежит третьей координатной оси подвижной системы координат.

Из уравнений (81), на основании принятых ранее обозначений, получим

$$3a_0 (1 - a_0) A_1 + 2 (3a_0^2 + a_0 - 1) A_3 = 0, \quad (83)$$

$$a'_0 r_2 [(1 - a_0) A_1 + (4a_0 - 1) A_3] + (a_0 + 2) r_3 A_3 = 0, \quad (84)$$

$$a'_0 r_1 [(1 - a_0) A_1 + (4a_0 - 1) A_3] + (a_0 + 2) p_3 A_3 = 0, \quad (85)$$

$$E + a_0 s_3 = \frac{a_0'^2 s_3 B_0}{2D_0}. \quad (86)$$

Зависимость $\psi(t)$ определяем из (68) с учетом (69), (70), (78)

$$\psi^2 = \frac{1}{B_0 C_0} \left[b_0 (1 - a_0) B_0 (m_1 \sin \psi + l_1 \cos \psi) + \frac{a_0'^2 s_3 B_0 C_0}{2D_0} \right]. \quad (87)$$

Из (87) следует, что $\psi(t)$ – эллиптическая функция времени. Рассмотрим уравнение (83). При $A_3 = A_1$ из (83) имеем

$$a_0 = \frac{1}{3}. \quad (88)$$

Если в (83) $A_3 \neq A_1$, то параметр a_0 принадлежит промежутку

$$a_0 \in \left(0, \frac{-7 + \sqrt{193}}{18}\right). \quad (89)$$

5. О несуществовании прецессий вида $\dot{\phi} = k\dot{\psi}$ динамически симметричного тела в случае $k \in \mathbb{N}$ ($k > 2$). Кратко остановимся на доказательстве этого утверждения. Введем функции $\Phi_i(\psi)$ ($i = \overline{1, 4}$), которые следуют из постановки задачи, указанной в п. 2. Можно поступить формальным образом, состоящем в том, что вместо (21) полагаем (при $n = \frac{1}{k}$)

$$\dot{\phi} = k\dot{\psi}, \quad (90)$$

однако учитывая в соотношениях $\phi = k\psi$. Выпишем результат только для $\Phi_2(\psi)$, $\Phi_3(\psi)$, $\Phi_4(\psi)$:

$$\Phi_2(\psi) = f_1(\psi) \sin(\psi + \psi_0) + f_2(\psi) \cos(\psi + \psi_0) = G_{k+1} \sin(k+1)\psi - \quad (91)$$

$$-H_{k+1} \cos(k+1)\psi + G_1 \sin \psi - H_1 \cos \psi - G_{k-1} \sin(k-1)\psi - H_{k-1} \cos(k-1)\psi,$$

$$\Phi_3(\psi) = f_3(\psi) \sin(\psi + \psi_0) + f_4(\psi) \cos(\psi + \psi_0) = \quad (92)$$

$$= H_{k+1} \sin(k+1)\psi + G_{k+1} \cos(k+1)\psi + H_{k-1} \sin(k-1)\psi - G_{k-1} \cos(k-1)\psi,$$

$$\Phi_4 = a'_0 [-\tilde{G}_{k+1} \sin(k+1)\psi + \tilde{H}_{k+1} \cos(k+1)\psi + \quad (93)$$

$$+ a_0 b_0^2 (G_1 \sin \psi - H_1 \cos \psi) + \tilde{G}_{k-1} \sin(k-1)\psi + H_{k-1} \cos(k-1)\psi].$$

Обозначения H_{k+1} , G_{k+1} , H_{k-1} , G_{k-1} совпадают с обозначениями из (24), а G_1 , H_1 совпадают с обозначениями G_n , H_n из той же системы (24). Запишем исследуемые уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^2 = & \frac{2}{B_1} \{ (E + a_0 s_3) + a'_0 (s_1 \sin k\psi + s_2 \cos k\psi) + \\ & + b_0 [G_{k+1} \sin(k+1)\psi - H_{k+1} \cos(k+1)\psi - G_{k-1} \sin(k-1)\psi - \\ & - H_{k-1} \cos(k-1)\psi + G_1 \sin \psi - H_1 \cos \psi] \}, \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \frac{1}{C_1} \left\{ a'_0 (s_1 \cos k\psi - s_2 \sin k\psi) + \right. \\ & \left. + b_0 [H_{k+1} \sin(k+1)\psi + G_{k+1} \cos(k+1)\psi + H_{k-1} \sin(k-1)\psi - \right. \end{aligned} \quad (95)$$

$$-G_{k-1} \cos(k-1) \psi \} \},$$

$$\begin{aligned} & a_0' D_1 \dot{\psi}^2 + a_0 (s_1 \sin k \psi + s_2 \cos k \psi) - a_0' s_3 - \tilde{G}_{k+1} \sin(k+1) \psi + \\ & + \tilde{H}_{k+1} \cos(k+1) \psi + a_0 b_0^2 (G_1 \sin \psi - H_1 \cos \psi) + \tilde{G}_{k-1} \sin(k-1) \psi + \\ & + \tilde{H}_{k-1} \cos(k-1) \psi = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

В уравнениях (94)–(96) введены обозначения

$$B_1 = a_0'^2 A_1 + (k + a_0)^2 A_3, \quad C_1 = (k + a_0) A_3, \quad D_1 = a_0 A_1 - (k + a_0) A_3. \quad (97)$$

Подставим $\dot{\psi}^2$ из (94) в уравнения (95), (96) (при подстановке в (95) предварительно необходимо продифференцировать обе части (94) по времени t) и потребуем, чтобы полученные функции от ψ были тождествами по этой переменной. Тогда получаем систему для определения параметров

$$H_1 = 0, \quad G_1 = 0, \quad (98)$$

$$[B_1 - (k-1)C_1] H_{k+1} = 0, \quad [B_1 - (k+1)C_1] G_{k+1} = 0, \quad (99)$$

$$[B_1 - (k-1)C_1] H_{k-1} = 0, \quad [B_1 - (k+1)C_1] G_{k-1} = 0, \quad (100)$$

$$(B_1 - C_1)s_i = 0, \quad (a_0 B_1 + 2a_0'^2 D_1)s_i = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (101)$$

Из уравнений (98), в силу указанного ранее свойства параметров H_1, G_1 , следует $r_3 = 0, p_3 = 0$. Для системы уравнений (98)–(101) проведены исследования, которые были выполнены в работе [15], при рассмотрении вопроса о динамической невозможности прецессий вида $\dot{\psi} = n\dot{\phi}$ ($n \in \mathbb{N}, N > 2$), но только с учетом значений параметров B_1, C_1, D_1 из (97). Анализ исследований показал, что параметры r_1, r_2, p_1, p_2 имеют нулевые значения. По аналогии с результатом, полученным в работе [15], делаем заключение, что прецессии динамически симметричного тела, для которого выполняется резонансное соотношение $\dot{\phi} = k\dot{\psi}$ ($k \in \mathbb{N}, k > 2$), динамически невозможны.

Выводы. В статье рассмотрены резонансные прецессионные движения динамически симметричного тела. Получены новые решения исходных уравнений в эллиптических функциях времени в случаях $\dot{\psi} = \dot{\phi}, \dot{\phi} = 2\dot{\psi}$. Доказана динамическая невозможность прецессий $\dot{\phi} = k\dot{\psi}$ ($k \in \mathbb{N}, N > 2$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, тема № 1023020900001-4-1.1.2;1.1.1.

1. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука. – 1976. – 672 с.
2. Klein F. Über die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld. – N.Y.: Johnson Reprint Corp, 1965. – 966 p.
3. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. Mat. Pura et appl. – 1947. – S. 4. – 26, f. 3–4. – P. 271–281.

4. Горп Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горп // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 4. – С. 573–587.
5. Bressan A. Sulle precessini d'un corpo rigido costituenti moti di Hess / A. Bressan // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1957. – Vol. 27. – P. 276–283.
6. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона / А.И. Докшевич. – К.: Наук. думка, 1992. – 168 с.
7. Горп Г.В. Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел / Г.В. Горп, В.Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1988. – Т. 52, вып. 5. – С. 707–712.
8. Горп Г.В. Классические задачи динамики твердого тела. / Г.В. Горп, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – К.: Наук. думка, 1978. – 296 с.
9. Горп Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горп, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
10. Гашененко И.А. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горп, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2012. – 400 с.
11. Горп Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горп, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2013. – 408 с.
12. Yehia H.M. On the regular precession of an asymmetric rigid body acted acted uniform gravity and magnetic fields / H.M. Yehia // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. – 2015. – Vol. 2, iss. 3. – P. 200–205.
13. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted acted by an irreducible combination of three classical fields / H.M. Yehia // Egypt. J. Math. Soc. – 2017. – Vol. 25, iss. 2. – P. 216–219.
14. Hussein A.M. Precession motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields / A.M. Hussein // Russian J. Nonlin. Dyn. – 2019. – Vol. 15, iss. 3. – P. 285–292.
15. Горп Г.В. О резонансных прецессиях твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горп, А.В. Мазнев, Т.В. Белоконь // Вестник ДонГУ. Серия А: Естественные науки. – 2024. – № 4. – С. 11–17. – DOI: 10.5281/zenodo.14227446. – EDN: WKQLQF.
16. Горп Г.В. Исследование уравнений движения твердого тела в трех однородных силовых полях / Г.В. Горп, А.В. Мазнев, Т.В. Белоконь // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 4(89). – С. 5–13. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-4-5-13. – EDN: NLWGUI.

A.V. Maznev, A.V. Zyza, R.N. Neskorohev, T.V. Belokon

Investigation of the equations of motion of a solid body in three homogeneous force fields.

The article discusses the problem of the motion of a dynamically symmetric rigid body with a fixed point in a force field, which is a superposition of three homogeneous force fields. The conditions for the existence of resonant precessions, characterized by the commensurability of the velocities of precession and the own rotation of the body, are studied. New solutions of the equations of motion under resonance conditions are constructed and expressed in terms of Jacobi elliptic functions.

Keywords: *resonances, precessions, dynamical symmetry, homogeneous force fields.*

*Статья поступила в редакцию 11.06.2025;
доработана 18.07.2025;
рекомендована к печати 11.08.2025.*

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-21-34

EDN:TLPMBL

©2025. Н.С. Бондаренко¹**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ
ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ
ДЕЙСТВИЮ ПОПЕРЕЧНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ
СИЛЫ, НА БАЗЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ В ВАРИАНТЕ
{1,0}-АППРОКСИМАЦИИ**

Работа посвящена изучению влияния параметров ортотропии на внутренние силовые факторы в ортотропной пластине при действии поперечной сосредоточенной силы, приложенной в начале координат. Целью исследования является развитие обобщенной теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации применительно к задачам статики для ортотропных пластин, подверженных сосредоточенным силовым воздействиям. Данный подход предполагает разложение искомым и заданных функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты, что позволяет понизить размерность исходной задачи. Проведены численные исследования, демонстрирующие влияние упругих постоянных материала пластины на обобщенные моменты. При проведении исследований рассмотрен как случай изотропного материала пластины (равнопрочной стеклоткани типа 120), так и случай ортотропного материала (стеклопластика).

Ключевые слова: ортотропная пластина, поперечная сосредоточенная сила, обобщенные моменты, $\{1,0\}$ -аппроксимация, специальная G -функция.

Введение. Тонкостенные элементы конструкций в виде пластин и оболочек находят широкое применение в строительной сфере, авиационной и космической технике, промышленном производстве и др. В процессе эксплуатации подобные элементы конструкций могут подвергаться как сосредоточенным, так и локальным силовым воздействиям. В качестве материалов, из которых изготавливаются элементы конструкций, часто применяются композиты, обладающие выраженной анизотропией упругих свойств.

В случае сосредоточенного силового воздействия в пластине могут возникать сжимающие и растягивающие силы, изгибающие и крутящие моменты или

¹ Бондаренко Наталья Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: n.bondarenko123@mail.ru.

Bondarenko Natalya Sergeevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

их комбинации. Об актуальности проведения расчетов анизотропных, в частности ортотропных, пластин на действие сосредоточенной силы свидетельствует ряд публикаций последних лет. В работе Р.А. Сабирова [1] получены уравнения Сен-Венана и Кармана для ортотропной пластины с учетом приращения температуры. В статье С. Тойбаева с соавторами [2] для статического прогиба срединной плоскости ортотропной пластины получено приближенное аналитическое решение методом декомпозиции и проведен численный расчет. В работе А.О. Сердюка с соавторами [3] построено фундаментальное решение для тонкой упругой анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа на инерционном основании Винклера.

Для оценки явлений, обусловленных поперечными сдвигами и обжатием, необходимо использовать обобщенные теории пластин, позволяющие получить более точные результаты по сравнению с классической теорией Кирхгофа. Широкое распространение в настоящее время получили обобщенные теории пластин, основанные на различных методах сведения трехмерных задач к двумерным путем разложения искомых и заданных функций в ряды по полиномам Лежандра. В качестве примера работы, использующей такой подход, можно упомянуть публикацию А.А. Киреевкова с соавторами [4].

Целью настоящей статьи является развитие обобщенной теории пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации применительно к задачам статики для ортотропных пластин, подверженных сосредоточенным силовым воздействиям. Размерность трехмерной задачи статики в рамках данного подхода понижается за счет разложения искомых и заданных функций в ряды Фурье и по полиномам Лежандра от толщинной координаты, и удержания различного количества членов разложений в срединной плоскости и в нормальном к ней направлении [5]. К преимуществам такого подхода относится возможность рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней и большой толщины, а также возможность получения решения поставленной задачи с произвольной точностью за счет удержания необходимого количества членов в рядах Фурье.

В данной статье впервые выявлено влияние параметров ортотропии материала пластины на изгибающие моменты, возникающие при действии поперечной сосредоточенной силы, приложенной в начале координат.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластину толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z , где x, y – координаты точки в срединной плоскости пластины, z – нормальная координата. Пластина подвержена воздействию сосредоточенной силы, приложенной в начале координат.

В рамках обобщенной теории пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) представляются в виде отрезков рядов Фурье по полиномам Лежандра $P_k = P_k(z)$ от толщинной координаты z таким образом [5]:

- компоненты вектора перемещений

$$u_x(x, y, z) = u(x, y)P_0(z) + h\gamma_x(x, y)P_1(z),$$

$$\begin{aligned} u_y(x, y, z) &= v(x, y)P_0(z) + h\gamma_y(x, y)P_1(z), \\ u_z(x, y, z) &= w_0(x, y)P_0(z), \end{aligned}$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w_0 = w_0(x, y)$ — обобщенные перемещения пластины, являющиеся аналогами перемещений точек срединной поверхности; $\gamma_x = \gamma_x(x, y)$, $\gamma_y = \gamma_y(x, y)$ — аналоги углов поворота нормали;

- компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= \frac{N_x(x, y)}{2h}P_0(z) + \frac{3M_x(x, y)}{2h^2}P_1(z), \\ \sigma_y(x, y, z) &= \frac{N_y(x, y)}{2h}P_0(z) + \frac{3M_y(x, y)}{2h^2}P_1(z), \\ \tau_{xy}(x, y, z) &= \frac{S_{xy}(x, y)}{2h}P_0(z) + \frac{3H_{xy}(x, y)}{2h^2}P_1(z), \\ \tau_{xz}(x, y, z) &= \frac{Q_x(x, y)}{2h}\{P_0(z) - P_2(z)\}, \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= \frac{Q_y(x, y)}{2h}\{P_0(z) - P_2(z)\}, \quad \sigma_z(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

где $N_i = N_i(x, y)$, $M_i = M_i(x, y)$, $Q_i = Q_i(x, y)$ ($i = x, y$), $S_{xy} = S_{xy}(x, y)$, $H_{xy} = H_{xy}(x, y)$ — обобщенные усилия и моменты, из которых N_x , N_y , S_{xy} являются аналогами мембранных усилий; M_x , M_y , H_{xy} — аналогами изгибающих и крутящего моментов; Q_x , Q_y — аналогами перерезывающих сил;

- компоненты вектора объемной силы

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= \frac{q_x(x, y)}{2h}P_0(z) + \frac{3m_x(x, y)}{2h^2}P_1(z), \\ F_y(x, y, z) &= \frac{q_y(x, y)}{2h}P_0(z) + \frac{3m_y(x, y)}{2h^2}P_1(z), \quad F_z(x, y, z) = \frac{q_z(x, y)}{2h}P_0(z). \end{aligned} \tag{1}$$

Система уравнений НДС ортотропных пластин на базе $\{1,0\}$ -аппроксимации, описывающая напряженное состояние при изгибе, включает в себя [5]:

- соотношения упругости в перемещениях

$$\begin{aligned} M_x &= h\tilde{D}_x \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \nu_{21} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right), \quad M_y = h\tilde{D}_y \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right), \\ H_{xy} &= h\tilde{D}_{xy} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right), \\ Q_x &= \Lambda_x \left(\gamma_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad Q_y = \Lambda_y \left(\gamma_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\tilde{D}_x = \frac{2h^2}{3} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \tilde{D}_y = \frac{2h^2}{3} \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \tilde{D}_{xy} = \frac{2h^2}{3} G_{12},$$

$$\Lambda_x = \frac{5hG_{13}}{3}, \quad \Lambda_y = \frac{5hG_{23}}{3};$$

E_1, E_2 — модули Юнга для направлений x, y соответственно; ν_{12}, ν_{21} — коэффициенты Пуассона; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига, характеризующие изменение углов между главными направлениями x и y , x и z , y и z соответственно;

- уравнения равновесия

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_y = 0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0. \quad (3)$$

Перейдем в безразмерную систему координат x_1, x_2, x_3 , определенную с точностью до полутолщины пластины h ($x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$). Тогда система уравнений $\{1,0\}$ -аппроксимации для ортотропных пластин (2), (3) примет вид:

- соотношения упругости в перемещениях

$$M_1 = D_1 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu_{21} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right), \quad M_2 = D_2 \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right),$$

$$H = D_{12} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), \quad Q_j = \Lambda_j \left(\gamma_j + \frac{\partial w_0}{\partial x_j} \right) \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

где

$$D_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad D_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad D_{12} = \frac{2G_{12}}{3E},$$

$$\Lambda_j = \frac{5G_{j3}}{3E} \quad (j = 1, 2), \quad E = \sqrt{E_1 E_2}.$$

Заметим, что между упругими постоянными ортотропного материала существует зависимость $E_2\nu_{12} = E_1\nu_{21}$, из которой следует соотношение $D_2\nu_{12} = D_1\nu_{21}$.

Обобщенные моменты в уравнениях (4) определены с точностью до значения Eh^2 , а обобщенные перерезывающие силы — до Eh .

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 &= 0, & \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} - Q_2 + m_2 &= 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$m_1 = \frac{m_x}{Eh}, \quad m_2 = \frac{m_y}{Eh}, \quad q = \frac{q_z}{E}.$$

Для случая действия на пластину сосредоточенной силы компоненты вектора объемных сил (1) берем в виде

$$m_j(x_1, x_2) = m_j^* \delta(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \quad q(x_1, x_2) = q^* \delta(x_1, x_2), \quad (6)$$

где $m_j^* = \text{const}$; $q^* = \text{const}$; $\delta(x_1, x_2)$ — двумерная дельта-функция Дирака.

2. Методика решения задачи. Подставляя соотношения упругости в перемещениях (4) в уравнения равновесия (5), получим систему уравнений равновесия в перемещениях, правые части которой имеют вид (6)

$$\begin{aligned} L_{j1}^* \gamma_1 + L_{j2}^* \gamma_2 + L_{j3}^* w_0 &= -m_j^* \delta(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\ L_{31}^* \gamma_1 + L_{32}^* \gamma_2 + L_{33}^* w_0 &= q^* \delta(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где L_{ij}^* — дифференциальные операторы второго порядка

$$\begin{aligned} L_{11}^* &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_1, & L_{12}^* &= L_{21}^* = (\nu_{21} D_1 + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ L_{j3}^* &= L_{3j}^* = -\Lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2), & L_{22}^* &= D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_2, \\ L_{33}^* &= - \left(\Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned}$$

Применим двумерное интегральное преобразование Фурье [6] к системе (7)

$$\mathbf{B}_1 \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_2 \\ \tilde{w}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ -q^* \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \xi_1^2 + D_{12} \xi_2^2 + \Lambda_1 & (\nu_{21} D_1 + D_{12}) \xi_1 \xi_2 & -i \Lambda_1 \xi_1 \\ (\nu_{21} D_1 + D_{12}) \xi_1 \xi_2 & D_{12} \xi_1^2 + D_2 \xi_2^2 + \Lambda_2 & -i \Lambda_2 \xi_2 \\ -i \Lambda_1 \xi_1 & -i \Lambda_2 \xi_2 & -\Lambda_1 \xi_1^2 - \Lambda_2 \xi_2^2 \end{bmatrix},$$

ξ_1, ξ_2 — координаты точки в пространстве трансформант; $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{w}_0$ — трансформанты обобщенных перемещений.

Выполним замены независимых переменных в пространствах оригиналов и трансформант

$$\eta_j = \sqrt{\Lambda_j} \xi_j; \quad y_j = \frac{x_j}{\sqrt{\Lambda_j}} \quad (j = 1, 2).$$

Тогда с учетом якобиана преобразования, равного $(\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1/2}$, система (8) примет вид

$$\mathbf{B}_2 \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \sqrt{\Lambda_1} \\ \tilde{\gamma}_2 \sqrt{\Lambda_2} \\ \tilde{w}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{m_1^*}{\sqrt{\Lambda_1}} \\ \frac{m_2^*}{\sqrt{\Lambda_2}} \\ -q^* \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} A_1 \eta_1^2 + A_4 \eta_2^2 + 1 & A_3 \eta_1 \eta_2 & -i \eta_1 \\ A_3 \eta_1 \eta_2 & A_4 \eta_1^2 + A_2 \eta_2^2 + 1 & -i \eta_2 \\ -i \eta_1 & -i \eta_2 & -\eta_1^2 - \eta_2^2 \end{bmatrix},$$

$$A_j = \frac{D_j}{\Lambda_j^2} \quad (j = 1, 2), \quad A_3 = \frac{\nu_{21} D_1 + D_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2}, \quad A_4 = \frac{D_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2}.$$

Пусть имеет место случай наличия «гипотетического» модуля сдвига, т. е. между упругими постоянными ортотропного материала существует зависимость

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_{12} \nu_{21}})}. \quad (10)$$

Тогда решение системы (9) примет вид

$$\tilde{\gamma}_j = \sum_{m=0}^{11} \alpha_{jm} \tilde{\Psi}_m \quad (j = 1, 2), \quad \tilde{w}_0 = \sum_{m=0}^{11} \alpha_{3m} \tilde{\Psi}_m, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0 &= \frac{1}{\Delta_1}, \quad \tilde{\Psi}_1 = \frac{1}{\Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_2 = \frac{i \eta_1}{\Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_3 = \frac{i \eta_2}{\Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_4 = \frac{\eta_1^2}{\Delta_2}, \\ \tilde{\Psi}_5 &= \frac{\eta_2^2}{\Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_6 = \frac{\eta_1 \eta_2}{\Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_7 = \frac{\eta_1^2}{\Delta_1 \Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_8 = \frac{\eta_2^2}{\Delta_1 \Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_9 = \frac{\eta_1 \eta_2}{\Delta_1 \Delta_2}, \\ \tilde{\Psi}_{10} &= \frac{i \eta_1^2 \eta_2}{\Delta_1 \Delta_2}, \quad \tilde{\Psi}_{11} = \frac{i \eta_1 \eta_2^2}{\Delta_1 \Delta_2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta_1 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + a_0^2, \quad \Delta_2 = (\sqrt{A_1} \eta_1^2 + \sqrt{A_2} \eta_2^2)^2, \quad a_0^2 = \frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{D_{12}}.$$

Ненулевые коэффициенты в формулах (11) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\Lambda_2}} &= \frac{\alpha_{23}}{\sqrt{\Lambda_1}} = \frac{q^*}{2\pi \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}, \quad \alpha_{14} = -\frac{\alpha_{32}}{\sqrt{\Lambda_1}} = \frac{m_1^*}{2\pi \Lambda_1}, \\ \frac{\alpha_{16}}{m_2^*} &= \frac{\alpha_{26}}{m_1^*} = -\frac{A_3}{2\pi A_4 \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}, \quad \alpha_{18} = -\frac{\alpha_{15}}{A_4} = -\frac{m_1^* A_2}{2\pi \Lambda_1 A_4^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{19}}{m_2^*} &= \frac{\alpha_{29}}{m_1^*} = \frac{1 + A_3/A_4}{2\pi A_4 \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}, & \frac{\alpha_{3,11}}{m_1^*} &= -\frac{\alpha_{1,11}}{q^*} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\Lambda_1}} \frac{A_3 - A_2 + A_4}{A_4}, \\ \alpha_{25} &= -\frac{\alpha_{33}}{\sqrt{\Lambda_2}} = \frac{m_2^*}{2\pi \Lambda_2}, & \alpha_{27} &= -\frac{\alpha_{24}}{A_4} = -\frac{m_2^* A_1}{2\pi \Lambda_2 A_4^2}, \\ \frac{\alpha_{3,10}}{m_2^*} &= -\frac{\alpha_{2,10}}{q^*} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\Lambda_2}} \frac{A_3 - A_1 + A_4}{A_4}, & \alpha_{30} &= \alpha_{31} = \frac{q^*}{2\pi}, \\ \frac{\alpha_{37}}{A_1} &= \frac{\alpha_{38}}{A_2} = \frac{q^*}{2\pi A_4}.\end{aligned}$$

Для нахождения оригиналов функций $\tilde{\Psi}_1 - \tilde{\Psi}_6$, определяемых соотношениями (12), применим формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [6]. Методику обращения продемонстрируем на примере нахождения оригинала функции $\tilde{\Psi}_3$. С учетом выполненной ранее замены переменных получим

$$\Psi_3 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\eta_2}{(\sqrt{A_1}\eta_1^2 + \sqrt{A_2}\eta_2^2)^2} e^{-i(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2)} d\eta_1 d\eta_2. \quad (13)$$

В двойных интегралах (13) выполним замены переменных в пространствах оригиналов и трансформант

$$\zeta_j = \sqrt[4]{A_j} \eta_j, \quad z_j = \frac{y_j}{\sqrt[4]{A_j}} \quad (j = 1, 2).$$

Тогда с учетом якобиана преобразования, равного $(A_1 A_2)^{-1/4}$, интеграл (13) примет вид

$$\Psi_3 = \frac{\sqrt{\Lambda_2}}{2\pi \sqrt[4]{D_1 D_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\zeta_2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} e^{-i(\zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Выделяя в данном интеграле четные и нечетные части и применяя формулу Эйлера, получим

$$\Psi_3 = \frac{2\sqrt{\Lambda_2}}{\pi \sqrt[4]{D_1 D_2^2}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\zeta_2 \cos \zeta_1 z_1 \sin \zeta_2 z_2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (14)$$

Перейдем к полярным координатам по формулам

$$z_1 = r \cos \varphi, \quad z_2 = r \sin \varphi, \quad \zeta_1 = \rho \cos \theta, \quad \zeta_2 = \rho \sin \theta.$$

Тогда интеграл (14) примет вид:

$$\Psi_3 = \frac{2\sqrt{\Lambda_2}}{\pi \sqrt[4]{D_1 D_2^2}} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\cos(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \sin(r\rho \sin \varphi \sin \theta)}{\rho^2} d\rho. \quad (15)$$

К числителю дроби в подынтегральной функции (15) применим разложение Якоби–Ангера [7]

$$\begin{aligned} & \cos(x \cos \varphi \cos \theta) \sin(x \sin \varphi \sin \theta) = \\ & = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \sin(2n+1)\varphi \sin(2n+1)\theta, \end{aligned} \quad (16)$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν .

Учитывая значения интеграла от тригонометрических функций

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin(2n+1)\theta d\theta = \begin{cases} \pi/4, & n=0, \\ 0, & n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

и рекуррентную формулу для функции Бесселя [8]

$$2\nu J_\nu(z) = z \{J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)\},$$

преобразуем выражение (15) к виду

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= \frac{\sqrt{\Lambda_2} \sin \varphi}{\sqrt[4]{D_1 D_2^2}} \int_0^{\infty} \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2} d\rho = \\ &= \frac{\sqrt{\Lambda_2} r \sin \varphi}{2\sqrt[4]{D_1 D_2^2}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)}{\rho} d\rho + \int_0^{\infty} \frac{J_2(r\rho)}{\rho} d\rho \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Второй интеграл в фигурных скобках в (17) является табличным [8]. Для вычисления первого интеграла используем понятие конечной части (*f.p.*) от расходящегося интеграла [9] и значение табличного интеграла [8]:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_2(r\rho)}{\rho} d\rho = \frac{1}{2}, \quad f.p. \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)}{\rho} d\rho = \int_0^{\infty} \ln \rho J_1(r\rho) d\rho = -\ln \frac{\gamma r}{2}, \quad (18)$$

где $\ln \gamma = C = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера.

С учетом значений интегралов (18) функция (17) примет вид, представленный ниже. Сразу приведем окончательные выражения для оригиналов остальных функций $\tilde{\Psi}_1\text{--}\tilde{\Psi}_6$, найденные аналогично:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{1}{\sqrt[4]{D_1 D_2}} \frac{r^2}{4} \left(1 - \ln \frac{\gamma r}{2}\right), \quad \Psi_2 = \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{2\sqrt[4]{D_1^2 D_2}} r \cos \varphi \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma r}{2}\right), \\ \Psi_3 &= \frac{\sqrt{\Lambda_2}}{2\sqrt[4]{D_1 D_2^2}} r \sin \varphi \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma r}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_4 &= -\frac{\Lambda_1}{2\sqrt[4]{D_1^3 D_2}} \left(\frac{1}{2} \cos 2\varphi + \ln \frac{\gamma r}{2} \right), \\ \Psi_5 &= \frac{\Lambda_2}{2\sqrt[4]{D_1 D_2^3}} \left(\frac{1}{2} \cos 2\varphi - \ln \frac{\gamma r}{2} \right), \quad \Psi_6 = -\frac{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}{4\sqrt{D_1 D_2}} \sin 2\varphi,\end{aligned}\quad (19)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{x_1^2}{\sqrt{D_1}} + \frac{x_2^2}{\sqrt{D_2}}}, \quad \cos \varphi = \frac{x_1}{\sqrt[4]{D_1} r}, \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{\sqrt[4]{D_2} r}.$$

Методику обращения трансформант функций $\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_7, \dots, \tilde{\Psi}_{11}$ продемонстрируем на примере трансформанты $\tilde{\Psi}_{10}$. Применим формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [6] к трансформанте функции $\tilde{\Psi}_{10}$, определяемой соотношением (12):

$$\Psi_{10} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\eta_1^2 \eta_2 e^{-i(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2)}}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 + a_0^2) (\sqrt{A_1} \eta_1^2 + \sqrt{A_2} \eta_2^2)^2} d\eta_1 d\eta_2. \quad (20)$$

Выделяя в интегралах (20) четные и нечетные части и применяя формулу Эйлера, получим

$$\Psi_{10} = \frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\eta_1^2 \eta_2 \cos \eta_1 y_1 \sin \eta_2 y_2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 + a_0^2) (\sqrt{A_1} \eta_1^2 + \sqrt{A_2} \eta_2^2)^2} d\eta_1 d\eta_2. \quad (21)$$

Перейдем к полярным координатам по формулам

$$y_1 = r_0 \cos \varphi_0, \quad y_2 = r_0 \sin \varphi_0, \quad \eta_1 = \rho \cos \theta, \quad \eta_2 = \rho \sin \theta.$$

Тогда интеграл (21) примет вид:

$$\begin{aligned}\Psi_{10} &= \frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\cos(r_0 \rho \cos \varphi_0 \cos \theta) \sin(r_0 \rho \sin \varphi_0 \sin \theta)}{\rho^2 + a_0^2} d\rho,\end{aligned}\quad (22)$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{(\sqrt{A_1} \cos^2 \theta + \sqrt{A_2} \sin^2 \theta)^2}.$$

Применяя разложение Якоби–Ангера (16), преобразуем выражение (22) к виду

$$\Psi_{10} = \frac{4}{\pi\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin(2n+1)\varphi_0 \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos^2 \theta \sin \theta \sin(2n+1)\theta d\theta \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{J_{2n+1}(r_0\rho)d\rho}{\rho^2 + a_0^2}. \quad (23)$$

Сравнивая интегралы, входящие в (23), с интегральным представлением специальной G -функции [7]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho,$$

$$r > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < n + 3/2,$$

заметим, что

$$\int_0^\infty \frac{J_{2n+1}(r_0\rho)d\rho}{\rho^2 + a_0^2} = (-1)^{n+1} \frac{r_0}{2} G_{n+1,n}(a_0 r_0).$$

Тогда функция (23) примет вид, представленный ниже. Сразу приведем окончательные выражения для оригиналов остальных функций $\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_7, \tilde{\Psi}_{11}$, найденные аналогично:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{1}{2\pi} G_{0,0}(a_0 r_0), \quad \Psi_j = -\frac{2}{\pi a_0^2 \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} I_{j,0} \left\{ \ln \frac{\gamma r_0}{2} + G_{0,0}(a_0 r_0) \right\} - \\ &\quad - \frac{r_0^2}{\pi \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \sum_{n=1}^\infty I_{j,n} \cos 2n\varphi_0 G_{n+1,n-1}(a_0 r_0) \quad (j = 7, 8), \\ \Psi_9 &= -\frac{r_0^2}{2\pi \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \sum_{n=1}^\infty I_{9,n} \sin 2n\varphi_0 G_{n+1,n-1}(a_0 r_0), \\ \Psi_{10} &= -\frac{2r_0}{\pi \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \sum_{n=0}^\infty I_{10,n} \sin(2n+1)\varphi_0 G_{n+1,n}(a_0 r_0), \\ \Psi_{11} &= -\frac{2r_0}{\pi \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \sum_{n=0}^\infty I_{11,n} \cos(2n+1)\varphi_0 G_{n+1,n}(a_0 r_0), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} I_{7,n} &= \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos^2 \theta \cos 2n\theta d\theta, \quad I_{8,n} = \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin^2 \theta \cos 2n\theta d\theta, \\ I_{9,n} &= \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin 2\theta \sin 2n\theta d\theta, \quad I_{10,n} = \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos^2 \theta \sin \theta \sin(2n+1)\theta d\theta, \\ I_{11,n} &= \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos \theta \sin^2 \theta \cos(2n+1)\theta d\theta, \end{aligned}$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{x_1^2}{\Lambda_1} + \frac{x_2^2}{\Lambda_2}}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{x_1}{\sqrt{\Lambda_1} r_0}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{x_2}{\sqrt{\Lambda_2} r_0}.$$

Таким образом, оригиналы обобщенных перемещений имеют вид

$$\gamma_j = \sum_{m=0}^{11} \alpha_{jm} \Psi_m \quad (j = 1, 2), \quad w_0 = \sum_{m=0}^{11} \alpha_{3m} \Psi_m, \quad (25)$$

где функции Ψ_m определяются соотношениями (19), (24).

Подставляя выражения для обобщенных перемещений (25) в соотношения упругости в перемещениях (4), получим

$$\begin{aligned} M_1 &= D_1 \left(\sum_{m=0}^{11} \alpha_{1m} \Psi_{m,1} + \nu_{21} \sum_{m=0}^{11} \alpha_{2m} \Psi_{m,2} \right), \\ M_2 &= D_2 \left(\sum_{m=0}^{11} \alpha_{2m} \Psi_{m,2} + \nu_{12} \sum_{m=0}^{11} \alpha_{1m} \Psi_{m,1} \right), \\ H_{12} &= D_{12} \left(\sum_{m=0}^{11} \alpha_{1m} \Psi_{m,2} + \sum_{m=0}^{11} \alpha_{2m} \Psi_{m,1} \right), \\ Q_j &= \Lambda_j \left(\sum_{m=0}^{11} \alpha_{jm} \Psi_m + \sum_{m=0}^{11} \alpha_{3m} \Psi_{m,j} \right) \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Psi_{m,j} = \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_j} \quad (m = \overline{1, 11}; j = 1, 2).$$

3. Анализ результатов. Результаты численных исследований представлены на рисунках 1, 2 в виде графиков изгибающих моментов M_1 , M_2 соответственно, определяемых по формулам (26). Все графики построены вдоль оси абсцисс x_1 при $x_2 = 0$. Компоненты вектора объемной силы в формуле (6) брались такими:

$$m_1^* = m_2^* = 0; \quad q^* = 1.$$

На рисунках 1, 2 пунктирными линиями изображены графики обобщенных моментов для изотропного материала (**M1**), представляющего собой равнопрочную стеклоткань типа 120 [10], сплошными линиями — графики для ортотропного стеклопластика (**M2**) [11]. Значения упругих констант данных материалов приведены в таблице 1. Нормирующий коэффициент для q^* в формуле (27) равен Eh , нормирующие коэффициенты для изгибающих моментов M_1 , M_2 равны Eh^2 , где h — полутолщина пластины, $E = 73$ ГПа для материала **M1**; $E = 149,42$ ГПа для материала **M2**. Заметим, что для материалов **M1**, **M2** имеет место случай приведенной ортотропии, т. е. имеется «гипотетический» модуль сдвига (10).

Таблица 1. Механические характеристики материалов

Материал	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	G_{12} , ГПа	G_{13} , ГПа	G_{23} , ГПа	ν_{12}
M1	73	73	30,4	30,4	30,4	0,2
M2	122	183	60	44,8	39,3	0,2

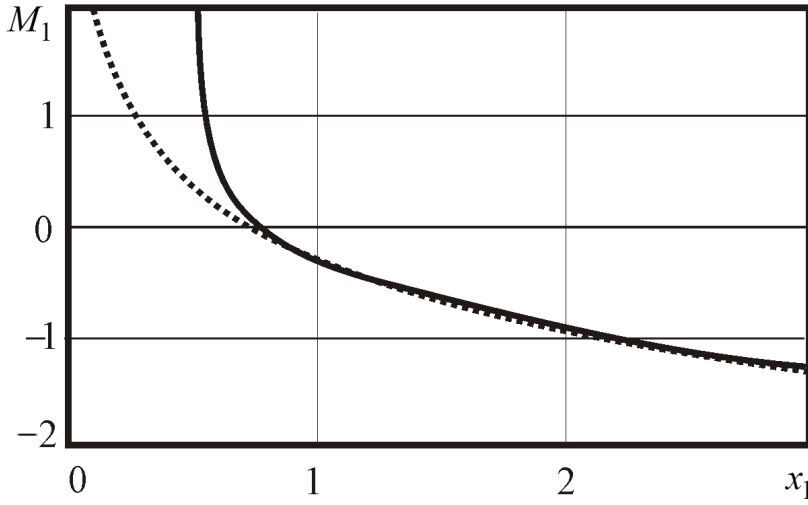


Рис. 1. Изгибающий момент M_1

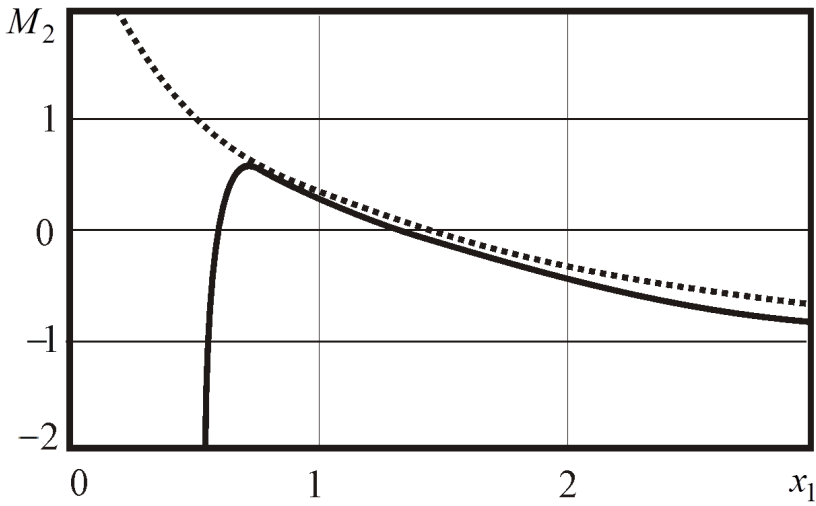


Рис. 2. Изгибающий момент M_2

Из рисунков 1, 2 видно, что при действии поперечной силы на пластину упругие постоянные материала оказывают существенное влияние на величину обобщенных изгибающих моментов в окрестности начала координат ($x_1 \ll 1$). В то же время при удалении от точки приложения сосредоточенной силы разница между моментами в изотропной и ортотропной пластине становится несущественной.

Выводы. В статье получены выражения для обобщенных моментов, представляющих собой фундаментальное решение задачи изгиба ортотропной пластины при действии произвольной сосредоточенной силы. Рассмотрен частный случай ортотропии материала пластины, когда между упругими постоянными материала существует взаимосвязь, обусловленная введением «гипотетического» модуля сдвига. В дальнейшем планируется решить аналогичную задачу для более общего случая ортотропного материала пластины без наложения дополнительных ограничений на упругие постоянные ортотропного материала.

Проведены численные исследования изгибающих моментов в пластине при действии сосредоточенной нагрузки, действующей в поперечном направлении к срединной плоскости пластины. Выполнено сравнение результатов для ортотропной пластины с графиками для изотропной пластины. Установлено, что при решении задачи изгиба пластины в окрестности точки приложения сосредоточенного воздействия необходимо учитывать параметры ортотропии материала.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400353-3).

1. *Сабиров Р.А.* Уравнения Сен-Венана и Кармана для ортотропной предварительно растянутой пластины при воздействии температуры / Р.А. Сабиров // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2023. – Т. 24, № 1. – С. 18–34. – DOI: 10.31772/2712-8970-2023-24-1-18-34.
2. *Тойбаев С.* Математическое моделирование приближенные численно-аналитические решения статических задач изгиба прямоугольной ортотропной пластины / С. Тойбаев, К. Тогжанова, У. Ангарбеков, Н. Смагулова, М. Женкіш // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева. – 2023. – № 4 (127). – С. 370–380. – DOI: 10.52167/1609-1817-2023-127-4-370-380.
3. *Сердюк А.О.* Фундаментальное решение для анизотропной пластины на инерционном основании / А.О. Сердюк, Д.О. Сердюк, Г.В. Федотенков // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – Т. 84, № 4. – С. 523–535. – DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-523-535.
4. *Киреевков А.А.* Метод сведения контактных задач для сферических оболочек типа Тимошенко к парным рядам-уравнениям / А.А. Киреевков, Е.Ю. Михайлова, Г.В. Федотенков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 3. – С. 390–401. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.03.06. – EDN: RJBFIV.
5. *Пелех Б.Л.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
6. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.
7. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
8. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
9. *Лукаевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукаевич. – М.: Мир, 1982. – 544 с.

10. Мельников Д.А. Теоретический расчет и экспериментальное определение модуля упругости и прочности стеклопластика ВПС-53/120 / Д.А. Мельников, А.А. Громова, А.Е. Раскутин, А.О. Курносов // Труды ВИАМ. – 2017. – № 1 (49). – С. 64–75. – DOI: 10.18577/2307-6046-2017-0-1-8-8.
11. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15, No. 1. – P. 16–25.

N.S. Bondarenko

Fundamental solution of the static problem for an orthotropic plate subjected to the action of a longitudinal concentrated force, based on the generalized theory in the $\{1,0\}$ -approximation version.

The article is devoted to studying the influence of orthotropy parameters on internal force factors in an orthotropic plate under the action of a transverse concentrated force applied at the origin of coordinates. The purpose of the research is to develop a generalized theory in the 1,0-approximation version as applied to static problems for orthotropic plates subjected to concentrated force influences. This approach involves expanding the required and given functions into Fourier series in Legendre polynomials of the thickness coordinate, which makes it possible to reduce the dimension of the original problem. Numerical investigations were carried out to demonstrate the influence of the elastic constants of the plate material on the generalized moments. During the research, both the case of an isotropic plate material (equal strength fiberglass type 120) and the case of an orthotropic material (fiberglass) were considered.

Keywords: *orthotropic plate, transverse concentrated force, generalized moments, $\{1,0\}$ -approximation, special G-function.*

*Статья поступила в редакцию 28.03.2025;
доработана 16.06.2025;
рекомендована к печати 11.08.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-35-51

EDN:VQWZNJ

©2025. С.А. Калоеров¹, Я.И. Гапотченко²

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Приведены основные соотношения для комплексного потенциала антиплоской деформации упругого анизотропного или изотропного тела, в том числе граничные условия для его определения, выражения через него напряжений и перемещений, его общее представление. Даны точные аналитические решения задач для цилиндрического тела эллиптического поперечного сечения и бесконечного тела с полостью эллиптического сечения. С использованием конформных отображений, разложений функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и обобщенного метода наименьших квадратов дано решение задачи для тела с многосвязной областью поперечного сечения. Для цилиндра с трещиной и бесконечного тела с эллиптическими полостями и трещинами проведены многочисленные исследования по выявлению влияния на значения и распределение напряжений материалов тел и геометрических характеристик отверстий и трещин.

Ключевые слова: антиплоская деформация, комплексный потенциал, отверстия, трещины, обобщенный метод наименьших квадратов, концентрация напряжений, коэффициент интенсивности напряжений.

Введение. В различных научно-технических областях в качестве элементов конструкций используются тела из анизотропных композиционных материалов с отверстиями и трещинами [1–5]. Под действием различных внешних сил около отверстий и трещин могут возникать высокие уровни концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. В связи с этим, для определения напряженно-деформированного состояния таких тел разработаны различные аналитические и численные методы [6–10]. Но для многосвязных сред достаточно надежные результаты при исследовании

¹ Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

² Гапотченко Яков Игоревич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: yakov.gapotchenko@gmail.com

Gapotchenko Yakov Igorevich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

довании напряженно-деформированного состояния можно получить на основе методов, использующих комплексные потенциалы [11–14].

Часто конструкционные элементы, представляющие собой многосвязные тела, находятся в состоянии антиплоской деформации. Комплексные потенциалы для определения их напряженного состояния широко использовались в работах [15–20] и позволили эффективно решить вопросы исследования их напряженного состояния.

В работах [15–19] рассматривались многосвязные тела с трещинами вдоль одной прямой, и на основе решения задач Римана-Гильберта методом линейного сопряжения находились представления комплексных потенциалов, точно удовлетворяющие граничным условиям на трещинах. Что же касается граничных условий на внешнем контуре (эллипса в работе [17]) или на контурах нескольких отверстий (для бесконечного многосвязного тела в работах [15, 16]), они удовлетворялись методом рядов, а в статьях [18, 19] – дискретным методом наименьших квадратов, который позволил рассматривать не только случаи внутренних трещин, но и случаи, когда трещины выходили на поверхность тела или даже пересекали ее.

В работе [20] задача об антиплоской деформации решена для многосвязного тела с произвольными отверстиями, каждое из которых может трансформироваться в трещину. При этом граничные условия на всех контурах удовлетворялись дискретным методом наименьших квадратов, а трещины рассматривались как частные случаи эллипсов, одна из полуосей которых равна нулю.

В данной статье, в отличие от работы [20], граничные условия на контурах удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов, который прост для численной реализации и обеспечивает удовлетворение граничных условий краевых задач с высокой степенью точности. Также методом рядов получено точное решение задачи для бесконечного тела с одной эллиптической полостью или трещиной. Описаны результаты численных исследований напряженного состояния эллиптического цилиндра с трещиной, в том числе краевой; тела с эллиптической полостью и трещиной, в том числе краевой; тела с двумя полостями, трещиной или разрезом между ними. Описаны закономерности влияния на значения напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) геометрических характеристик отверстий и трещин, а также параметров материалов тел.

1. Постановка задачи и основные соотношения для ее комплексного потенциала. Рассмотрим отнесенное к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, находящееся в условиях антиплоской деформации многосвязное тело с цилиндрическими полостями вдоль направления оси Oz , имеющее в каждой точке плоскость упругой симметрии, перпендикулярную оси Oz . Будем считать, что в общем случае поперечным сечением тела является многосвязная область S , ограниченная внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l (рис. 1).

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и

направлениями осей $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l параметрические уравнения эллипсов будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ – угловая характеристика параметрического задания эллипса L_l , изменяющаяся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки. По контурам отверстий L_l действуют непрерывные внешние усилия с главными векторами Z_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), во внутренних точках z_r^0 ($r = \overline{1, R}$) приложены сосредоточенные силы Z_r^0 . Как частный случай, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем иметь бесконечное тело с полостями. В последнем случае на бесконечности могут быть заданы касательные усилия $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$. Некоторые из эллиптических отверстий могут переходить в плоские разрезы-трещины. При наличии криволинейных контуров их можно аппроксимировать совокупностями дуг эллипсов или берегов разрезов.

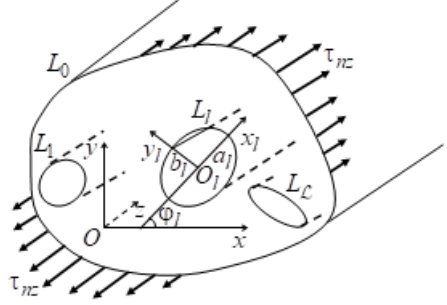


Рис. 1.

Если задачу об определении напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела решать методом комплексных потенциалов, то она сводится к нахождению функции $\Phi_3(z_3)$ обобщенной комплексной переменной

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (3)$$

где μ_3 – один из корней характеристического уравнения

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0, \quad (4)$$

в котором a_{ij} – коэффициенты деформаций материала, причем, так как для всех материалов $a_{45}^2 - a_{44}a_{55} < 0$, то это уравнение с вещественными коэффициентами имеет только комплексно-сопряженные корни:

$$\mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3, \quad \overline{\mu_3} = \alpha_3 - i\beta_3, \quad (5)$$

α_3, β_3 – положительные величины, вычисляемые по формулам

$$\alpha_3 = \frac{a_{45}}{a_{55}}, \quad \beta_3 = \frac{\sqrt{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}}{a_{55}}. \quad (6)$$

Комплексный потенциал $\Phi_3(z_3)$ на контурах L_l удовлетворяет определенным граничным условиям. В случае задания на контуре усилий Z_n эти условия имеют вид

$$2Re \Phi_3(z_3) = \pm \int_0^s Z_n ds + c_l, \quad (7)$$

где c_l – постоянные, одна из которых произвольна и может быть принята равной нулю. Если на контуре L_l заданы перемещения w_l^* , то граничное условие будет таким

$$2Re p_3 \Phi_3(z_3) = w_l^*, \quad (8)$$

$$p_3 = a_{55} \mu_3 - a_{45}. \quad (9)$$

Наконец, если по контуру L_l имеет место идеальный контакт тела с областью S и включения с областью S^l , то граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} 2Re \left[\Phi_3(z_3) - \Phi_3^{(l)}(z_3^{(l)}) \right] &= c_l, \\ 2Re \left[p_3 \Phi_3(z_3) - p_3^{(l)} \Phi_3^{(l)}(z_3^{(l)}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\Phi_3(z_3)$ и $\Phi_3^{(l)}(z_3^{(l)})$ – комплексные потенциалы для тел с областями S и S^l ; $p_3, p_3^{(l)}$ – соответствующие им параметры (9).

В общем случае многосвязной области комплексный потенциал антиплоской деформации имеет вид [20, 21]

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 z_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{3l} \ln(z_3 - z_{3l}) + \sum_{r=1}^R A_{3r}^0 \ln(z_3 - z_{3r}^0) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \Phi_{3l}(z_3), \quad (11)$$

где $g = 0$ в случае конечной области S и $g = 1$, если область S бесконечна; $\Gamma_3, A_{3l}, A_{3r}^0$ – постоянные, определяемые из решения соответствующих систем уравнений

$$2Re(\mu_3, 1) \Gamma_3 = (\tau_{xz}^\infty, -\tau_{yz}^\infty), \quad (12)$$

$$2Re(1, \mu_3) i A_{3l} = \left(1, \frac{a_{45}}{a_{55}} \right) \frac{Z_l}{2\pi}, \quad (13)$$

$$2Re(1, \mu_3) i A_{3r}^0 = \left(1, \frac{a_{45}}{a_{55}} \right) \frac{Z_r^0}{2\pi}; \quad (14)$$

$\Phi_{3l}(z_3)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) – функции, голоморфные вне контуров L_{3l} области S_3 , соответствующих контурам L_l при аффинном преобразовании (3). После конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{3l}| \geq 1$ на внешности L_{3l} [21]

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l}(\zeta_{3l} + m_{3l}/\zeta_{3l}), \quad (15)$$

$$z_{3l} = x_{0l} + \mu_3 y_{0l},$$

$$\begin{aligned} R_{3l} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)) / 2, \\ m_{3l} &= (a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)) / 2R_{3l}, \end{aligned} \quad (16)$$

их можно разложить в ряды Лорана вида

$$\Phi_{3l}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{3l}^n} \quad (17)$$

с неизвестными коэффициентами a_{kln} ; $\Phi_{30}(z_3)$ – функция, голоморфная внутри контура L_{30} области S_3 , соответствующего контуру L_0 при аффинном преобразовании (3). После конформного отображения внешности единичного круга $|\zeta_{30}| \geq 1$ на внешность контура L_{30} [21]

$$z_3 = z_{30} + R_{30} (\zeta_{30} + m_{30}/\zeta_{30}), \quad (18)$$

$$z_{30} = x_{00} + \mu_3 y_{00},$$

$$\begin{aligned} R_{30} &= (a_0 (\cos \varphi_0 + \mu_3 \sin \varphi_0) + ib_0 (\sin \varphi_0 - \mu_3 \cos \varphi_0)) / 2, \\ m_{30} &= (a_0 (\cos \varphi_0 + \mu_3 \sin \varphi_0) - ib_0 (\sin \varphi_0 - \mu_3 \cos \varphi_0)) / 2R_{30}, \end{aligned} \quad (19)$$

эту функцию для эллипса L_{30} можно разложить в ряд по полиномам Фабера вида

$$\Phi_{30}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{30n} P_{30n}(z_3). \quad (20)$$

При этом $P_{30n}(z_3)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место выражения [22]

$$P_{300} = 1, \quad P_{30n} = \zeta_{30}^n + m_{30}^n / \zeta_{30}^n, \quad (21)$$

или после перехода к переменной z_3 – выражения

$$P_{300} = 1, \quad P_{30n}(z_3) = \beta_{30n} (z_3 - z_{30})^n + \dots + \beta_{301} (z_3 - z_{30}) + \beta_{300} (n = 1, 2, \dots).$$

В последнем случае для $\Phi_{30}(z_3)$ будем иметь

$$\Phi_{30}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \alpha_{30n} \beta_{30p} (z_3 - z_{30})^p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{30n} (z_3 - z_{30})^n.$$

Таким образом, в общем случае комплексный потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_3) &= (1 - g)a_{300} + \Gamma_3 z_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{3l} \ln(z_3 - z_{3l}) + \\ &+ \sum_{r=1}^R A_{3r}^0 \ln(z_3 - z_{3r}^0) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\varphi_{30n}(z_3) = P_{30n} = \zeta_{30}^n + \frac{m_{30}^n}{\zeta_{30}^n} \quad \text{или} \quad \varphi_{30n}(z_3) = (z_3 - z_{30})^n,$$

$$\varphi_{3ln}(z_3) = \frac{1}{\zeta_{3l}^n} (l = \overline{1, \mathcal{L}}),$$

a_{3ln} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах области S . После определения этих постоянных комплексный потенциал (22) становится известной функцией, и по ней в любой точке можно найти основные касательные напряжения

$$(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 2Re (\mu_3, -1) \Phi'_3(z_3), \quad (23)$$

а также касательные напряжения на произвольной площадке с нормалью n и касательной s

$$\begin{aligned} \tau_{nz} &= \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny, \\ \tau_{sz} &= -\tau_{xz} \cos ny + \tau_{yz} \cos nx. \end{aligned} \quad (24)$$

Если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез (трещину) при $b_l = 0$, то для его концов можно вычислить также КИН k_{3l}^\pm , используя известную формулу [23]

$$k_{3l}^\pm = -2Re (\mu_3 \cos ny + \cos nx) M_{3l} = -2Re (\mu_3 \sin \varphi_l + \cos \varphi_l) M_{3l}, \quad (25)$$

в которой

$$M_{3l} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{3l}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} n a_{3ln}, \quad (26)$$

причем знаки «+» и «-» у КИН в локальной системе координат относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

2. Антиплоская деформация эллиптического цилиндра усилиями $Z_n = \tau \cos ny$. Пусть сплошной эллиптический цилиндр с поперечным сечением

в виде эллипса L_0 с полуосями a_0, b_0 (рис. 2) по внешнему контуру находится под действием касательных усилий $Z_n = \tau \cos ny$. В этом случае комплексный потенциал (22) имеет вид

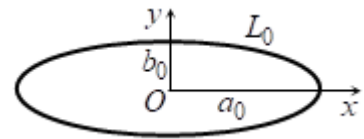


Рис. 2.

$$\Phi_{30}(z_3) = a_{300} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{30n} (\zeta_{30}^n + m_{30}^n / \zeta_{30}^n), \quad (27)$$

в котором ζ_{30} – переменная, определяемая из конформного отображения (18) при $z_{30} = 0$; a_{30n} – неизвестные постоянные, определяемые из граничного условия (7) на контуре L_0 , имеющего в данном случае вид

$$2Re \Phi_3(z_3) = -\tau x. \quad (28)$$

Последнее условие получено из условия (7) с учетом того, что $Z_n = \tau \cos ny$ и для контура L_0 имеют место равенства $\cos(ny) = -dx/ds$, $Z_n ds = -\tau dx$. Учитывая, что на контуре L_0

$$\zeta_{30} = \sigma, \quad x = a_0 \cos \theta = \frac{a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right),$$

из граничных условий (28) методом рядов найдем, что все коэффициенты a_{30n} равны нулю, кроме a_{301} , для которого имеют место равенства

$$m_{30}a_{301} + \overline{a_{301}} = -\frac{\tau a_0}{2}, \quad \text{или} \quad a_{301} + \overline{m_{30}} \overline{a_{301}} = -\frac{\tau a_0}{2},$$

из которых получим, что m_{30} и a_{301} – вещественные величины и

$$a_{301} = -\frac{\tau a_0}{2(1 + m_{30})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_{30}(z_3) &= a_{301} \left(\zeta_{30} + \frac{m_{30}}{\zeta_{30}} \right) = \frac{a_{301}}{R_{30}} z_3, \\ \Phi'_{30}(z_3) &= \frac{a_{301}}{R_{30}} = \frac{2a_{301}}{a_0 - i\mu_3 b_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда на основании (23)

$$\begin{aligned} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) &= 4Re \left[(\mu_3, -1) \frac{a_{301}}{a_0 - i\mu_3 b_0} \right] = \\ &= -2Re \left[(\mu_3, -1) \frac{\tau a_0}{(a_0 - i\mu_3 b_0)(1 + m_{30})} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

3. Решение задачи для бесконечного тела с эллиптической полостью. Пусть поперечное сечение тела занимает бесконечную односвязную область с эллиптическим отверстием с контуром L_1 и полуосями a_1, b_1 (рис. 3). Этот контур свободен от усилий и не подкреплён, на бесконечности действуют касательные усилия $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$.

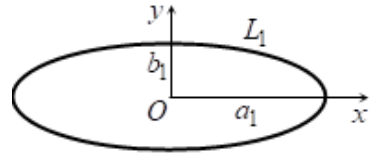


Рис. 3.

В этом случае комплексный потенциал (22) имеет представление

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 z_3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{31n}}{\zeta_{31}^n}, \quad (31)$$

в котором Γ_3 – постоянная, определяемая решением системы уравнений (12); ζ_{31} – переменная, вычисляемая из конформного отображения

$$z_3 = R_{31} \left(\zeta_{31} + \frac{m_{31}}{\zeta_{31}} \right), \quad (32)$$

где

$$R_{31} = \frac{a_1 - i\mu_3 b_1}{2}, \quad m_{31} = \frac{a_1 + i\mu_3 b_1}{a_1 - i\mu_3 b_1}; \quad (33)$$

a_{31n} – неизвестные постоянные, которые определим из граничных условий (7) на контуре L_1 . Для рассматриваемого случая эти условия примут вид

$$2Re \Phi_3(z_3) = c_1. \quad (34)$$

Подставив в эти условия функции (31) с учетом того, что на контуре

$$x = a_1 \cos \theta = \frac{a_1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = b_1 \sin \theta = -\frac{ib_1}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right),$$

и применив метод рядов, найдем, что $a_{31n} = 0$ при $n \geq 2$, а для a_{311} имеет место равенство

$$a_{311} = R_{31} m_{31} \Gamma_3 + \overline{R_{31}} \overline{\Gamma_3}. \quad (35)$$

Тогда функции (31) примут вид

$$\Phi_3(z_3) = {}_3 z_3 + \frac{a_{311}}{\zeta_{31}}, \quad (36)$$

а для напряжений имеют место выражения

$$(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 2Re(\mu_3, -1) \left({}_3 - \frac{a_{311}}{R_{31}(\zeta_{31}^2 - m_{31})} \right). \quad (37)$$

4. Решение общей задачи обобщенным методом наименьших квадратов. Пусть поперечным сечением отнесенного к прямоугольной системе координат $Oxyz$ тела является многосвязная область S (рис. 1), ограниченная внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l . Будем считать, что главные векторы усилий, приложенных к контурам отверстий L_l , равны нулю на каждом из них, а сосредоточенные силы отсутствуют. Тогда комплексный потенциал (22) будет иметь вид

$$\Phi_3^0(z_3) = (1 - g)a_{300} + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \quad (38)$$

где

$$\varphi_{30n}(z_3) = (z_3 - z_{30})^n, \quad \varphi_{3ln}(z_3) = 1/\zeta_{3l}^n \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (39)$$

a_{3ln} – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на всех контурах. В случаях многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из граничных условий (7) дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2Re \delta_{3,s} \Phi_3'(z_3) = \pm Z_n, \quad (40)$$

где $\delta_{3,s} = dz_3/ds$;

$$\Phi'_3(z_3) = \Gamma_3 + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi'_{3ln}(z_3); \quad (41)$$

$$\varphi'_{30n}(z_3) = n(z_3 - z_{30})^{n-1}; \quad \varphi'_{3ln}(z_3) = -\frac{n}{R_{3l}\zeta_{3l}^{n-1}(\zeta_{3l}^2 - m_{3l})} \quad (l = \overline{1, L}).$$

Граничным условиям (40) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [24–26]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p ($p = g, \mathcal{L}$) систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (41). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$2Re \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{3,s} \varphi'_{3ln}(t_{3pm}) a_{3ln} = \pm Z_n - 2Reg\delta_{3,s}\Gamma_3 \quad (p = \overline{g, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_p}). \quad (42)$$

Систему (42) будем решать методом сингулярного разложения [27, 28]. После нахождения псевдорешений этой системы функция $\Phi'_3(z_3)$ будет известной, и по ней можно вычислить в любой точке напряжения (23), (24), а в случае трещины – и КИН (25).

5. Описание результатов численных исследований. При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (38) и количество коллокационных точек на контурах L_l , в которых удовлетворялись граничные условия при получении уравнений системы (42), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не начинали выполняться с достаточно высокой степенью точности (пока модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). При этом количество учитываемых в рядах (38) членов увеличивалось до тех пор, пока значения получаемых напряжений не переставали изменяться в пятой значащей цифре. Как показывают исследования, для получения таких результатов в случае расстояний между отверстиями, больших их радиусов, в соответствующих рядах нужно оставлять 7–10 членов, а на контурах брать до 15–20 коллокационных точек. Для весьма близких расстояний между контурами нужно брать гораздо больше членов в рядах и коллокационных точек на контурах. В описываемых ниже случаях для достаточно близких расстояний между контурами в рядах оставлялось до 100–120 членов; на контуре бралось 400–500 равномерно удаленных (по угловой переменной параметрического задания эллипсов) друг от друга точек.

Были проведены многочисленные исследования напряженного состояния тела с различными геометрическими характеристиками и упругими свойствами его материала. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для цилиндра с трещиной и бесконечного тела с полостями и трещинами. Рассматривались тела из изотропного материала ($G_{xz}/G_{yz} = 1$) и существенно анизотропных композитных материалов с жесткими волокнами вдоль оси Ox ($G_{xz}/G_{yz} =$

$E_{yz}/E_{xz} = 0,1$) или вдоль оси Oy ($G_{xz}/G_{yz} = E_{yz}/E_{xz} = 10$). В качестве частных приведены результаты для сплошного эллиптического цилиндра и бесконечного тела с эллиптической полостью.

В таблице 1 для находящегося под действием касательных усилий $Z_n = \tau \cos ny$ по контуру кругового цилиндра радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) с центральной трещиной длины $2l_1$ (рис. 4) в зависимости от l_1/a_0 и центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, приведены значения нормированных касательных напряжений τ_{sz} по внешнему контуру цилиндра на площадках, перпендикулярных контуру, а также КИН k_3 для концов трещины. В силу упругой симметрии (тело ортотропное) и симметрии нагружения значения напряжений приведены лишь для первой четверти, причем при $\theta = \pi/2$ они равны нулю и в таблицу не включены. Кроме того, относящиеся к сплошному цилиндру данные (при $l_1/a_0 = 0$), одинаковые для любых материалов (что подтверждается и точным решением по формулам п. 2), приведены лишь для изотропного тела (при $G_{xz}/G_{yz} = 1$). Из данных таблицы 1 следует, что при $l_1/a_0 \leq 0,1$ влияние трещины на напряженное состояние около внешнего контура L_0 незначительно и им можно пренебречь; для случаев $l_1/a_0 \geq 0,7$ с увеличением длины трещины в зонах между ее концами и контуром L_0 концентрация напряжений резко растет без значительных перемен в других зонах.

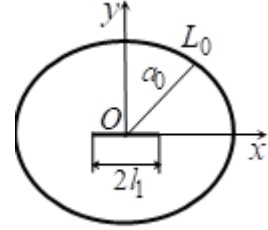


Рис. 4.

Таблица 1. Значения напряжений τ_{sz} по контуру кругового цилиндра с центральной трещиной и КИН для концов трещины

$\frac{G_{xz}}{G_{yz}}$	$\frac{l_1}{a_0}$	Напряжения τ_{sz} при θ , равных						КИН k_3
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	
10,0	0,01	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,1000
	0,10	1,012	0,970	0,866	0,707	0,500	0,259	0,3176
	0,50	1,407	1,047	0,874	0,707	0,501	0,260	0,7988
	0,90	4,238	1,057	0,726	0,589	0,548	0,373	1,4697
	0,99	14,518	1,108	0,438	0,520	0,807	0,395	1,6934
1,0	0,00	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	—
	0,01	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,1000
	0,10	1,010	0,976	0,875	0,714	0,505	0,261	0,3178
	0,50	1,354	1,282	1,102	0,866	0,596	0,304	0,8108
	0,90	6,119	2,553	1,500	1,018	0,667	0,338	2,0340
0,1	0,99	28,637	2,730	1,048	0,550	0,681	0,459	3,1437
	0,01	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,1000
	0,10	1,001	0,967	0,868	0,711	0,508	0,277	0,3230
	0,50	1,066	1,044	0,991	0,950	0,869	0,486	0,9622
	0,90	4,451	4,333	3,095	1,855	1,080	0,507	2,3183
	0,99	55,946	7,028	3,205	1,846	1,082	0,510	6,2287

В таблице 2 для находящегося под действием касательных усилий $Z_n = \tau \cos ny$ по контуру кругового цилиндра L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) с трещиной длины $2l_1 = 0,5a_0$ (рис. 5) в зависимости от $c/2l_1$, где c – расстояние между контуром круга и ближайшей к нему вершиной трещины, и центрального угла θ приведены значения нормированных напряжений τ_{sz} по контуру цилиндра и КИН k_3 для концов трещины. При этом отрицательные значения $c/2l_1$ соответствуют случаям краевой трещины длины $2l_1 - c$. Если краевая трещина превращается в точку на контуре L_0 (при $c/2l_1 = -1$), то значения напряжений получаются одинаковыми для любых материалов тела и совпадают с данными в таблице 1 при $l_1/a_0 = 0$ для изотропного материала. Как видно из таблицы 2, при сближении трещины с контуром L_0 напряжения в зоне перемычки между ближайшей к внешнему контуру вершиной трещины и внешним контуром резко растут, при незначительных изменениях напряжений в остальных зонах. Эти напряжения особенно велики в случаях, когда трещина располагается вдоль мягких волокон цилиндра ($G_{xz}/G_{yz} < 1$). При этом значения КИН для вершин трещины также изменяются незначительно. Заметим, что аналогичные выводы получаются в случае, когда в теле вместо трещины имеется отверстие эллиптического или кругового сечения.

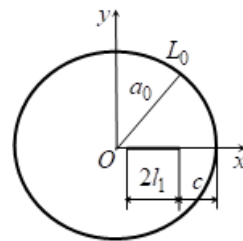


Рис. 5.

Таблица 2. Значения напряжений τ_{sz} по контуру кругового цилиндра с произвольной трещиной и КИН для концов трещины

G_{xz}/G_{yz}	$c/2l$	Напряжения τ_{sz} при соответствующих значениях θ								КИН	
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	k_3^-	k_3^+
10	1,50	1,081	0,988	0,87	0,50	0,00	-0,50	-0,87	-1,08	0,514	0,514
	1,00	1,137	0,974	0,86	0,50	-0,00	-0,50	-0,87	-1,06	0,515	0,517
	0,10	2,373	0,951	0,78	0,57	-0,08	-0,49	-0,87	-1,01	0,539	0,604
	0,01	6,704	0,960	0,75	0,60	-0,12	-0,48	-0,87	-1,00	0,548	0,652
	0,00	–	0,960	0,75	0,60	-0,12	-0,48	-0,87	-1,00	0,548	–
1,0	-0,50	–	0,978	0,82	0,55	-0,05	-0,50	-0,87	-1,00	0,382	–
	1,50	1,068	1,030	0,92	0,53	0,00	-0,53	-0,92	-1,07	0,516	0,516
	1,00	1,126	1,071	0,93	0,50	-0,03	-0,54	-0,91	-1,04	0,517	0,520
	0,10	2,938	0,985	0,74	0,43	-0,05	-0,53	-0,90	-1,02	0,563	0,668
	0,01	9,770	0,982	0,66	0,45	-0,07	-0,50	-0,92	-0,99	0,586	0,913
0,1	0,00	–	0,971	0,66	0,46	-0,07	-0,49	-0,91	-0,98	0,587	–
	-0,50	–	0,940	0,78	0,50	-0,03	-0,49	-0,89	-0,98	0,405	–
	1,50	1,007	0,974	0,88	0,56	0,00	-0,56	-0,88	-1,01	0,558	0,558
	1,00	1,028	0,999	0,92	0,63	-0,10	-0,52	-0,87	-1,00	0,560	0,565
	0,10	2,897	1,924	1,06	0,32	-0,02	-0,50	-0,87	-1,00	0,626	0,759
	0,01	15,608	1,758	0,86	0,29	-0,03	-0,49	-0,89	-0,94	0,674	1,344
	0,00	–	1,618	0,81	0,29	-0,03	-0,48	-0,90	-0,91	0,652	–
	-0,50	–	1,092	0,69	0,47	-0,01	-0,49	-0,89	-0,95	0,443	–

Рассмотрены случаи бесконечного тела с различными отверстиями. Как показывают исследования, на значения напряжений и характер их распределения около контуров L_l значительно влияют отношения полуосей b_l/a_l . Чем больше

это отношение отличается от единицы, тем больше становятся значения напряжений вблизи конца большой полуоси эллипса L_l и, как показывают исследования, при $|b_l/a_l| \leq 10^{-3}$ эллиптическое отверстие можно считать прямолинейным разрезом-трещиной и для его концов считать КИН.

В таблице 3 для находящегося на бесконечности под действием касательных усилий $\tau_{yz}^\infty = \tau_y$ тела с круговой полостью с контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) и трещиной полу-длины $l_2 = a_1$ на расстоянии A от контура отверстия (рис. 6), в зависимости от отношения A/a_1 с точностью до множителя τ_y приведены значения нормированных напряжений τ_{sz} по контуру отверстия и КИН для концов трещины. Положительные и отрицательные значения c/a_1 соответствуют случаям внутренней трещины длины $2l_2 = 2a_1$ и краевой трещины длины $2l_2 + c$. Данные для $c/a_1 = -2$ относятся к бесконечному телу с одной круговой полостью. Значения напряжений в этом случае совпадают с их значениями

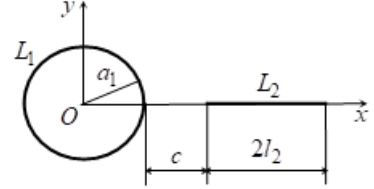


Рис. 6.

Таблица 3. Значения напряжений τ_{sz} по контуру кругового отверстия и КИН для концов трещины для бесконечного тела

G_{xz}/G_{yz}	$c/2l$	Напряжения τ_{sz} при соответствующих значениях θ								КИН	
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	k_3^-	k_3^+
10	∞	-1,316	-1,353	-1,47	-2,02	0,00	2,02	1,47	1,32	1,000	1,000
	4,00	-1,353	-1,386	-1,49	-2,02	0,09	2,06	1,48	1,33	1,058	1,044
	1,00	-1,663	-1,493	-1,45	-1,89	0,33	2,10	1,50	1,34	1,205	1,131
	0,10	-5,161	-1,315	-1,30	-1,66	0,71	2,03	1,54	1,32	1,727	1,256
	0,01	-15,845	-1,305	-1,29	-1,50	0,88	1,86	1,56	1,29	2,139	1,269
	-0,01	—	-1,288	-1,28	-1,47	0,89	1,83	1,56	1,29	2,076	1,262
	-0,10	—	-0,977	-1,15	-1,70	0,59	2,15	1,51	1,35	—	1,329
	-1,00	—	-1,300	-1,43	-1,81	0,38	1,89	1,52	1,29	—	0,946
	-2,00	-1,316	-1,353	-1,47	-2,02	0,00	2,02	1,47	1,32	—	—
	∞	-2,000	-1,932	-1,73	-1,00	0,00	1,00	1,73	2,00	1,000	1,000
1,0	4,00	-2,042	-1,971	-1,76	-1,01	0,01	1,02	1,75	2,02	1,034	1,024
	1,00	-2,355	-2,209	-1,86	-0,96	0,08	1,08	1,81	2,08	1,194	1,096
	0,10	-6,684	-2,488	-1,51	-0,67	0,26	1,20	1,91	2,17	1,945	1,252
	0,01	-24,306	-2,407	-1,08	-0,68	0,37	1,10	1,99	2,06	3,013	1,266
	-0,01	—	-2,87	-1,69	-0,80	0,13	1,10	1,83	2,10	—	1,122
	-0,10	—	-0,30	-0,47	-0,25	0,49	1,36	2,04	2,29	—	1,520
	-1,00	—	-1,984	-1,18	-0,87	0,19	0,99	1,86	1,96	—	1,050
	-2,00	-2,000	-1,932	-1,73	-1,00	0,00	1,00	1,73	2,00	—	—
	∞	-4,162	-2,508	-1,11	-0,27	0,00	0,27	1,11	4,16	1,000	1,000
	4,00	-4,240	-2,554	-1,13	-0,27	0,00	0,27	1,12	4,21	1,023	1,016
0,1	1,00	-4,716	-2,811	-1,21	-0,27	0,01	0,29	1,17	4,36	1,146	1,068
	0,10	-9,816	-4,082	-1,23	-0,17	0,07	0,35	1,28	4,72	1,974	1,198
	0,01	-38,134	-3,808	-0,66	-0,17	0,12	0,38	1,37	4,76	3,915	1,272
	-0,01	—	-0,41	-0,26	0,05	0,19	0,48	1,53	5,21	—	1,454
	-0,10	—	-0,14	-0,09	0,04	0,17	0,45	1,48	5,31	—	1,445
	-1,00	—	-3,199	-0,43	-0,30	0,08	0,32	1,26	4,17	—	1,059
	-2,00	-4,162	-2,508	-1,11	-0,27	0,00	0,27	1,11	4,16	—	—

по точному решению для тела с одной полостью, приведенному выше в п. 3. На рисунке 7 для различных значений G_{xz}/G_{yz} изображены графики распределения нормированных напряжений τ_{sz} около контура L_1 . При этом сплошные, штриховые и штрих-пунктирные линии относятся соответственно к случаям значений c/a_1 , равных ∞ , 1 и 0,1.

Как видно из таблицы 3 и рисунка 7, при сближении внутренней трещины с полостью концентрация напряжений около полости в небольшой окрестности перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах; при этом значительно растет и КИН для ближайшего к полости конца трещины с незначительными изменениями КИН для удаленного края; при укорочении краевой трещины значительных изменений напряжений около отверстия и КИН для конца трещины не происходит.

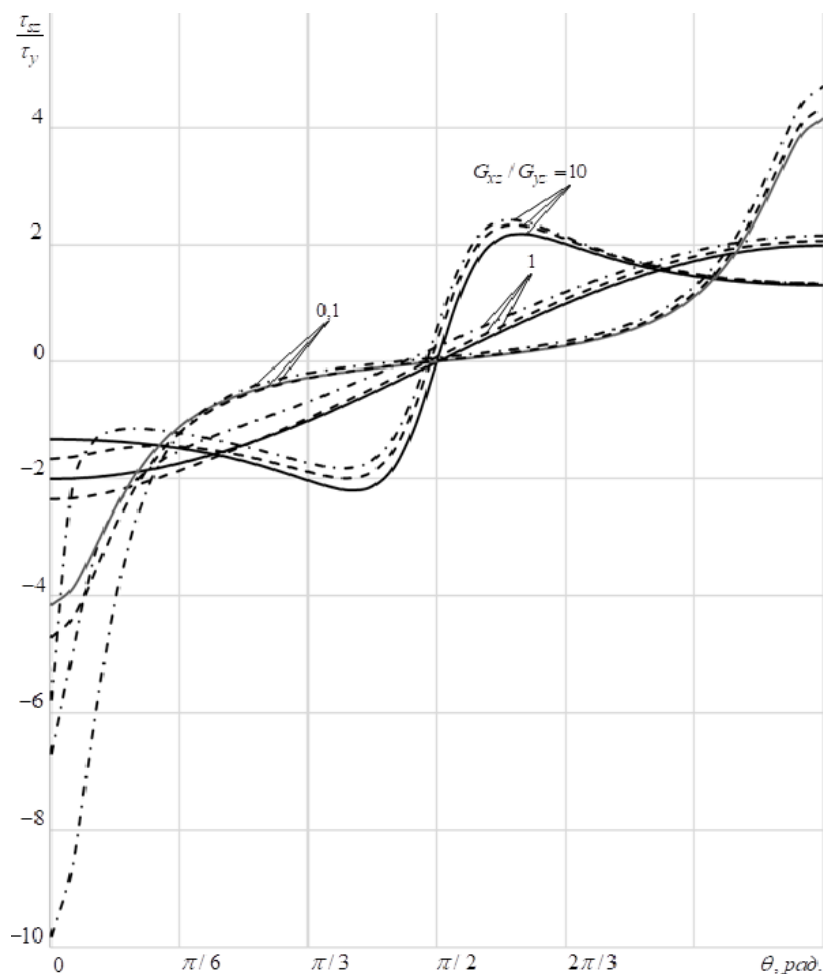


Рис. 7. Графики распределения напряжений τ_{sz} около контура отверстия L_1 в бесконечном теле с круговой полостью и трещиной

В таблице 4 для находящегося на бесконечности под действием касательных усилий $\tau_{yz}^{\infty} = \tau_y$ тела с двумя одинаковыми круговыми полостями с контурами L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) и L_2 радиуса a_2 ($b_2 = a_2 = a_1$) и центральной трещиной между ними полудлины $l_3 = a_1$ на расстоянии A от контуров L_1 и L_2 (рис. 8), в зависимости от A/a_1 с точностью до множителя τ_y

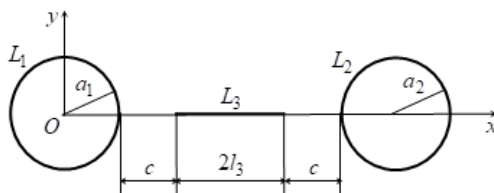


Рис. 8.

приведены значения нормированных напряжений τ_{sz} по контуру L_1 и КИН для концов трещины. Положительные и отрицательные значения c/a_1 соответствуют случаям внутренней трещины длины $2l_3 = 2a_1$ и разреза длины $2l_3 + 2c$.

Таблица 4. Значения напряжений τ_{sz} по контуру кругового отверстия L_1 и КИН для концов трещины для бесконечного тела

G_{xz}/G_{yz}	$c/2l$	Напряжения τ_{sz} при соответствующих значениях θ								КИН	
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	k_3^-	k_3^+
10	∞	-1,316	-1,353	-1,47	-2,02	0,00	2,02	1,47	1,33	1,000	1,000
	4,00	-1,381	-1,412	-1,52	-2,03	0,15	2,09	1,50	1,34	1,104	1,104
	1,00	-1,853	-1,639	-1,54	-1,85	0,72	2,24	1,55	1,38	1,377	1,376
	0,10	-8,212	-1,448	-1,27	-1,37	1,76	2,46	1,63	1,43	2,563	2,563
	0,01	-47,507	-1,053	-1,02	-1,19	1,84	2,44	1,63	1,42	4,943	4,943
	-0,01	—	-1,448	-1,29	-1,40	1,71	2,45	1,62	1,43	—	—
	-0,10	—	-1,609	-1,48	-1,64	1,25	2,35	1,59	1,40	—	—
	-1,00	—	0,000	0,00	0,07	3,51	2,72	1,70	1,48	—	—
	-2,00	-1,316	-1,353	-1,47	-2,03	0,00	2,03	1,47	1,32	—	—
	1,0	∞	-2,000	-1,932	-1,73	-1,00	0,00	1,00	1,73	2,00	1,000
1,0	4,00	-2,061	-1,988	-1,78	-1,01	0,01	1,03	1,76	2,03	1,059	1,059
	1,00	-2,485	-2,324	-1,94	-0,97	0,11	1,13	1,86	2,13	1,303	1,303
	0,10	-8,373	-2,982	-1,65	-0,57	0,42	1,38	2,80	2,34	2,449	2,449
	0,01	-48,353	-2,262	-1,14	-0,34	0,60	1,48	2,20	2,41	5,048	5,048
	-0,01	—	-3,105	-1,68	-0,61	0,39	1,35	2,05	2,31	—	—
	-0,10	—	0,039	0,11	0,48	1,16	1,96	2,58	2,81	—	—
	-1,00	—	0,000	0,00	0,17	0,78	1,59	2,23	2,47	—	—
	-2,00	-2,000	-1,932	-1,73	-1,00	0,00	1,00	1,73	2,00	—	—
	0,1	∞	-4,163	-2,508	-1,11	-0,27	0,00	0,27	1,11	4,16	1,000
	4,00	-4,264	-2,568	-1,13	-0,27	0,00	0,28	1,13	4,23	1,040	1,040
0,1	1,00	-4,873	-2,901	-1,24	-0,27	0,02	0,30	1,20	4,45	1,219	1,219
	0,10	-11,422	-4,678	-1,35	-0,18	0,09	0,39	1,39	5,05	2,326	2,326
	0,01	-56,323	-3,980	-0,91	-0,06	0,16	0,46	1,54	5,54	5,266	5,266
	-0,01	—	0,151	0,18	0,21	0,32	0,62	1,89	6,61	—	—
	-0,10	—	0,145	0,17	0,20	0,31	0,61	1,86	6,52	—	—
	-1,00	—	0,000	0,01	0,09	0,21	0,48	1,55	5,54	—	—
	-2,00	-4,162	-2,508	-1,11	-0,27	0,00	0,27	1,11	4,16	—	—

Значения величин при c/a_1 , равных -1 и -2, относятся, соответственно, к случаям тела с двумя касающимися полостями и тела с одной полостью. Значения напряжений в последнем случае совпадают с их значениями по точному решению

для тела с одной полостью, приведенному выше в п. 3. На рисунке 9 для некоторых значений G_{xz}/G_{yz} изображены графики распределения нормированных напряжений τ_{sz} около контура L_1 . При этом сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии относятся соответственно к случаям значений c/a_1 , равных ∞ , 1 и 0,1.

Как видно из данных таблицы 4 и рисунка 9, при сближении внутренней трещины с поверхностями полостей значения напряжений около полостей в небольшой окрестности перемычки, как и в случае тела с одной полостью и трещиной, резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах; при этом значительно растет и КИН для концов трещины; в случае разреза между контурами при укорочении его длины значительных изменений напряжений около отверстия не происходит.

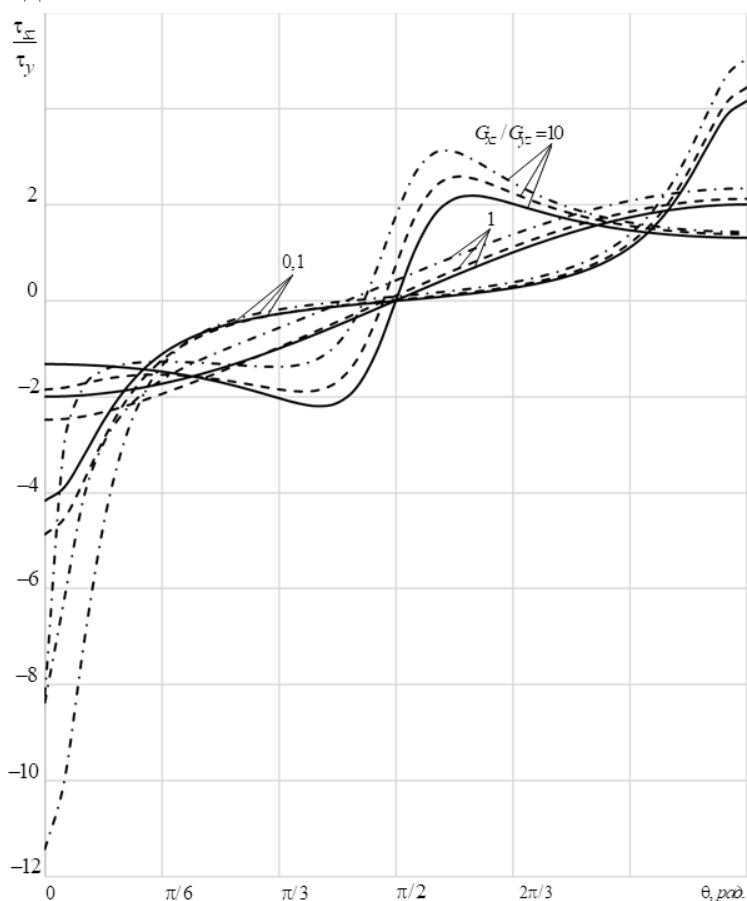


Рис. 9. Графики распределения напряжений τ_{sz} вблизи контура отверстия L_1 в бесконечном теле с двумя полостями и трещиной между ними

Заключение. Таким образом, в статье приведены основные соотношения для комплексных потенциалов антиплоской задачи теории упругости, показано их применение при решении различных задач. С использованием этих функций

приведены точные аналитические решения задач для эллиптического цилиндра и для бесконечного тела с эллиптической полостью или трещиной, а с одновременным использованием обобщенного метода наименьших квадратов получено приближенное решение задачи для конечного или бесконечного тела с любыми отверстиями и трещинами. Описаны результаты многочисленных исследований напряженного состояния эллиптического цилиндра с трещинами и бесконечного тела с одной или двумя эллиптическими полостями и трещиной с указанием влияния параметров материалов тел и геометрических характеристик отверстий и трещин на значения напряжений и КИН.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Буров А.К. Стекловолокнистые анизотропные материалы и их техническое применение / А.К. Буров, Г.Д. Андреевская. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 71 с.
2. Гольденблат И.И. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / И.И. Гольденблат. – М.: Высшая школа, 1970. – 407 с.
3. Нотон Б. Применение композиционных материалов в технике. / В кн.: Композиционные материалы. Т. 3. / Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. – М.: Машиностроение, 1978. – С. 260–307.
4. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 248 с.
5. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
6. Шерман Д.И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости / Д.И. Шерман // Тр. Всесоюз. съезда по теорет. и прикладной механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 405–467.
7. Койтер В.Т. Решение некоторых задач теории упругости асимптотическими методами / В.Т. Койтер // Приложение теории функций в механике сплошной среды: труды международного симпозиума в Тбилиси, 17-23 сентября 1963 г. – М.: Наука, 1965. – Т.1. – С.15–31.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
9. Ержанов Ж.С. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород / Ж.С. Ержанов, Т.Д. Каримбаев. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 241 с.
10. Морозов Е.М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. – М.: Наука, 1980. – 254 с.
11. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
13. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
14. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – Киев-Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
15. Калоеров С.А. Антиплоская деформация многосвязных тел с трещинами / С.А. Калоеров // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1985. – Т. 38, вып. 6. – С. 11–20.
16. Калоеров С.А. Антиплоская деформация тела с трещиной и эллиптическими упругими включениями / С.А. Калоеров // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1986. – Т. 39, вып. 1. – С. 12–16.

17. Калоеров С.А. Антиплоская деформация эллиптического цилиндра с трещиной / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1987. – Вып. 18. – С. 28–34.
18. Калоеров С.А. Антиплоская деформация ортотропного тела с трещиной и эллиптическими полостями / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1988. – Вып. 19. – С. 61–66.
19. Калоеров С.А. Антиплоская деформация тела с трещиной и эллиптической полостью / С.А. Калоеров, Е.Ф. Косилова, В.А. Лапко // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 7. – С. 92–99.
20. Горянская Е.С. Антиплоская деформация многосвязного анизотропного тела с продольными полостями и плоскими трещинами / Е.С. Горянская, С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 56–62.
21. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
22. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев-Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
23. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
24. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
25. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Муллен. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
26. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3(48). – С. 103–116.
27. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N 4. – P. 1322–1342.
28. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N 4. – P. 1343–1362.

S.A. Kaloerov, Y.I. Gapotchenko

Main relations for the complex potential of antiplane deformation in solids and their application to problem solving.

The main relations for the complex potential of antiplane deformation in an elastic anisotropic or isotropic body are presented, including the boundary conditions for its determination, expressions for stresses and displacements through the potential, and its general representation. Exact analytical solutions are provided for problems involving a cylindrical body with an elliptical cross-section and an infinite body with an elliptical cavity. Using conformal mappings, Laurent series expansions, Faber polynomials, and the generalized least squares method, a solution is given for a body with a multiply connected cross-sectional domain. Extensive studies are conducted for a cylinder with a crack and an infinite body with elliptical cavities and cracks, aimed at revealing the influence of material properties and geometric characteristics of holes and cracks on stress values and distributions.

Keywords: *antiplane deformation, complex potential, holes, cracks, generalized least squares method, stress concentration, stress intensity factor.*

*Статья поступила в редакцию 03.06.2025;
доработана 27.06.2025;
рекомендована к печати 11.08.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-52-63

EDN:PJVLFE



©2025. Е.С. Глушанков

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В данной работе представлено решение задачи определения термонапряженного состояния бесконечной многосвязной анизотропной пластинки при действии сосредоточенных источников тепла, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Решение задачи строилось с помощью конформных отображений, теории комплексных потенциалов и метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также распределения источников тепла на значения напряжений в пластинке.

Ключевые слова: многосвязная анизотропная пластинка, конвективный теплообмен, сосредоточенные источники тепла, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В настоящее время в качестве элементов конструкций широкое применение находят тонкие пластинки из анизотропных материалов. Ввиду конструкционных или эксплуатационных особенностей в этих пластинках могут присутствовать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. При воздействии температурных полей в таких пластинках могут возникать высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. На данный момент решено большое количество задач о влиянии температурных полей на термонапряженное состояние изотропных и анизотропных пластинок [1–5]. В частности, также решено большое количество задач о влиянии конвективного теплообмена на термонапряженное состояние упругих тел [6–13].

В данной работе решена задача определения термонапряженного состояния бесконечной многосвязной пластинки из анизотропного материала, когда во внутренних точках пластинки действуют сосредоточенные источники тепла, а через контуры отверстий осуществляется конвективный теплообмен. Решение

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

задачи построено с использованием конформных отображений, теории функций обобщенной комплексной переменной, а также метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования термонапряженного состояния пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями, на основе которых установлены закономерности влияния геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик теплообмена и положения сосредоточенных источников тепла на распределение напряжений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную многосвязную анизотропную пластинку, занимающую область S , ограниченную контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). На контурах отверстий L_l осуществляется конвективный теплообмен с коэффициентами h_l с внешней средой температуры \mathfrak{T}_l . Контур отверстия L_l не подкреплён либо жестко подкреплён. В точках пластинки $O_r^0(x_{0r}^0, y_{0r}^0)$ ($r = \overline{1, \mathcal{R}}$) действуют сосредоточенные источники тепла интенсивности q_r^0 . На бесконечности отсутствуют тепловые и механические воздействия.

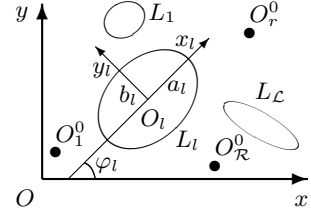


Рис. 1

Решать задачу термоупругости будем в несвязанной постановке с использованием комплексных потенциалов. В этом случае задача сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$ из граничных условий задачи теплопроводности, а затем – комплексных потенциалов термоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из граничных условий задачи термоупругости. После определения комплексных потенциалов значения основных характеристик температурного поля (относительной температуры T , плотностей потока тепла q_x, q_y) и термонапряженного состояния (напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, перемещений u, v) в точках пластинки можно определять по формулам [4, 5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_3, -1) F_3'(z_3), \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k), \quad (3)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k). \quad (4)$$

Здесь

$$\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

μ_3 и μ_k ($k = \overline{1, 2}$) – корни характеристических уравнений теплопроводности и теории упругости [4, 5, 12]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (5)$$

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22},$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3},$$

$$q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3},$$

$$r_3 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4a}(\mu_3)},$$

$$l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2,$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3,$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки; a_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; α_i – коэффициенты линейного теплового расширения материала пластинки; δ_{ij} – символ Кронекера.

Комплексные потенциалы $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) определяются в многосвязных областях S_3 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [4, 5, 12]

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

В общем случае эти функции представляются в виде [4, 5, 12]

$$F_3(z_3) = N_3(z_3) + c_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \quad (9)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$N_3(z_3) = \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} D_{3r}^0 w_{3r}^0(z_3),$$

$D_{3r}^0 = -q_r^0/4\pi\kappa$; $w_{3r}^0(z_3) = \ln(z_3 - z_{3r}^0)$; $z_{3r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_3 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) точкам O_r^0 ; c_3 , D_{3l} – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности, причем из ограниченности температуры на бесконечности вытекает условие

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} D_{3r}^0 = 0; \quad (11)$$

$w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$; z_{3l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{3ln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $\varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n}$; ζ_{3l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) w_{kr}^0(z_k);$$

$\Gamma_k, A_{kl}, B_{kl}, A_{kr}^0, B_{kr}^0$ – постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, \mu_3^2, q_3 - \mu_3 p_3) \Gamma_3,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kl} = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i A_{3l},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kl} = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i B_{3l},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kr}^0 = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i A_{3r}^0,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kr}^0 = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i B_{3r}^0;$$

$\Gamma_3 = r_3 c_3$; $A_{3l} = r_3 D_{3l}$; $B_{3l} = r_3 (c_{3l1} R_{3l} - D_{3l} z_{3l})$; $A_{3r}^0 = r_3 D_{3r}^0$; $B_{3r}^0 = -r_3 D_{3r}^0 z_{3r}^0$; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $w_{kr}^0(z_k) = \ln(z_k - z_{kr}^0)$; $z_{3r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_3 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) точкам O_r^0 ; a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоупругости; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5, 12]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе Oxy координат –

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned}$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловой параметр уравнения эллипса.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 3}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4, 5, 12]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_3(z_3)$ должна удовлетворять граничному условию [12]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_3(\tau_3) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_3) F_3'(\tau_3)) = h_l \mathfrak{T}_l, \quad (13)$$

где τ_3 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (7); $\delta_{3,s}(\tau_3) = d\tau_3/ds$, s – дуга контура отверстия.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоупругости [4, 5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (d_{kl1}, d_{kl2}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) &= \left(\frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau) \right) - \\ &- 2 \operatorname{Re} (d_{3l1}, d_{3l2}) \delta_{3,s}(\tau_3) r_3 F_3(\tau_3), \end{aligned} \quad (14)$$

где τ_k ($k = \overline{1, 2}$) – точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (8); τ – аффикс граничной точки; $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$. Для неподкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (u_l(\tau), v_l(\tau));$$

c_{lj} – неизвестные постоянные интегрирования; $u_l(\tau), v_l(\tau)$ – заданные на границе значения перемещений.

2. Решение задачи для бесконечной многосвязной пластинки. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные $c_3, D_{3l}, c_{3ln}, a_{kln}$, входящие в функции (9) и (10), можно определять из граничных условий (13) и (14) с помощью метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выбираем систему точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых следует минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (9) в граничное условие (13) для определения неизвестных постоянных c_3 , D_{3l} , c_{3ln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_l c_3 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l w_{3l}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) w'_{3l}(\tau_{3im})) D_{3l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l \varphi_{3ln}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) \varphi'_{3ln}(\tau_{3im})) c_{3ln} = \\ & = h_l \mathfrak{T}_l - 2 \operatorname{Re} (h_l N_3(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) N'_3(\tau_{3im})) \\ & \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tau_{3im} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$. После решения системы (15) с использованием метода сингулярных разложений [14] постоянные c_3 , D_{3l} , c_{3ln} , а, следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (9), будут известны. По известной функции (9) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик температурного поля по формулам (1), (2) [4, 5, 12].

Задача термоупругости. При подстановке функций (9) и (10) в граничные условия (14) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{3ip} \delta_{3,s}(\tau_{3im}) r_3 F_3(\tau_{3im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$, τ_{im} – аффикс точки M_{im} . После решения системы (16) с использованием метода сингулярных разложений [14] постоянные a_{kln} , а, следовательно, и комплексные потенциалы термоупругости (10), будут известны. По известным функциям (10) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик термонапряженного состояния по формулам (3), (4) [4, 5, 12].

3. Численные исследования. Были проведены численные исследования для пластинок из следующих материалов:

– стеклотекстолит КАСТ–В изотропный [3] модифицированный (материал М1) [12]

$$\begin{aligned} a_{11} &= 74,92a_0, & a_{22} &= 74,92a_0, & a_{12} &= -8,99a_0, & a_{66} &= 167,79a_0, \\ \alpha_1 &= 3,0\alpha_0, & \alpha_2 &= 3,0\alpha_0, \\ k_{11} &= 144,00k_0, & k_{22} &= 144,00k_0; \end{aligned}$$

– стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [3] модифицированный (материал М2) [12]

$$\begin{aligned} a_{11} &= 272,17a_0, & a_{22} &= 1019,37a_0, & a_{12} &= -76,15a_0, & a_{66} &= 2548,42a_0, \\ \alpha_1 &= 0,7\alpha_0, & \alpha_2 &= 3,8\alpha_0, \\ k_{11} &= 2,79k_0, & k_{22} &= 1,21k_0. \end{aligned}$$

Здесь $a_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $k_0 = 10^{-2} \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$.

При проведении расчетов количество членов в рядах в функциях (9), (10) и количество «коллокационных» точек M_{im} на контурах L_i увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого в решаемых задачах для случая материала М1, являющегося изотропным, необходимо было в рядах Лорана сохранять от 30 до 40 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 400 «коллокационных» точек, а для случая материала М2, обладающего сильной анизотропией, необходимо было в рядах сохранять от 50 до 150 членов, на каждом из контуров брать от 1000 до 2000 «коллокационных» точек.

В таблице 1 для пластинки из материала М1 с одним круговым отверстием с неподкрепленным контуром радиуса a ($a_1 = b_1 = a$), в которой на расстоянии d от контура отверстия действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 , измеряемой в $\text{Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$ (рис. 2), когда через контур отверстия действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры $\mathfrak{T}_1 = 0 \text{ К}$ с коэффициентом теплообмена $h_1 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в некоторых точках контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения ha для некоторых значений d/a . В таблице 2 для аналогичных случаев приведены значения напряжений σ_s/q_1^0 для пластинки из материала М2, а в таблице 3 – для пластинки из материала М2*, характеристиками которого являются параметры материала М2 с поворотом осей анизотропии на угол $\pi/2$.

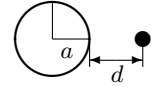


Рис. 2

В таблице 4 для пластинки из материала М2* с двумя имеющими неподкрепленные контуры круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$), расстояние между которыми равно c , в которой на расстоянии $d = a$ от контура правого отверстия действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 (рис. 3), а через контуры отверстий осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = 0^\circ \text{ К}$ с коэффициентом теплообмена $h_1 = h_2 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в отдельных точках контуров отверстий в зависимости от значения c/a для некоторых значений ha .

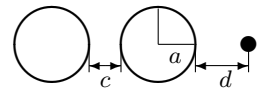


Рис. 3

Таблица 1. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура отверстия (материал М1)

ha	θ , рад.	Значение d/a					
		0,1	0,5	1	2	10	100
0,01	0	-0,035	-0,011	0,009	0,034	0,102	0,204
	$\pi/6$	-0,096	-0,061	-0,024	0,017	0,099	0,203
	$\pi/3$	-0,022	-0,016	-0,002	0,022	0,098	0,203
	$\pi/2$	0,044	0,045	0,048	0,057	0,107	0,204
	$2\pi/3$	0,066	0,067	0,070	0,076	0,114	0,205
	$5\pi/6$	0,054	0,057	0,061	0,070	0,113	0,205
	π	0,044	0,047	0,052	0,063	0,110	0,205
0,1	0	-0,031	-0,008	0,011	0,036	0,103	0,204
	$\pi/6$	-0,092	-0,059	-0,021	0,018	0,099	0,203
	$\pi/3$	-0,019	-0,014	-0,001	0,023	0,098	0,203
	$\pi/2$	0,044	0,045	0,048	0,057	0,107	0,204
	$2\pi/3$	0,064	0,066	0,069	0,075	0,114	0,205
	$5\pi/6$	0,050	0,054	0,059	0,069	0,112	0,205
	π	0,039	0,044	0,050	0,061	0,110	0,205
1	0	-0,003	0,013	0,027	0,046	0,105	0,204
	$\pi/6$	-0,068	-0,041	-0,008	0,027	0,102	0,204
	$\pi/3$	-0,005	-0,004	0,007	0,028	0,100	0,204
	$\pi/2$	0,044	0,045	0,048	0,057	0,107	0,204
	$2\pi/3$	0,050	0,056	0,061	0,070	0,112	0,205
	$5\pi/6$	0,026	0,036	0,046	0,060	0,110	0,205
	π	0,011	0,023	0,035	0,051	0,107	0,204
10	0	0,034	0,040	0,047	0,060	0,109	0,205
	$\pi/6$	-0,035	-0,017	0,010	0,039	0,105	0,204
	$\pi/3$	0,013	0,010	0,017	0,035	0,102	0,204
	$\pi/2$	0,044	0,045	0,048	0,057	0,107	0,204
	$2\pi/3$	0,031	0,042	0,051	0,064	0,111	0,205
	$5\pi/6$	-0,006	0,012	0,028	0,048	0,107	0,204
	π	-0,026	-0,004	0,014	0,038	0,103	0,204
∞	0	0,043	0,047	0,052	0,063	0,110	0,205
	$\pi/6$	-0,028	-0,011	0,014	0,042	0,106	0,204
	$\pi/3$	0,018	0,013	0,019	0,037	0,102	0,204
	$\pi/2$	0,044	0,045	0,048	0,057	0,107	0,204
	$2\pi/3$	0,027	0,039	0,048	0,062	0,110	0,205
	$5\pi/6$	-0,014	0,007	0,024	0,045	0,106	0,204
	π	-0,035	-0,011	0,009	0,034	0,102	0,204

Выводы. Из данных, представленных в таблицах, следует, что сосредоточенные источники тепла, действующие в пластинке, оказывают существенное влияние на термонапряженное состояние пластинки. Особенно сильно это влияние проявляется, когда источники тепла расположены вблизи контуров отверстий. При этом, концентрация напряжений также существенно зависит от значения коэффициента теплообмена на контурах отверстий и от свойств материала пластинки.

При значениях $d/a \leq 1$ и $ha < 1$ поблизости контура отверстия в направлении источника тепла преобладает зона сжимающих напряжений. Причем, чем меньше значение d/a , тем концентрация напряжений в этой зоне выше, а сама зона шире. Концентрация напряжений в этой зоне также растет при уменьше-

Таблица 2. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура отверстия (материал М2)

ha	θ , рад.	Значение d/a					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
0, 01	0	−0, 237	−0, 055	0, 054	0, 182	0, 523	1, 038
	$\pi/6$	−0, 321	−0, 207	−0, 071	0, 087	0, 429	0, 876
	$\pi/3$	−0, 099	−0, 079	−0, 023	0, 087	0, 440	0, 925
	$\pi/2$	0, 453	0, 453	0, 469	0, 527	0, 911	1, 734
	$2\pi/3$	0, 288	0, 308	0, 327	0, 359	0, 525	0, 934
	$5\pi/6$	0, 174	0, 205	0, 236	0, 285	0, 480	0, 881
	π	0, 163	0, 202	0, 243	0, 307	0, 557	1, 042
0, 1	0	0, 071	0, 168	0, 222	0, 295	0, 554	1, 042
	$\pi/6$	−0, 155	−0, 068	0, 042	0, 167	0, 452	0, 878
	$\pi/3$	0, 023	0, 017	0, 052	0, 139	0, 455	0, 926
	$\pi/2$	0, 477	0, 470	0, 480	0, 532	0, 912	1, 734
	$2\pi/3$	0, 146	0, 198	0, 242	0, 301	0, 509	0, 932
	$5\pi/6$	−0, 018	0, 052	0, 116	0, 202	0, 457	0, 879
	π	−0, 080	0, 009	0, 090	0, 201	0, 527	1, 039
1	0	0, 192	0, 238	0, 272	0, 328	0, 563	1, 043
	$\pi/6$	−0, 116	−0, 033	0, 072	0, 189	0, 458	0, 879
	$\pi/3$	0, 058	0, 044	0, 073	0, 154	0, 460	0, 927
	$\pi/2$	0, 486	0, 477	0, 485	0, 535	0, 912	1, 734
	$2\pi/3$	0, 105	0, 166	0, 217	0, 284	0, 505	0, 932
	$5\pi/6$	−0, 072	0, 010	0, 082	0, 179	0, 451	0, 878
	π	−0, 146	−0, 044	0, 048	0, 171	0, 518	1, 038
10	0	0, 214	0, 247	0, 279	0, 332	0, 564	1, 043
	$\pi/6$	−0, 112	−0, 029	0, 075	0, 192	0, 459	0, 879
	$\pi/3$	0, 063	0, 047	0, 075	0, 155	0, 460	0, 927
	$\pi/2$	0, 487	0, 477	0, 485	0, 535	0, 912	1, 734
	$2\pi/3$	0, 100	0, 162	0, 214	0, 282	0, 504	0, 932
	$5\pi/6$	−0, 078	0, 005	0, 078	0, 176	0, 450	0, 878
	π	−0, 154	−0, 050	0, 043	0, 168	0, 517	1, 038
∞	0	0, 217	0, 248	0, 279	0, 333	0, 564	1, 043
	$\pi/6$	−0, 111	−0, 029	0, 075	0, 192	0, 459	0, 879
	$\pi/3$	0, 063	0, 047	0, 076	0, 156	0, 460	0, 927
	$\pi/2$	0, 487	0, 477	0, 486	0, 535	0, 912	1, 734
	$2\pi/3$	0, 100	0, 161	0, 214	0, 282	0, 504	0, 932
	$5\pi/6$	−0, 079	0, 004	0, 078	0, 176	0, 450	0, 878
	π	−0, 155	−0, 051	0, 042	0, 167	0, 517	1, 038

нии значения d/a . Наибольшие по модулю сжимающие напряжения возникают в окрестности точки $\theta = \pi/6$. А вне указанной зоны возникают, как правило, более значительные растягивающие напряжения. При $d/a > 1$ или $ha > 1$ зона растягивающих напряжений охватывает всю окрестность контура отверстия. Наибольших значений эти напряжения достигают в окрестности между точками $\theta = \pi/2$ и $\theta = 2\pi/3$ (для пластинок из материалов М1 и М2) или около точки $\theta = 0$, расположенной в зоне источника тепла (для пластинки из материала М2*). Концентрация растягивающих напряжений резко возрастает при увеличении значения d/a . При этом, если $d/a < 10$, то в области, обращенной в направлении источника тепла, значения напряжений существенно растут при увеличении ha , а вне – убывают и испытывают менее заметное снижение. При

Таблица 3. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура отверстия (материал М2*)

ha	θ , рад.	Значение d/a					
		0, 1	0, 5	1	2	10	100
0, 01	0	1, 063	1, 084	1, 175	1, 319	1, 802	2, 634
	$\pi/6$	-0, 180	-0, 069	0, 074	0, 240	0, 592	1, 061
	$\pi/3$	-0, 210	-0, 203	-0, 163	-0, 078	0, 219	0, 663
	$\pi/2$	-0, 165	-0, 154	-0, 132	-0, 081	0, 174	0, 670
	$2\pi/3$	-0, 001	0, 022	0, 046	0, 086	0, 269	0, 668
	$5\pi/6$	0, 270	0, 315	0, 357	0, 418	0, 638	1, 066
	π	0, 946	1, 057	1, 162	1, 313	1, 800	2, 634
0, 1	0	1, 245	1, 236	1, 292	1, 398	1, 824	2, 636
	$\pi/6$	-0, 024	0, 028	0, 142	0, 282	0, 603	1, 062
	$\pi/3$	-0, 140	-0, 153	-0, 126	-0, 054	0, 225	0, 663
	$\pi/2$	-0, 177	-0, 160	-0, 135	-0, 082	0, 174	0, 670
	$2\pi/3$	-0, 067	-0, 024	0, 012	0, 063	0, 263	0, 667
	$5\pi/6$	0, 152	0, 233	0, 297	0, 378	0, 627	1, 065
	π	0, 671	0, 873	1, 030	1, 227	1, 778	2, 631
1	0	1, 258	1, 273	1, 323	1, 420	1, 830	2, 637
	$\pi/6$	0, 027	0, 058	0, 162	0, 294	0, 606	1, 063
	$\pi/3$	-0, 123	-0, 140	-0, 116	-0, 047	0, 227	0, 663
	$\pi/2$	-0, 181	-0, 162	-0, 137	-0, 083	0, 174	0, 670
	$2\pi/3$	-0, 085	-0, 037	0, 002	0, 057	0, 261	0, 667
	$5\pi/6$	0, 119	0, 211	0, 280	0, 368	0, 624	1, 065
	π	0, 592	0, 820	0, 992	1, 203	1, 771	2, 630
10	0	1, 254	1, 277	1, 326	1, 422	1, 830	2, 637
	$\pi/6$	0, 033	0, 062	0, 164	0, 296	0, 607	1, 063
	$\pi/3$	-0, 121	-0, 138	-0, 115	-0, 046	0, 227	0, 663
	$\pi/2$	-0, 181	-0, 163	-0, 137	-0, 083	0, 174	0, 670
	$2\pi/3$	-0, 087	-0, 038	0, 001	0, 056	0, 261	0, 667
	$5\pi/6$	0, 115	0, 208	0, 278	0, 366	0, 624	1, 064
	π	0, 582	0, 814	0, 988	1, 200	1, 771	2, 630
∞	0	1, 254	1, 277	1, 326	1, 422	1, 831	2, 637
	$\pi/6$	0, 034	0, 062	0, 164	0, 296	0, 607	1, 063
	$\pi/3$	-0, 121	-0, 138	-0, 115	-0, 046	0, 227	0, 663
	$\pi/2$	-0, 181	-0, 163	-0, 137	-0, 083	0, 174	0, 670
	$2\pi/3$	-0, 087	-0, 038	0, 001	0, 056	0, 261	0, 667
	$5\pi/6$	0, 115	0, 208	0, 278	0, 366	0, 624	1, 064
	π	0, 581	0, 813	0, 987	1, 200	1, 771	2, 630

значениях $d/a \geq 10$ уровни напряжений несущественно зависят от значения коэффициента теплообмена. В случае пластинки из изотропного материала М1 заметна тенденция к выравниванию значений напряжений во всей окрестности контура отверстия. Концентрация напряжений в пластинках из материалов М2 и М2* намного выше, чем в пластинке из материала М1, что связано с меньшими значениями коэффициентов теплопроводности у материалов М2 и М2*. При этом, для больших значений d/a наибольшая концентрация напряжений для пластинки из материала М2 возникает в окрестности точки $\theta = \pi/2$. Кроме того, в окрестности точки $\theta = 0$ формируется меньший пик концентрации напряжений. Для пластинки же из материала М2* гораздо более существенная концентрация напряжений возникает в окрестности точки $\theta = 0$, а в окрестности

Таблица 4. Значения σ_s/q_1^0 в точках контуров отверстий (материал М2*)

ha	θ , рад.	Значение c/a					
		0,1	1	10	0,1	1	10
		Левое отверстие			Правое отверстие		
0,1	0	2,233	0,898	0,752	1,317	1,182	1,086
	$\pi/6$	0,330	0,287	0,194	0,143	0,094	0,054
	$\pi/3$	0,001	0,022	-0,021	-0,137	-0,156	-0,185
	$\pi/2$	-0,087	-0,077	-0,096	-0,155	-0,152	-0,193
	$2\pi/3$	0,015	-0,002	-0,021	-0,003	0,016	-0,041
	$5\pi/6$	0,288	0,237	0,194	0,331	0,298	0,213
	π	1,013	0,870	0,751	2,251	0,937	0,816
10	0	2,120	0,854	0,719	1,362	1,236	1,149
	$\pi/6$	0,313	0,270	0,180	0,171	0,126	0,089
	$\pi/3$	-0,006	0,013	-0,030	-0,121	-0,139	-0,166
	$\pi/2$	-0,094	-0,086	-0,106	-0,152	-0,149	-0,187
	$2\pi/3$	0,005	-0,011	-0,031	-0,009	0,008	-0,044
	$5\pi/6$	0,271	0,222	0,180	0,314	0,283	0,206
	π	0,971	0,835	0,719	2,141	0,903	0,802

точки $\theta = \pi/2$ заметных особенностей нет. По-видимому, значения напряжений в некотором заданном направлении тем выше, чем ниже значения коэффициентов теплопроводности материала в этом направлении и чем выше значения коэффициентов линейного теплового расширения. По этой причине в пластинке из материала М2 наблюдается больший пик концентрации напряжений, обусловленный положением источника тепла, и меньший пик, обусловленный анизотропией материала, а в пластинке из М2* пик концентрации напряжений выше и он один, т.к. обусловлен одновременно обоими факторами.

Для случая пластинок с несколькими отверстиями, уменьшение расстояния между отверстиями приводит к существенному росту концентрации напряжений в зоне между их контурами и менее заметному росту вне этой зоны. При этом, для малых значений ha концентрация напряжений возрастает более заметно, а значения напряжений выше для отверстий, расположенных более близко к источнику тепла.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Мотовиловец И.А. Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наукова думка, 1972. – 308 с.
3. Космодамьянский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамьянский, С.А. Калоеров // Киев–Донецк: Вища шк. 1983. – 160 с.
4. Калоеров С.А. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
5. Калоеров С.А. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
6. Гарматий Г.Ю. Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричним

- порожниною за умови конвективного теплообміну / Г.Ю. Гарматій, В.С. Попович // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2009. – Вип. 52, № 3. – С. 192–200.
7. *Parihar K.S.* Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
 8. *Gaikwad K.R.* Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
 9. *Nguyen T.D.* Frequency dependence of the magnitude of thermal stresses in a flat plate subjected to rapid thermal cycling by convective heating and cooling / T.D. Nguyen, J.R. Thomas Jr., D.P.H. Hasselman // J. Therm. Stress. – 1987. – Vol. 10, № 3. – P. 163–175.
 10. *Бондаренко Н.С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае произвольного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2018. – № 1–2 (62–63). – С. 35–44.
 11. *Бондаренко Н.С.* Влияние теплопроницаемости разреза на коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе пластин в условиях одностороннего теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2023. – № 1. – С. 3–11.
 12. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 39–47. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-39-47. – EDN: FLTANT.
 13. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной многосвязной анизотропной пластинки с жестко закрепленными отверстиями, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков, А.Б. МIRONENKO // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 82–92. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-3-82-92. – EDN: TYKLQA.
 14. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

E.S. Glushankov

The concentrated heat sources' action in an infinite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition.

In the paper, a solution is presented for the problem of evaluation of thermo-stress state of infinite multiply connected anisotropic plate under the action of concentrated heat sources under convective heat transfer condition. Through the numerical studies, the effects of plates's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the distribution of heat sources on the values of the stresses in the plate were investigated.

Keywords: multiply connected anisotropic plate, convective heat transfer, reinforced contours of holes, thermal stresses, complex potentials.

*Статья поступила в редакцию 22.06.2025;
доработана 11.07.2025;
рекомендована к печати 11.08.2025.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-64-75

EDN:JZMDWX

©2025. А.А. Глухов¹, В.И. Сторожев²

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АНИЗОТРОПИИ И НЕОДНОРОДНОСТИ КОМПОНЕНТОВ СОСТАВНОГО ВОЛНОВОДА НА СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ЛЯВА

Представлены результаты исследования особенностей в структуре дисперсионных спектров и распределениях фазовых скоростей обобщенных поверхностных волн Лява из различных мод спектра для составных волноводов из контактирующих компонентов в виде слоя поперечно-анизотропного материала с двумя различными экспоненциальными законами неоднородности по толщине для параметра плотности и модулей упругости, а также в виде подстилающего полупространства из поперечно-неоднородного материала с локализованной приповерхностной зоной однофакторной неоднородности по глубине, описываемой двойной экспоненциальной функцией, при варьировании соотношений физико-механических параметров и параметров законов неоднородности анизотропных функционально-градиентных материалов волновода. Анализируемые дисперсионные соотношения и представления волновых полей в компонентах волновода получены с использованием аналитических решений соответствующих обыкновенных дифференциальных амплитудных уравнений с переменными коэффициентами, построенных с применением итерационного алгоритма в замкнутой форме экспоненциальных рядов.

Ключевые слова: обобщенные поверхностные волны Лява, составные функционально-градиентные волноводы, трансверсально-изотропный слой с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью, трансверсально-изотропное полупространство с приповерхностной неоднородностью, аналитические решения амплитудных волновых уравнений, анализ дисперсионных соотношений, варьирование модулей упругости и параметров неоднородности, влияние на топологию дисперсионных спектров, трансформации распределений фазовых скоростей.

Введение и цели исследования. Проблема изучения комплекса свойств обобщенных поверхностных упругих волн Лява в составных волноводах из контактирующих компонентов в виде обладающих усложненными физико-механическими свойствами слоя и подстилающего полупространства относится к числу весьма актуальных направлений механико-математического моделирования и представляет интерес как в аспекте фундаментальных исследований волн де-

¹Глухов Антон Александрович – мл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Junior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

²Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., гл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

формаций, так и для приложений в области сейсмоакустики, неразрушающей диагностики материалов и конструкций с покрытиями, в акустоэлектронике, технике сенсорных и СВЧ устройств [1–8]. При этом вопросы учета анизотропии и непрерывной неоднородности компонентов данных волноводов являлись предметом исследований в работах [9–30], где, в частности, получены и исследованы некоторые варианты дисперсионных соотношений для рассматриваемых волн применительно к волноводам с компонентами из функционально-градиентных материалов, обладающих одноосной однофакторной неоднородностью (акустической однородностью в терминах работы [30]).

Вместе с тем, модель распространения обобщенных поверхностных волн Лява для волновода, в котором компонента в виде слоя обладает анизотропией и двухфакторной неоднородностью физико-механических свойств (акустической неоднородностью) в опубликованных исследованиях не рассматривалась и представляет интерес с точки зрения описания эффектов влияния таких свойств на дисперсионные характеристики волн анализируемого типа. В этой связи, целью данной работы является получение и анализ дисперсионных соотношений для обобщенных поверхностных упругих волн Лява в составных волноводах из контактирующих компонентов в виде слоя из поперечно-анизотропного материала с двумя различными экспоненциальными законами неоднородности по толщине для параметра плотности и модулей упругости, а также подстилающего полупространства из поперечно-неоднородного материала с локализованной приповерхностной зоной однофакторной неоднородности по глубине, описываемой двойной экспоненциальной функцией.

1. Постановка задачи и представления волновых полей в компонентах волновода. Рассматривается упругий волновод, отнесенный к прямоугольным координатам $Ox_1x_2x_3$ и состоящий из трансверсально-изотропного функционально-градиентного неоднородного слоя $V_L = \{(x_1, x_2) \in R^2, H \leq x_3 \leq H_0\}$, идеально контактирующего с трансверсально-изотропным функционально-градиентным полупространством $V_S = \{(x_1, x_2) \in R^2, H_0 < x_3 < \infty\}$, содержащим локализованную приграничную зону неоднородности.

Неоднородность слоя описывается двухфакторной моделью одноосной непрерывной неоднородности экспоненциального типа с отличающимися представлениями для модулей упругости $c_{ijL}(x_3)$ и плотности $\rho_L(x_3)$ материала

$$c_{ijL}(x_3) = c_{ijL0} \exp(\lambda_c x_3) \quad (ij = 44; 66), \quad \rho_L(x_3) = \rho_{0L} \exp(\lambda_\rho x_3), \quad (1)$$

где c_{ij0} и ρ_{0L} – нормированные безразмерные (опорные) характеристики упругих свойств и плотности, а λ_c и λ_ρ – действительные значения параметров неоднородности.

Эффект наличия локализованной у граничной поверхности полупространства $x_3 = H_0$ зоны одноориентированной непрерывной однофакторной неоднородности соответствующих характеристик физико-механических свойств его материала описывается на основе введения их зависимостей от координаты x_3

двойной экспоненциальной функцией

$$c_{ijS} = c_{ijS} \cdot \phi(\lambda, \beta, x_3) \quad (ij = 44, 66), \quad \rho_S = \rho_{0S} \cdot \phi(\lambda, \beta, x_3), \quad (2)$$

$$\phi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)).$$

Данная предложенная в [31] модель позволяет с помощью варьирования значений действительных параметров β и λ описывать темпы и величины изменений характеристик физико-механических свойств при отходе от границы вглубь неоднородного полупространства и их асимптотический выход на стабилизированные постоянные (опорные) значения при неограниченном увеличении абсолютного значения поперечной координаты x_3 .

Без ограничения общности полагается, что направлением распространения исследуемых обобщенных волн Лява с циклической частотой ω и волновым числом k является координатное направление Ox_1 , и комплексные амплитудные функции волновых перемещений в компонентах волновода могут быть представлены в форме

$$u_{2L}(x_1, x_3, t) = u_{2L0}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (3)$$

$$u_{2S}(x_1, x_3, t) = u_{2S0}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) .$$

2. Получение основных дисперсионных соотношений. С учетом представленных выше моделей описания физико-механических характеристик компонент волновода (1) и (2), а также представлений (3), уравнения для определения комплексных амплитудных функций $u_{2L0}(x_3)$ и $u_{2S0}(x_3)$ соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} e^{\lambda_c x_3} (c_{44L0} u''_{2L0}(x_3) + c_{44L0} \lambda_c u'_{2L0}(x_3) - c_{66L0} k^2 u_{2L0}(x_3)) + \\ + e^{\lambda_\rho x_3} \Omega^2 u_{2L0}(x_3) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

для слоя и

$$\begin{aligned} -k^2 c_{66S0} u_{2S0}(x_3) - c_{44S0} \lambda \beta e^{-\beta x_3} u'_{2S0}(x_3) + \\ + c_{44S0} u''_{2S0}(x_3) + \rho_{0S} \omega^2 u_{2S0}(x_3) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

– для полупространства.

Базисные частные решения волновых уравнений вида (4) ранее получены в аналитической форме в работах [32–34] и, соответственно, представляются в виде экспоненциальных рядов

$$u_{2L0}^{(j)}(x_3) = e^{\delta_{jL} x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} A_{pjL} e^{(\delta_{jL} - p\lambda_L) x_3}, \quad (6)$$

$$A_{pjL} = \gamma_L^p \prod_{q=1}^p ((\delta_{jL} - q\lambda_L)^2 + \alpha_L (\delta_{jL} - q\lambda_L) + \beta_L)^{-1}, \quad (7)$$

где

$$\alpha_L = \lambda_c, \quad \beta_L = -c_{66L0}k^2/c_{44L0}, \quad \gamma_L = -\Omega_L^2/c_{44L0}, \quad (8)$$

$$\Omega_L^2 = \rho_{0L}\omega^2 h_*^2/c_*, \quad \lambda_L = \lambda_c - \lambda_\rho,$$

$$\delta_{jL} = -(\alpha_L/2) + (-1)^j((\alpha_L/2)^2 - \beta_L)^{1/2} \quad (j = \overline{1, 2}),$$

h_* , c_* – нормирующие параметры для величин с размерностями упругих перемещений и напряжений. Таким образом, для $u_{2L0}(x_3)$ может быть записано представление, содержащее произвольные постоянные коэффициенты C_1 , C_2

$$u_{2L0}(x_3) = C_1 u_{2L0}^{(1)}(x_3) + C_2 u_{2L0}^{(2)}(x_3). \quad (9)$$

Выражения амплитудных функций динамических напряжений для составляющей волнового поля в слое соответственно могут быть получены в форме

$$\sigma_{120}^{(L)}(x_3) = ikc_{66L0} \exp(\lambda_c x_3) u_{2L0}(x_3) = \quad (10)$$

$$= ikc_{66L0} \exp(\lambda_c x_3) (C_1 u_{2L0}^{(1)}(x_3) + C_2 u_{2L0}^{(2)}(x_3)),$$

$$\sigma_{230}^{(L)}(x_3) = c_{44L0} \exp(\lambda x_3) u'_{2L0}(x_3) = \quad (11)$$

$$= c_{44L0} \exp(\lambda x_3) (C_1 (u_{2L0}^{(1)}(x_3))' + C_2 (u_{2L0}^{(2)}(x_3))'),$$

$$(u_{2L0}^{(j)}(x_3))' = \delta_{jL} e^{\delta_{jL} x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} (\delta_{jL} - p\lambda_L) A_{pjL} e^{(\delta_{jL} - p\lambda_L)x_3}. \quad (12)$$

Базисное частное решение уравнения (5) для полупространства, описывающее локализованное у его поверхности волновое движения с затухающей в глубине интенсивностью, а также соответствующие функции динамических напряжений, получены в работах [31, 35, 36] в виде

$$u_{2S0}(x_3) = C_3 (e^{-\alpha_S x_3} + \quad (13)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha_S - (p-1)\beta_S) ((-\alpha_S - p\beta)^2 + \alpha_S^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha_S - n\beta)x_3},$$

$$\sigma_{230}^{(S)}(x_3) = C_3 c_{44S0} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) u'_{2S0}(x_3), \quad (14)$$

$$u'_{2S0}(x_3) = -\alpha_S e^{-\alpha_S x_3} + \quad (15)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_S \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha_S - p\beta) ((-\alpha_S - p\beta)^2 + \alpha_S^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha_S - n\beta)x_3},$$

где

$$\alpha_S = (\Omega_S^2 - c_{66S0}k^2)/c_{44S0}, \quad \Omega_S^2 = \rho_{0S}\omega^2 h_*^2/c_*, \quad \gamma = \lambda\beta.$$

Краевые условия на граничных поверхностях волновода применительно к задаче о распространении обобщенных поверхностных волн Лява имеют вид

$$\sigma_{230}^{(L)}(H) = 0, \quad u_{2L0}(H_0) = u_{2S0}(H_0), \quad \sigma_{230}^{(L)}(H_0) = \sigma_{230}^{(S)}(H_0). \quad (16)$$

При подстановке в соотношения (16) представлений (10), (12), (13) и (15), их следствием является однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов C_1 , C_2 , C_3

$$C_1 c_{44L0} \exp(\lambda H) (u_{2L0}^{(1)}(H))' + C_2 c_{44L0} \exp(\lambda H) (u_{2L0}^{(2)}(H))' = 0, \quad (17)$$

$$C_1 u_{2L0}^{(1)}(H_0) + C_2 u_{2L0}^{(2)}(H_0) - C_3 u_{2S0}(H_0) = 0,$$

$$C_1 c_{44L0} \exp(\lambda H_0) (u_{2L0}^{(1)}(H_0))' + C_2 c_{44L0} \exp(\lambda H_0) (u_{2L0}^{(2)}(H_0))' - \\ - C_3 c_{44S0} \exp(\lambda) u_{2S0}'(H_0) = 0.$$

Равенство нулю определителя системы (17) и является формулируемым в аналитической форме дисперсионным уравнением для исследуемых обобщенных локализованных волн Лява в составном волноводе из контактирующих компонентов в виде слоя поперечно-анизотропного материала с двумя различными экспоненциальными законами неоднородности по толщине для параметра плотности и модулей упругости, а также подстилающего полупространства поперечно-неоднородного материала с локализованной приповерхностной зоной однофакторной неоднородности по глубине, описываемой двойной экспоненциальной функцией

$$F(k, \omega) = \quad (18)$$

$$= \begin{vmatrix} c_{44L0} \exp(\lambda H) (u_{2L0}^{(1)}(H))' & c_{44L0} \exp(\lambda H) (u_{2L0}^{(2)}(H))' & 0 \\ u_{2L0}^{(1)}(H_0) & u_{2L0}^{(2)}(H_0) & -u_{2S0}(H_0) \\ c_{44L0} \exp(\lambda H_0) (u_{2L0}^{(1)}(H_0))' & c_{44L0} \exp(\lambda H_0) (u_{2L0}^{(2)}(H_0))' & -c_{44S0} \exp(\lambda) u_{2S0}'(H_0) \end{vmatrix} = 0.$$

3. Результаты численных исследований. Анализ дисперсионного соотношения (18) с целью исследования эффектов влияния меры анизотропии и неоднородности компонентов составного волновода из функционально-градиентного металлокерамического слоя с двумя различными экспоненциальными законами неоднородности по толщине для параметра плотности и модулей упругости и полупространства-подложки из йодата лития со свойствами приповерхностной однофакторной неоднородности по глубине на фазовые скорости V_F обобщенных поверхностных волн Лява с циклической частотой $10^{-4}\omega$ [рад/с] и волновым числом k [рад/м] реализован применительно к случаю задания опорных значений физико-механических характеристик компонент волновода

$$c_{44L0} = 3.93c_*, \quad c_{66L0} = 3.93c_*, \quad \rho_{0L} = 4.5\rho_*, \quad \lambda_c = -1.17, \quad \lambda_\rho = 0.121,$$

$$c_{44S0} = 1.8c_*, \quad c_{66S0} = 2.2c_*, \quad \rho_{0S} = 4.5\rho_*, \quad \lambda = 2.0, \quad \beta = 1.5,$$

$$c_* = 10^{11} \text{ Па}, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad h_* = 1 \text{ м}, \quad H_0 = 0, \quad H/h_* = -1,$$

и к нескольким схемам возмущения значений параметров исследуемой модели.

В первом из вариантов варьирования фиксировались опорный набор параметров для материала полупространства, а также опорные значения параметров $c_{44L0} = 3.93c_*$, $\rho_{0L} = 4.5\rho_*$, $\lambda_c = 1.17$, $\lambda_\rho = -0.121$ для слоя, а для параметра c_{66L0} последовательно выбирались значения $c_{66L0} = 1.97c_*$, $c_{66L0} = 5.89c_*$ и $c_{66L0} = 7.86c_*$. Фрагменты рассчитанных диаграмм дисперсионных спектров для этих волноводов соответственно представлены на рисунках 1–3. Результаты расчетов зависимостей фазовых скоростей для ряда низших мод волн Лява от приведенного волнового числа kh_* в волноводах с данными наборами физико-механических характеристик представлены на рисунках 4–6, где пунктирные линии отвечают указанному варианту задания параметра c_{66L0} , а сплошные линии отвечают волноводу с зафиксированным набором опорных параметров материалов полупространства и слоя.

Представленные результаты указывают на отсутствие влияния варьируемого соотношения c_{66L0}/c_{44L0} на значения ненулевых частот запираания в описываемых дисперсионных спектрах и его достаточно значимое влияние на топологию двух низших мод спектров, в частности снижение меры дисперсии и более высокие темпы выхода на асимптотическое поведение волн моды с нулевой частотой запираания при увеличении c_{66L0}/c_{44L0} .

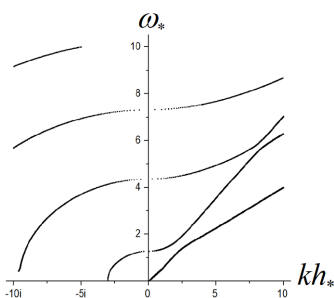


Рис. 1. $c_{66L0} = 1.97c_*$.

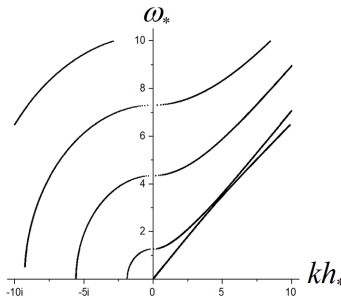


Рис. 2. $c_{66L0} = 5.89c_*$.

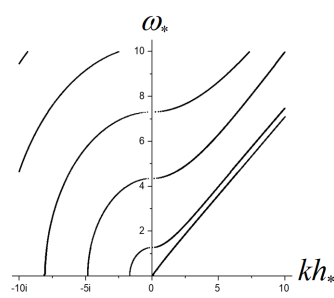


Рис. 3. $c_{66L0} = 7.86c_*$.

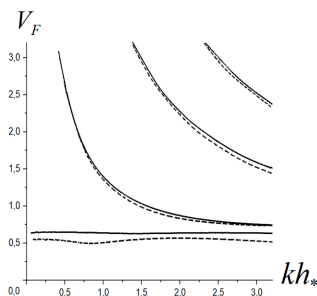


Рис. 4. $c_{66L0} = 1.97c_*$.

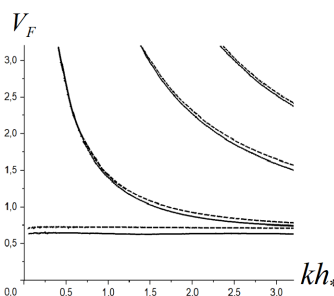


Рис. 5. $c_{66L0} = 5.89c_*$.

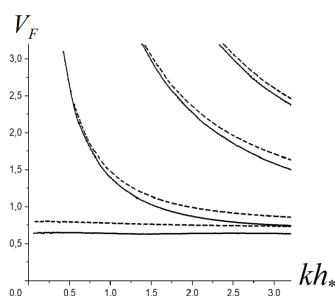


Рис. 6. $c_{66L0} = 7.86c_*$.

Анализ распределений фазовых скоростей для волн рассчитанных мод показывает, что при $c_{66L0}/c_{44L0} < 1$ фазовые скорости всех мод в анализируемом диапазоне снижаются по сравнению с опорным вариантом $c_{66L0}/c_{44L0} = 1$, а для случаев $c_{66L0}/c_{44L0} > 1$ – увеличиваются, причем указанное увеличение становится более значительным с ростом c_{66L0}/c_{44L0} .

На рисунках 7–9 и 10–12 соответственно приведены рассчитанные фрагменты диаграмм дисперсионных спектров и зависимости фазовых скоростей для ряда низших мод волн Лява в волноводах с опорными параметрами $c_{66L0} = 3.93c_*$, $\rho_{0L} = 4.5\rho_*$, $\lambda_c = -1.17$, $\lambda_\rho = 0.121$, $c_{44S0} = 1.8c_*$, $c_{66S0} = 2.2c_*$, $\rho_{0S} = 4.5\rho_*$, $\lambda = 2.0$, $\beta = 1.5$ и варьируемыми значениями $c_{44L0} = 1.97c_*$, $c_{44L0} = 5.89c_*$, $c_{44L0} = 7.86c_*$. Как показывают расчеты, увеличение соотношения c_{44L0}/c_{66L0} в данном случае приводит к существенному росту значений частот запираания однопорядковых мод в соответствующих дисперсионных спектрах и в меньшей мере, в сравнении с предыдущим случаем варьирования характеристик слоя, сказывается на топологии ветвей спектра со снижением меры этого влияния при дальнейшем наращивании c_{44L0}/c_{66L0} . Анализ распределений фазовых скоростей указывает на крайне незначительное влияние варьируемой характеристики c_{44L0}/c_{66L0} на скорости волн низшей моды с нулевой частотой запираания; уменьшение скоростей волн из последующих мод при $c_{44L0}/c_{66L0} < 1$ и их увеличение при $c_{44L0}/c_{66L0} > 1$.

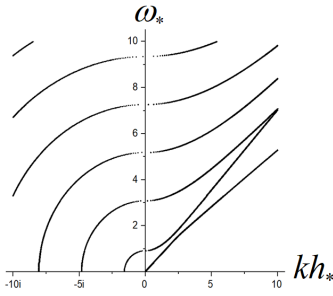


Рис. 7. $c_{44L0} = 1.97c_*$

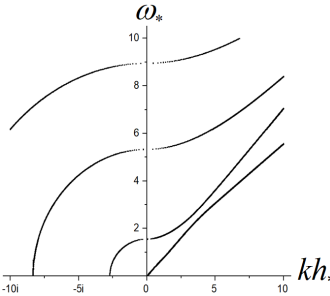


Рис. 8. $c_{44L0} = 5.89c_*$

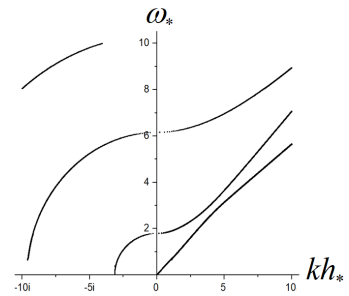


Рис. 9. $c_{44L0} = 7.86c_*$

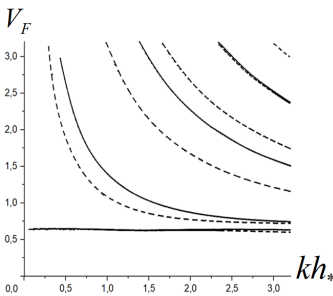


Рис. 10. $c_{44L0} = 1.97c_*$

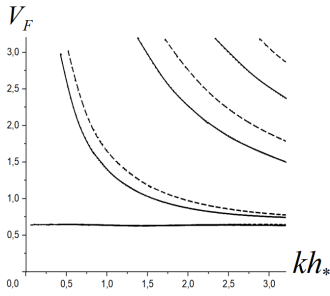


Рис. 11. $c_{44L0} = 5.89c_*$

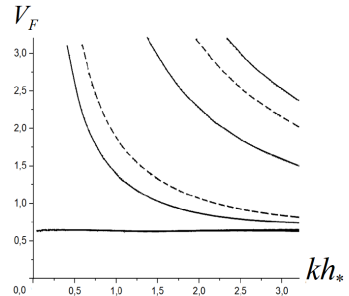


Рис. 12. $c_{44L0} = 7.86c_*$

На рисунках 13–15 и 16–18 отражены результаты расчетов для волноводов с опорными характеристиками $c_{44L0} = 3.93c_*$, $c_{66L0} = 3.93c_*$, $\rho_{0L} = 4.5\rho_*$, $\lambda_\rho = -0.121$, $c_{44S0} = 1.8c_*$, $c_{66S0} = 2.2c_*$, $\rho_{0S} = 4.5\rho_*$, $\lambda = 2.0$, $\beta = 1.5$ и варьируемыми величинами параметра $\lambda_c = -0.59$, $\lambda_c = -1.76$, $\lambda_c = -2.34$. Эффектами уменьшения значения λ_c является увеличение меры дисперсии волн из низших мод с нулевой частотой запираания; весьма малое влияние этого параметра на значения частот запираания последующих мод; уменьшение фазовых скоростей волн всех мод с увеличением λ_c .

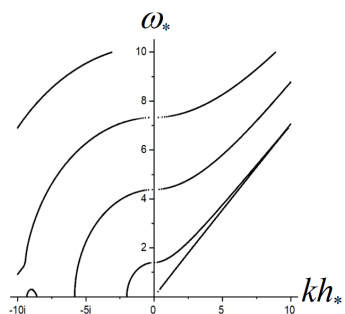


Рис. 13. $\lambda_c = -0.59$

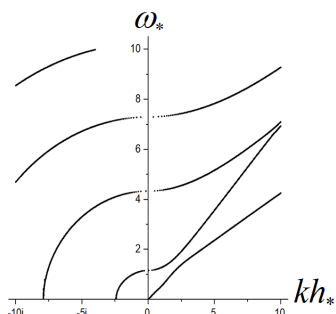


Рис. 14. $\lambda_c = -1.76$

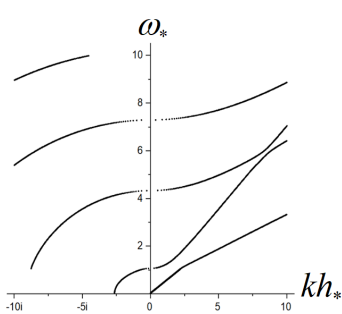


Рис. 15. $\lambda_c = -2.34$

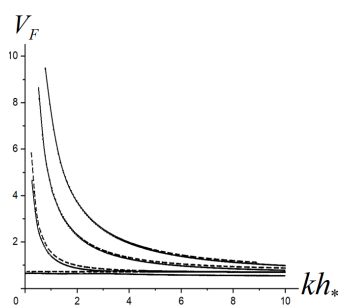


Рис. 16. $\lambda_c = -0.59$

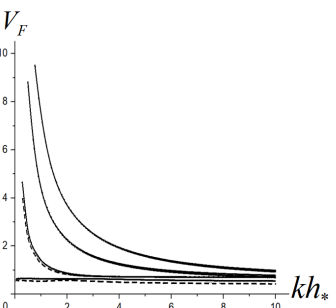


Рис. 17. $\lambda_c = -1.76$

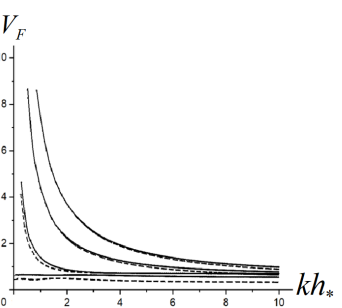


Рис. 18. $\lambda_c = -2.34$

Наконец, на рисунках 19–21 и 22–24 приведены расчетные результаты для волноводов с опорными характеристиками $c_{44L0} = 3.93c_*$, $c_{66L0} = 3.93c_*$, $\rho_{0L} = 4.5\rho_*$, $\lambda_\rho = -0.121$, $c_{44S0} = 1.8c_*$, $c_{66S0} = 2.2c_*$, $\rho_{0S} = 4.5\rho_*$, $\beta = 1.5$ и варьируемыми величинами параметра $\lambda = 1.0$, $\lambda = -1.0$, $\lambda = -2.0$.

Эффектами уменьшения значений λ является увеличение частот запираания однопорядковых высших мод в соответствующих дисперсионных спектрах; снижение меры дисперсии волн из низших мод с нулевой частотой запираания и влияния на формы дисперсионных кривых для высших мод; крайне незначительное влияние характеристики λ_c рассматриваемых волноводов на скорости волн низшей моды с нулевой частотой запираания; увеличение фазовых скоростей волн всех высших мод с уменьшением λ_c .

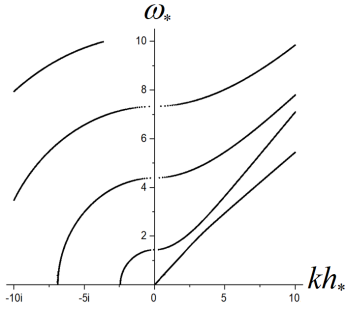


Рис. 19. $\lambda = 1.0$

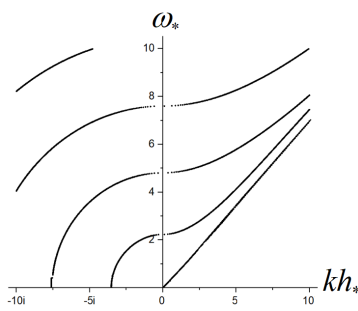


Рис. 20. $\lambda = -1.0$

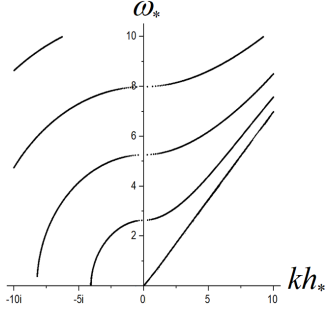


Рис. 21. $\lambda = -2.0$

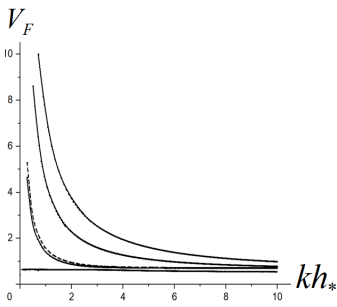


Рис. 22. $\lambda = -2.0$

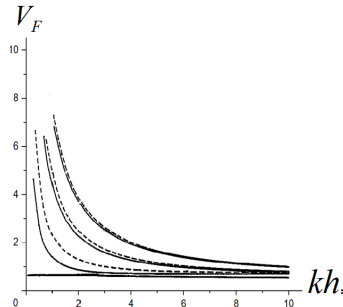


Рис. 23. $\lambda = -1.0$

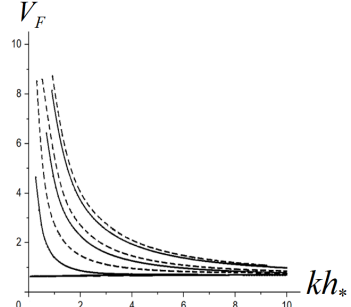


Рис. 24. $\lambda = 1.0$

Закключение. Результатом представленных в работе исследований является разработка и реализация методики получения и расчетного анализа дисперсионных соотношений для обобщенных поверхностных упругих волн Лява в составных волноводах из контактирующих компонентов в виде слоя из поперечно-анизотропного материала с двумя различными экспоненциальными законами неоднородности по толщине для параметра плотности и модулей упругости, а также подстилающего полупространства из поперечно-неоднородного материала с локализованной приповерхностной зоной однофакторной неоднородности по глубине, описываемой двойной экспоненциальной функцией.

Установлен ряд эффектов влияния варьируемой меры анизотропии и параметров неоднородности компонентов составного волновода из функционально-градиентного металлокерамического слоя с двумя различными экспоненциальными законами неоднородности по толщине для параметра плотности и модулей упругости и полупространства-подложки из йодата лития со свойствами приповерхностной однофакторной неоднородности по глубине на топологические свойства дисперсионных спектров и распределения фазовых скоростей обобщенных поверхностных волн Лява из различных мод спектров.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

- Наука, 1981. – 287 с.
2. Бирюков С.В. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский. – М.: Наука, 1991. – 414 с.
 3. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник / под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2005. – 656 с.
 4. Бугаев А.С. Устройства на поверхностных акустических волнах / А.С. Бугаев, В.Ф. Дмитриев, С.В. Кулаков. – Санкт-Петербург: ГУАП, 2009. – 187 с.
 5. Мелешко В.В. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
 6. Назаров Ю.П. Расчетные модели сейсмических воздействий / Ю.П. Назаров. – М.: Наука, 2012. – 414 с.
 7. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 1 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 227–260. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06.
 8. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 2 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 36–86. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.036_086.03.
 9. Alam P. Dispersion Study of SH-Wave Propagation in an Irregular Magneto-Elastic Anisotropic Crustal Layer over an Irregular Heterogeneous Half-Space / P. Alam, S. Kundu, S. Gupta // J. K. S. Uni.-Sci. – 2018. – Vol. 30, No 3. – P. 301–310.
 10. Cao X. Transverse shear wave in a functionally graded material infinite half-space / X. Cao, F. Jin, K. Kishimoto // Philosophical Magazine Letters. – 2012. – Vol. 92, No. 5. – P. 245–253.
 11. Chattopadhyay A. Torsional wave propagation in non-homogeneous layer between non-homogeneous half-spaces / A. Chattopadhyay, S. Gupta, P. Kumari, V. K. Sharma // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2013. – Vol. 37, Issue 10. – P. 1280–1291.
 12. Ezzin H. Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation / H. Ezzin, B. Wang, Z. Qian // Mechanics of Materials. – 2020. – Vol. 148, Article No 103492. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2020.103492.
 13. Goyal R. Estimating the effects of imperfect bonding and size-dependency on Love-type wave propagation in functionally graded orthotropic material under the influence of initial stress / R. Goyal, S. Kumar // Mechanics of Materials – 2021. – Vol. 155. – Available at: <https://www.sciencegate.app/document/10.1016/j.mechmat.2021.103772>.
 14. Gupta S. Propagation of Love waves in non-homogeneous substratum over initially stressed heterogeneous half-space / S. Gupta, D.K. Majhi, S. Kundu, S.K. Vishwakarma, // Applied Mathematics and Mechanics. – 2013. – Vol. 34. – P. 249–258.
 15. Jakoby B. Properties of Loves waves: application in sensors / B. Jakoby, M.J. Vellekoop // Smart Mater. Struct. – 1997. – Vol. 6. – P. 668–679.
 16. Kakar R. Love waves in an intermediate heterogeneous layer lying in between homogeneous and inhomogeneous isotropic elastic half-spaces / R. Kakar, M. Gupta // EJGE 19. – 2014. – Bund X. – P. 7165–7185.
 17. Kakar R. Dispersion of Love wave in an isotropic layer sandwiched between orthotropic and prestressed inhomogeneous half-spaces / R. Kakar // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2015. – Vol.12, No.10. – DOI: 10.1590/1679-78251918.
 18. Kakar R. Diffraction of Torsional Surface Wave in a Voigt Layer Overlying a Prestressed Heterogeneous Substratum / R. Kakar, S. Kakar // International Journal of Geomechanics. – 2016. – Vol. 16, Iss. 4. – DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000626.
 19. Kakar R. Love Wave in a Voigt-Type Viscoelastic Heterogeneous Layer Overlying Heterogeneous Viscoelastic Half-Space / R. Kakar, S. Kakar // International Journal of Geomechanics. – 2017. – Vol. 17, Iss.1. – DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000675.
 20. Ke L.L. Propagation of Love Waves in an inhomogeneous fluid saturated porous layered half-space with properties varying exponentially / L.L. Ke, Y.S. Wang, Z.M. Zhang, // International

- Journal of Geomechanics. – 2005. – Vol. 131(12). – P. 1322–1328.
21. *Kielczynski P.* Propagation of ultrasonic love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials / P. Kielczynski, M. Szalewski, A. Balcerzak, K. Wieja // *Ultrasonics*. – 2016. – Vol. 65. – P. 220–227.
22. *Kong Y.-P.* Propagation of love waves in the orthotropic layer/functionally graded piezoelectric half-space / Y.-P. Kong, C.-H. Chen, J.-X. Liu // *Journal of Shanghai Jiaotong University*. – 2013. – Vol. 47, No. 2. – P. 210–215.
23. *Kumar D.* Analysis of SH-Wave Propagation in Magnetoelastic Fiber-Reinforced Layer Resting over Inhomogeneous Viscoelastic Half-Space with Corrugation / D. Kumar, S. Kundu, S. Gupta // *International Journal of Geomechanics*. – 2021. – Vol. 21, No 11. – DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0002188.
24. *Kumar S.* Propagation of SH-Type Waves in Inhomogeneous Anisotropic Layer Overlying an Anisotropic Viscoelastic Half-Space / S. Kumar, P.C. Pal, S. Bose // *Int. J. Eng. Sci. Tech.* – 2014. – Vol. 6, No 4 – DOI: 10.4314/ijest.v6i4.3.
25. *Liu J.* The propagation behavior of Love waves in a functionally graded layered piezoelectric structure / J. Liu, Z.K. Wang // *Smart Mat. Struct.* – 2005. – No 14. – P. 137–146.
26. *Manna S.* Effect of reinforcement and inhomogeneity on the propagation of love waves / S. Manna, S. Kundu, S. Gupta // *International Journal of Geomechanics*. – 2015. – Vol. 16, No 2. – Available at: https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/31/mateconf_rsp2017_00049/mateconf_rsp2017_00049.html.
27. *Manna S.* Love wave propagation in a piezoelectric layer overlying in an inhomogeneous elastic half-space / S. Manna, S. Kundu, S. Gupta // *J. Vib. Control*. – 2015. – Vol. 21, No 13. – P. 2553–2568.
28. *Sahu S.A.* SH-Waves in Viscoelastic Heterogeneous Layer over Half-Space with Self-Weight / S.A Sahu, P.K. Saroj, N. Dewangan // *Arch. Appl. Mech.* – 2014. – Vol. 84, No 2. – P. 235–245.
29. *Zorammuana C.* SH-Wave at a Plane Interface between Homogeneous and Inhomogeneous Fibre-Reinforced Elastic Half-Spaces / C. Zorammuana, S.S. Singh. // *Indian Journal of Materials Science*. – Vol. 2015. – DOI: 10.1155/2015/532939.
30. *Белянкова Т.И.* Особенности распространения волн Лява в упругих функционально-градиентных покрытиях / Т.И. Белянкова, В.В. Калинин // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2017. – Т. 10, № 1. – С. 39–52. – DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.4.
31. *Болнокин В.Е.* Интегрирование уравнения распространения волн сдвига в функционально-градиентном полупространстве с приграничной локализацией зоны неоднородности физико-механических свойств / В.Е. Болнокин, А. А. Глухов, В. И. Сторожев // *Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VII Международной научной конференции, посвящённой 85-летию Донецкого национального университета (Донецк, 27–28 октября 2022 г.)*. – Том 1: Механико-математические, компьютерные науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – С. 38–40.
32. *Сторожев В.И.* Дисперсия нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое / В.И. Сторожев, А.А. Глухов // *Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки*. – 2024. – № 1. – С. 58–64. – DOI: 10.5281/zenodo.12531960. – EDN: GCZGRS.
33. *Глухов А.А.* Методика анализа проблемы распространения волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с различными законами экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // *Журнал теоретической и прикладной механики*. – 2024. – № 1 (86). – С. 51–60. – DOI:10.24412/0136-4545-2024-1-51-60. – EDN:PSXXPV
34. *Глухов А.А.* Дисперсионные соотношения для сдвиговых волн в анизотропном функционально-градиентном слое с двухфакторной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам / А.А. Глухов // *Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки*. – 2024. – № 4. – С. 3–7. – DOI: 10.5281/zenodo.14138063. – EDN: VREMUM.

35. Глухов А.А. Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью» / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 32–39. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-1-32-39. – EDN:ENGOVX.
36. Глухов А.А. Дисперсионное соотношение для поверхностных волн Лява в составной структуре «функционально-градиентный экспоненциально-неоднородный анизотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве с приграничной неоднородностью» / А.А. Глухов // Труды РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41), том 2. – С. 214–221.

A.A. Glukhov, V.I. Storozhev

Influence of anisotropy and heterogeneity characteristics of components of waveguide on the properties generalized surface Love waves.

The article presents the results of studying the features in the structure of dispersion spectra and phase velocity distributions of generalized Love surface waves from different modes of the spectrum for composite waveguides from contacting components in the form of a layer of transversely anisotropic material with two different exponential laws of heterogeneity in thickness for the density parameter and elastic modulus, as well as an underlying half-space of transversely inhomogeneous material with a localized near-surface zone of single-factor heterogeneity in depth described by a double exponential function, with varying ratios of physical and mechanical parameters and parameters of the laws of heterogeneity of anisotropic functionally graded materials of the waveguide. The analyzed dispersion relations and representations of wave fields in the waveguide components are obtained using analytical solutions of the corresponding ordinary differential amplitude equations with variable coefficients, constructed using an iterative algorithm in the closed form of exponential series.

Keywords: *generalized Love surface waves, composite functionally gradient waveguides, transversely isotropic layer with two-factor exponential inhomogeneity, transversely isotropic half-space with near-surface inhomogeneity, analytical solutions of amplitude wave equations, analysis of dispersion relations, variation of modulus of elasticity and heterogeneity parameters, influence on the topology of dispersion spectra, transformations of phase velocity distributions.*

*Статья поступила в редакцию 02.07.2025;
доработана 23.07.2025;
рекомендована к печати 18.08.2025.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-76-83

EDN:AYNBWX

©2025. Д.Д. Полянский¹, С.В. Сторожев², Чан Ба Ле Хоанг³УЧЕТ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСОВ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ
В МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ СИЛОВОМ И
ТЕМПЕРАТУРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Получены и апробированы обобщенные нечетко-множественные расчетные соотношения для определения критического значения комплексного параметра нагружения в задаче устойчивости оболочки сферической формы модели Тимошенко с заполнителем, в которых учитывается параметрическая неопределенность в виде разбросов значений неконтрастных исходных физико-механических, геометрических и эксплуатационных параметров конструкции. Реализуемый при исследовании подход базируется на фаззификации параметров с разбросами и использовании модифицированного альфа-уровневого варианта эвристического принципа обобщения в процессе расширения областей определения функциональных расчетных соотношений детерминистической версии модели при переходе в них к аргументам нечетко-множественного типа.

Ключевые слова: сферические оболочки с заполнителем, устойчивость при термомеханическом деформировании, модель Тимошенко, критический параметр комплексного нагружения, учет неконтрастности исходных параметров, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

¹Полянский Дмитрий Дмитриевич – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

²Сторожев Сергей Валериевич – докт. техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Чан Ба Ле Хоанг – канд. техн. наук, зав. каф. физики ф-та общих наук Университета природных ресурсов и окружающей среды, Хошимин, Вьетнам, e-mail: Hoangtbl@hcmunre.edu.vn

Tran Ba Le Hoang – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Ho Chi Minh City University of Natural Resources and Environment, Vietnam, Faculty of General Sciences, Chair of Physics.

Введение и цели исследования. Актуальные в теоретическом и прикладном аспектах проблемы анализа эффектов устойчивости упругих сферических оболочек с учетом нагрева рассматривались в работах [1–6]. Элементом этих исследований являлось, в частности, введение обобщенной деформационной характеристики в виде функциональной зависимости между несущей способностью и распределением температур в материале оболочки при изотермических состояниях согласно методу определяющей температуры. При этом для эффективного практического применения результатов указанных исследований, осуществленных в рамках детерминистических версий отмеченных выше моделей термомеханического деформирования сферических оболочек, основывающихся на гипотезах Кирхгоффа-Лява и гипотезах Тимошенко, целесообразно разработать методику учета в данных расчетах факторов параметрической неопределенности в виде имеющих место на практике разбросов значений неконтрастных исходных физико-механических, геометрических параметров рассматриваемых конструкций и характеристик внешних воздействий. В качестве используемого для этого подхода может рассматриваться обеспечивающее получение адекватных, практически значимых результатов расчетного анализа, реализованное в исследованиях моделей родственного типа и описанное в работах [7–20] применение методов теории нечетко-множественного анализа параметрической неопределенности, допускающих оперирование неконтрастной исходной информацией, не отвечающей строгим условиям статистической корректности. Эти методы также предусматривают возможность введения разнотипных индивидуализированных нечетко-множественных представлений для различных неконтрастных исходных параметров моделей с целью максимально эффективного учета имеющейся неопределенной исходной информации и, в сравнении с методами вероятностно-стохастического анализа, допускают при числовой реализации эффективный одновременный учет большего числа параметров с разбросами значений в расчетных алгоритмах.

С учетом перечисленных соображений, целями настоящей работы являются получение и вычислительная апробация обобщенных нечетко-множественных расчетных соотношений для определения разбросов критического значения комплексного параметра нагружения в задаче устойчивости подверженной давлению извне и нагреваемой упругой оболочки сферической формы модели Тимошенко с заполнителем при учете параметрической неопределенности в виде неконтрастности значений исходных физико-механических, геометрических и эксплуатационных параметров конструкции.

1. Соотношения детерминистического варианта модели расчета критического значения приведенного комплексного параметра нагружения. Рассматриваемой в исследовании моделью локальной теории устойчивости тонкостенной упругой оболочечной конструкции является базирующаяся на гипотезах Тимошенко модель термомеханического деформирования содержащей заполнитель тонкостенной пологой сферической оболочки, подверженной действию распределенного внешнего давления и равномерного нагрева [6]. Наличие

внутреннего заполнения деформируемой средой, нагревание которой не учитывается, описывается моделью Винклера с постоянным коэффициентом постели. Оболочка отнесена к сферическим координатам, и в рамках рассматриваемой модели, в обозначениях работы [6], характеризуется следующей совокупностью физико-механических и геометрических параметров: R – радиус срединной поверхности; h – толщина стенки; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; β_0 – коэффициент линейного теплового расширения материала оболочки; α_0 – коэффициент силовой реакции, характеризующий взаимодействие заполнителя с внутренней стенкой оболочки; G' – модуль сдвига материала оболочки в трансверсальном направлении. Внешние деформирующие воздействия характеризуются параметрами q_0 интенсивности внешнего равномерно распределенного давления и температурой нагрева оболочки T .

Согласно результатам реализованных в работе [6] исследований, для критического значения безразмерного приведенного комплексного параметра Λ_* внешнего термосилового воздействия давления на нагретую оболочку с заполнителем получено справедливое при выполнении условия $a < (1 + \omega_0)^{-1/2}$ представление

$$\Lambda_* = 2(1 + \omega_0)^{1/2} - a(1 + \omega_0) - \omega_0 t_0, \quad (1)$$

в котором

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha_0 R^2 (Eh)^{-1}, \quad t_0 = \beta_0 T (2\delta\mu^2)^{-1}, \quad a = \mu^2 E (G')^{-1}, \\ \mu &= (h^2 (12R^2 (1 - \nu^2))^{-1})^{1/2}, \quad \delta = 1 + \alpha_0 R^2 (1 - \nu) (2Eh)^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметр Λ_* имеет развернутое представление

$$\begin{aligned} \Lambda_* &= \Phi_\Lambda(R, h, E, \nu, \beta_0, \alpha_0, G', T) = 2(1 + \alpha_0 R^2 (Eh)^{-1})^{1/2} - \\ &- (1 + \alpha_0 R^2 (Eh)^{-1}) (h^2 (12R^2 (1 - \nu^2))^{-1}) E (G')^{-1} - \alpha_0 R^2 (Eh)^{-1} \beta_0 T \cdot \\ &\cdot (2(1 + \alpha_0 R^2 (1 - \nu) (2Eh)^{-1}) (h^2 (12R^2 (1 - \nu^2))^{-1}))^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

В свою очередь, при фиксируемой температуре параметр критической интенсивности внешнего давления q_{0*} , обуславливающего потерю устойчивости с низшей формой, может быть рассчитан с применением соотношения

$$q_{0*} = 2h\delta\mu^2 ER^{-1}(\Lambda_* - \omega_0 t_0). \quad (4)$$

Использование соотношений (1)–(4) является базовым моментом представляемой разработки.

2. Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений.

В процессе получения нечетко-множественных версий расчетных соотношений (1)–(4) исходным этапом является фазсификация неконтрастных экзогенных параметров [7–10] рассматриваемой модели с переходом к их обобщениям в виде

нечетких величин \tilde{R} , \tilde{h} , \tilde{E} , $\tilde{\nu}$, $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\alpha}_0$, \tilde{G}' , \tilde{q}_0 , \tilde{T} , а также получение их представлений в виде разложений по множествам α – уровня

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha], \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha], \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha], \\ \tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha], \quad \tilde{\beta}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_{0\alpha}, \overline{\beta}_{0\alpha}], \quad \tilde{\alpha}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{0\alpha}, \overline{\alpha}_{0\alpha}], \\ \tilde{G}' &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}'_\alpha, \overline{G}'_\alpha], \quad \tilde{q}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{0\alpha}, \overline{q}_{0\alpha}], \quad \tilde{T} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_\alpha, \overline{T}_\alpha].\end{aligned}\quad (5)$$

Для эндогенных параметров в соотношениях (3), (4) также вводятся представления в виде суперпозиций α – срезов

$$\tilde{\Lambda}_* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Lambda}_{*\alpha}, \overline{\Lambda}_{*\alpha}], \quad \tilde{q}_{0*} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{0*\alpha}, \overline{q}_{0*\alpha}]. \quad (6)$$

Предварительным этапом применения модифицированного α – уровневого варианта эвристического принципа обобщения в процессе расширения области определения функционального расчетного соотношения (3) детерминистической версии модели для эндогенного параметра Λ_* при переходе в нем к аргументам нечетко-множественного типа является установление свойств знакоопределенности частных производных данной функциональной зависимости по аргументам в полной области их совокупного изменения:

$$\partial \Lambda_* / \partial G' \geq 0, \quad \partial \Lambda_* / \partial \beta_0 \leq 0, \quad \partial \Lambda_* / \partial T \leq 0. \quad (7)$$

С учетом свойств (7) можно записать следующие искомые представления:

$$\begin{aligned}\underline{\Lambda}_{*\alpha} &= \inf_{\substack{R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ \nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ \alpha_0 \in [\underline{\alpha}_{0\alpha}, \overline{\alpha}_{0\alpha}]}} \Phi_\Lambda(R, h, E, \nu, \underline{\beta}_{0\alpha}, \alpha_0, \underline{G}'_\alpha, \overline{T}_\alpha), \\ \overline{\Lambda}_{*\alpha} &= \sup_{\substack{R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ \nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ \alpha_0 \in [\underline{\alpha}_{0\alpha}, \overline{\alpha}_{0\alpha}]}} \Phi_\Lambda(R, h, E, \nu, \underline{\beta}_{0\alpha}, \alpha_0, \overline{G}'_\alpha, \underline{T}_\alpha).\end{aligned}\quad (8)$$

Соотношения (8) определяют алгоритм получения оценок возможностей возникновения разбросов значений эндогенного параметра модели Λ_* по данными о характере и величинах разбросов исходных параметров.

3. Реализация вычислительных экспериментов. Пример реализации поученного расчетного алгоритма относится к следующему варианту описания нечетко-множественных характеристик модели деформирования рассматриваемой оболочечной конструкции.

Полагается, что материалом оболочки является дюралюминий, для разбросов параметров механических характеристик которого имеются базы экспериментальных статистических данных [21]. Соответственно этим данным, для неконтрастных параметров E , ν , G' вводятся представления несимметричными квазигауссовыми нормальными нечеткими числами \tilde{E} , $\tilde{\nu}$, \tilde{G}' [8], для которых в выражениях (5)

$$\begin{aligned} \underline{E}_\alpha &= m_{*E} - \sigma_{*lE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{E}_\alpha &= m_{*E} + \sigma_{*rE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} - \sigma_{*l\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} + \sigma_{*r\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{G'}_\alpha &= m_{*G'} - \sigma_{*lG'}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{G'}_\alpha &= m_{*G'} + \sigma_{*rG'}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ m_{*E} &= 6.963 \cdot 10^{10} \text{Па}, & \sigma_{*lE} &= 0.079 \cdot 10^{10} \text{Па}, & \sigma_{*rE} &= 0.155 \cdot 10^{10} \text{Па}; \\ m_{*\nu} &= 0.33, & \sigma_{*l\nu} &= 0.001, & \sigma_{*r\nu} &= 0.001; \\ m_{*G'} &= 2.76 \cdot 10^{10} \text{Па}, & \sigma_{*lG'} &= 0.01 \cdot 10^{10} \text{Па}, & \sigma_{*rG'} &= 0.01 \cdot 10^{10} \text{Па}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для неопределенных параметров β_0 , α_0 на базе экспериментальных данных [21, 22] вводятся представления нормальными треугольными нечеткими числами $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\alpha}_0$ [8] с

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)\beta_{01} + \alpha\beta_{02}, & \overline{\beta}_{0\alpha} &= \alpha\beta_{02} + (1 - \alpha)\beta_{03}; \\ \underline{\alpha}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{01} + \alpha\alpha_{02}, & \overline{\alpha}_{0\alpha} &= \alpha\alpha_{02} + (1 - \alpha)\alpha_{03}; \\ \beta_{01} &= 22.9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, & \beta_{02} &= 22.95 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, & \beta_{03} &= 23.00 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}; \\ \alpha_{01} &= 30 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^3, & \alpha_{02} &= 40 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^3, & \alpha_{03} &= 50 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^3. \end{aligned}$$

Неконтрастность параметров R , h определяется технологическими допусками и описывается нечетко-множественными величинами \tilde{R} , \tilde{h} в виде нормальных нечетких трапецидальных интервалов [8] с

$$\begin{aligned} \underline{R}_\alpha &= (1 - \alpha)a_R + \alpha b_R, & \overline{R}_\alpha &= \alpha c_R + (1 - \alpha)d_R; \\ \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)a_h + \alpha b_h, & \overline{h}_\alpha &= \alpha c_h + (1 - \alpha)d_h; \\ a_R &= 0.595 \text{ м}, & b_R &= 0.600 \text{ м}, & c_R &= 0.605 \text{ м}, & d_R &= 0.607 \text{ м}; \\ a_h &= 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & b_h &= 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & c_h &= 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & d_h &= 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Неконтрастность параметра T определяется экспертными оценками и также описывается нечетко-множественной величиной \tilde{T} в виде нормального нечеткого трапецидального интервала

$$\underline{T}_\alpha = (1 - \alpha)T_1 + \alpha T_2, \quad \overline{T}_\alpha = \alpha T_3 + (1 - \alpha)T_4;$$

$$T_1 = 190\text{ }^{\circ}\text{C}, \quad T_2 = 200\text{ }^{\circ}\text{C}, \quad T_3 = 205\text{ }^{\circ}\text{C}, \quad T_4 = 210\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Результаты расчета функции принадлежности для приведенного безразмерного нечетко-множественного эндогенного параметра анализируемой модели $\tilde{\Lambda}_*$ в рассматриваемом случае задания ее неконтрастных параметров представлены на рисунке 1. Максимальная оценка для величины разброса критического значения безразмерного приведенного комплексного параметра внешнего термосилового воздействия давления на нагретую оболочку с заполнителем в рассмотренном примере расчетного анализа на уровне уверенности $\mu = 0.05$ составляет 0.94% от модального значения $\tilde{\Lambda}_{*\mu=1} = 2.065$.

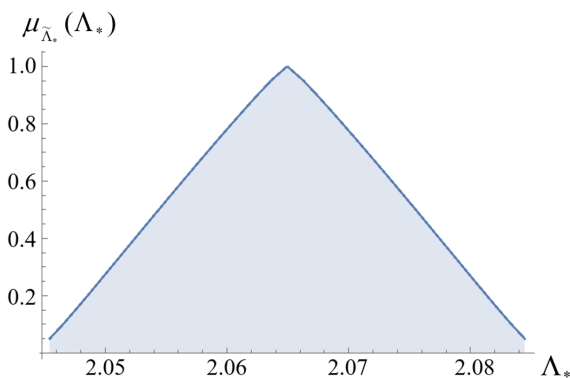


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\Lambda}_*}(\Lambda_*)$

Закключение. Результатом представленных в работе исследований является осуществленная разработка и количественная цифровая апробация численно-аналитической методики учета параметрической неопределенности при получении оценок разбросов критического значения комплексного параметра нагружения в задаче устойчивости подверженной давлению извне и нагреваемой упругой оболочки сферической формы модели Тимошенко с заполнителем. Учитывается фактор неконтрастности значений исходных физико-механических, геометрических и эксплуатационных параметров конструкции. Методика базируется на аппарате нечетких вычислений и применении эвристического принципа расширения в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в расчетных соотношениях, полученных для детерминистической версии рассматриваемой модели.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Белозеров Л.Г. Композитные оболочки при тепловых и силовых воздействиях / Л.Г. Белозеров, В.А. Киреев. – М.: Физматлит, 2003. – 388 с.
2. Корбут Б.А. Устойчивость сферической оболочки с упругим заполнителем при действии нагрузок и температуры / Б.А. Корбут // Известия вузов. Авиационная техника. – 1965. – № 4. – С. 97–102.
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1995. – 319 с.

4. *Товстик П.Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании / П.Е. Товстик // Известия РАН. – 2005. – Вып. 1. – С. 147–160.
5. *Tovstik P.E.* On the 2D models of plates and shells including the transversal shear / P.E. Tovstik, T.P. Tovstik // ZAMM. – 2007. – Vol. 87, № 2. – P. 160–171.
6. *Михеев А.В.* Локальная устойчивость сферической оболочки с заполнителем при силовом и температурном нагружении / А.В. Михеев // Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2013. – Вып. 1. – С. 103–107.
7. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
8. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
9. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
10. *Нгуен Куок Ши.* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
11. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / Н.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 63–76. – DOI:10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN TOGBNE.
12. *Номбре С.Б.* Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 56–66. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-2-56-66. – EDN:TVWFZT.
13. *Гольцев А.С.* Нечетко-множественный учет разброса параметров в модели термомеханических воздействий на поверхности упругого полого шара / А.С. Гольцев, С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 102–114. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-3-102-114. – EDN:VJEVZB.
14. *Номбре С.Б.* Нечетко-множественный учет параметрической неопределенности в модели расчета критической температуры потери устойчивости полой цилиндрической оболочки / Номбре С.Б., Т.П. Малютина, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 73–82. – DOI:10.24412/0136-4545-2024-1-73-82. – EDN:URZFFM.
15. *Номбре С.Б.* Нечетко-множественный учет фактора параметрической неопределенности в прикладной модели оценки характеристик изгиба биметаллических пластин со свободным краем / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3 (88). – С. 79–88. – DOI:10.24412/0136-4545-2024-3-79-88. – EDN:LHFJGQ.
16. *Малютина Т.П.* Нечетко-множественный анализ эффектов параметрической неопределенности в модели деформирования толстостенного цилиндра из материала с температурозависимыми свойствами / Т.П. Малютина, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 4 (89). – С. 84–94. – DOI:10.24412/0136-4545-2024-4-84-94. – EDN:VPSYOI.
17. *Сторожев С.В.* Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в моделях термоупругого деформирования / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XVII Всероссийской школы, (пос. Дивноморское, 28 мая – 1 июня 2023 г.) / ред.: А.О. Ватульян, М.И. Карякин, А.В. Попов, Р.Д. Недин, Р.М. Мнухин; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального ун-та, 2023. – С. 106. – EDN: DJWVXI.
18. *Номбре С.Б.* Нечетко-множественный учет параметрической неопределенности в зада-

- цах термомеханики тонкостенных конструкций / Н.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XXI Международной конференции (Ростов-на-Дону, 11-13 октября 2023 г.) Южный федеральный университет – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального ун-та, 2023. – С. 89. – EDN: PDDAAV.
19. Номбре С.Б. Методика нечётко-множественного учёта параметрической неопределённости при исследовании температурных напряжений в тонких протяжённых цилиндрических оболочках / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Материалы докладов Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию ИВМ СО РАН. – Электронные данные. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2024. – С. 147–149. – Режим доступа: <https://mdm2024.tilda.ws/rec796105776>.
20. Полянский Д.Д. Нечетко-множественный алгоритм учета разброса параметров в модели термомеханического деформирования полых функционально-градиентных цилиндров / Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, И.Ю. Филиппаки // Искусственный интеллект: теоретические аспекты, практическое применение: материалы Донецкого международного научного круглого стола. – Донецк: ФГБНУ «ИПИИ», 2024. – С. 209–214.
21. Климов В.Н. Современные авиационные конструкционные сплавы / В.Н. Климов, Д.М. Козлов. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2017. – 40 с.
22. Бородачев Н.М. О возможности замены сложных моделей упругого основания более простыми / Н.М. Бородачев // Строительная механика и расчет сооружений. — 1975. – Вып. 4. – С. 37–39.

D.D. Polyansky, S.V. Storozhev, Tran Ba Le Hoang

Taking into account the influence of exogenous parameters variations in the local stability model of a spherical shell with a filler under force and temperature loading.

Generalized fuzzy-set calculation relationships for determining the critical value of the complex loading parameter in the stability problem of a spherical shell of the Timoshenko model with a filler are obtained, which take into account the parametric uncertainty in the form of scattering of values of non-contrasting initial physical, mechanical, geometric and operational parameters of the structure. The approach implemented in the study is based on fuzzification of parameters with scattering and the use of a modified alpha-level version of the heuristic principle of generalization in the process of expanding the domains of definition of functional calculation relationships of the deterministic version of the model when passing to fuzzy-set arguments.

Keywords: *spherical shells with a filler, stability under thermomechanical deformation, Timoshenko model, critical parameter of complex loading, taking into account the non-contrasting nature of the initial parameters, fuzzy-set technique, heuristic principle of generalization.*

*Статья поступила в редакцию 18.06.2025;
доработана 07.07.2025;
рекомендована к печати 11.08.2025.*

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3
doi:10.24412/0136-4545-2025-2-84-92
EDN:BXZNAU



©2025. Т.П. Малютина¹, С.Б. Номбре², Д.Д. Полянский³,
С.В. Сторожев⁴

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСОВ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАТ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ С ДЕМПФИРУЮЩИМИ ПОЛИМЕРНЫМИ РЕБРАМИ

Получены и апробированы обобщенные нечетко-множественные расчетные соотношения для определения разбросов значений низшей резонансной частоты колебаний тонких прямоугольных опертых по краям плат радиоэлектронных систем с рядами взаимоортогональных прямолинейных демпфирующих полимерных ребер. Для исходных неконтрастных физико-механических и геометрических параметров рассматриваемой модели учитывается неопределенность значений, обусловленная погрешностями экспериментальных данных, технологическим допусками и использованием субъективных экспертных оценок. Реализуемый при исследовании подход базируется на фазсификации параметров с разбросами и использовании модифицированного альфа-уровневого варианта эвристического принципа обобщения в процессе расширения областей определения функциональных расчетных соотношений детерминистической версии модели при переходе в них к аргументам нечетко-множественного типа.

¹Малютина Татьяна Петровна – канд. техн. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: t.p.malutina@donnasa.ru.

Malytina Tatyana Petrovna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

²Номбре Светлана Борисовна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

Nombre Svetlana Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Полянский Дмитрий Дмитриевич – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

⁴Сторожев Сергей Валериевич – докт. техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

Ключевые слова: радиоэлектронные системы, прямоугольные элементные платы, частоты резонансных колебаний, полимерные демпфирующие ребра, учет неконтрастности исходных параметров, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

Введение и цели исследования. Подходы к исследованию актуальных в теоретическом и прикладном аспектах проблем совершенствования методик расчетного анализа систем механической виброзащиты элементных плат радиоэлектронных устройств рассматривались, в частности, в работах [1–9]. При этом для эффективного практического применения результатов указанных исследований, осуществленных в рамках использования ряда синтезированных детерминистических версий моделей рассматриваемого типа, целесообразно разработать методику учета в данных расчетах факторов параметрической неопределенности в виде имеющих место на практике разбросов значений неконтрастных исходных физико-механических и геометрических параметров рассматриваемых конструкций. В качестве используемого для этого подхода может рассматриваться обеспечивающее получение адекватных практически значимых результатов расчетного анализа, реализованное в исследованиях моделей родственного типа и описанное в работах [10–19] применение методов теории нечетко-множественного анализа параметрической неопределенности, допускающих оперирование неконтрастной исходной информацией, не отвечающей строгим условиям статистической корректности. Эти методы также предусматривают возможность введения разнотипных индивидуализированных нечетко-множественных представлений различных неконтрастных исходных параметров моделей для максимально эффективного учета имеющейся неопределенной исходной информации и допускают одновременный учет большого числа параметров с разбросами значений в расчетных алгоритмах.

С учетом перечисленных соображений, целями настоящей работы являются получение и вычислительная апробация обобщенных нечетко-множественных расчетных соотношений для определения низших частот резонансных колебаний прямоугольных опертых по краям элементных плат радиоэлектронных систем с прямолинейными разноориентированными демпфирующими полимерными ребрами при учете параметрической неопределенности в виде разбросов значений неконтрастных исходных физико-механических и геометрических параметров конструкции.

1. Соотношения детерминистического варианта модели расчета параметра демпфирования. Рассматриваемым в модели объектом является элементная плата радиоэлектронного устройства [5] в виде прямоугольной изотропной тонкой пластины с шарнирно опертыми краями, срединная плоскость которой занимает в двумерной системе прямоугольных координат Ox_1x_2 область $\{-a/2 \leq x_1 \leq a/2, -b/2 \leq x_2 \leq b/2\}$. Плата имеет толщину h , изготовлена из материала с параметром плотности ρ_p , модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . На плате имеются расположенные параллельно ее сторонам по всей длине и (или) по ширине демпфирующие ребра из идентичного полимерного

материала. Ориентированные вдоль координатных направлений Ox_1 и Ox_2 ребра соответственно имеют прямоугольные сечения, параметры ширины b_* и a_* , а также равную для всех ребер независимо от их ориентации высоту h_* . На плате размещены составляющие электронной элементной базы с суммарной массой m_e , и, соответственно, усредненная приведенная характеристика удельной плотности платы с элементами ρ может быть записана в виде $\rho = \rho + m_e/(abh)$. Положения осей разноориентированных параллельных демпфирующих ребер идентифицируются координатными параметрами x_{1p} ($p = \overline{1, N_p}$), x_{2q} ($q = \overline{1, N_q}$). Полимерный материал ребер характеризуется параметром плотности ρ_* , модулем Юнга E_* и коэффициентом Пуассона ν_* .

С использованием введенных обозначений, согласно результатам работы [5], соотношение для расчета низшей технической частоты f резонансных колебаний рассматриваемой платы с демпфирующими полимерными ребрами, полученное в рамках детерминистической версии рассматриваемой модели, может быть записано в форме

$$\begin{aligned} f &= \Phi_f(a, b, h, E, \nu, \rho, a_*, b_*, h_*, E_*, \rho_*, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1N_p}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2N_q}) = \\ &= [[(Dab/2)(a^{-2} + b^{-2})^2 + b^{-3}B_1 \sum_{p=1}^{N_{p1}} \sin^2(\pi x_{1p}/a) + a^{-3}B_2 \sum_{q=1}^{N_q} \sin^2(\pi x_{2q}/b)] / \\ &/[Q_1 \sum_{p=1}^{N_{p1}} \sin^2(\pi x_{1p}/a) + Q_2 \sum_{q=1}^{N_q} \sin^2(\pi x_{2q}/b) + \rho hab]^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где D , B_1 , B_2 , Q_1 , Q_2 – соответственно характеристики, имеющие выражения

$$\begin{aligned} D &= Eh^3/(12(1 - \nu^2)), \quad B_1 = b_*h_*E_*/12, \quad B_2 = a_*h_*E_*/12, \\ Q_1 &= ab_*h_*\rho_*, \quad Q_2 = ba_*h_*\rho_*. \end{aligned} \quad (2)$$

Использование соотношений (1), (2) является базовым моментом представляемой разработки.

2. Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений.

В процессе получения нечетко-множественных версий расчетных соотношений (1), (2) исходным этапом является фазсификация неконтрастных экзогенных параметров [20–23] рассматриваемой модели a , b , h , E , ν , ρ , a_* , b_* , h_* , E_* , ρ_* , x_{11} , x_{12} , ..., x_{1N_p} , x_{21} , x_{22} , ..., x_{2N_q} с переходом к их обобщениям в виде нечетких величин \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{h} , \tilde{E} , $\tilde{\nu}$, $\tilde{\rho}$, \tilde{a}_* , \tilde{b}_* , \tilde{h}_* , \tilde{E}_* , $\tilde{\rho}_*$, \tilde{x}_{11} , \tilde{x}_{12} , ..., \tilde{x}_{1N_p} , \tilde{x}_{21} , \tilde{x}_{22} , ..., \tilde{x}_{2N_q} , а также получение их представлений в виде разложений по множествам α -уровня

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha], \quad \tilde{b} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha], \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha], \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha], \\ \tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha], \dots, \quad x_{2N_q} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_{2N_q\alpha}, \overline{x}_{2N_q\alpha}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для эндогенного параметра \tilde{f} рассматриваемой модели также вводится представление в виде суперпозиции α -срезов

$$\tilde{f} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{f}_\alpha, \overline{f}_\alpha]. \quad (4)$$

Предварительным этапом применения модифицированного α -уровневого варианта эвристического принципа обобщения в процессе расширения области определения функционального расчетного соотношения детерминистической версии модели при переходе в нем к аргументам нечетко-множественного типа является установление свойств знакоопределенности частных производных данной функциональной зависимости по аргументам в полной области их совокупного изменения:

$$\partial f / \partial E \geq 0, \quad \partial f / \partial E_* \geq 0, \quad \partial f / \partial \nu \geq 0, \quad \partial f / \partial \rho \leq 0, \quad \partial f / \partial \rho_* \leq 0, \quad (5)$$

$$\partial f / \partial h \geq 0, \quad \partial f / \partial h_* \geq 0.$$

С учетом свойств (5), полагая, что все аргументы обобщаемого расчетного соотношения (1) являются нечетко-множественными, можно, в частности, для платы, содержащей по два демпфирующих ребра в каждом из координатных направлений в ее срединной плоскости, записать следующие представления:

$$\underline{f}_\alpha = \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha] \\ \alpha_* \in [\underline{a}_{*\alpha}, \overline{a}_{*\alpha}] \\ b_* \in [\underline{b}_{*\alpha}, \overline{b}_{*\alpha}] \\ x_{11} \in [\underline{x}_{11\alpha}, \overline{x}_{11\alpha}] \\ x_{12} \in [\underline{x}_{12\alpha}, \overline{x}_{12\alpha}] \\ x_{21} \in [\underline{x}_{21\alpha}, \overline{x}_{21\alpha}] \\ x_{22} \in [\underline{x}_{22\alpha}, \overline{x}_{22\alpha}]}} \Phi_f(a, b, \overline{h}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha, a_*, b_*, \overline{h}_{*\alpha}, \underline{E}_{*\alpha}, \overline{\rho}_{*\alpha}, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}), \quad (6)$$

$$\overline{f}_\alpha = \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha] \\ \alpha_* \in [\underline{a}_{*\alpha}, \overline{a}_{*\alpha}] \\ b_* \in [\underline{b}_{*\alpha}, \overline{b}_{*\alpha}] \\ x_{11} \in [\underline{x}_{11\alpha}, \overline{x}_{11\alpha}] \\ x_{12} \in [\underline{x}_{12\alpha}, \overline{x}_{12\alpha}] \\ x_{21} \in [\underline{x}_{21\alpha}, \overline{x}_{21\alpha}] \\ x_{22} \in [\underline{x}_{22\alpha}, \overline{x}_{22\alpha}]}} \Phi_f(a, b, \underline{h}_\alpha, \overline{E}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha, \underline{\rho}_\alpha, a_*, b_*, \underline{h}_{*\alpha}, \overline{E}_{*\alpha}, \underline{\rho}_{*\alpha}, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}).$$

Соотношения (6) определяют алгоритм получения оценок возможностей возникновения разбросов в значениях эндогенного параметра технической резонансной частоты платы с демпфирующими ребрами по данными о характере и величинах разбросов исходных параметров.

3. Реализация вычислительных экспериментов. Пример реализации полученного расчетного алгоритма для платы, содержащей по два демпфирующих ребра в каждом из координатных направлений в ее срединной плоскости, относится к следующему варианту описания нечетко-множественных характеристик модели деформирования рассматриваемой конструкции.

Полагается, что для материала платы и модуля Юнга пенополиуретановых ребер имеются базы экспериментальных статистических данных о разбросах параметров механических характеристик с частотными нормальными распределениями [2, 5–9]. Соответственно этим данным, для неконтрастных параметров \tilde{E} , $\tilde{\nu}$, \tilde{E}_* вводятся представления в виде несимметричных квазигауссовых нормальных нечетких чисел, для которых в представлениях (3)

$$\begin{aligned}\underline{E}_\alpha &= m_{*E} - \sigma_{*lE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{E}_\alpha &= m_{*E} + \sigma_{*rE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} - \sigma_{*l\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} + \sigma_{*r\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{E}_{*\alpha} &= m_{*E_*} - \sigma_{*lE_*}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{G}'_\alpha &= m_{*G} + \sigma_{*rE_*}(\ln \alpha^{-2})^{1/2};\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}m_{*E} &= 2.163 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & \sigma_{*lE} &= 0.079 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & \sigma_{*rE} &= 0.155 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \\ m_{*\nu} &= 0.31, & \sigma_{*l\nu} &= 0.001, & \sigma_{*r\nu} &= 0.001; \\ m_{*E_*} &= 12.0 \cdot 10^6 \text{ Па}, & \sigma_{*lE_*} &= 0.3 \cdot 10^6 \text{ Па}, & \sigma_{*rE_*} &= 0.32 \cdot 10^6 \text{ Па}.\end{aligned}$$

Для параметров $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho}_*$ на базе экспериментальных данных [2, 5–9] вводятся представления нормальными треугольными нечеткими числами с

$$\begin{aligned}\underline{\rho}_\alpha &= (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, & \overline{\rho}_\alpha &= \alpha\rho_2 + (1 - \alpha)\rho_3; \\ \underline{\rho}_{*\alpha} &= (1 - \alpha)\rho_{*1} + \alpha\rho_{*2}, & \overline{\rho}_{*\alpha} &= \alpha\rho_{*2} + (1 - \alpha)\rho_{*3};\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 1.96 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & \rho_2 &= 2.00 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & \rho_3 &= 2.02 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \\ \rho_{1*} &= 1.45 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & \rho_{2*} &= 2.55 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & \rho_{3*} &= 3.75 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.\end{aligned}$$

Неконтрастность параметров \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{h} , \tilde{a}_* , \tilde{b}_* , \tilde{h}_* , \tilde{x}_{11} , \tilde{x}_{12} , \tilde{x}_{12} , \tilde{x}_{21} , \tilde{x}_{22} определяется экспертными оценками и технологическими допусками и описывается нечетко-множественными величинами в виде нормальных треугольных нечетких чисел с

$$\begin{aligned}\underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \overline{a}_\alpha &= \alpha a_2 + (1 - \alpha)a_3; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \overline{b}_\alpha &= \alpha b_2 + (1 - \alpha)b_3; \\ \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \overline{h}_\alpha &= \alpha h_2 + (1 - \alpha)h_3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_{\alpha*} &= (1 - \alpha)a_{1*} + \alpha a_{2*}, & \bar{a}_{\alpha*} &= \alpha a_{2*} + (1 - \alpha)a_{3*}; \\
 \underline{b}_{\alpha*} &= (1 - \alpha)b_{1*} + \alpha b_{2*}, & \bar{b}_{\alpha*} &= \alpha b_{2*} + (1 - \alpha)b_{3*}; \\
 \underline{h}_{\alpha*} &= (1 - \alpha)h_{1*} + \alpha h_{2*}, & \bar{h}_{\alpha*} &= \alpha h_{2*} + (1 - \alpha)h_{3*}; \\
 \underline{x}_{11\alpha} &= (1 - \alpha)x_{111} + \alpha x_{112}, & \bar{x}_{11\alpha} &= \alpha x_{112} + (1 - \alpha)x_{113}; \\
 \underline{x}_{12\alpha} &= (1 - \alpha)x_{121} + \alpha x_{122}, & \bar{x}_{12\alpha} &= \alpha x_{122} + (1 - \alpha)x_{123}; \\
 \underline{x}_{21\alpha} &= (1 - \alpha)x_{211} + \alpha x_{212}, & \bar{x}_{21\alpha} &= \alpha x_{212} + (1 - \alpha)x_{213}; \\
 \underline{x}_{22\alpha} &= (1 - \alpha)x_{221} + \alpha x_{222}, & \bar{x}_{22\alpha} &= \alpha x_{222} + (1 - \alpha)x_{223};
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0.147 \text{ м}, & a_2 &= 0.15 \text{ м}, & a_3 &= 0.152 \text{ м}; \\
 a_{1*} &= 0.009 \text{ м}, & a_{2*} &= 0.01 \text{ м}, & a_{3*} &= 0.011 \text{ м}; \\
 b_1 &= 0.198 \text{ м}, & b_2 &= 0.2 \text{ м}, & b_3 &= 0.21 \text{ м}; \\
 b_{1*} &= 0.009 \text{ м}, & b_{2*} &= 0.01 \text{ м}, & b_{3*} &= 0.011 \text{ м}; \\
 h_1 &= 0.0013 \text{ м}, & h_2 &= 0.0015 \text{ м}, & h_3 &= 0.0016 \text{ м}; \\
 h_{1*} &= 0.0018 \text{ м}, & h_{2*} &= 0.002 \text{ м}, & h_{3*} &= 0.0021 \text{ м}; \\
 x_{111} &= 0.0368 \text{ м}, & x_{112} &= 0.0375 \text{ м}, & x_{113} &= 0.0380 \text{ м}; \\
 x_{121} &= -0.0368 \text{ м}, & x_{122} &= -0.0375 \text{ м}, & x_{123} &= -0.0380 \text{ м}; \\
 x_{211} &= 0.0495 \text{ м}, & x_{212} &= 0.0500 \text{ м}, & x_{213} &= 0.0525 \text{ м}; \\
 x_{221} &= -0.0495 \text{ м}, & x_{222} &= -0.0500 \text{ м}, & x_{223} &= -0.0525 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

Результаты расчета функции принадлежности $\mu_{\tilde{f}}(f)$ для приведенного безразмерного нечетко-множественного эндогенного параметра низшей технической частоты резонансных колебаний \tilde{f} представлены на рисунке 1.

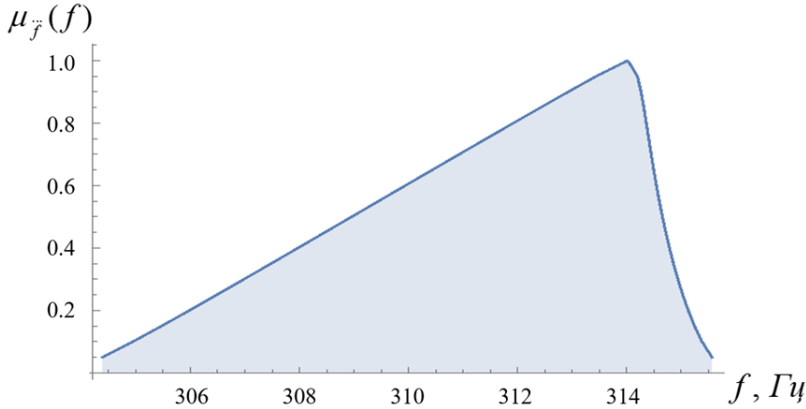


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{f}}(f)$

Представленный пример расчетного анализа, в частности, приводит к максимальной оценке уровня разбросов значения низшей технической частоты резонансных колебаний \tilde{f} с предельным показателем уверенности $\mu = 0.05$, составляющих 3.1 % от модального значения $\tilde{f}_{\mu=1} = 314$ Гц.

Заключение. В результате представленных исследований осуществлены разработка, алгоритмизация и числовая апробация численно-аналитической методики учета параметрической неопределенности в модели расчета значений низшей резонансной частоты колебаний тонких прямоугольных опертых по краям элементных плат радиоэлектронных систем с рядами взаимоортогональных прямолинейных демпфирующих полимерных ребер. Для исходных неконтрастных физико-механических и геометрических параметров рассматриваемой модели учитывается неопределенность значений, обусловленная погрешностями экспериментальных данных, технологическим допусками и использованием субъективных экспертных оценок. Реализуемый при исследовании подход базируется на фазсификации параметров с разбросами и использовании модифицированного альфа-уровневого варианта эвристического принципа обобщения в процессе расширения областей определения функциональных расчетных соотношений детерминистической версии модели при переходе в них к аргументам нечетко-множественного типа. Получен модифицированный вариант расчетных соотношений для случая описания части неконтрастных исходных параметров нормальными треугольными нечеткими числами и части – несимметричными квазигауссовыми нечеткими числами.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Токарев М.Ф. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры / М.Ф. Токарев, Е.Н. Талицкий, В.А.Фролов; под ред. В.А. Фролова. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
2. Виброзащита радиоэлектронной аппаратуры полимерными компаундами / Ю.В. Зеленев, А.А. Кирилин, Э.Б. Слободник, Е.Н. Талицкий; под ред. Ю.В. Зеленева. – М.: Радио и связь, 1984. – 120 с.
3. Нашиф А. Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
4. Талицкий Е.Н. Защита электронных средств от механических воздействий. Теоретические основы / Е.Н. Талицкий. – Владимир: Владим. гос. ун-т, 2001. – 256 с.
5. Талицкий Е.Н. Механические воздействия и защита электронной аппаратуры: в 3 ч. Ч. 2. / Е.Н. Талицкий. – Владимир: Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2005. – 124 с.
6. Баканов Г.Ф. Основы конструирования и технологии радиоэлектронных средств / Г.Ф. Баканов. – М.: Академия, 2007. – 368 с.
7. Белоусов О.А. Основные конструкторские расчёты в РЭС / О.А. Белоусов, Н.А. Кольтюков, А.Н. Грибков. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО «ТГТУ», 2007. – 84 с.
8. Проектирование и технология радиоэлектронных средств / З.М. Селиванова, Д.Ю. Муромцев, Т.И. Чернышова, О.А. Белоусов, В.Н. Митрофанова. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 164 с.
9. Муромцев Д.Ю. Компьютерные технологии для расчёта тепловых режимов и механических воздействий / Д.Ю. Муромцев, О.А. Белоусов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 88 с.

10. *Приймченко С.А.* Методика анализа факторов неопределенности в модели резонансных колебаний трехслойных композитных цилиндрических панелей / С.А. Приймченко, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван, Чан Ба Ле Хоанг // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 88–94.
11. *Выскуп В.Г.* Модель нечеткой идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных пластин с использованием данных ультразвуковой диагностики / В.Г. Выскуп, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зыонг Минь Хай // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 125–134.
12. *Болнокин В.Е.* Алгоритм учета факторов неопределенности экзогенных параметров в модели колебаний тонких многослойных графеновых нанопластин / В.Г. Выскуп, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зыонг Минь Хай // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 135–143.
13. *Storozhev S.V.* Fuzzy estimates of resonance frequencies for three-layer composite cylindrical panels in smart aerospace and industrial structures / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – 1399: 033044 – DOI:10.1088/1742-6596/1399/3/033044.
14. *Павлыш В.Н.* Исследование нечетких моделей устойчивости и резонансных колебаний замкнутых сферических и эллипсоидальных оболочек / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 3 (72). – С. 32–42.
15. *Storozhev S.V.* Accounting of data uncertainty in advanced technological models of design calculations of acoustoelectronic components from piezoelectric materials / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, D.I. Mutin, E.I. Mutina // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – 862: 022006. – DOI:10.1088/1757-899X/862/2/022006.
16. *Болнокин В.Е.* Исследование неконтрастности критических частот нормальных волн в призматических ортотропных волноводах треугольного сечения с разбросами значений физико-механических параметров / В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VII Международной научной конференции, посвященной 85-летию Донецкого национального университета (Донецк, 27–28 октября 2022 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – С. 41–44.
17. *Болнокин В.Е.* Нечетко-множественная методика учета разброса параметров в расчетных моделях прочности компонентов на платах радиоэлектронных устройств: теоретические алгоритмы / В.Е. Болнокин, А.Ф. Каперко, С.А. Сорокин, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Системы управления и информационные технологии. – 2022. – № 3 (89). – С. 71–77.
18. *Павлыш В.Н.* Учет разброса параметров в тепловой модели стержневых элементов радиаторов систем охлаждения радиоэлектронной аппаратуры: метод нечетких множеств / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Информатика и кибернетика. – 2023. – № 3 (33). – С. 57–62.
19. *Павлыш В.Н.* Нечетко-множественная методика учета неопределенности исходных параметров в модели анализа термоупругих потерь при изгибных колебаниях тонкостенных пластинчатых элементов / В.Н. Павлыш, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции (Донецк, 15–17 октября 2024 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. – С. 71–74.
20. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение-1, 2004. – 397 с.
21. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.

22. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
23. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.

T.P. Malutina, S.B. Nombre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev

Accounting of influence scattering errors exogenous parameters in the model of resonant oscillations of radio electronic system boards with damping polymer stiffeners.

Generalized fuzzy-set calculation relationships for determining the spread of the values of the lowest resonance frequency of oscillations of thin rectangular boards supported at the edges of electronic systems with rows of mutually orthogonal rectilinear damping polymer ribs are obtained and tested. For the initial non-contrast physical, mechanical and geometric parameters of the model under consideration, the uncertainty of values due to errors in experimental data, technological tolerances and the use of subjective expert assessments is taken into account. The approach implemented in the study is based on the fuzzification of parameters with spreads and the use of a modified alpha-level version of the heuristic principle of generalization in the process of expanding the domains of definition of functional calculation relationships of the deterministic version of the model when passing to arguments of the fuzzy-set type.

Keywords: *electronic systems, rectangular element boards, resonant vibration frequencies, polymer damping ribs, taking into account the non-contrast of the initial parameters, fuzzy-set technique, heuristic principle of generalization.*

*Статья поступила в редакцию 01.07.2025;
доработана 28.07.2025;
рекомендована к печати 18.08.2025.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831, 622.23.02

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-93-100

EDN:BYXEUC



©2025. Н.Я. Азаров¹, Ф.М. Голубев², И.А. Украинский³, Е.В. Ребенок⁴

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОТРАБОТКЕ ОДИНОЧНОЙ ЛАВЫ НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГОРНОГО МАССИВА

В статье рассмотрен подход к формированию конечно-элементных моделей сдвижения горного массива и земной поверхности с использованием результатов геофизических исследований. Полученная модель является базовой для определения параметров основных зон сдвижения в горном массиве при различных горно-геологических и горнотехнических условиях.

Ключевые слова: подработка угленосного массива, свойства горных пород, Донецко-Макеевский угленосный район, лава, мульда сдвижения, граничные углы, модуль Юнга.

¹ Азаров Николай Янович – докт. геол.-мин. наук, проф., научный консультант РАНИМИ, Донецк, e-mail: ranimi@ranimi.org.

Azarov Nikolay Yanovich – Doctor of Geological and Mineralogical Sciences, Professor, Scientific Consultant, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

² Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты обрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

³ Украинский Игорь Александрович – инженер отд. геодинамических и геофизических процессов РАНИМИ, Донецк, e-mail: igorukrainskii70@mail.ru.

Ukrainsky Igor Aleksandrovich – Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

⁴ Ребенок Евгений Вадимович – мл. науч. сотр. отд. геодинамических и геофизических процессов РАНИМИ, Донецк, e-mail: genich2008@yandex.ru.

Rebenok Evgeny Vadimovich – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

Введение. Существующие методы прогнозирования деформаций земной поверхности, регламентированные отраслевыми стандартами ГСТУ 101.00159226.-001-2003 и ПБ 07-269-98, не принимают во внимание геологические особенности участка отработки угольного пласта [1, 2]. Изменение распределения зон деформаций внутри горного массива не находит отражения в этих нормативных документах, а маркшейдерские измерения зачастую показывают значительные расхождения между фактическими и расчетными оседаниями. Это может приводить к непредсказуемым последствиям, вовлечению в зону влияния горных работ промышленных и социально значимых объектов, которые не должны подвергаться подработке [3, 4].

Для повышения точности прогнозирования деформаций земной поверхности необходим комплексный подход, учитывающий не только геометрические параметры выемочного поля, но и структурно-литологические особенности горного массива, а также физико-механические свойства вмещающих пород. Разработка и внедрение новых методик, основанных на использовании современных геоинформационных систем и методов математического моделирования, позволит существенно улучшить качество прогнозов и минимизировать негативное воздействие горных работ на окружающую среду и инфраструктуру [5].

В результате многократной подработки физико-механические характеристики горного массива изменяются. В частности, проницаемость горных пород может увеличиваться на несколько порядков [6]. Кроме того, интенсивные деформации могут приводить к разупрочнению скальных пород, снижению их сопротивления сдвигу и, как следствие, к увеличению вероятности возникновения оползней, обвалов и других геодинамических явлений [7, 8].

Одним из перспективных направлений является создание трехмерных геомеханических моделей, учитывающих сложную структуру горного массива, а также динамику изменения напряженно-деформированного состояния горного массива в процессе ведения горных работ. Такие модели позволят прогнозировать не только величину оседания земной поверхности, но и распределение деформаций в горном массиве, что особенно важно для установления причинно-следственной связи горнотехнических параметров отработки с характеристиками сдвижения земной поверхности, что является целью данной работы. Такие исследования станут основой для уточнения мест локализации деформаций при выемке угля подземным способом и повышения безопасности зданий и сооружений, расположенных в зоне влияния горных работ, что является социально важной задачей.

1. Метод исследования. В случае, когда натурное наблюдение является невозможным или при необходимости первоначального подтверждения выдвигаемой теории, целесообразно проводить исследования на моделях. В качестве объекта моделирования были приняты горно-геологические условия шахты им. С.А. Кирова, что обосновывается соответствием данного участка базовым требованиям к определению изменения свойств горных пород при первичной подработке и планируемым проведением на данном участке ряда геофизических

исследований.

Донецко-Макеевский район отличается сложной и разнообразной геологической структурой. Причиной тому служит наличие систем надвигов, образовавшихся в различные геологические периоды [9]. Свойства угленосного массива, приведенные в [10], существенно изменяются при неоднократной выемке угля. Изменение структуры и свойств вмещающих пород обуславливает неточности в прогнозировании геомеханических и геодинамических явлений, что необходимо учитывать при планировании горных работ и оценке рисков подработки объектов поверхности.

Для определения характера влияния структуры и свойств пород на параметры сдвижения горного массива в условиях дефицита натурных наблюдений целесообразно использовать подходы моделирования. Одним из наиболее применяемых в геомеханике на сегодняшний день методов моделирования является метод конечных элементов (МКЭ). Популярность МКЭ в геомеханике обусловлена рядом значительных преимуществ по сравнению с другими аналитическими и численными методами: МКЭ обеспечивает высокую точность решения путем дискретизации исследуемой области на множество конечных элементов и аппроксимации полей перемещений и напряжений внутри каждого элемента, что позволяет получить достаточно точное представление о поведении геомеханической системы; в отличие от аналитических методов, которые требуют упрощенных геометрических моделей, МКЭ дает возможность анализировать объекты сложной конфигурации с учетом различных типов граничных условий, включая нагрузки, закрепления и перемещения; МКЭ позволяет учитывать сложные физические свойства материалов; МКЭ предоставляет широкие возможности для анализа результатов, что позволяет оценить устойчивость и надежность геомеханической системы, а также выявить потенциальные зоны концентрации напряжений и разрушения.

Для определения характера сдвижения горного массива при помощи конечно-элементного моделирования необходимо, чтобы модель соответствовала базовым критериям подобия, которые можно выбрать едиными как для физического, так и для математического моделирования и представить в виде следующих выражений [12, 13]:

$$\begin{cases} R_c^M = \alpha_l^{-1} \cdot \alpha_\gamma^{-1} \cdot R_c, \\ R_p^M = \alpha_l^{-1} \cdot \alpha_\gamma^{-1} \cdot R_p, \\ \tan \phi^M = \tan \phi^H. \end{cases} \quad (1)$$

Условия подобия в случае многослойной модели из неоднородных по механическим свойствам слоев имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha_{\gamma 1} = \alpha_{\gamma 2} = \dots = \alpha_{\gamma n} = const, \\ \alpha_{\eta 1} = \alpha_{\eta 2} = \dots = \alpha_{\eta n} = const. \end{cases} \quad (2)$$

Условия подобия внешних нагрузок, распределенных по площади, определя-

ют из выражения:

$$q^м = \alpha_l^{-1} \cdot \alpha_\gamma^{-1} \cdot q^н, \quad (3)$$

где R_c – предел прочности при сжатии, МПа; R_p – предел прочности при растяжении, МПа; α_γ – отношение объемного веса пород в натуре к объемному весу материала модели; α_l – линейный масштаб модели; α_η – отношение оседания земной поверхности в натуре к оседаниям земной поверхности на модели; φ – угол внутреннего трения при сдвиге, градус; q – удельная внешняя нагрузка, Н/м².

Для определения базовых физико-механических свойств горных пород принято использовать данные различных кадастров [10]. Такой подход не всегда позволяет создавать прогнозные модели ввиду весьма существенного варьирования свойств горного массива даже в пределах одного шахтного поля. Определение упругих свойств горного массива на конкретном участке возможно с применением методов геофизических исследований. Для доказательства данного факта была сформирована модель на основании обработки петрофизических характеристик горного массива, свойственных исследуемому участку.

С увеличением техногенной трещиноватости (нарушенности) горного массива снижается его показатель упругости, и, соответственно, существенно снижается скорость распространения упругих волн. Данная взаимосвязь может быть описана формулой:

$$V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}, \quad (4)$$

где E – модуль Юнга, ГПа; μ – коэффициент Пуассона; ρ – плотность, кг/м³.

При формировании большинства геомеханических моделей величины, описанные в формуле, являются базовыми. Если принять коэффициент Пуассона как константу, то возможно на основании геофизических и геологических исследований определить упругие свойства горного массива и сформировать модель деформирования горного массива при подработке.

Согласно [9], в геологическом строении поля шахты им. С.М. Кирова принимают участие свиты от C_2^3 до C_2^6 , состоящие из чередующихся аргиллитов, алевролитов и песчаников. В них присутствуют тонкие прослойки известняка и угольных пластов.

Аргиллиты и алевролиты составляют большую часть (64–77 %) состава пород, песчаники – 19–36 %, известняки – 1,9–2,2 %, угли – 0,7–2,2 %. Направление падения слоев – юго-западное, угол наклона – 8–9°. Четвертичные отложения включают суглинки толщиной до 13 метров и глины толщиной до 30 метров.

На основании детального анализа литологического состава горного массива было выделено три типа пачек для скважины МС-183: песчаниковый, аргиллитовый и смешанный. Тип каждой пачки определялся долей литологических разностей, превышающих более половины от общего объема пачки. Ввиду малой концентрации (1–2%) известняки и уголь не учитывались при классификации комплексов. Пачки имеют следующую мощность и расположены в модели сверху

вниз в следующей последовательности: аргиллитовая пачка – 42 метра; песчаниковая пачка – 31 метр; аргиллитовая пачка – мощность 57 м; алевролитовая пачка – 31 м; песчаниковая пачка – 82 м; аргиллитовая пачка – мощность 54 м; песчаниковая пачка – 141 м. Угольный пласт расположен в песчаниковой пачке в интервале глубин 424,2–425,3 м. Расположение пачек в модели представлено на рисунке 1.

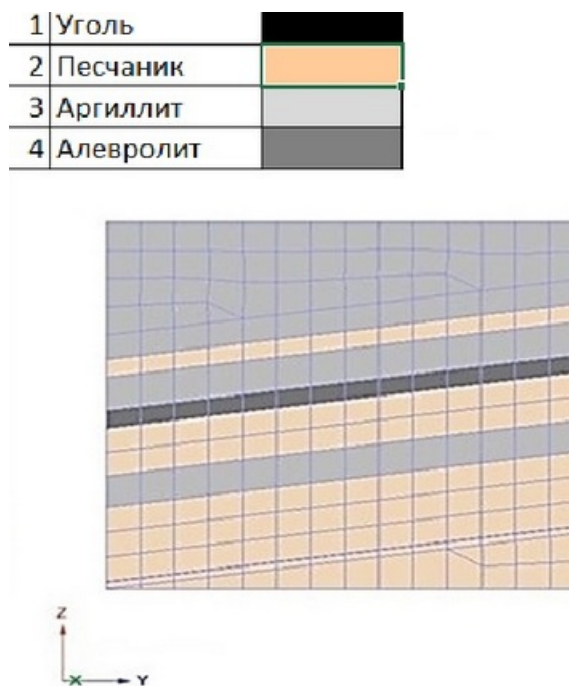


Рис. 1. Сечение по оси (Y) литологической основы конечно-элементной модели

Для выделенных пачек, согласно [11], были определены характерные скорости распространения упругих волн, которые, в свою очередь, пересчитывались по формуле (4) в модули упругости горных пород 2,35 ГПа, 2,14 ГПа, 1,57 ГПа, отвечающие скоростям упругих волн на указанных участках при плотности 2350 кг/м³.

Граничные условия модели формулируются следующим образом. Нижняя плоскость модели закрепляется от вертикальных перемещений, боковые грани закреплены от перемещений в соответствующих направлениях, верхняя грань модели свободна. Такая схема моделирования имеет минимум допущений и достаточно полно отражает моделируемый процесс.

На основании указанных исходных данных проводилось моделирование деформирования горного массива и земной поверхности в ПК Ли́ра 10 с постановкой задачи типа «пространственная конструкция». Для решения задачи деформирования горных пород, помимо базовых величин, использовалась модель Кулона-Мора. Базовым условием оценки работоспособности конечно-элементной

модели являлось соприкосновение кровли с почвой угольного пласта.

Имитация всех слоев производилась с учетом неравномерности распределения свойств в трех осях в соотношении вертикальных к горизонтальным пять к одному. Моделируемый угол падения пластов 8° . Нагрузка на модель задавалась в соответствии с гипотезой о геостатистическом напряженном состоянии, которая характеризуется тем, что три главных напряжения связаны соотношениями:

$$\sigma_1 = \gamma H, \sigma_2 = \sigma_3 = \lambda \gamma H, \quad (5)$$

где γ – объемный вес вышерасположенных пород, т/м^3 ; H – глубины залегания пласта, м; λ – коэффициент бокового распора.

Согласно приведенной формуле, давление лежащих над лавой пород составляет 9,76 МПа. В результате расчета была получена модель деформаций, представленная на рисунке 2.

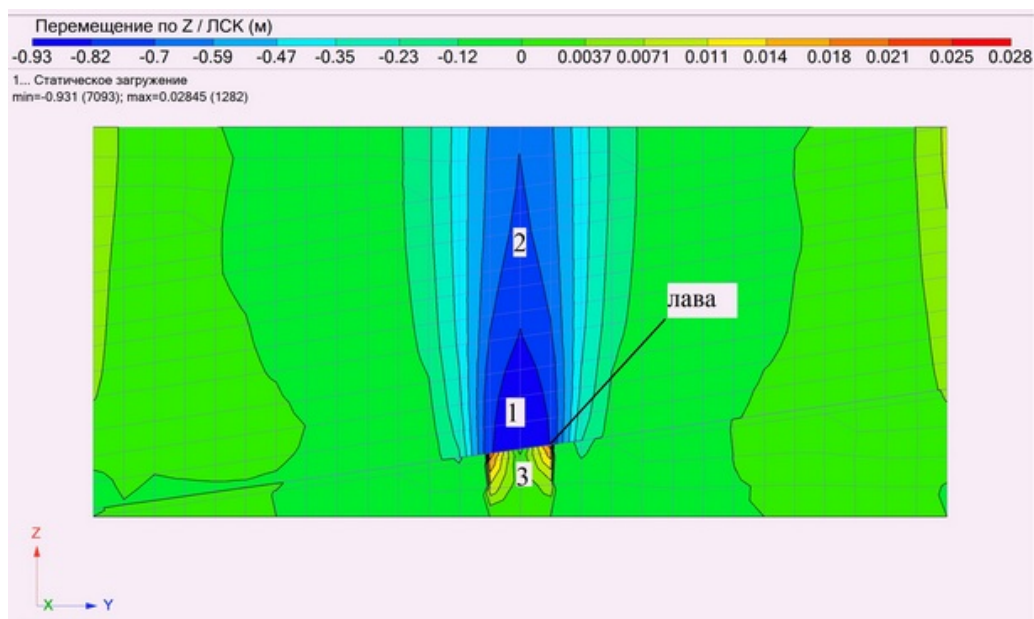


Рис. 2. Модель оседаний горного массива

Сравнение результатов моделирования с результатами расчета по действующей методике прогноза сдвижений показывает высокую сходимость, что говорит об адекватности работы модели без дополнительной калибровки. Разработанная модель подтверждает возможность использования сейсмических параметров для определения базовых закономерностей изменения свойств горного массива при подработке.

2. Анализ результатов. Особенностью данной модели является возможность четкого выделения зон сдвижений горного массива по их интенсивности. В частности, в интервале 200 метров над лавой наблюдается зона интенсивных

сдвижений, вертикальные перемещения в которой составляют порядка 80–90% от мощности вынутаго пласта. Данную зону можно характеризовать, как зону техногенной трещиноватости. Из рисунка 2 видно, что данная зона оконтуривается не прямыми линиями, а имеет определенное закругление на боковых частях, что способствует ее уменьшению по сравнению с классическими представлениями.

Над зоной техногенной трещиноватости расположена зона, в которой вертикальные перемещения составляют порядка 65–80% от мощности вынутаго пласта. Это зона характеризуется максимальным проявлением вертикальных перемещений без разрыва сплошности, и ее можно охарактеризовать, как описанную в нормативных документах [1, 2] зону полных сдвижений, выход которой на поверхность приводит к формированию плоского дна.

В почве выработки четко определяется процесс пучения, который имеет размерность на порядок ниже процесса опускания горных пород кровли.

Важно отметить, что границы и размеры этих зон зависят от множества факторов, таких как глубина разработки, мощность пласта, физико-механические свойства горных пород и применяемая технология разработки.

Для каждой конкретной горно-геологической ситуации необходимо проводить детальные исследования и расчеты для определения параметров зон влияния горных работ, что в условиях дефицита данных бурения довольно сложно реализуемо. Предложенный же подход позволяет определять базовые свойства массива с применением геофизических способов исследований, и в дальнейшем использовать их для формирования прогнозных моделей.

Выводы. В результате выполненной работы предложен новый подход к формированию конечно-элементных моделей сдвига горного массива и земной поверхности с использованием геофизических свойств горного массива в качестве исходных данных, которые могут определяться с достаточно высокой локализацией. Полученные результаты позволяют проводить анализ причин отличий проектного и расчетного распределения деформаций земной поверхности, что необходимо для уточнения параметров сдвига с учетом изменения свойств горного массива при многократной подработке.

Проведенные исследования могут лечь в основу решения вопросов обеспечения устойчивости горных выработок, предотвращения негативного воздействия на окружающую среду и разработки эффективных мер по управлению горным давлением.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ FRSR-2024-0002).

1. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом: ГСТУ 101.00159226.001 – 2003. – Введ. 01.01.2004. – К., 2004. – 128 с.
2. ЛБ 07-269-98. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – Введ. 1998-10-01. – М., 1998. – 203 с.
3. СП 21.13330.2012 «СНиП 2.01.09-91. Здания и сооружения на подрабатываемых террито-

риях и просадочных грунтах»

4. Бугаёва Н.А. Определение параметров деформаций земной поверхности по стохастическим мутьдам оседания / Н.А. Бугаёва, К.В. Яремчук, В.В. Назимко // Проблемы горного давления. – 2009. – № 17. – 269 с.
5. Грищенко Н.Н. Пространственное моделирование зон многократной подработки горными выработками участков со сложной структурой рельефа / Н.Н. Грищенко, В.Б. Скаженик, Е.А. Бардакова, И.В. Чернышенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3(88). – С. 89–99.
6. Дрибан В.А. Фильтрационная модель многократно подработанного массива / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // Сборник научных трудов Донбасского государственного технического университета. – 2017. – № 7(50). – С. 31–37.
7. Машенко А.В. Специальные разделы механики грунтов и механики скальных грунтов / А.В. Машенко, А.Б. Пономарев, Е.Н. Сычкина. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – 176 с.
8. Посыльный Ю.В. Методика исследования влияния толщи горных пород на максимальное оседание земной поверхности / Ю.В. Посыльный // Неделя горняка. – 2007. – № 2. – С. 115–123.
9. Мельников Н.В. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород / Н.В. Мельников, В.В. Ржевский, М.М. Протодяконов. – М.: Недра. – 1975. – 279 с.
10. Геология месторождений угля и горючих сланцев СССР / И.А. Кузнецова, В.В. Лагутина, М.Л. Левенштейн [и др.]. – М., 1963. – 1168 с.
11. Гречухин В.В. Петрофизика угленосных формаций / В.В. Гречухин. – М.: Недра, 1990. – 472 с.
12. Методы и средства решения задач горной геомеханики / Г.Н. Кузнецов, К.А. Ардашев, Н.А. Филатов [и др.]. – М.: Недра, 1987. – 248 с.
13. Моделирование проявлений горного давления / Г.Н. Кузнецов, М.Н. Будько, Ю.И. Васильев [и др.]. – Л.: Недра, 1968. – 280 с.

N.Y. Azarov, Ph.M. Golubev, I.A. Ukrainsky, E.V. Rebenok

Modeling of geomechanical processes during the development of a single longwall based on data from a physical-geological model of a rock mass.

The article considers an approach to the formation of finite element models of displacement of a rock mass and the earth's surface using the results of geophysical studies. The resulting model is the basis for determining the parameters of the main displacement zones in a rock mass, under various mining-geological and mining-technical conditions.

Keywords: coal rock mass undermining, rock properties, Donetsk-Makeevsky coal region, lava, displacement trough, boundary angles, Young's modulus.

Статья поступила в редакцию 24.06.2025;
доработана 17.07.2025;
рекомендована к печати 11.08.2025.

УДК 622.023.23:539.4

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-101-114

EDN:FLAFEX

©2025. В.А. Антонов¹

МЕТОДОЛОГИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ПОРОД ГОРНОГО МАССИВА В УСЛОВИЯХ ГРАВИТАЦИОННОГО И ТЕКТОНИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Изложена методология определения устойчивого состояния или возможного разрушения горной породы, находящейся на разной глубине разрабатываемого горного массива в условиях гравитационного и тектонического напряжения. Основой для определений является создание паспорта прочности горного массива по приведенной методике, а также его динамичное применение в сравнениях имеющихся напряжений с образующимися касательными напряжениями в зонах трещиноватой и техногенной деструкции массива. Состояние прочности горной породы в массиве определяется по установленным критериям, включающим сравнение фактически имеющегося его бокового распора с вновь введенными коэффициентами предельного бокового и горизонтального тектонического распора. На практических примерах показано, что по данным критериям определяются минимально допустимые значения коэффициента структурного ослабления массива, при котором еще сохраняется устойчивость горной породы. При предельном снижении коэффициента структурного ослабления массива возникает и определяется угловой интервал направлений касательного напряжения, в пределах которого горная порода в зоне деструкции разрушается. По приведенным закономерностям прогнозируется прочностное состояние пород горного массива, включая предупреждения о возможных обрушениях в виде горных ударов

Ключевые слова: прочность горной породы, паспорт прочности, круг Мора, боковой распор, коэффициент структурного ослабления.

Введение. Определение зон устойчивого состояния или возможного разрушения горной породы в массиве, вмещающем разрабатываемое рудное месторождение, составляет важную проблему обеспечения безопасности горных работ. Методы оценки вертикального и горизонтального напряжения, влияющего на устойчивость горной породы в приконтурной зоне горных выработок с разной конфигурацией, изложены в изданиях [1–5], а также во многих статьях, например, [6, 7]. В них отображены фрагменты расчета напряжений по заданным геомеханическим параметрам, таким как коэффициенты бокового распора, концентрации напряжений, структурного ослабления массива. Однако обоснованные критерии и аналитические соотношения, по которым можно было бы определить наличие или отсутствие зон неустойчивого состояния горной породы, не приводятся.

¹ Антонов Владимир Александрович – докт. техн. наук, гл. науч. сотр. ИГД УрО РАН, Екатеринбург, e-mail: Antonov@igduran.ru.

Antonov Vladimir Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher, Institute of Mining, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg.

Отмеченные недостатки учтены в исследовании [8], где состояние прочности горной породы, залегающей на разных горизонтах массива, определяется по установленным критериям. Они основаны на сравнении гравитационного давления и предельного касательного напряжения, отображенного в сформированном паспорте прочности массива и противодействующего его разрушению в трещинах и продольных техногенных полостях. Тем не менее, в часто наблюдаемых условиях геодинамической активности на массив действует извне дополнительное тектоническое напряжение, которое может широко изменяться и существенно превышать гравитационное давление, приводя к разрушению горной породы. В связи с этим в данной статье излагается принципиально новая расширенная методология определения состояния прочности горной породы в массиве, находящимся под воздействием гравитационного и тектонического напряжения.

1. Главные напряжения в паспорте прочности массива горной породы. Необходимую информацию о предельных напряжениях, сдерживающих разрушение горной породы, получают в паспорте ее прочности, построенном по соответствующей теории Мора [9] с использованием результатов лабораторных испытаний представительных образцов горных пород на прочность. В работе [8] показано, что паспортный график прочности образцов горной породы, выражающий зависимость касательного напряжения τ , сдерживающего их сдвиговое разрушение на площадке трещиноватой деструкции от нормально ориентированного к ней напряжения, становится криволинейно вогнутым и функционально описывается соотношением

$$\tau = A\sqrt{\sigma + \sigma_p}, \quad (1)$$

где A – масштабный коэффициент паспорта; σ_p – прочность горной породы на растяжение; σ – нормальное напряжение. В разных интервалах аргумента $\sigma_p < \sigma < 0$ или $\sigma > 0$ происходит, соответственно, растяжение или сжатие горной породы.

Главные напряжения в горных породах (максимальное σ_{\max} и минимальное σ_{\min}), определяемые по встроенному в график паспорта предельному кругу Мора, связаны между собой. Эти связи с учетом формулы паспорта (1) выражаются следующими соотношениями:

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\max} + A^2 - 2A\sqrt{\sigma_{\max} + \sigma_p}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} + A^2 + 2A\sqrt{\sigma_{\min} + \sigma_p}. \quad (3)$$

Из них получаем выражение масштабного коэффициента A паспорта в главных компонентах

$$A = \sqrt{\sigma_{\max} + \sigma_p} - \sqrt{\sigma_{\min} + \sigma_p}. \quad (4)$$

В частности, по данным экспериментальных измерений прочности образцов горной породы при одноосном сжатии $\sigma_{\text{сж}}$ принимаем равенство $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{сж}}$, выполняющееся при условии $\sigma_{\min} = 0$. С учетом таких условий получаем из (4) формулу расчета масштабного коэффициента

$$A = \sqrt{\sigma_{сж} + \sigma_p} - \sqrt{\sigma_p}.$$

Его размерность выражается соотношением $\text{кг}^{1/2} \text{ м}^{-1/2} / \text{с}$. Теперь математическое выражение паспорта представляется в следующем виде

$$\tau = (\sqrt{\sigma_{сж} + \sigma_p} - \sqrt{\sigma_p}) \sqrt{\sigma + \sigma_p}. \quad (5)$$

Большинство горных пород обладают прочностью σ_p , $\sigma_{сж}$, не превышающей соответствующих значений 15 МПа и 150 МПа. График изменения в таких условиях квадрата масштабного коэффициента A^2 показан на рисунке 1. Его значения в большей степени зависят от прочности горной породы при сжатии. Квадрат коэффициента не превышает 140 МПа.

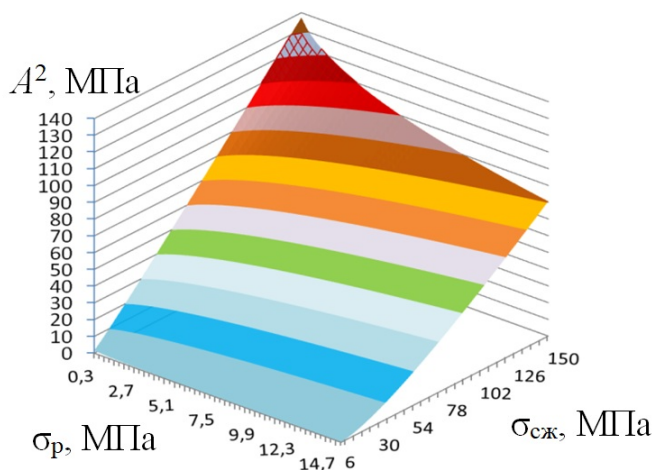


Рис. 1. График изменения масштабного коэффициента паспорта

График паспорта, построенный по формуле (5), близко соответствует также криволинейному известному графику паспорта, проведенному по формуле М.М. Протодяконова и рекомендованному ГОСТом [10], с той существенной разницей, что при сравнительно упрощенной аналитической форме и процедуре построения его структура обладает свойствами преобразования и развития, необходимыми при описании прочности горного массива.

Прочность горной породы в массиве становится меньше отмеченных паспортных значений из-за наличия его блочной деструкции и зон разуплотнения. Их образование и развитие связано с влиянием многих факторов (анизотропия, пористость, обводненность и т. д.). Однако основным и главным из них является развитие трещиноватости горного массива и образование продольных техногенных полостей горных выработок. По сети трещин и полостям образуются зоны его ослабления, в которых при определенном механическом напряжении происходит разрушение горной породы.

Снижение паспортной прочности горных пород оценивается коэффициентом структурного ослабления k_c , зависящем от интенсивности трещиноватости I_T (количества трещин на интервале 1 м горного массива). Она определяется как частное, полученное от деления количества трещин, расположенных в массиве на выбранном интервале длины, на величину этого интервала. По мере роста интенсивности трещиноватости коэффициент структурного ослабления по известным табличным и графическим представлениям [11–13] выпукло уменьшается. По этим данным сформулирована следующая экспоненциальная зависимость его изменения

$$k_c = k_{c0} e^{-\frac{I_T}{4,5}} \pm 0,05,$$

где $k_{c0} = 1$ – единичное значение коэффициента структурного ослабления, принимаемое при отсутствии трещин ($I_T = 0$). График полученной зависимости показан на рисунке 2.

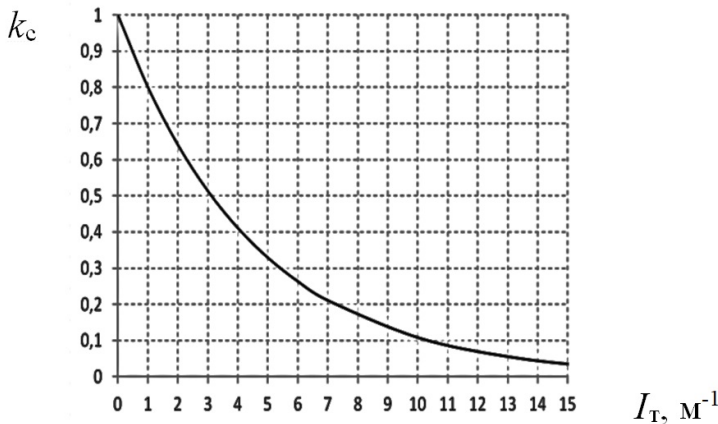


Рис. 2. График изменения коэффициента структурного ослабления

Касательное напряжение, противодействующее сдвигению и разрушению горной породы на площадках трещиноватости и деструктивного разуплотнения горного массива, описывается паспортом его прочности τ_m , который представляется скорректированным паспортом прочности образцов горных пород (1) с учетом структурного ослабления

$$\tau_m = A k_c \sqrt{\sigma + k_c \sigma_p}. \quad (6)$$

Алгебраические знаки напряжений сжатия и растяжения в массиве оставлены такими же, как в паспорте. Положим, что вектор тектонического напряжения массива горных пород σ_T выражается вертикальной σ_{TZ} и горизонтальной σ_{TH} компонентами. Тогда на глубине H массива вертикальное напряжение σ_Z представляется главным и выражается суммой гравитационного и вертикального тектонического давления

$$\sigma_Z = \gamma H + \sigma_{TZ},$$

где γ – сила тяжести единичного объема горной породы.

Главное напряжение σ_z в предельных кругах Мора, вписанных в график τ_m (рис. 3), становится максимальным или минимальным в зависимости от суммы бокового гравитационно-реактивного давления и горизонтальной составляющей тектонического напряжения. Если такая сумма меньше σ_z , то в график вписывается гравитационно-тектонический левый круг с относительно меньшим предельным минимальным напряжением σ_{Π} . При существенном влиянии горизонтального тектонического напряжения данная сумма больше σ_z . Тогда значение σ_z становится главным минимальным, и в график τ_m вписывается тектонический (правый) круг Мора с предельным максимальным напряжением $\sigma_{\Pi\Pi}$.

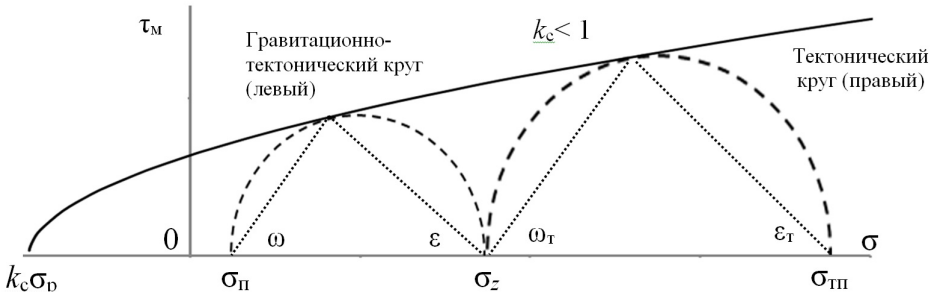


Рис. 3. Графики предельных кругов Мора

В левом круге определяются предельные углы наклона ε и ω касательного напряжения к вертикальному направлению главного максимального напряжения σ_z и, соответственно, к горизонтальному направлению главного минимального напряжения σ_{Π} . В правом круге углы ε_T , ω_T показывают его направление относительно горизонтального максимального давления $\sigma_{\Pi\Pi}$ и, соответственно, вертикального минимального напряжения σ_z .

По мере деструкции массива горной породы и соответствующего снижения коэффициента структурного ослабления график τ_m опускается к оси σ . При этом радиусы встроенных в него кругов Мора уменьшаются так, что минимальное предельное напряжение σ_{Π} в левом круге приближается к значению вертикального давления σ_z слева, а максимальное предельное напряжение $\sigma_{\Pi\Pi}$ в правом круге – справа. Связь данных предельных напряжений с параметрами прочности горного массива определяется по аналогии с (2) и (3) следующими соотношениями

$$\sigma_{\Pi} = \sigma_z + A^2 k_c^2 - 2Ak_c \sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\Pi\Pi} = \sigma_z + A^2 k_c^2 + 2Ak_c \sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p}, \quad (8)$$

которые выполняются в соответствующих областях:

$$-k_c \sigma_p < \sigma_{\Pi} < \sigma_z, \quad \sigma_{\Pi\Pi} > \sigma_z.$$

Графики зависимости предельных напряжений σ_{Π} , $\sigma_{\text{ТП}}$ от вертикального давления и коэффициента структурного ослабления при заданных параметрах $A^2 = 25$ МПа и $\sigma_p = 5$ МПа показаны на рисунке 4.

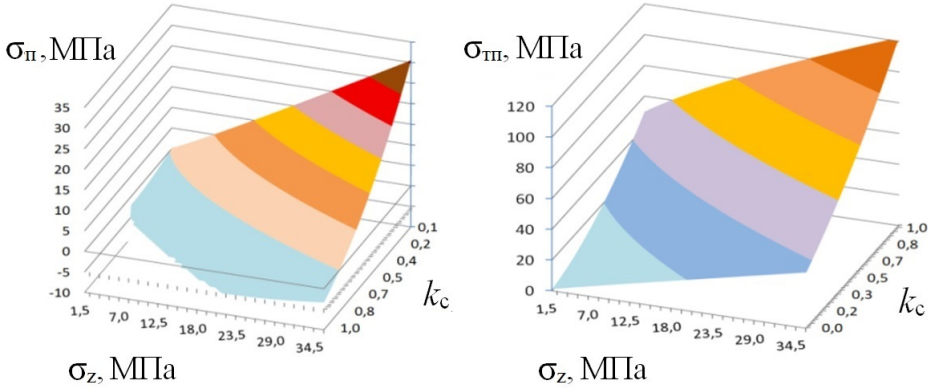


Рис. 4. Графики изменения напряжений предельных распоров σ_{Π} , $\sigma_{\text{ТП}}$

2. Коэффициенты предельного бокового и горизонтального тектонического распора. Предельное боковое давление σ_{Π} возникает в результате реактивного, т.е. деформационного воздействия вертикального давления σ_z и горизонтальной компоненты тектонического напряжения. Предельное давление $\sigma_{\text{ТП}}$ получается под влиянием только тектонического напряжения. Для относительной оценки предельных напряжений в горном массиве введем понятие соответствующих коэффициентов предельного бокового распора λ_{Π} , и предельного тектонического распора $\lambda_{\text{ТП}}$. Распор λ_{Π} определяется соотношением

$$\lambda_{\Pi} = \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma_z},$$

которое принимается в следующих интервалах:

$$-\frac{k_c \sigma_p}{\sigma_z} < \lambda_{\Pi} < 1; \quad \sigma_z > 0.$$

Коэффициент предельного тектонического распора $\lambda_{\text{ТП}}$ определяется другим соотношением

$$\lambda_{\text{ТП}} = \frac{\sigma_{\text{ТП}}}{\sigma_z},$$

которое выполняется в интервале $\lambda_{\text{ТП}} > 1$.

Наличие отрицательных значений коэффициента λ_{Π} объясняется предельным горизонтальным гравитационно-деформационным и тектоническим растяжением горной породы, при котором еще не происходит ее разрушение. Такое состояние бокового растяжения образуется, например, вблизи вертикальной границы свободной поверхности горного массива, т.е. в приконтурной зоне борта карьера или вертикальной горной выработки.

Выражение коэффициентов λ_{Π} и $\lambda_{\text{ТП}}$ с учетом влияния горно-механических параметров представим в следующем виде

$$\lambda_{\Pi} = 1 - \frac{Ak_c}{\sigma_z} (2\sqrt{\sigma_z + k_c\sigma_p} - Ak_c), \quad (9)$$

$$\lambda_{\text{ТП}} = 1 + \frac{Ak_c}{\sigma_z} (2\sqrt{\sigma_z + k_c\sigma_p} + Ak_c). \quad (10)$$

Коэффициенты λ_{Π} и $\lambda_{\text{ТП}}$ существенно зависят от давления σ_z , масштабного и структурного коэффициентов A и k_c . Слабее влияет прочность горной породы при растяжении σ_p . Графики их изменений при заданных значениях $A^2=25$ МПа и $\sigma_p=5$ МПа показаны на рисунке 5. С ростом коэффициента k_c предельный боковой распор λ_{Π} уменьшается, а горизонтальный тектонический $\lambda_{\text{ТП}}$ – увеличивается. Распор λ_{Π} снижается от единицы к нулю и далее до отрицательных значений. Такое снижение ограничено очевидным условием, следующим из допустимых значений напряжения σ_{Π}

$$\frac{\sqrt{\sigma_z + k_c\sigma_p}}{Ak_c} \geq 1.$$

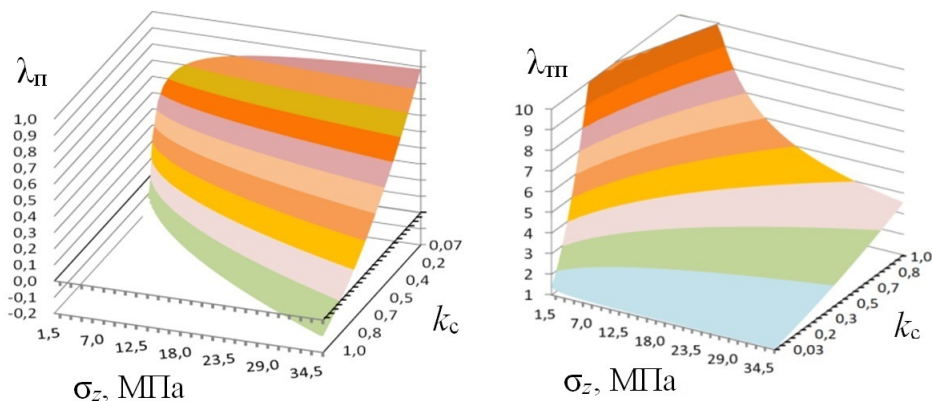


Рис. 5. Графики изменения коэффициентов предельных распоров λ_{Π} , $\lambda_{\text{ТП}}$

Общая закономерность связи коэффициентов k_c и λ_{Π} , $\lambda_{\text{ТП}}$ состоит в том, что при значительной трещиноватой деструкции горного массива и снижении коэффициента его структурного ослабления коэффициенты λ_{Π} , и $\lambda_{\text{ТП}}$ стремятся к единице, соответственно, увеличиваясь снизу и уменьшаясь сверху. Это означает приближение состояния горной породы к вязкой пластичности и гидростатическому равновесию.

3. Предельные углы направлений касательного напряжения. Максимальное касательное напряжение, противодействующее разрушающему сдвигу горной породы в направлении протяженной зоны структурного разуплотнения горного массива, равно τ_m . Покажем закономерность изменения об-

разующихся при этом предельных углов ε_{Π} и $\varepsilon_{\text{ТП}}$ между направлением касательного напряжения и осью, соответственно, вертикального и горизонтального давления. Предельные углы наклона ω_{Π} , $\omega_{\text{ТП}}$ к перпендикулярно расположенным осям определяется очевидным вычитанием: $\omega_{\Pi}=90^{\circ}-\varepsilon_{\Pi}$; $\omega_{\text{ТП}}=90^{\circ}-\varepsilon_{\text{ТП}}$.

Углы ε_{Π} , $\varepsilon_{\text{ТП}}$ определяются из соотношений величин, ограниченных кругами Мора, встроенными в график паспорта прочности горного массива τ_m при главном напряжении σ_z . В левом и правом круге выполняются соответствующие неравенства $\sigma_z > \sigma_{\Pi}$ и $\sigma_z < \sigma_{\text{ТП}}$. В результате получены их выражения

$$\varepsilon_{\Pi} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p - A k_c \sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p}}}{2\sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p} - A k_c}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\text{ТП}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p + A k_c \sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p}}}{2\sqrt{\sigma_z + k_c \sigma_p} + A k_c}. \quad (12)$$

Графики изменения углов ε_{Π} и $\varepsilon_{\text{ТП}}$ при значениях $A^2=25$ МПа, $\sigma_p=5$ МПа показаны на рисунке 6. По мере увеличения давления σ_z и уменьшения коэффициента структурного ослабления k_c они приближаются к максимальному углу 45° . Нижнее значение предельного угла $\varepsilon_{\text{ТП}}$ имеет ограничение $\varepsilon_{\text{ТП}} > 29,7^{\circ}$. Это означает, что при меньшем угле сжимающего тектоникой касательного напряжения к горизонтальной оси горная порода не разрушится. По мере возрастания масштабного коэффициента A и графика τ_m угол указанного ограничения снижается.

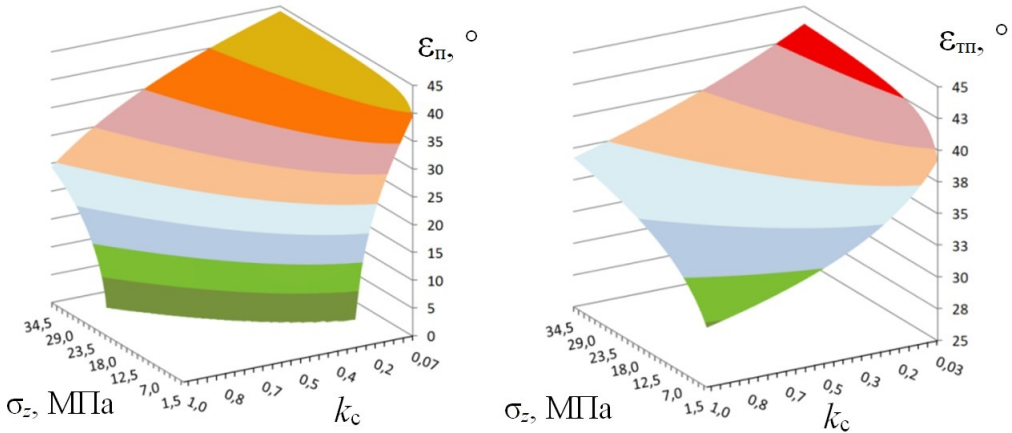


Рис. 6. Графики изменения предельных углов ε_{Π} и $\varepsilon_{\text{ТП}}$

4. Критерии устойчивости и зонального разрушения пород горного массива. Состояние устойчивости или разрушения горной породы в массиве определяется соотношением фактически существующего горизонтального давления σ_{Γ} и предельных напряжений σ_{Π} , $\sigma_{\text{ТП}}$.

Когда горизонтальное давление σ_{Γ} больше значения σ_{Π} и меньше $\sigma_{\text{ТП}}$, круги Мора, построенные по заданному σ_{Γ} и главному вертикальному напряжению σ_z , не превышают график τ_m . Горные породы массива находятся в устойчивом состоянии при всех возможных углах наклона содержащейся в нем протяженной деструктивной зоны. Поэтому критерием их устойчивости с известным и принятым коэффициентом бокового распора λ являются неравенства

$$\lambda \geq \lambda_{\Pi} \quad \text{и} \quad \lambda \leq \lambda_{\text{ТП}}. \quad (13)$$

Если боковое давление снижается, а горизонтальное тектоническое увеличивается, то отдельные участки упомянутых кругов Мора превышают график τ_m . Тогда возникают интервалы запредельных углов $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon_T$ между направлением касательного и главных напряжений, выделяющие зоны горного массива, в которых его устойчивость нарушается. Таким образом, критерием зонального разрушения горной породы являются неравенства

$$\lambda < \lambda_{\Pi} \quad \text{и} \quad \lambda > \lambda_{\text{ТП}}. \quad (14)$$

Состояние запредельных напряжений, приводящих к разрушению горной породы в локальных зонах, показано на рисунке 7.

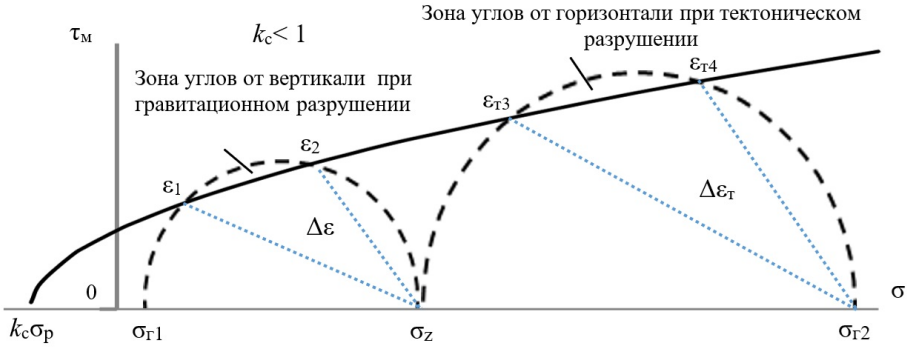


Рис. 7. Схема образования угловых зон разрушения горной породы

Часть левого и правого круга Мора, построенного по вертикальному давлению σ_z и фактически имеющемуся горизонтальному напряжению $\sigma_{\Gamma 1}$ и $\sigma_{\Gamma 2}$, превышает график τ_m . В интервале превышения выделены углы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_3, \varepsilon_4$, ограничивающие зоны разрушения горного массива. Они рассчитываются путем решения системы уравнений, описывающих пересечения круга Мора и графика τ_m в соответствующих точках 1, 2 и т3, т4. В результате получены следующие их выражения:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \arccos \left\langle \frac{(Ak_c)^2}{\sigma_z(1-\lambda)} \right. \quad (15)$$

$$\cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{(Ak_c)^2} \left[4k_c \sigma_p - \frac{(\sigma_z)^2(1-\lambda)^2}{(Ak_c)^2} + 2\sigma_z(1+\lambda) \right]} \right] \rangle,$$

$$\varepsilon_{T3,T4} = \frac{1}{2} \arccos \left\langle \frac{(Ak_c)^2}{\sigma_z(\lambda - 1)} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{(Ak_c)^2} \left[4k_c\sigma_p - \frac{(\sigma_z)^2(\lambda - 1)^2}{(Ak_c)^2} + 2\sigma_z(1 + \lambda) \right]} \right] \right\rangle. \quad (16)$$

В запредельном интервале разности углов $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, а также $\Delta\varepsilon_T = \varepsilon_{T4} - \varepsilon_{T3}$, устойчивость горных пород нарушается. Разрушения происходят в зонах протяженного деструктивного разуплотнения, угловая ориентация которых относительно вертикального направления σ_z в левом круге Мора и горизонтального направления $\sigma_{\text{ТП}}$ в правом круге находится в данном интервале.

Отметим, что граничные углы зон разрушения оцениваются приближенно с погрешностью, не превышающей $0,5^\circ$, по следующим соотношениям:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{П}} - \frac{\Delta\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{П}} + \frac{\Delta\varepsilon}{2};$$

$$\varepsilon_{T3} = \varepsilon_{\text{ТП}} - \frac{\Delta\varepsilon_T}{2}, \quad \varepsilon_{T4} = \varepsilon_{\text{ТП}} + \frac{\Delta\varepsilon_T}{2}.$$

В качестве примеров на рисунке 8 показаны графики изменения половинных угловых интервалов $\Delta\varepsilon/2$ и $\Delta\varepsilon_T/2$ в координатах коэффициентов бокового распора λ и структурного ослабления k_c при заданных значениях параметров $A^2=25$ МПа, $\sigma_p=5$ МПа, $\sigma_z=12,5$ МПа.

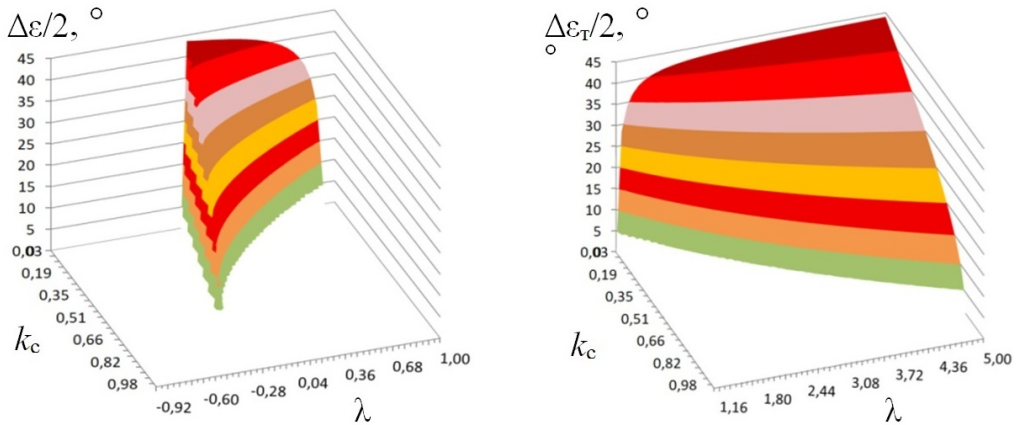


Рис. 8. Графики изменения угловых полуинтервалов $\Delta\varepsilon/2$, $\Delta\varepsilon_T/2$

Отметим особенности их изменения. В условиях бокового распора $\lambda \leq 1$ интервал $\Delta\varepsilon/2$ ограничен параметрами λ и k_c . Он становится наибольшим, приближаясь к 45° при снижении бокового распора к нулю ($\lambda=0$) в зонах горного

массива с наибольшей деструкцией ($k_c \ll 1$). Интервал $\Delta\varepsilon_T/2$ по мере превышения коэффициента λ над единицей и ослабления структуры горного массива так же стремится к предельному угловому значению 45° .

5. Примеры определения состояния прочности горного массива. Покажем применение приведенной методологии в оценках устойчивости и возможного разрушения горной породы разной прочности, происходящего в трещиноватых массивах под действием гравитационного и тектонического напряжения. Рассмотрены массивы, сложенные породами средней прочности, например, алевролитом, сланцем, известняком, а также большей прочности (гранитоиды, кварциты).

В качестве исходных данных приняты усредненные результаты экспериментальных определений прочности образцов горных пород на одноосное сжатие $\sigma_{сж}$ и растяжение σ_p . По ним рассчитаны масштабные коэффициенты А и сформулированы паспорта прочности (6) горных массивов.

Состояние массива горной породы со средней прочностью определено по паспорту $\tau_m = 5,8 k_c \sqrt{\sigma} + 5,4 k_c$ ($\sigma_{сж}=60$ МПа; $\sigma_p=5,4$ МПа). Состояние массива прочной горной породы определено по паспорту $\tau_m = 8 k_c \sqrt{\sigma} + 12 k_c$ ($\sigma_{сж}=120$ МПа; $\sigma_p=12$ МПа). Прочность горной породы оценена на разных глубинах Н массива, соответствующих сумме σ_z гравитационного давления налегающей толщи и вертикальной компоненты тектонического напряжения. Возможные значения глубины при заданном ряде напряжений показаны таблице 1.

Таблица 1. Распределение глубины Н в массиве горной породы, м

Прочностное свойство массива	Плотность $\tau/\text{м}^3$	σ_z , МПа				
		5	10	15	20	25
Массив горной породы средней прочности	2,4	≤ 210	≤ 430	≤ 640	≤ 850	≤ 1100
Массив прочной горной породы	2,7	≤ 189	≤ 378	≤ 567	≤ 756	≤ 945

По паспортам прочности массивов, возможным значениям коэффициента их структурного ослабления, происходящего на разной глубине, построены графики соответствующего изменения коэффициентов предельного бокового λ_{Π} и горизонтального тектонического $\lambda_{\text{ТП}}$ распора. Графики представлены на рисунках 9 и 10. Они сравниваются с коэффициентом фактически существующего распора λ , определенного по теоретическим предположениям или экспериментально, например, методом целевой разгрузки. Суждения об устойчивости или разрушении горной породы в сравнениях определяются критериями (13), (14). Здесь приняты два возможных значения коэффициента фактического распора. В первом случае ($\lambda < 1$) по гравитационно-тектоническим напряжениям установлено значение $\lambda=0,4$. Оно сравнивается с λ_{Π} . Во втором случае ($\lambda > 1$) из-за существенного влияния тектонического напряжения получено другое значение $\lambda=3$, которое сравнивается с $\lambda_{\text{ТП}}$.

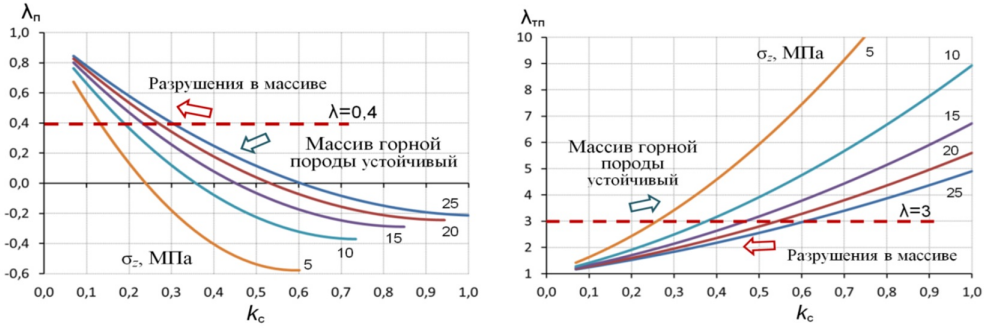


Рис. 9. Состояние массива горной породы со средней прочностью

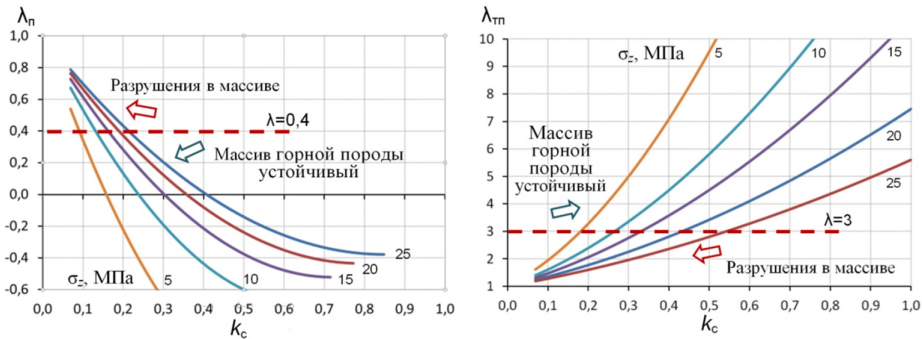


Рис. 10. Состояние массива прочной горной породы

Ключевое влияние на оценку устойчивого состояния горной породы оказывает коэффициент структурного ослабления массива, т.е. степень его блочной деструкции по трещинам и техногенным полостям. Рассмотрим, например, приведенные графики с обозначенной нагрузкой $\sigma_z = 25$ МПа. В условиях $\lambda = 0,4$ минимально допустимая деструкция горной породы средней прочности (рис. 9) ограничена коэффициентом $k_c = 0,32$, а для прочных пород (рис. 10) – его сниженным значением $k_c = 0,22$. Тогда в промежуточном интервале структурного ослабления $0,22 < k_c < 0,32$ прочная горная порода будет устойчивой, а порода средней прочности разрушится в угловом интервале $\Delta\varepsilon$, отклоненном от вертикали. Аналогичное суждение относится к графикам с условием $\lambda = 3$. Здесь минимальный коэффициент структурного ослабления горных пород средней прочности составляет 0,6, а прочных пород – 0,54. При ослаблении в промежутке этих значений горная порода средней прочности разрушится в угловом интервале $\Delta\varepsilon_T$, отклоненном от горизонтали, а прочная порода будет устойчивой.

Отметим следующие закономерности в изменениях параметров. Зональное разрушение породы в массиве под действием фактически существующего бокового распора $\lambda < 1$ происходит, когда коэффициент предельного бокового распора изменяется в интервале значений от λ до 1. При фактическом боковом распоре

$\lambda > 1$ зональные разрушения породы происходят, когда коэффициент предельного горизонтального тектонического распора изменяется в интервале значений от 1 до λ . По мере углубления в горный массив с одинаково принятым коэффициентом фактического бокового или горизонтального тектонического распора максимально допустимая интенсивность его трещиноватости, при которой массив устойчив, снижается. При этом минимально допустимый коэффициент его структурного ослабления увеличивается.

Заключение. Представленная методология и выявленные с ее помощью закономерности прочности массива горной породы дают возможность по данным его структурного состояния, действующего гравитационного и тектонического напряжения, а также фактически существующего бокового распора определять зоны устойчивости породы или возможного ее разрушения. Основой для таких определений является создание паспорта прочности горного массива по приведенной методике и его динамичное применение в сравнениях действующего и касательного напряжения в кругах Мора.

Для распознавания отмеченных зон введено новое понятие о коэффициентах предельного бокового и горизонтального тектонического распора горных пород и установлена их аналитическая связь с коэффициентом структурного ослабления массива, гравитационным и тектоническим давлением. По соотношению фактически существующего и предельного бокового и тектонического распора сформулированы критерии устойчивости горных пород массива.

На примерах расчета паспортов прочности и анализа устойчивости горных массивов показано, что с учетом фактически существующего гравитационного или тектонического распора на разных их глубинах по данным критериям определяются минимально допустимые значения коэффициента структурного ослабления.

Устанавливаются также предельные углы в направлениях касательного напряжения, сдерживающего разрушение горной породы. При запредельном снижении коэффициента структурного ослабления массива, происходящего из-за трещин или воздействия техногенных полостей горных выработок, определяется нарастающий угловой интервал, выделяющий зону его разрушения.

Таким образом, по описанным закономерностям определяется и прогнозируется прочностное состояние горного массива, включая предупреждения о наличии зон, в которых возможны разрушения в виде горных ударов.

Исследования проведены в рамках выполнения фундаментальной научно-исследовательской работы по теме «Выявление закономерностей развития геодинамических процессов в условиях техногенного преобразования недр и разработка мер по повышению безопасности горного производства» (FUWE-2025-0003).

1. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок / Г.Л. Фисенко. – М.: Недра, 1976. – 272 с.
2. Ставрогин А.Н. Механика деформирования и разрушения горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1992. – 222 с.

3. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений / Н.С. Булычев. – М.: Недра, 1994. – 382 с.
4. Hoek E. Practical estimates of rock mass strength / E. Hoek, E.T. Brown // Rock Mech. Min. Sci. – 1997. – № 34(8). – Р. 1165–1186.
5. Литвинский Г.Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов / Г.Г. Литвинский. – Донецк: Норд-Пресс, 2008. – 207 с.
6. Черданцев Н.В. Оценка состояния массива вокруг пластовой выработки / Н.В. Черданцев // Известия вузов. Горный журнал. – 2015. – № 3. – С. 50–56.
7. Авдеев А.Н. Естественное напряженно-деформированное состояние нижних горизонтов шахты Юго-Западная Дарасунского рудного поля / А.Н. Авдеев, Е.Л. Сосновская, А.Ю. Болотнев // Науки о Земле и недропользование. – 2019. – Т. 42, № 3. – С. 324–335.
8. Антонов В.А. Закономерности изменения прочности образцов и массива горных пород / В.А. Антонов // Проблемы недропользования. – 2024. – № 4. – С. 31–45.
9. Пирогов Е.Н. Соппротивление материалов / Е.Н. Пирогов, В.Ю. Гольцев. – М.: МИФИ, 2008. – 50 с.
10. ГОСТ 21153.8-88. Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии. – 10 с.
11. СНиП II-94-80 Нормы проектирования. Подземные горные выработки. – М.: Стройиздат.
12. Иудин М.М. О трещиноватости массива горных пород / М.М. Иудин // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2007. – № 56. – С. 279–284.
13. Борщ-Компониец В.И. Горное давление при отработке мощных пологих рудных залежей / В.И. Борщ-Компониец, А.Б. Макаров. – М.: Недра, 1986. – 271 с.

V.A. Antonov

Methodology for determining the strength of rock massif rocks under gravitational and tectonic stress conditions.

The paper presents a methodology for determining the stable state or possible destruction of rock located at different depths of a developed rock massif under conditions of gravitational and tectonic stress. The basis for the determinations is the creation of a rock massif strength passport using the given methodology, as well as its dynamic application in comparing existing stresses with the resulting tangential stresses in zones of fractured and technogenic destruction of the massif. The strength state of the rock in the massif is determined by established criteria, including a comparison of its actual lateral thrust with newly introduced coefficients of the ultimate lateral and horizontal tectonic thrust. Practical examples show that these criteria are used to determine the minimum permissible values of the structural weakening coefficient of the massif, at which the rock stability is still preserved. With an extreme decrease in the coefficient of structural weakening of the massif, an angular interval of the directions of tangential stress arises and is determined, within which the rock in the destruction zone is destroyed. According to the given regularities, the strength state of the rocks of the rock mass is predicted, including warnings about possible collapses in the form of rock bursts.

Keywords: rock strength, strength passport, Mohr circle, lateral thrust, coefficient of structural weakening.

*Статья поступила в редакцию 29.06.2025;
доработана 22.07.2025;
рекомендована к печати 11.08.2025.*

УДК 622.831, 622.23.02

doi:10.24412/0136-4545-2025-2-115-124

EDN:GITPTC

©2025. Е.А. Бардакова¹, Е.Б. Бакман², Ф.М. Голубев³

ГИДРОГЕОМЕХАНИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ АКТИВИЗАЦИИ ОСЕДАНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЗАТОПЛЕНИИ ОЧИСТНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК ЗАКРЫВАЮЩИХСЯ УГОЛЬНЫХ ШАХТ

В статье проанализированы основные факторы, оказывающие влияние на параметры процесса сдвижения при затоплении горных выработок. Приведены методики моделирования геомеханических процессов при затоплении горных выработок. Представлены зависимости параметров сдвижений от горнотехнических и горно-геологических условий.

Ключевые слова: ликвидация угольных шахт, подработка, свойства горных пород, техногенная безопасность, граничные углы, модуль Юнга, сдвижение земной поверхности.

Введение. Результаты обследования сотен зданий на территории Донбасса показывают, что повреждения объектов поверхности в зонах влияния затопляемых горных работ развиваются на протяжении длительного срока и часто происходят на участках, где активизация геомеханических процессов, согласно документам [1–3], не должна происходить. Наличие развивающихся повреждений таких зданий в зоне влияния глубоких горных выработок создает опасность техногенных аварий и требует детального исследования причин активизации процессов сдвижения при затоплении.

При определении причин такого деформирования следует учитывать характер изменения свойств горного массива при затоплении горных выработок, опи-

¹Бардакова Елена Александровна – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru.

Bardakova Elena Aleksandrovna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

²Бакман Елена Борисовна – вед. инженер отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: bakman.e@mail.ru.

Bakman Elena Borisovna – Leading Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

³Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

санный в [3–5]. В частности, различные литологические типы горных пород по-разному изменяют свои свойства при контакте с водой. При определении типов горных пород, которые будут подвержены обводнению, следует учитывать особенности формирования зон водопроводящих трещин над лавой, описанные в работах [6–7]. Кроме того, указанные характеристики при многократной подработке оказывают влияние не только на величины деформаций, но и приводят к изменению параметров зон сдвижения.

1. Методика исследования. Анализ маркшейдерских наблюдений в различных районах Донбасса [8–9] позволил зафиксировать, что оседание земной поверхности в ряде случаев наблюдается при затоплении глубоких горных выработок (с глубинами более 500 метров).

Чтобы определить, каким образом многократная подработка может оказывать влияние на характер сдвижения земной поверхности при затоплении горных выработок, было проведено исследование на конечно-элементных моделях. В качестве основной концепции формирования конечно-элементной модели было положено следующее:

- соответствие конечно-элементной модели геологической структуре, которая характерна для Донбасса, то есть подбор свойств пластов горных пород, характерных для песчаников, песчаных сланцев и глинистых сланцев;
- формирование зоны водопроводящих трещин над лавой с учетом степени катагенеза горных пород и структурных особенностей горного массива;
- необходимость соответствия распределения деформаций в модели их реальному распределению.

Калибровка модели проводилась на основании действующих нормативных документов [1–2], которые регламентируют правила расчета характера оседаний при добыче угля. В нашем случае калибровка считается успешной, если при расчете согласно [1–2] одновременно выполняются следующие условия соответствия параметров в геомеханической модели:

- а) граничных углов сдвижения;
- б) размеров мульды;
- в) величины максимального оседания.

Калибровка проводилась путем изменения в допустимых пределах физико-механических свойств горных пород, так как за счет влияния масштабного эффекта, наблюдаемого в массиве, точно определить их характеристики в лабораторных условиях практически невозможно.

Откалиброванная таким образом геомеханическая модель может использоваться как для уточнения прогноза деформаций земной поверхности, вызванных подземной выемкой угля, так и для прогноза активизации сдвижений при частичной и полной ликвидации угольных шахт. В результате калибровки производилось сравнение оседаний в модели и рассчитанных по методикам [1–2], что позволило получить график, приведенный на рисунке 1. Как видно из графика, максимальные отклонения на краях мульды сдвижения составляют порядка 12%.

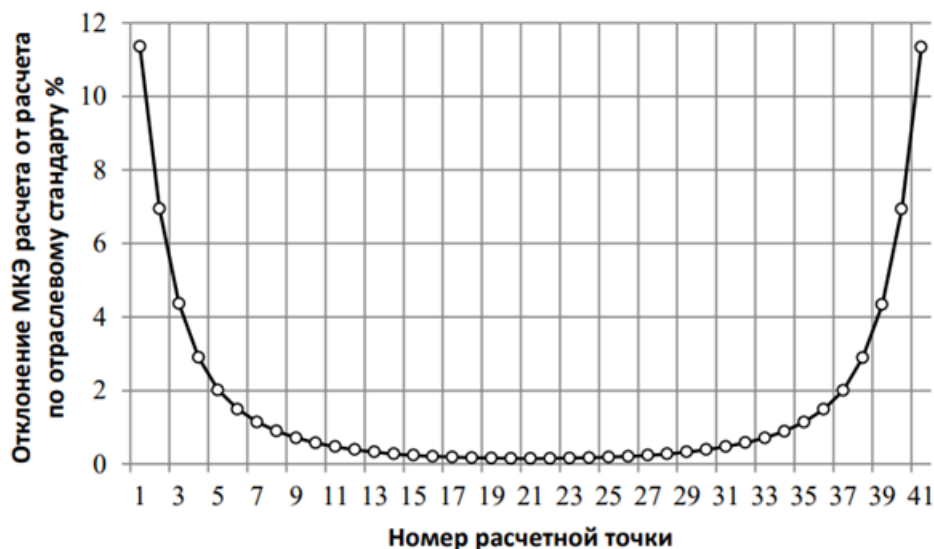


Рис. 1. Отклонение МКЭ расчета от расчета по отраслевому стандарту, %

Удовлетворительная сходимость в результатах расчета по конечно-элементной модели и данных существующих нормативных документов позволила использовать модель для моделирования затопления горного массива посредством изменения физико-механических свойств над очистной горной выработкой.

Величину поднятия воды над очистной выработкой возможно определять исходя из соображений наличия зон трещиноватости, которые возможно идентифицировать с применением исследований, проведенных Моховым А.В., Гусевым В.Н., Питаленко Е.И., Илюхиным Д.А. и др.

Анализ научных публикаций, посвящённых определению размеров зон водопроводящих трещин (ЗВТ), позволил выявить дефицит натурных исследований параметров техногенной нарушенности массива на значительных глубинах. Поэтому в условиях Донбасса распространено применение аналитических методик для расчёта высоты ЗВТ. Особый исследовательский интерес вызывают методики, учитывающие структурные особенности горного массива. Одним из таких подходов является методика, разработанная профессором В.Н. Гусевым [7], в которой размер ЗВТ при её определении в нормированных величинах, зависит от мощности угольного пласта и долевого содержания глинистых пород в массиве.

$$H_T = 70 \sqrt{\frac{m}{e^A}}, \quad (1)$$

где H_T – высота трещины, м; m – мощность отработанного пласта, м; A – содержание глинистых пород в массиве (в долях).

Характер изменения высоты ЗВТ в соответствии с указанной методикой расчета указан на рисунке 2.

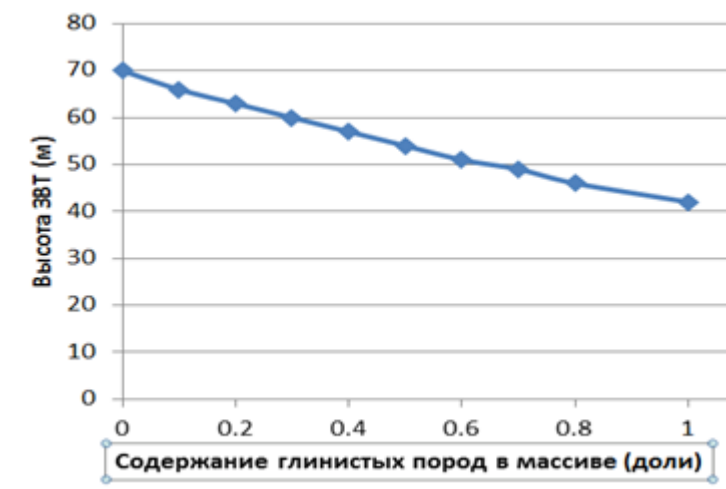


Рис. 2. Зависимость высоты зоны водопроводящих трещин от содержания в массиве глинистых пород

При вычислении размеров зон водопроводящих трещин, согласно исследованиям Е.И. Питаленко [10], должны учитываться способ управления кровлей и степень метаморфизма угля. В его работе представлена таблица, демонстрирующая зависимость высоты распространения ЗВТ от марки разрабатываемого угля (рис. 3). Нормативные документы [9–10] регламентируют определение граничных углов с использованием марок угля, что является интерпретацией косвенного учета физико-механических характеристик горных пород, свойственных угленосному району.

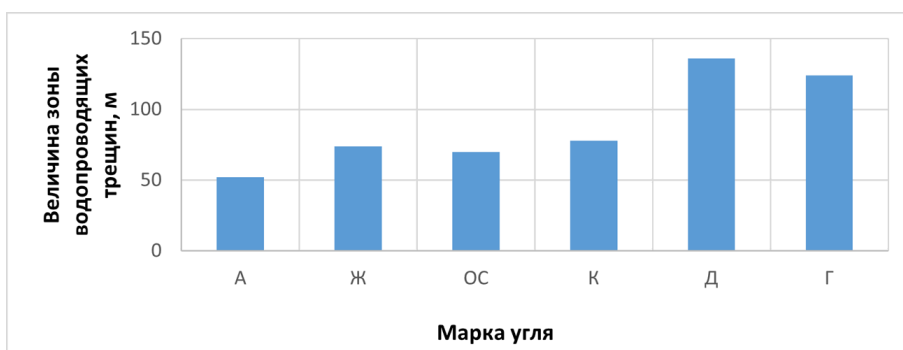


Рис. 3. Зависимость высоты зоны водопроводящих трещин от степени катагенеза угля

Илюхин Д.А. в своей работе [11] исследовал характер распространения ЗВТ над очистными забоями и предложил методику расчёта высоты ЗВТ, учитывающую прочностные характеристики горных пород и фактор мощности слоёв

горных пород, ключевой формулой в которой является

$$H_T = \frac{100 \cdot c^{-1} \cdot m \cdot e^{-1.1A}}{(1.6 \cdot e^{-0.06f} - 0,009)}, \quad (2)$$

где c – относительный центр распределения пород по их мощности в подрабатываемой толще, безразмерная величина (б.в.); m – мощность отрабатываемого пласта, м; c – содержание пород глинистого состава в долях от подрабатываемой толщи; f – средневзвешенная крепость горных пород, б.в.

Анализ зависимости (2) позволяет построить график взаимосвязи крепости горных пород с зоной водопроводящих трещин (рис. 4)

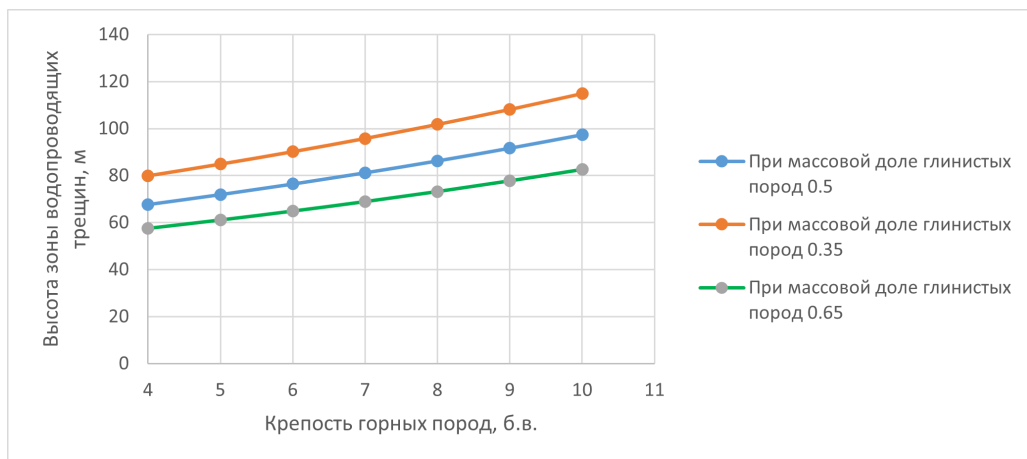
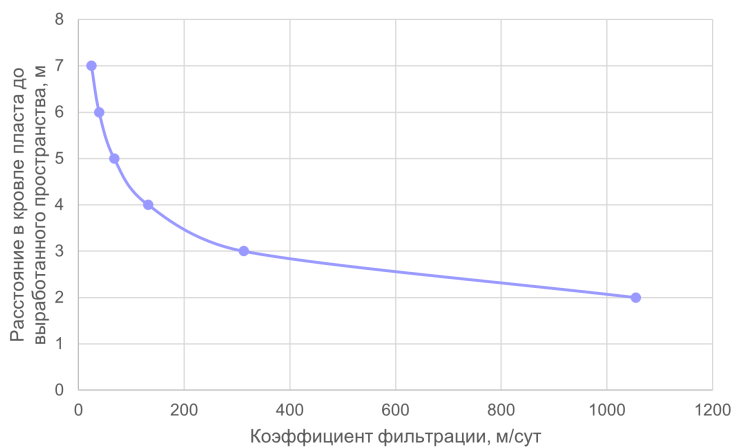


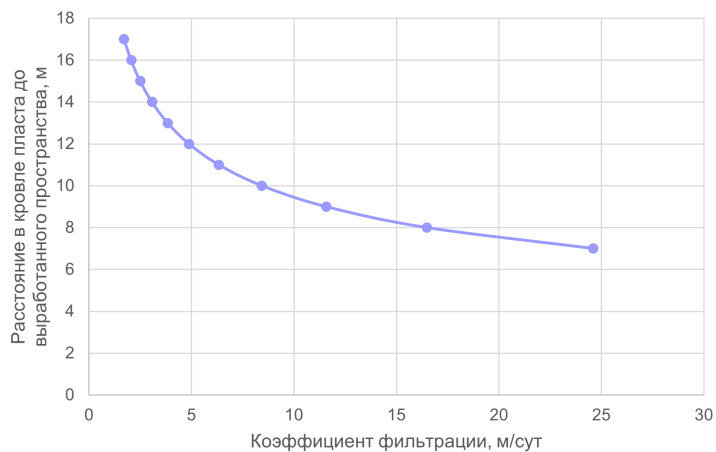
Рис. 4. Взаимосвязь крепости горных пород с высотой зоны водопроводящих трещин

Проведенный анализ показывает, что согласно исследованиям ведущих специалистов в области прогноза параметров зон водопроводящих трещин, для условий глубоких шахт Донбасса наиболее типичными являются размеры зон водопроводящих трещин от 60 до 130 метров. В случаях отработки нескольких горизонтов зоны водопроводящих трещин могут распространяться и на большие расстояния. Стоит отметить, что степень деформаций горного массива в пределах зон водопроводящих трещин также крайне неравномерна. Согласно данным [12], с учетом приведенных выше исследований, возникает возможность определения коэффициента фильтрации в различных участках зон водопроводящих трещин (рис. 5).

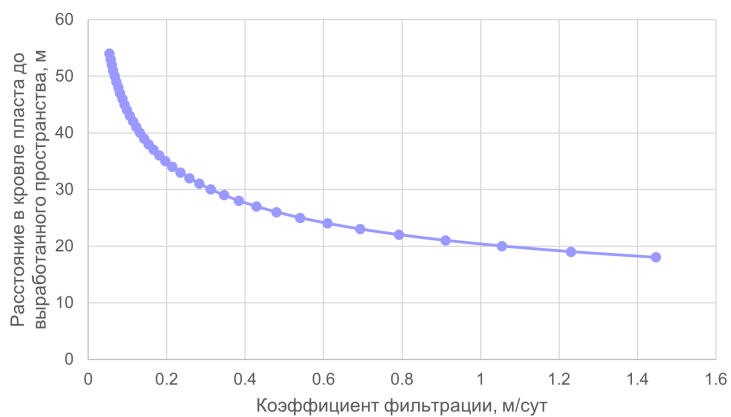
Исходя из приведенных на рисунке 5 графиков, можно утверждать, что более 95 процентов шахтных вод аккумулируются в пределах первых шести метров, при величине зоны водопроводящих трещин 60 метров. Учитывая, что в условиях многократной подработки зона интенсивных деформаций может достигать 120–140 метров, следует при моделировании разделять зоны изменения свойств горного массива на участки. Упругие свойства горных пород для этих участков следует определять, используя зависимость, приведенную в [13] с учетом взаимосвязей коэффициентов проницаемости и фильтрации:



а)



б)



в)

Рис. 5. Графики изменения коэффициентов фильтрации в различных зонах над лавой: а) расстояние от 2 до 7 м над лавой; б) расстояние от 7 до 17 м над лавой; в) расстояние от 19 до 55 м над лавой

$$E = 8,1 \cdot T_s((\rho \cdot g)/(k_f \cdot \mu))^{1/2}, \quad (3)$$

где E – модуль Юнга, Па; T_s – эффективная поверхностная энергия, Дж/м²; ρ – плотность жидкости, кг/м³; g – ускорение свободного падения, м/с²; k_f – коэффициент фильтрации, м/сут; μ – коэффициент динамической вязкости, мПа·с.

С использованием приведенного подхода вычислялись упругие свойства горного массива в зоне беспорядочных обрушений (шесть мощностей пласта) в пределах первых 60 метров над лавой и в пределах от 60 до 120 метров над лавой.

На основании полученных данных в конечно-элементной модели последовательно изменялись свойства горного массива (снижение модулей упругости и сдвига в 1,5 раза, увеличение коэффициента поперечной деформации в 1,2 раза, что характерно для песчаников) и величины зон водопроводящих трещин. В качестве минимальной закладывалась зона водопроводящих трещин высотой 60 метров, в качестве максимальной – 120 метров. Моделируемая глубина залегания лавы 600 метров. Нагрузка на модель задавалась равной давлению породного столба на кровлю очистной выработки. Применялись конечные элементы из тетраэдров, ширина и высота которых составляет 20 м. В результате расчёта было получено графическое отображение деформаций. Стратиграфия для построения модели создана на основании литологической колонки шахты «Комсомолец Донбасса» (рис. 6).

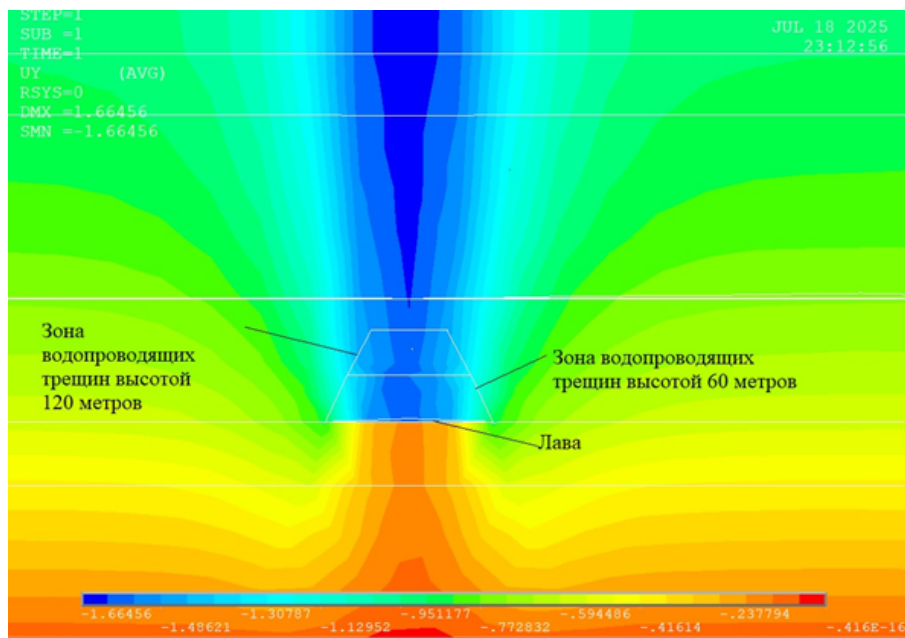


Рис. 6. Совмещенная схема модели оседаний горного массива с указанными моделируемыми зонами водопроводящих трещин

На основании предложенного подхода был разработан ряд конечно-элементных моделей, целью создания которых было исследование влияния различных случаев подработки на параметры процесса сдвижения. Анализ характера влияния зон водопроводящих трещин на характер сдвижения земной поверхности позволил вывести зависимость, приведенную на рисунке 7.

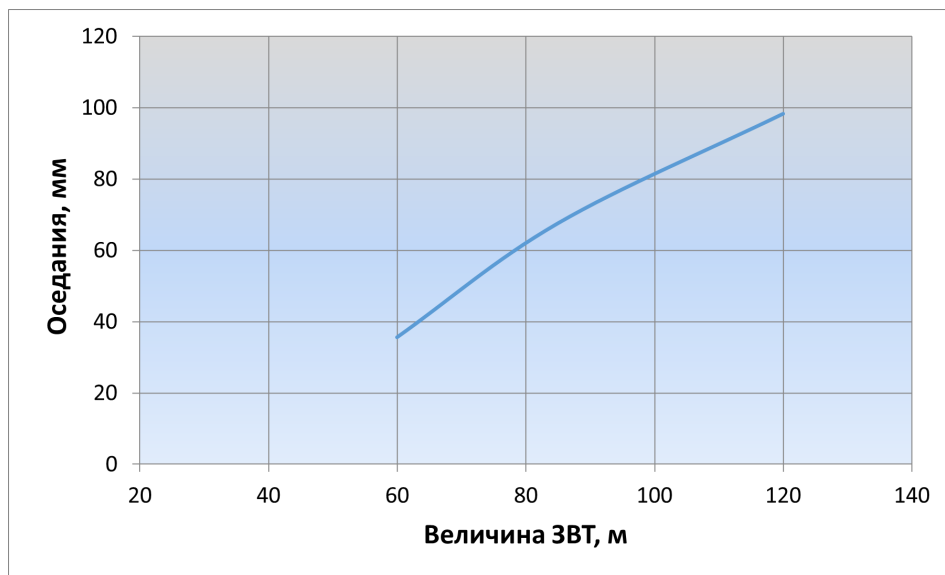


Рис. 7. График взаимосвязи оседаний земной поверхности при различных размерах зон водопроводящих трещин

В результате моделирования затопления горного массива при ЗВТ различных размеров были получены следующие результаты оседаний:

- при глубине 600 м затопление массива в зонах водопроводящих трещин надлавой размерами менее 70 м приводило к деформации в пределах погрешности измерения;
- при увеличении ЗВТ на величину более 70 м, даже при глубоких горных выработках, были получены существенные оседания, величина которых сопоставима с оседаниями, проявляющимися при процессе отработки.

Учитывая, что калибровка модели производилась на основании отработанной методики, можно утверждать, что данная модель показывает адекватную картину распределения оседаний в таких условиях.

Выводы. В результате выполненного моделирования и анализа существующих исследований было установлено, что в пределах зоны водопроводящих трещин можно выделить три участка, которые характеризуются различными порядками показателей коэффициента фильтрации, соответствующими зонам беспорядочных обрушений, упорядоченных обрушений и прогибов с разрывом сплошности.

Доказано наличие влияния глубоких горных выработок на параметры сдви-

жения и установлены базовые критерии, определяющие масштаб проявления такого влияния. Анализ полученных результатов позволяет констатировать, что проявление процесса сдвижения при затоплении глубоких горизонтов возможно только при условии существенной техногенной нарушенности целостности горного массива, чему соответствует развитие зоны водопроводящих трещин при высоте более 100 м.

К основным факторам, определяющим параметры процесса сдвижения, можно отнести средневзвешенную крепость горных пород, количество глинистых сланцев в массиве, степень катагенеза горных пород.

При прогнозе деформаций земной поверхности от затопления особое внимание необходимо уделять структуре горного массива в связи с её существенным влиянием на величину оседаний.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ FRSR-2023-0002).

1. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев. – 2004. – 127 с.
2. ПБ 07-269-98. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – Введ. 1998-10-01. – М., 1998. – 203 с.
3. КД 12-12.004-98. Ликвидация угольных шахт, защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации. – Донецк: УкрНИМИ, 1998. – 46 с.
4. Алексеев А.Д. Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений / А.Д. Алексеев. – К.: Наукова думка, 1989. – 168 с.
5. Питаленко Е.И. Определение безопасного уровня затопления горных выработок шахт, как критерий при их мокрой консервации / Е.И. Питаленко, А.В. Шиптенко, С.В. Педченко, П.Г. Артеменко // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2009. – № 5. – С. 131–143.
6. Техногенные последствия закрытия угольных шахт: Монография / Под ред. Ю. Н. Гавриленко, В. Н. Ермакова. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 631 с.
7. Гусев В.Н. Определение параметров зоны водопроводящих трещин через горизонтальные деформации подрабатываемой толщи / В.Н. Гусев, Д.А. Илюхин, А.Г. Алексенко // Записки горного института: сб. науч. трудов. – 2013. – Т. 204. – С. 69–73.
8. Питаленко Е.И. Опыт геомеханических мониторингов на территории ликвидируемых шахт Донбасса / Е.И. Питаленко, А.В. Шиптенко, М.Д. Рожко // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2007. – № 2. – С. 155–160.
9. Организация и постановка геомеханического мониторинга за развитием деформаций на подрабатываемых территориях при затоплении шахт Стахановского региона с разработкой и обоснованием схем наблюдательных станций. Отчет о НИР (заключительный). – Донецк, 2002. – 180 с.
10. Геомеханические процессы отработки крутых пластов: новые исследования и решения / Е.И. Питаленко [и др.] – Донецк: УкрНИМИ, 2007. – 378 с.
11. Илюхин Д.А. Прогноз развития зоны водопроводящих трещин при разработке Яковлевского месторождения богатых железных руд: автореф. дис. кан. тех. наук. – Санкт-Петербург, 2014. – 19 с.
12. Черникова С.А. Геогидродинамическое обоснование мониторинга процесса затопления угольных шахт Донбасса (на примере Стахановско-Брянковского региона): автореф. дис. канд. техн. наук. – Пермь, 2004. – 24 с.
13. Семашко С.В. Современные движения флюидов в земной коре / С.В. Семашко // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2011. – № 2. – С. 51–67.

E.A. Bardakova, E.B. Bakman, F.M. Golubev

Hydrogeomechanical forecast of increased subsidence of the earth's surface during flooding of the mine workings of closing coal mines.

The article analyzes the main factors that affect the parameters of the shift process during the flooding of mine workings. It presents methods for modeling geomechanical processes during the flooding of mine workings. The article also presents the dependence of shift parameters on mining and geological conditions.

Keywords: *liquidation of coal mines, undercutting, rock properties, technogenic safety, boundary angles, Young's modulus, and ground surface movement.*

*Статья поступила в редакцию 08.07.2025;
доработана 30.07.2025;
рекомендована к печати 18.08.2025.*