

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Журнал ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

№ 2 (95)

2026

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватulyян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.В. Георгиевский**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р техн. наук, проф. **Н.Н. Грищенко**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.А. Илюхин**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносеvич**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Мазнев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Муцанов**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Р.Н. Нескорoдев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Н. Соловьев**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожеv**, д-р физ.-мат. наук, доц. **С.Н. Царенко**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**.

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**
EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of phys. and math., prof. **D.V. Georgievskiy**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of tech., prof. **N.N. Grishchenkov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**, Dr. of phys. and math., prof. **A.A. Ilyukhin**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Maznev**, Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of phys. and math., docent **R.N. Neskoroдев**, Dr. of phys. and math., prof. **A.N. Soloviev**, Dr. of tech., docent **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., docent **S.N. Tsarenko**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки). Квартиль К2 с 23.05.2025. Журнал включен в актуальную версию Единого государственного перечня научных изданий («Белый список» научных журналов) – 4 уровень.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 230-11/2025 от 17 ноября 2025 г.).

Утверждено к изданию ученым советом
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет», 2026

№ 2 (95) / 2026

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Механика твердого тела

- Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.* Решение задачи о деформации стержня переменной жесткости 5
- Тимошенко Д.В., Илюхин А.А.* Решение задачи о деформации естественно закрученного стержня с переменной жесткостью 12

Механика деформируемого твердого тела

- Глухов А.А.* Построение однородных решений вихревого типа для моделей стационарного динамического деформирования трансверсально-изотропных функционально-градиентных экспоненциально-неоднородных плит 19
- Глушанков Е.С.* Действие сосредоточенных источников тепла в многосвязной пьезопластинке в условиях конвективного теплообмена с внешней средой 29
- Калоеров С.А., Полянский М.А.* Решение задачи о вязкоупругом состоянии полосы с отверстиями, трещинами и выемами 42
- Калоеров С.А., Сошина Е.И.* Основные соотношения обобщенного кручения упругих тел 56

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Азаров Н.Я., Голубев Ф.М., Украинский И.А., Болоцкая Н.С.* Моделирование геомеханических процессов при многократной подработке на основании данных физико-геологической модели 77

Иванова Л.А., Рахманова Т.И., Бардакова Е.А., Сажнев В.П. Оценка
структурных деформаций зданий при ликвидации угольных шахт в
условиях Центрального района Донбасса

87

№ 2 (95) / 2026

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

- Ilyukhin A.A., Timoshenko D.V.* Solving the deformation problem for a rod with variable stiffness 5
- Timoshenko D.V., Ilyukhin A.A.* Solution to the deformation problem of a naturally twisted rod with variable stiffness..... 12

Solid Mechanics

- Glukhov A.A.* Construction of homogeneous vortex-type solutions for models of stationary dynamic deformation of transversely isotropic functionally graded exponentially inhomogeneous plates..... 19
- Glushankov E.S.* The concentrated heat sources' action in a multiply connected piezoelectric plate under the convective heat transfer condition..... 29
- Kaloerov S.A., Polianskii M.A.* Solution of the problem of the viscoelastic state of a strip with holes, cracks and recesses..... 42
- Kaloerov S.A., Soshyna E.I.* Basic relations of generalized torsion of elastic bodies..... 56

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics

- Azarov N.Y., Golubev Ph.M., Ukrainsky I.A., Bolotskaya N.S.* Modeling of geomechanical processes during multiple mining operations based on physical and geological model data 77

<i>Ivanova L.A., Rakhmanova T.I., Bardakova E.A., Sazhnev V.P.</i> Assessment of structural deformations of buildings during the liquidation of coal mines in the Central region of Donbass	87
---	----

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38, 577.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-5-11

EDN:XFINKY



©2026. А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ
ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Предложена математическая модель деформации упругого стержня, жесткости которого зависят от дуговой координаты при условии равенства изгибных жесткостей, что соответствует аналогу случая Лагранжа для стержней переменных жесткостей. Методом малого параметра получены линеаризованные уравнения первого приближения и аналоги первых интегралов системы уравнений Кирхгофа. Интегрирование уравнений упругой линии позволило описать физический эффект конического развертывания пространственной спирали с переменным шагом и радиусом.

Ключевые слова: упругий стержень, переменная жесткость, градиентный изгиб, метод малого параметра.

Введение. Классическая теория пространственного изгиба упругих стержней, сформированная в работах Кирхгофа и Клебша, традиционно оперирует объектами постоянного поперечного сечения [1–4]. В этом случае рассмотрение стержня как геометрически однородного элемента позволяет получить замкнутые аналитические решения системы уравнений равновесия, выражающиеся через эллиптические функции Якоби, и сформировать строгие законы сохранения в задаче о деформации стержня (первые интегралы энергии и площадей). Однако классические модели не всегда описывают поведение реальных конструкций, работающих в экстремальных условиях современных высокотехнологичных производств, а также ряда наноразмерных объектов, например, молекул белков и нуклеиновых кислот, с достаточной точностью [5–11]. Можно выделить следующие задачи, в которых обоснован переход от модели стержня с постоянными

Илюхин Александр Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, главн. науч. сотр. ИПММ, Донецк, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru., ORCID: 0009-0004-8024-2209.

Pyukhin Aleksandr Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

Тимошенко Дмитрий Владимирович – канд. физ.-мат. наук, доц. ЮФУ, Ростов-на-Дону; ст. науч. сотр. ИПММ, Донецк, e-mail: dmitrytim@yandex.ru., ORCID: 0009-0004-0444-2807.

Timoshenko Dmitry Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don; Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

жесткостями к моделям с переменными жесткостями ($Bi = Bi(s)$): проектирование и исследование конструктивных стержневых элементов переменного сечения (конусные, ступенчатые, утончающиеся), что позволяет добиваться оптимального распределения прочности при минимальном весе, с устранением избыточной материалоемкости в ненагруженных зонах [1–7]. Анализ прочности стержневых объектов, подвергающихся неравномерной коррозии, эрозионному износу или высокотемпературному воздействию в процессе эксплуатации, также требует явного введения неавтономных функций жесткости для прогнозирования остаточного ресурса и предотвращения катастрофических разрушений. Отдельно следует отметить задачи, связанные с исследованием таких биологических объектов, как ткани, сосуды, а также молекулы белков, пептидов и нуклеиновых кислот, обладающих переменными механическими характеристиками, для моделирования которых в последние годы активно применяется теория упругих стержней. [1–6, 11].

Уравнения деформации стержня. Рассмотрим тонкий стержень, геометрия которого плавно изменяется вдоль дуговой координаты $s \in [0, L]$. Предполагая подобие поперечных сечений и изотропию в главных плоскостях изгиба, представим главные жесткости в виде регулярных возмущений базовых (постоянных) значений:

$$\begin{aligned} B_1(s) &= B_1^0(1 + \varepsilon \cdot f(s)), \\ B_2(s) &= B_2^0(1 + \varepsilon \cdot f(s)), \quad B_3(s) = B_2^0(1 + \varepsilon \cdot f(s)), \end{aligned} \quad (1)$$

где B_1^0, B_2^0 — крутильная и изгибная жесткости в начальном поперечном сечении соответственно; $\varepsilon \ll 1$ — безразмерный малый параметр, характеризующий конусность или технологическое утончение; $f(s)$ — заданная гладкая безразмерная функция распределения жесткостей.

Будем рассматривать следующую связь между компонентами главного момента и компонентами вектора Дарбу:

$$M_1 = B_1\omega_1, \quad M_2 = B_2\omega_2, \quad M_3 = B_3\omega_3. \quad (2)$$

Уравнения равновесия Кирхгофа, записанные в проекциях на оси связанного со стержнем триэдра, при действии концевой силы $\mathbf{P}$, направленной вдоль неподвижной оси OZ , принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(B_1(s)\omega_1) &= 0, \\ B_2(s)\frac{d\omega_2}{ds} + \frac{dB_2}{ds}\omega_2 - (B_2(s) - B_1(s))\omega_1\omega_3 &= -P\gamma_3, \\ B_2(s)\frac{d\omega_3}{ds} + \frac{dB_2}{ds}\omega_3 - (B_1(s) - B_2(s))\omega_1\omega_2 &= -P\gamma_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где ω_i — компоненты вектора Дарбу (угловые скорости триэдра Кирхгофа); γ_i — направляющие косинусы оси OZ относительно связанных осей.

Система (3) дополняется уравнениями равновесия Пуассона:

$$\frac{d\gamma_1}{ds} = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{ds} = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{ds} = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \quad (4)$$

Линеаризация и метод малого параметра. Искомые функции представим через формулу Тейлора по параметру ε :

$$\omega_i(s) = \omega_i^0(s) + \varepsilon \cdot \omega_i^1(s) + O(\varepsilon^2), \quad \gamma_i(s) = \gamma_i^0(s) + \varepsilon \cdot \gamma_i^1(s) + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

Подстановка (1) и (5) в (3) приводит к расщеплению задачи по степеням малого параметра.

Система уравнений совпадает с классической автономной задачей Лагранжа для изотропного стержня:

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \frac{N}{B_1^0} = \text{const}, \\ B_2^0 \frac{d\omega_2^0}{ds} - (B_2^0 - B_1^0)\omega_1^0\omega_3^0 &= -P\gamma_3^0, \\ B_2^0 \frac{d\omega_3^0}{ds} - (B_1^0 - B_2^0)\omega_1^0\omega_2^0 &= -P\gamma_2^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение этой системы известно и выражается через эллиптические функции Якоби.

Сбор членов при первой степени ε с учетом соотношений $\frac{dB_i}{ds} = \varepsilon B_i^0 \frac{df}{ds}$ дает систему уравнений для поправок:

$$\omega_1^1(s) = -\frac{N}{B_1^0} f(s), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B_2^0 \frac{d\omega_2^1}{ds} - (B_2^0 - B_1^0)(\omega_1^0\omega_3^1 + \omega_1^1\omega_3^0) + P\gamma_3^1 &= \\ = -B_2^0 \left(f(s) \frac{d\omega_2^0}{ds} + \frac{df}{ds} \omega_2^0 \right) + (B_2^0 f(s) - B_1^0 f(s)) \omega_1^0\omega_3^0, \\ B_2^0 \frac{d\omega_3^1}{ds} - (B_1^0 - B_2^0)(\omega_1^0\omega_2^1 + \omega_1^1\omega_2^0) + P\gamma_2^1 &= \\ = -B_2^0 \left(f(s) \frac{d\omega_3^0}{ds} + \frac{df}{ds} \omega_3^0 \right) + (B_1^0 f(s) - B_2^0 f(s)) \omega_1^0\omega_2^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Правые части уравнений (8) содержат члены $-B_2^0 \frac{df}{ds} \omega_i^0$ ($i = 2, 3$), отражающие градиентный изгиб, вызванный изменением геометрии по длине.

Преобразование первых интегралов к безразмерному виду. Из-за явной зависимости уравнений от s строгие первые интегралы энергии и площадей стоят под вопросом. Сформируем структуры квазиинтегралов, разлагая константы Лагранжа в функциональные ряды: $K(s) = K_0 + \varepsilon K_1(s)$ и $H(s) = H_0 + \varepsilon H_1(s)$. С точностью до $O(\varepsilon)$ получим:

– аналог интеграла площадей

$$\begin{aligned} B_1^0 \omega_1^1 \gamma_1^0 + B_1^0 \omega_1^0 \gamma_1^1 + B_2^0 (\omega_2^0 \gamma_2^1 + \omega_2^1 \gamma_2^0 + \omega_3^0 \gamma_3^1 + \omega_3^1 \gamma_3^0) = \\ = K_1(s) - f(s) B_1^0 \omega_1^0 \gamma_1^0 - f(s) B_2^0 (\omega_2^0 \gamma_2^0 + \omega_3^0 \gamma_3^0), \end{aligned}$$

– аналог интеграла энергии

$$\begin{aligned} B_1^0 \omega_1^0 \omega_1^1 + B_2^0 (\omega_2^0 \omega_2^1 + \omega_3^0 \omega_3^1) - P \gamma_1^1 = \\ = H_1(s) - \frac{1}{2} f(s) B_1^0 (\omega_1^0)^2 - \frac{1}{2} f(s) B_2^0 [(\omega_2^0)^2 + (\omega_3^0)^2]. \end{aligned}$$

Функции $K_1(s)$ и $H_1(s)$ находятся путем интегрирования правых частей, возникающих при полном дифференцировании соотношений по s с подстановкой уравнений (8).

Введем безразмерные функции переменной структуры, сохраняющие свойство безразмерности во всех порядках малости за счет нормировки на комплекс $\sqrt{2PB_2^0}$ (имеющий размерность момента Н · м):

$$\begin{aligned} h(s) = h_0 + \varepsilon h_1(s) &= \frac{H_0 - \frac{1}{2B_1^0} (\omega_1^0)^2}{2P} + \varepsilon \frac{H_1(s) - B_1^0 \omega_1^0 \omega_1^1(s) - \frac{1}{2} f(s) B_1^0 (\omega_1^0)^2}{2P}, \\ b(s) = b_0 + \varepsilon b_1(s) &= \frac{N}{\sqrt{2PB_2^0}} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon f(s) \right), \\ \beta(s) = \beta_0 + \varepsilon \beta_1(s) &= \frac{K_0 + \varepsilon K_1(s)}{\sqrt{2PB_2^0}} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon f(s) \right). \end{aligned}$$

Редуцированное уравнение. Перейдем к переменной нутации $v = \gamma_1 = \cos \theta$. Используя кинематические связи Эйлера и исключая угол прецессии ψ , упругое деформирование оси сводится к неавтономному дифференциальному уравнению:

$$n^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = F(v, s) = F_0(v) + \varepsilon F_1(v, s), \quad (9)$$

где $n^2 = B_2^0 / (2P)$. Раскрывая полиномы с точностью до $O(\varepsilon)$, получаем канонический вид многочлена третьей степени с переменными коэффициентами:

$$F(v, s) = -v^3 + A_2(s)v^2 + A_1(s)v + A_0(s), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} A_2(s) &= -h_0 - b_0^2 + \varepsilon(-h_1(s) - 2b_0 b_1(s)), \\ A_1(s) &= 1 + 2\beta_0 b_0 + \varepsilon(2\beta_0 b_1(s) + 2b_0 \beta_1(s)), \\ A_0(s) &= h_0 - \beta_0^2 + \varepsilon(h_1(s) - 2\beta_0 \beta_1(s)). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть невозмущенное уравнение $F_0(v) = 0$ имеет три вещественных корня, упорядоченных по Лагранжу: $v_1^0 \leq -1 \leq v_2^0 \leq v_3^0 \leq 1$. Представим искомые

переменные корни в виде регулярных рядов: $v_i(s) = v_i^0 + \varepsilon \cdot v_i^1(s) + O(\varepsilon^2)$. Разлагая $F(v_i(s), s) = 0$ в окрестности v_i^0 по формуле Тейлора, получаем линейное уравнение для поправок:

$$v_i^1(s) \frac{dF_0}{dv} \Big|_{v=v_i^0} + F_1(v_i^0, s) = 0 \implies v_i^1(s) = - \frac{F_1(v_i^0, s)}{\frac{dF_0}{dv} \Big|_{v=v_i^0}}. \quad (12)$$

Вычисляя производные $\frac{dF_0}{dv}$ в точках v_i^0 , находим аналитические выражения для дрейфа барьеров нутации:

$$\begin{aligned} v_1(s) &= v_1^0 + \varepsilon \cdot \frac{2(\beta_0 - b_0 v_1^0)(\beta_1(s) - b_1(s)v_1^0) - h_1(s)(1 - (v_1^0)^2)}{(v_1^0 - v_2^0)(v_1^0 - v_3^0)}, \\ v_2(s) &= v_2^0 + \varepsilon \cdot \frac{2(\beta_0 - b_0 v_2^0)(\beta_1(s) - b_1(s)v_2^0) - h_1(s)(1 - (v_2^0)^2)}{(v_2^0 - v_3^0)(v_2^0 - v_1^0)}, \\ v_3(s) &= v_3^0 - \varepsilon \cdot \frac{2(\beta_0 - b_0 v_3^0)(\beta_1(s) - b_1(s)v_3^0) - h_1(s)(1 - (v_3^0)^2)}{(v_3^0 - v_2^0)(v_3^0 - v_1^0)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения упругой линии. Производная радиус-вектора оси $\mathbf{r}(s) = \{X(s), Y(s), Z(s)\}$ по дуге определяет единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Связывая проекции касательной с углами Эйлера через третью строку матрицы направляющих косинусов и выполняя замену $\sin \theta = \sqrt{1 - v^2}$, запишем кинематические уравнения оси стержня в форме:

$$\frac{dX}{ds} = \sqrt{1 - v^2(s)} \cos \psi(s), \quad \frac{dY}{ds} = \sqrt{1 - v^2(s)} \sin \psi(s), \quad \frac{dZ}{ds} = v(s). \quad (14)$$

Интегрируя (14), получаем уравнения упругой линии в виде явных квадратур:

$$\begin{aligned} X(s) &= X_0 + \int_0^s \sqrt{1 - v^2(s)} \cos \psi(s) ds, \\ Y(s) &= Y_0 + \int_0^s \sqrt{1 - v^2(s)} \sin \psi(s) ds, \\ Z(s) &= Z_0 + \int_0^s v(s) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Разлагая траекторию на невозмущенную часть решения Лагранжа $\mathbf{r}^0(s)$ и поправку за счет переменности сечения $\mathbf{r}^1(s)$, из (15) и (13) получаем замкнутое решение:

$$Z(s) = Z^0(s) + \varepsilon Z^1(s) = \left[Z_0 + \int_0^s v_0(s) ds \right] + \varepsilon \left[\int_0^s v_1(s) ds \right], \quad (16)$$

где азимутальное движение определяется интегрированием возмущенного уравнения прецессии:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \psi_0(s) + \varepsilon \psi_1(s) = \\ &= \int_0^s \frac{\beta_0 - b_0 v_0}{n(1 - v_0^2)} ds + \varepsilon \int_0^s \left[\frac{\beta_1 - b_1 v_0}{n(1 - v_0^2)} + \frac{2(\beta_0 - b_0 v_0)b_1 v_0 v_1}{n(1 - v_0^2)^2} \right] ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Горизонтальные координаты $X(s)$ и $Y(s)$ определяются подстановкой (17) в (15) с удержанием членов первого порядка малости. Это аналитически описывает физический эффект конического разворачивания пространственной спирали переменного радиуса и шага.

Выводы. В работе построена и аналитически реализована неавтономная математическая модель трехмерного изгиба и кручения тонкого упругого стержня переменной изгибной и крутильной жесткости под действием концевой силы. При этом с использованием теории регулярных возмущений по малому геометрическому параметру дана математическая формализация градиентного изгиба, при котором в уравнениях первого приближения (8) изучены неавтономные слагаемые, характеризующие физическое явление градиентного изгиба, порождаемого исключительно пространственной неоднородностью геометрии (изменением площади и моментов инерции поперечного сечения вдоль дуговой координаты). Кроме того, интегрирование кинематических уравнений упругой линии (16)–(17) показало, что переменный характер жесткости стержня нарушает периодичность пространственной траектории его оси. Вместо классической формы в виде винтовой линии, намотанной на цилиндрическую поверхность, ось стержня принимает форму, квазипериодической спирали с непрерывно изменяющимся локальным шагом и радиусом. Описано явление динамического сдвига экстремальных точек кривизны стержня. Введение функции распределения жесткости привело к переменному характеру геометрических характеристик упругой линии стержня. При стремлении малого параметра к нулю построенная модель гладко переходит в классический случай Лагранжа для изотропного стержня. Уравнения нулевого порядка (6) полностью сохраняют структуру уравнений Кирхгофа, что обеспечивает преемственность развиваемой теории.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБНУ ИПММ (тема № FREM-2026-0005).

Список литературы

1. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин. – К.: Наук. думка, 1979. – 216 с.
2. Елисеев В.В. Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня / В.В. Елисеев // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1977. – № 3. – С. 145–150.
3. Понятовский В.В. Асимптотические разложения в линейной теории плоских стержней / В.В. Понятовский // Пробл. механики твёрдого тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 341–351.
4. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
5. Панин В.Е. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / В.Е. Панин. – Новосибирск: Наука; СО РАН, 1995. – Т. 1. – 297 с.
6. Кривцов А.М. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов / А.М. Кривцов, Н.Ф. Морозов // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 825–827.
7. Mescheryakov Y.I. Multiscale kinetics of microstructure and strain-rate dependence of materials / Y.I. Mescheryakov, A.K. Divakov // DYMAT J. – 1994. – № 4. – P. 271–287.
8. Рит М. Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета / М. Рит. – М.-Ижевск: RCD, 2005. – 159 с.
9. Кравчук А.С. О моделях и решении задач механики наноконтакта / А.С. Кравчук //

Математическое моделирование систем и процессов. – 2007. – № 15. – С. 123–141.

10. Фомин В.М. Молекулярно-динамические исследования термомеханических свойств наноструктур / В.М. Фомин, И.Ф. Головнев // Механика — от дискретного к сплошному. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – С. 8–87.
11. Илюхин А.А. Математическая модель замкнутых молекул ДНК / А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко // Изв.Саратов. ун-та. – 2008. – Т. 8. – Сер. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 3. – С. 32–40.

A.A. Ilyukhin, D.V. Timoshenko

Solving the deformation problem for a rod with variable stiffness.

A mathematical model for the deformation of an elastic rod is proposed, where the stiffnesses depend on the arc coordinate under the condition of equal bending stiffnesses, which corresponds to the analogue of the Lagrange case for rods of variable stiffness. Linearized equations of the first approximation and analogues of the first integrals of the Kirchhoff equation system are obtained using the small parameter method. Integration of the elastic line equations allowed describing the physical effect of conical deployment of a spatial spiral with a variable pitch and radius.

Keywords: *elastic rod, variable stiffness, gradient bending, small parameter method.*

References

1. Ilyukhin, A.A. (1979). *Spatial problems of the nonlinear theory of elastic rods*. Kiev: Naukova Dumka. 216 p. (In Russian)
2. Eliseev, V.V. (1977). [Application of the asymptotic method to the problem of equilibrium of a curvilinear rod]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela = Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, (3), 145–150. (In Russian)
3. Ponyatovskiy, V.V. (1970). [Asymptotic expansions in the linear theory of plane rods]. In *Problemy mekhaniki tverdogo tela = Problems of solid mechanics*. Leningrad: Sudostroenie, pp. 341–351 (In Russian)
4. Lurie, A.I. (1970). *Theory of elasticity*. Moscow: Nauka. 939 p. (In Russian)
5. Panin, V.E. (1995). *Physical mesomechanics and computer-aided materials design* (Vol. 1). Novosibirsk: Nauka; Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. 297 p. (In Russian)
6. Krivtsov, A.M. & Morozov, N.F. (2001). [Anomalies of the mechanical characteristics of nano-sized objects]. *Doklady Rossiyskoy Akademii Nauk = Reports of the Russian Academy of Sciences*, 381(3), 825–827. (In Russian)
7. Mescheryakov, Y.I. & Divakov, A.K. (1994). Multiscale kinetics of microstructure and strain-rate dependence of materials. *DYMAT Journal*, (4), 271–287.
8. Ritt, M. (2005). *Nanoengineering in science and technology: Introduction to the world of nanocalculation*. Moscow–Izhevsk: RCD. 159 p. (In Russian)
9. Kravchuk, A.S. (2007). [On models and solutions of problems in nanocontact mechanics]. *Matematicheskoe Modelirovanie Sistem i Protseessov = Mathematical modeling of systems and processes*, (15), 123–141. (In Russian)
10. Fomin, V.M. & Golovnev, I.F. (2008). [Molecular-dynamics studies of thermomechanical properties of nanostructures]. In *Mekhanika – ot diskretnogo k sploshnomu = Mechanics: From discrete to continuum*. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, pp. 8–87. (In Russian)
11. Ilyukhin, A.A. & Timoshenko, D.V. (2008). Mathematical Model of the Closed Molecules of DNA. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 8(3), 32–40. (In Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 19.05.2026.

Доработана / Revision submitted 01.06.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

УДК 531.38, 577.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-12-18

EDN:AELFZP



©2026. Д.В. Тимошенко, А.А. Илюхин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Решена задача о деформации упругого стержня с переменными по длине жесткостями, имеющего естественное кручение. Введением двух малых параметров — коэффициента подобия поперечных сечений и величины естественного кручения, — построена линеаризованная система уравнений первого приближения. При этом задан периодический характер естественного кручения стержня по длине, что продиктовано спецификой рассматриваемого приложения: моделирование поведения макромолекул нуклеиновых кислот, обладающих указанным свойством.

Ключевые слова: естественно закрученный стержень, переменная жесткость, уравнения Кирхгофа, метод малого параметра, модель ДНК, параметрический резонанс, суперскручивание.

Введение. Основой исследования пространственного изгиба протяженных упругих объектов является модель Кирхгофа–Клебша. Одним из ключевых методов исследования пространственных форм равновесия в рамках указанной модели служит использование точных или приближенных аналитических решений системы уравнений Кирхгофа. Подробно этот метод рассмотрен в работах [1–4]. Однако эти решения строго ограничены условием автономности системы, что предполагает неизменность геометрических и физических параметров стержня по его длине. Переход к неавтономным моделям упругих стержней обусловлен развитием прикладных задач механики и биофизики [5–12]. В частности, для молекул нуклеиновых кислот современные исследования показывают, что нуклеотидная неоднородность (чередование пар оснований аденин-тимин и гуанин-цитозин) порождает периодические возмущения естественного кручения ДНК. Учет этой дискретной структуры делает уравнения Кирхгофа неавтономными. Наряду с описанными задачами молекулярного моделирования, необходимость учета естественной закрученности наряду с жесткостями переменного характе-

Тимошенко Дмитрий Владимирович – канд. физ.-мат. наук, доц. ЮФУ, Ростов-на-Дону; ст. науч. сотр. ИПММ, Донецк, e-mail: dmitrytim@yandex.ru., ORCID: 0009-0004-0444-2807.

Timoshenko Dmitry Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don; Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

Илюхин Александр Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, главн. науч. сотр. ИПММ, Донецк, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru., ORCID: 0009-0004-8024-2209.

Ilyukhin Aleksandr Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

ра присутствует в задачах моделирования стержневых систем из композитных объектов со сложной волокнистой структурой, в частности, медицинских зондов и микроманипуляторов. В данной работе методом малого параметра решена задача построения аналога решения Лагранжа системы уравнений Кирхгофа для естественно закрученного стержня с переменными жесткостями на изгиб и кручение.

Обобщение модели Кирхгофа–Клебша. Классическая теория пространственного изгиба стержней Кирхгофа–Клебша предполагает, что в исходном состоянии стержень не обладает кручением, и его жесткости одинаковы для любого поперечного сечения [1–3]. При переходе к естественно закрученному стержню компоненты вектора начальной кривизны-кручения недеформированной оси принимают вид [4]:

$$\omega^0 = \{\omega_1^0(s), 0, 0\}^T, \quad (1)$$

где $\omega_1^0(s)$ — интенсивность естественного кручения относительно продольной координатной оси s , которая в естественном состоянии является прямой.

Модификация замыкающих соотношений уравнений Кирхгофа. Упругие моменты в произвольном поперечном сечении определяются только избыточной (силовой) деформацией относительно закрученного начального состояния. Связь между компонентами главного момента и вектора Дарбу имеют вид [1]:

$$M_1 = B_1(s) \cdot (\omega_1 - \omega_1^0(s)), \quad M_2 = B_2(s) \cdot \omega_2, \quad M_3 = B_3(s) \cdot \omega_3, \quad (2)$$

где $B_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) — переменные жесткости стержня при кручении и изгибе соответственно.

Преобразование уравнений равновесия. Статические уравнения равновесия Кирхгофа для моментов при действии концевой силы P , направленной вдоль фиксированной вертикальной оси z , имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{ds} + \omega_2 M_3 - \omega_3 M_2 &= 0, \\ \frac{dM_2}{ds} + \omega_3 M_1 - \omega_1 M_3 &= -P\gamma_3, \\ \frac{dM_3}{ds} + \omega_1 M_2 - \omega_2 M_1 &= P\gamma_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Подстановка замыкающих соотношений (2) в систему (3) приводит к появлению дополнительных перекрестных нелинейных слагаемых вида $(B_2 - B_1)\omega_1^0\omega_3$, характеризующих влияние исходной геометрии.

Изменение структуры дифференциального полинома. Для описания ориентации подвижного триэдра введем углы прецессии ψ , нутации ϑ и собственного вращения φ . Проекция вектора Дарбу на продольную ось стержня определяется кинематическим соотношением Эйлера:

$$\omega_1 = \frac{d\psi}{ds} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{ds}. \quad (4)$$

Анализ первых интегралов. Из первого уравнения системы Кирхгофа (3) следует существование интеграла для кручения:

$$B_1(s) \cdot (\omega_1 - \omega_1^0) = N = \text{const.} \quad (5)$$

Проекция моментов на вертикальную ось дает кинематический интеграл:

$$\frac{d\psi}{ds} \sin^2 \vartheta = \frac{K}{B_2} - \frac{N}{B_2} \cos \vartheta. \quad (6)$$

В классическом случае Лагранжа ($\omega_1^0 = 0$, $B_i = \text{const}$) подстановка указанных интегралов в аналог интеграла энергии для стержня дает полином третьей степени относительно $u = \cos \vartheta$ [1].

В случае естественно закрученного стержня, вследствие нелинейного вклада начальной закрутки в упругую энергию $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} B_1 (\omega_1 - \omega_1^0)^2$, разрешающее уравнение для упругой линии претерпевает качественное изменение структуры и преобразуется к полиному четвертой степени:

$$n^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = P_4(u) = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0. \quad (7)$$

Это делает невозможным применение стандартных эллиптических функций Якоби (sn, cn) и требует перехода к эллиптическим функциям Вейерштрасса $\wp(u)$ при построении точных аналитических решений [2].

Введение малого параметра подобия для жесткостей. Для аппроксимации изменения размеров поперечного сечения по длине стержня примем гипотезу геометрического подобия сечений. Линейный масштаб сечения изменяется по закону:

$$\lambda(s) = 1 + \mu \cdot \xi(s), \quad (8)$$

где $\mu \ll 1$ — безразмерный малый параметр подобия (интенсивность конусности), $\xi(s) = \frac{s}{L}$ — функция профиля бруса длины L .

Учитывая, что моменты инерции сечения пропорциональны четвертой степени его линейного размера (λ^4), жесткости упругого стержня раскладываются по формуле Тейлора:

$$B_i(s) = B_{i0} \cdot \lambda^4(s) \approx B_{i0} \left(1 + 4\mu \frac{s}{L} \right), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Уравнения первого приближения через углы Эйлера. Решение неавтономной системы ищется в виде регулярных асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} \vartheta(s) &= \vartheta_0(s) + \mu \vartheta_1(s) + \dots, & \psi(s) &= \psi_0(s) + \mu \psi_1(s) + \dots, \\ \varphi(s) &= \varphi_0(s) + \mu \varphi_1(s) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Система нулевого приближения ($\mu = 0$). Уравнения описывают регулярный стержень постоянного сечения с постоянной естественной закруткой $\omega_1^0 = \text{const}$:

$$B_{10}(\omega_1^{(0)} - \omega_1^0) = N_0, \quad \frac{d\psi_0}{ds} \sin^2 \vartheta_0 = \frac{K - N_0 \cos \vartheta_0}{B_{20}}. \quad (11)$$

Система первого приближения (Линеаризация по μ). Группировка членов при первой степени малого параметра μ приводит к уравнениям для поправок. Линеаризованное уравнение кручения:

$$B_{10} \left[\frac{d\psi_1}{ds} \cos \vartheta_0 - \frac{d\psi_0}{ds} \sin \vartheta_0 \cdot \vartheta_1 + \frac{d\varphi_1}{ds} \right] = -4 \frac{s}{L} N_0. \quad (12)$$

Уравнение угла поворота плоскости изгиба:

$$\frac{d\psi_1}{ds} \sin^2 \vartheta_0 + 2 \frac{d\psi_0}{ds} \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cdot \vartheta_1 = \frac{4s}{LB_{20}} [N_0 \cos \vartheta_0 - K] - \frac{N_0}{B_{20}} \vartheta_1 \sin \vartheta_0. \quad (13)$$

Разрешающее уравнение изгиба для угла наклона оси стержня. Исключая функции ψ_1 и φ_1 , задача сводится к линеаризованному дифференциальному уравнению второго порядка относительно поправки угла наклона $\vartheta_1(s)$ с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 \vartheta_1}{ds^2} + F_1(\vartheta_0, N_0, K) \cdot \vartheta_1 = 4 \frac{s}{L} \cdot F_2(\vartheta_0, N_0, K) + 4 \frac{1}{L} \cdot F_3 \left(\frac{d\vartheta_0}{ds} \right). \quad (14)$$

Правые части этих уравнений зависят от координаты s в явном виде и физически представляют собой распределенную нагрузку, обусловленную меняющимся поперечным сечением стержня.

Модификация уравнений под периодический закон естественной закрутки. Для учета дискретной нуклеотидной неоднородности цепочки ДНК (периодического чередования АТ- и ГЦ-пар) перейдем от гипотезы постоянной интенсивности естественного кручения $\omega_1^0 = \text{const}$ к гармоническому пространственному закону [5–11]:

$$\omega_1^0(s) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot \sin(\nu), \quad (\Delta\omega \ll \omega_0), \quad \nu = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (15)$$

где ω_0 — номинальная скорость кручения В-формы ДНК, $\Delta\omega$ — амплитуда геометро-последовательностного возмущения, а λ — пространственный период макромолекулы.

Введение соотношения (15) нарушает автономность системы уравнений Кирхгофа (3). Первый интеграл кручения (5) модифицируется и принимает вид динамического баланса:

$$M_1(s) = B_1(s) \cdot (\omega_1(s) - \omega_0 - \Delta\omega \sin(\nu)) = N(s) \neq \text{const}. \quad (16)$$

Вследствие этого, разрешающий дифференциальный полином четвертой степени (7) для стационарных состояний при постоянстве поперечного сечения ($\mu = 0$) приобретает переменные в явном виде коэффициенты $a_i = a_i(s)$:

$$n^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = P_4(u, s) = a_4(s)u^4 + a_3(s)u^3 + a_2(s)u^2 + a_1(s)u + a_0(s). \quad (17)$$

Линеаризация по двум малым параметрам и явный вид функций возмущения. Для совместного анализа влияния слабой конусности $\mu \ll 1$ и периодической неравномерности кручения ДНК введем второй безразмерный малый параметр $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$. Искомые угловые функции ориентации триэдра раскладываются в двухпараметрические асимптотические ряды:

$$\begin{aligned}\vartheta(s) &= \vartheta_0(s) + \mu\vartheta_{10}(s) + \varepsilon\vartheta_{01}(s) + O(\mu^2, \varepsilon^2), \\ \psi(s) &= \psi_0(s) + \mu\psi_{10}(s) + \varepsilon\psi_{01}(s) + O(\mu^2, \varepsilon^2).\end{aligned}\tag{18}$$

Подстановка рядов (18) в систему уравнений Кирхгофа (3) при фиксации регулярного сечения ($\mu = 0$) и последующее исключение функций прецессии ψ_{01} и собственного вращения φ_{01} приводит к замкнутому линеаризованному уравнению второго порядка относительно возмущения угла нутации $\vartheta_{01}(s)$:

$$\frac{d^2\vartheta_{01}}{ds^2} + F_1(\vartheta_0, N_0, K) \cdot \vartheta_{01} = \varepsilon \cdot \sin(\nu) \cdot F_4(\vartheta_0, N_0, K) + \varepsilon \cdot \nu \cdot \cos(\nu) \cdot F_5\left(\vartheta_0, \frac{d\vartheta_0}{ds}\right). \tag{19}$$

Явный вид операторных коэффициентов невозмущенного состояния F_1 , а также функций внешнего напряжения стержня, моделирующего молекулу F_4 и F_5 имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}F_1(\vartheta_0, N_0, K) &= \left(\frac{K - N_0 \cos \vartheta_0}{B_{20} \sin \vartheta_0}\right)^2 (1 + 2 \cos^2 \vartheta_0) - \\ &\quad - \frac{2N_0(K - N_0 \cos \vartheta_0)}{B_{20}^2 \sin^2 \vartheta_0} - \frac{P \cos \vartheta_0}{B_{20}},\end{aligned}\tag{20}$$

$$F_4(\vartheta_0, N_0, K) = \frac{\omega_0(B_{20} - B_{10})}{B_{20}^2 \sin \vartheta_0} [2(K - N_0 \cos \vartheta_0) \cot \vartheta_0 - N_0 \sin \vartheta_0], \tag{21}$$

$$F_5\left(\vartheta_0, \frac{d\vartheta_0}{ds}\right) = \frac{B_{10}\omega_0}{B_{20}} \cdot \frac{d\vartheta_0}{ds}. \tag{22}$$

Правая часть уравнения (19) физически интерпретируется как распределенная геометрическая сила, обусловленная локальной перекрученностью пар оснований упругой цепочки.

Анализ параметрического резонанса и сверхспирализации. Уравнение (19) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. В окрестности точек, где частота структурной неоднородности ДНК $\nu = \frac{2\pi}{\lambda}$ соизмерима с собственной частотой пространственных колебаний невозмущенного стержня $\Omega_0 = \sqrt{F_1}$, имеет место пространственный параметрический резонанс.

В этих зонах даже при малых значениях амплитуды ε поправка $\vartheta_{01}(s)$ экспоненциально нарастает вдоль дуговой координаты. Механически данный процесс соответствует явлению суперскручивания — спонтанному переходу спирали ДНК в макроскопические петли и плектонемы, что критически важно для моделирования процессов транскрипции и упаковки хроматина в клетке.

Выводы. Методом малого параметра решена задача о деформации упругого стержня с переменными по жесткостям при наличии естественного кручения. Предложенная модель позволяет комплексно исследовать совместное влияние начальной винтовой геометрии (ω_1^0), конусности (μ) и высокочастотной периодической нуклеотидной структуры на формы пространственного равновесия макромолекул нуклеиновых кислот, представляемых в виде упругого стержня. Линеаризованная система первого приближения может быть использована для анализа спектра критических нагрузок, прогнозирования эффектов параметрического резонанса биологических макромолекул и построения сложных бифуркационных диаграмм.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБНУ ИПММ (тема № FREM-2026-0005).

Список литературы

1. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин. – К.: Наук. думка, 1979. – 216 с.
2. *Елисеев В.В.* Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня / В.В. Елисеев // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1977. – № 3. – С. 145–150.
3. *Понятовский В.В.* Асимптотические разложения в линейной теории плоских стержней / В.В. Понятовский // Пробл. механики твёрдого тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 341–351.
4. *Лурье А.И.* Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
5. *Панин В.Е.* Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / В.Е. Панин. – Новосибирск: Наука; СО РАН, 1995. – Т. 1. – 297 с.; Т. 2. – 317 с.
6. *Кривцов А.М.* Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов / А.М. Кривцов, Н.Ф. Морозов // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 825–827.
7. *Mescheryakov Y.I.* Multiscale kinetics of microstructure and strain-rate dependence of materials / Y.I. Mescheryakov, A.K. Divakov // DYMAT J. – 1994. – № 4. – Р. 271–287.
8. *Рит М.* Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета / М. Рит. – М.-Ижевск: RCD, 2005. – 159 с.
9. *Кравчук А.С.* О моделях и решении задач механики наноконтакта / А.С. Кравчук // Математическое моделирование систем и процессов. – 2007. – № 15. – С. 123–141.
10. *Фомин В.М.* Молекулярно-динамические исследования термомеханических свойств наноструктур / В.М. Фомин, И.Ф. Головнев // Механика — от дискретного к сплошному. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – С. 8–87.
11. *Илюхин А.А.* Математическая модель замкнутых молекул ДНК / А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко // Изв. Саратов. ун-та. – 2008. – Т. 8. – Сер. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 3. – С. 32–40.
12. *Marko J.F.* Statistical mechanics of supercoiling of DNA / J.F. Marko, E.D. Siggia // Science. – 1995. – Vol. 268. – P. 1501–1504.

D.V. Timoshenko, A.A. Ilyukhin

Solution to the deformation problem of a naturally twisted rod with variable stiffness.

The problem of deformation of an elastic rod with variable stiffness along its length and having a natural twist is solved. By introducing two small parameters — the similarity coefficient of cross-sections and the magnitude of the natural twist — a linearized system of first-approximation equations is constructed. At the same time, the periodic nature of the rod's natural twist along its length is specified, which is dictated by the specifics of the considered application: modeling the behavior of nucleic acid macromolecules possessing this property.

Keywords: *naturally twisted rod, variable stiffness, Kirchhoff equations, small parameter method, DNA model, parametric resonance, supercoiling.*

References

1. Ilyukhin, A.A. (1979). *Spatial problems of the nonlinear theory of elastic rods*. Kiev: Naukova Dumka. 216 p. (In Russian)
2. Eliseev, V.V. (1977). [Application of the asymptotic method to the problem of equilibrium of a curvilinear rod]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela = Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, (3), 145–150. (In Russian)
3. Ponyatovskiy, V.V. (1970). [Asymptotic expansions in the linear theory of plane rods]. In *Problemy mekhaniki tverdogo tela = Problems of solid mechanics*. Leningrad: Sudostroenie, pp. 341–351 (In Russian)
4. Lurie, A.I. (1970). *Theory of elasticity*. Moscow: Nauka. 939 p. (In Russian)
5. Panin, V.E. (1995). *Physical mesomechanics and computer-aided materials design*. Novosibirsk: Nauka; Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Vol. 1. 297 p.; Vol. 2. 317 p. (In Russian)
6. Krivtsov, A.M. & Morozov, N.F. (2001). [Anomalies of the mechanical characteristics of nano-sized objects]. *Doklady Rossiyskoy Akademii Nauk = Reports of the Russian Academy of Sciences*, 381(3), 825–827. (In Russian)
7. Mescheryakov, Y.I. & Divakov, A.K. (1994). Multiscale kinetics of microstructure and strain-rate dependence of materials. *DYMAT Journal*, (4), 271–287.
8. Ritt, M. (2005). *Nanoengineering in science and technology: Introduction to the world of nanocalculation*. Moscow–Izhevsk: RCD. 159 p. (In Russian)
9. Kravchuk, A.S. (2007). [On models and solutions of problems in nanocontact mechanics]. *Matematicheskoe Modelirovanie Sistem i Protessov = Mathematical modeling of systems and processes*, (15), 123–141. (In Russian)
10. Fomin, V.M. & Golovnev, I.F. (2008). [Molecular-dynamics studies of thermomechanical properties of nanostructures]. In *Mekhanika – ot diskretnogo k sploshnomu = Mechanics: From discrete to continuum*. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, pp. 8–87. (In Russian)
11. Ilyukhin, A.A. & Timoshenko, D.V. (2008). Mathematical Model of the Closed Molecules of DNA. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 8(3), 32–40. (In Russian)
12. Marko, J.F. & Siggia, E.D. (1995). Statistical mechanics of supercoiling of DNA. *Science*, (268), 1501–1504.

Поступила в редакцию / Original submitted 29.05.2026.

Доработана / Revision submitted 01.06.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-19-28

EDN:GKNAXJ



©2026. А.А. Глухов

**ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ВИХРЕВОГО ТИПА
ДЛЯ МОДЕЛЕЙ СТАЦИОНАРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-
НЕОДНОРОДНЫХ ПЛИТ**

Дано решение задачи построения базисной системы однородных решений вихревого типа для модели стационарных колебаний трансверсально-изотропных функционально-градиентных плит с однофакторной экспоненциальной неоднородностью по толщине. Решение получено с использованием полуобратного метода. Проведен численный анализ корней дисперсионного уравнения для плиты из керамики RZT-4 со свободными от напряжений гранями, изучено влияние экспоненциальной неоднородности на топологию корней дисперсионного спектра.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная функционально-градиентная среда, однофакторная экспоненциальная неоднородность, базисная система однородных решений вихревого типа, трансцендентные дисперсионные уравнения.

Введение. Современные запросы фундаментальной и прикладной науки, практики инженерного моделирования требуют повышения меры адекватности и точности результатов теоретических исследований процессов волнового и колебательного деформирования для создаваемых на базе аддитивных технологий новых классов функционально-градиентных анизотропных материалов. В связи с потребностями высокотехнологичных научно-промышленных отраслей, необходимо дальнейшее совершенствование подходов к комплексному учету усложненных физико-механических свойств инновационных материалов [1, 2]. Одним из решений проблемы может быть дальнейшее развитие различных модификаций численно-аналитического метода однородных решений, базирующегося на получении и использовании точных аналитических базисных решений соответствующих уравнений волнового деформирования [3–6].

Глухов Антон Александрович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com, ORCID: 0009-0002-5536-4410.

Glukhov Anton Alexandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

Одним из наиболее эффективных вариантов задания свойств неоднородности анизотропных функционально-градиентных структур является использование при их описании одной или нескольких экспоненциальных функций.

В работах [7, 8] представлены результаты исследований для моделей распространения локализованных и нормальных упругих волн в анизотропных функционально-градиентных телах с различными вариантами разнофакторной неоднородности экспоненциального типа. В этих исследованиях для интегрирования амплитудных уравнений и систем уравнений волнового деформирования анизотропной экспоненциально-неоднородной среды был использован метод Эйлера, разработаны новые модификации аналитико-числовых методик последовательных приближений и методик интегрирования с использованием степенных рядов, при описании неоднородности по толщине толстых плит использованы экспоненциальные функций.

В данной работе построены базисные системы однородных решений вихревого типа для моделей стационарных колебаний трансверсально-изотропных функционально-градиентных свободных либо закрепленных по граням плит с однофакторной экспоненциальной неоднородностью по толщине. Решения получены с использованием полуобратного метода. Численно исследованы корни дисперсионного уравнения для плиты из керамики RZT-4 со свободными от напряжений гранями, изучено влияние экспоненциальной неоднородности на топологию корней дисперсионного спектра.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим трансверсально-изотропное функционально-градиентное упругое тело в форме плиты произвольной толщины h и срединной плоскости S , занимающей в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ область $V = \{(x_1, x_2) \in S, 0 \leq x_3 \leq h\}$, с плоскими гранями $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \in S, x_3 = 0\}$ и $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in S, x_3 = h\}$ (рис.1).

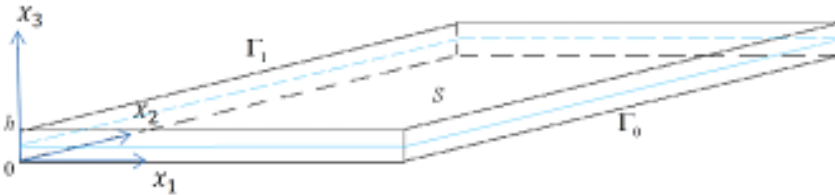


Рис. 1.

Основные соотношения модели связанного пространственного стационарного динамического упругого деформирования с циклической частотой ω , определяемые законом Гука для трансверсально-изотропной среды с учетом функционально-градиентной структуры рассматриваемой плиты имеют вид [5]

$$\sigma_{11} = c_{11}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{13}\partial_3 u_3,$$

$$\sigma_{22} = c_{12}\partial_1 u_1 + c_{11}\partial_2 u_2 + c_{13}\partial_3 u_3,$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33} &= c_{13}\partial_1 u_1 + c_{13}\partial_2 u_2 + c_{33}\partial_3 u_3, \\
 \sigma_{23} &= c_{44}\partial_2 u_3 + c_{44}\partial_3 u_2, \\
 \sigma_{13} &= c_{44}\partial_1 u_3 + c_{44}\partial_3 u_1, \\
 \sigma_{12} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где σ_{ij} – элементы тензора напряжений; $c_{ij} = c_{ij0} \exp(\lambda x_3)$, $\rho = \rho_0 \exp(\lambda x_3)$ – элементы матрицы упругих постоянных и плотность материала соответственно; $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Тогда система уравнений динамики среды

$$\begin{aligned}
 \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
 \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\
 \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_3 \sigma_{33} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

относительно амплитудных составляющих $u_{j0}(x_1, x_2, x_3)$ в представлениях динамических упругих перемещений $u_j = u_{j0}(x_1, x_2, x_3) \exp(-i\omega t)$ с учетом определяющих соотношений (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 &\left(c_{11}\partial_1^2 + \frac{c_{11} - c_{12}}{2}\partial_2^2 + \partial_3 (c_{44}\partial_3) + \rho\omega^2 \right) u_{10} + \left(\frac{c_{11} + c_{12}}{2}\partial_1\partial_2 \right) u_{20} + \\
 &\quad + (c_{13}\partial_1\partial_3 + \partial_3 (c_{44}\partial_1)) u_{30} = 0, \\
 &\left(\frac{c_{11} + c_{12}}{2}\partial_1\partial_2 \right) u_{10} + \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + \partial_3 (c_{44}\partial_3) + \rho\omega^2 \right) u_{20} + \\
 &\quad + (c_{13}\partial_2\partial_3 + \partial_3 (c_{44}\partial_2)) u_{30} = 0, \\
 &(c_{44}\partial_1\partial_3 + \partial_3 (c_{13}\partial_1)) u_{10} + (c_{44}\partial_2\partial_3 + \partial_3 (c_{13}\partial_2)) u_{20} + \\
 &\quad + (c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + \partial_3 (c_{33}\partial_3) + \rho\omega^2) u_{30} = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

На плоских гранях плиты Γ_0 и Γ_1 имеют место краевые однородные условия в смещениях

$$u_j(0) = 0, \quad u_j(h) = 0 \quad (j = \overline{1, 3}) \tag{3}$$

для случая их жесткого закрепления, а также в перемещениях

$$\sigma_{3j}(0) = 0, \quad \sigma_{3j}(h) = 0 \quad (j = \overline{1, 3}) \tag{4}$$

для случая свободной от усилий поверхности. Будем предполагать, что на форму и порядок связности срединной плоскости плиты S в процессе построения элементарных базисных однородных решений ограничений нет.

Для получения базисных элементарных однородных решений применим полуобратный метод, в рамках которого компоненты вектора перемещений представим суммой вихревого и потенциального решений. Для амплитудных составляющих $u_{j0}(x_1, x_2, x_3)$ введем следующие представления через базисные однородные решения вихревого типа [3]

$$\begin{aligned} u_{10}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \phi(x_1, x_2) \psi(x_3), \\ u_{20}(x_1, x_2, x_3) &= -\partial_1 \phi(x_1, x_2) \psi(x_3), \\ u_{30}(x_1, x_2, x_3) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых функция ϕ – решение эллиптического уравнения Гельмгольца

$$D^2 \phi(x_1, x_2) + \beta^2 \phi(x_1, x_2) = 0; \quad (6)$$

β – спектральный параметр; $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ – оператор Лапласа.

Подставив представления (5) в систему уравнений (2), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно функций ϕ и ψ :

$$\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \psi \partial_1^2 \partial_2 \phi + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \psi \partial_2^3 \phi + (\lambda c_{44} \partial_3 \psi + c_{44} \partial_3^2 \psi) \partial_2 \phi + \rho \omega^2 \psi \partial_2 \varphi = 0,$$

$$\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \psi \partial_1 \partial_2^2 \phi + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \psi \partial_1^3 \phi + (\lambda c_{44} \partial_3 \psi + c_{44} \partial_3^2 \psi) \partial_1 \phi + \rho \omega^2 \psi \partial_1 \varphi = 0,$$

$$c_{44} \partial_3 \psi \partial_1 \partial_2 \phi + \partial_1 \partial_2 \phi (\lambda c_{13} \psi + c_{13} \partial_3 \psi) - c_{44} \partial_3 \psi \partial_1 \partial_2 \phi - \partial_2 \partial_1 \phi (\lambda c_{13} \psi + c_{13} \partial_3 \psi) = 0.$$

В силу непрерывности функции ϕ и ее смешанных производных последнее из приведенных равенств удовлетворяется тождественно, подстановкой соотношения (6) в первые два уравнения можно показать, что имеет место всего одно уравнение для функции ψ , аргументом которой является лишь поперечная координата x_3 . Полученное таким образом дифференциальное уравнение имеет вид

$$c_{44} \partial_3^2 \psi + \lambda c_{44} \partial_3 \psi + (\rho \omega^2 - \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \beta^2) \psi = 0.$$

Введем обозначения $\partial_3^2 \psi = \psi''$ и $\partial_3 \psi = \psi'$, сократим каждое слагаемое на экспоненциальный множитель $\exp(\lambda x_3)$, входящий в представления модулей упругости и плотности, и примем обозначения для коэффициентов соответствующего дифференциального уравнения

$$a = c_{440}, \quad b = \lambda c_{440}, \quad c = \rho_0 \omega^2 - \frac{c_{110} - c_{120}}{2} \beta^2.$$

В результате получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a \psi'' + b \psi' + c \psi = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) методом Эйлера имеет вид

$$\psi = C_1 \exp(\delta_1 x_3) + C_2 \exp(\delta_2 x_3), \quad (8)$$

в котором

$$\delta_j = \frac{-b + (-1)^{j+1} \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (j = \overline{1, 2}).$$

Трансцендентное дисперсионное уравнение относительно множества значений спектрального параметра β базисных однородных решений вихревого типа в частном случае плиты с закрепленными гранями получаем в результате подстановки решения (8) в краевые условия (3) с учетом определяющих соотношений (1). Полученные в результате подстановки соотношения для напряжений:

$$\sigma_{13} = \partial_2 \phi (C_1 \exp(\delta_1 x_3) + C_2 \exp(\delta_2 x_3)),$$

$$\sigma_{23} = -\partial_1 \phi (C_1 \exp(\delta_1 x_3) + C_2 \exp(\delta_2 x_3)),$$

$$\sigma_{33} = C_1 \exp(\delta_1 x_3) + C_2 \exp(\delta_2 x_3),$$

с учетом того что $\partial_1 \phi$ и $\partial_2 \phi$ не могут быть равными нулю, при удовлетворении краевых условий на плоских гранях приводят к системе алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 \exp(\delta_1 h) + C_2 \exp(\delta_2 h) = 0. \quad (9)$$

Система алгебраических уравнений (9) будет иметь нетривиальные решения в том случае, если определитель ее матрицы будет равен 0. На основании этого утверждения получим основное дисперсионное соотношение $F(\omega, \beta) = 0$:

$$\exp(\delta_2 h) - \exp(\delta_1 h) = 0. \quad (10)$$

Трансцендентное дисперсионное уравнение относительно множества значений спектрального параметра β базисных однородных решений вихревого типа в частном случае плиты со свободными от усилий гранями получаем в результате подстановки решения (8) в краевые условия (4) с учетом определяющих соотношений (1). Полученные в результате подстановки соотношения для напряжений:

$$\sigma_{13} = c_{44} \partial_2 \phi (C_1 \delta_1 \exp(\delta_1 x_3) + C_2 \delta_2 \exp(\delta_2 x_3)),$$

$$\sigma_{23} = -c_{44} \partial_1 \phi (C_1 \delta_1 \exp(\delta_1 x_3) + C_2 \delta_2 \exp(\delta_2 x_3)),$$

$$\sigma_{33} \equiv 0,$$

с учетом того что $\partial_1 \phi$ и $\partial_2 \phi$ не могут быть равными нулю, при удовлетворении краевых условий на плоских гранях приводят к системе алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$C_1 \delta_1 + C_2 \delta_2 = 0,$$

$$C_1 \delta_1 \exp(\delta_1 h) + C_2 \delta_2 \exp(\delta_2 h) = 0. \quad (11)$$

Система алгебраических уравнений (11) будет иметь нетривиальные решения в том случае, если определитель ее матрицы будет равен 0. На основании этого утверждения получим основное дисперсионное соотношение $F(\omega, \beta) = 0$:

$$\delta_1 \delta_2 (\exp(\delta_2 h) - \exp(\delta_1 h)) = 0. \quad (12)$$

Корни β_m трансцендентных дисперсионных уравнений (10) и (12) для соответствующих частот будем находить численно, а отвечающие их значениям базисные частные решения вихревого типа запишем в форме

$$\begin{aligned} u_{10m}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \phi_m(x_1, x_2) (\exp(\delta_{2m} h) \exp(\delta_{1m} x_3) - \exp(\delta_{1m} h) \exp(\delta_{2m} x_3)), \\ u_{20m}(x_1, x_2, x_3) &= -\partial_1 \phi_m(x_1, x_2) (\exp(\delta_{2m} h) \exp(\delta_{1m} x_3) - \exp(\delta_{1m} h) \exp(\delta_{2m} x_3)), \\ u_{30m}(x_1, x_2, x_3) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (13)$$

для случая плиты с закрепленными плоскими гранями и в форме:

$$\begin{aligned} u_{10m}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \partial_2 \phi_m(x_1, x_2) (\delta_{2m} \exp(\delta_{2m} h) \exp(\delta_{1m} x_3) - \delta_{1m} \exp(\delta_{1m} h) \exp(\delta_{2m} x_3)), \\ u_{20m}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\partial_1 \phi_m(x_1, x_2) (\delta_{2m} \exp(\delta_{2m} h) \exp(\delta_{1m} x_3) - \delta_{1m} \exp(\delta_{1m} h) \exp(\delta_{2m} x_3)), \\ u_{30m}(x_1, x_2, x_3) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (14)$$

для плиты со свободными от усилий плоскими гранями. Функция ϕ_m для соотношений (13) и (14) выбирается как решение эллиптического уравнения (6) для конкретного значения β_m .

Описание результатов численных исследований. Численные исследования дисперсионного уравнения (12) были проведены для плиты из широко используемой в мощных ультразвуковых преобразователях керамики PZT-4, для которой физико-механические параметры такие [5]

$$\begin{aligned} c_{110} &= 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad c_{330} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad c_{440} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ c_{120} &= 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad c_{130} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \rho_0 = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \end{aligned} \quad (15)$$

В описываемых ниже результатах расчетов приведенный частотный параметр $\tilde{\omega}$ выражается через параметр круговой частоты волны ω рад/с и имеет величину $\tilde{\omega} = \omega h_*(\rho_*/c_*)$ после введения нормирующих параметров $h_* = 0,01$ м, $c_* = 10^{10}$ Па, $\rho_* = 10^3$ кг/м³ для плиты толщиной $h = h_*$. Целью расчетов было получение конкретных корней дисперсионного уравнения, по которым ведется суммирование в формулах (14), с возможностью в дальнейшем использовать эти

разложения при решении конкретных задач. Также были исследованы тенденции поведения дисперсионных кривых при наращивании параметра неоднородности плиты. В частности было установлено постепенное увеличение частоты запираания для трех нижних мод спектра (1, 2 и 3 на графиках соответственно), попадающих в исследуемый диапазон частот. На основании этого можно предположить распространение данной тенденции по всему спектру нормальных волн. Результаты численных исследований в виде диаграмм дисперсионных кривых рассчитанных при параметрах неоднородности $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = 5$ приведены соответственно на рисунке 2, рисунке 3 и рисунке 4.

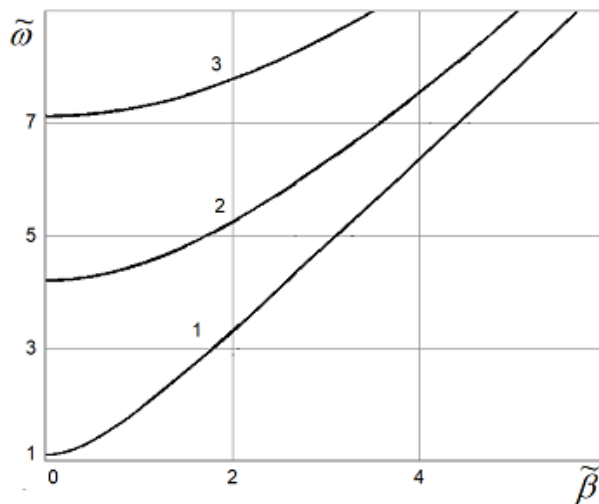


Рис. 2.

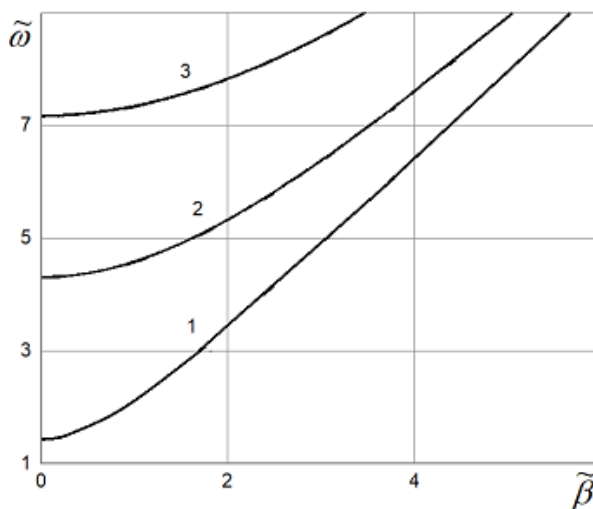


Рис. 3.

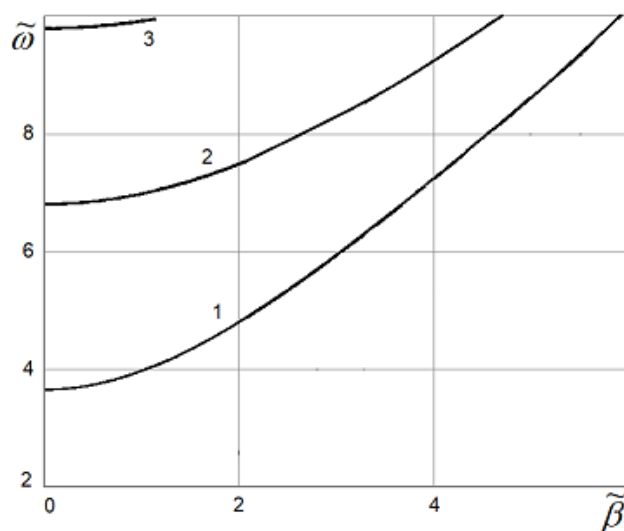


Рис. 4.

Заключение. Таким образом, в работе была решена задача получения аналитических представлений для элементарных базисных однородных решений вихревого типа в модели упругого пространственного стационарного динамического деформирования функционально-градиентных трансверсально-изотропных плит с однофакторной экспоненциальной неоднородностью физико-механических свойств по толщине. Для частных случаев плиты с закрепленными и свободными плоскими гранями дано описание дисперсионных уравнений относительно значений спектрального параметра, определяющего конкретные элементарные базисные однородные решения вихревого типа. Были проведены численные исследования для плиты со свободными от напряжений гранями, предполагающие численный анализ влияния экспоненциальной неоднородности на топологию спектра нормальных волн.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 1 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 227–260. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06.
2. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 2 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 36–86. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.036_086.03
3. Лурье С.А. Обобщенный метод однородных решений в прикладных задачах теории плит и оболочек с оператором разрешающего уравнения порядка $2n$ / С.А. Лурье // Механика композиционных материалов и конструкций. РАН. – 1996. – Т. 2, № 3. – С. 58–70.

4. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок / В.К. Прокопов // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикладной механике. – М.: Наука, 1966. – С. 253–259.
5. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.
6. Алтухов Е.В. Однородные решения краевых задач трехмерной теории упругости изотропных тел. Однородные плиты / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вестн. ДонНУ. Сер. А.: Естественные науки. – 2017. – № 3. – С. 34–79.
7. Глухов А.А. Методика анализа проблемы распространения волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с различными законами экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 51–60. – doi:10.24412/0136-4545-2024-1-51-60. – EDN:PSXXPV.
8. Глухов А.А. Дисперсионные соотношения для сдвиговых волн в анизотропном функционально-градиентном слое с двухфакторной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам / А.А. Глухов // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2024. – № 4. – С. 5–10. – DOI: 10.5281/zenodo.14138063. – EDN: VREMUM.

A.A. Glukhov

Construction of homogeneous vortex-type solutions for models of stationary dynamic deformation of transversely isotropic functionally graded exponentially inhomogeneous plates.

A solution to the problem of constructing a basis system of homogeneous vortex-type solutions for a model of stationary oscillations of transversely isotropic functionally graded slabs with single-factor exponential thickness heterogeneity is presented. The solution is obtained using a semi-inverse method. A numerical analysis of the roots of the dispersion equation for an RZT-4 ceramic slab with stress-free faces is performed, and the influence of exponential heterogeneity on the topology of the dispersion spectrum roots is studied.

Keywords: transversely isotropic functional-gradient medium, one-factor exponential heterogeneity, basic system of homogeneous solutions of vortex type, transcendental dispersion equations.

References

1. Zhavoronok, S.I. (2021). Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (a review). Part I. *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii = Mechanics of composite materials and structures*, 27(2), 227–260. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227 _ 260.06 (In Russian)
2. Zhavoronok, S.I. (2022). Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (a review). Part II. *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii = Mechanics of composite materials and structures*, 28(1), 36–86. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.036 _ 086.03 (In Russian)
3. Lurie, S.A. (1996). [Generalized method of homogeneous solutions in applied problems of plate and shell theory with a resolving equation operator of order $2n$]. *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii = Mechanics of composite materials and structures*, 2(3), 58–70. (In Russian)
4. Prokopov, V.K. (1966). [Homogeneous solutions of elasticity theory and their application to the theory of thin plates]. In *Proceedings of the 2nd All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics*. Moscow: Nauka, pp. 253–259. (In Russian)
5. Kosmodamianskii, A.S. & Storozhev, V.I. (1985). *Dynamic problems of elasticity theory for anisotropic media*. Kyiv: Naukova Dumka. 176 p. (In Russian)
6. Altukhov, E.V. & Fomenko, M.V. (2017). Homogeneous solutions of boundary-value problems of the three-dimensional elasticity theory of isotropic bodies. Homogeneous plates. *Bulletin of*

Donetsk National University. Series A: Natural Sciences, 3, 34–79. (In Russian)

7. Glukhov, A.A., Storozhev, V.I. & Storozhev, S.V. (2024). Analysis method of the problem of shear wave propagation in an anisotropic functional gradient layer with different laws of exponential heterogeneity for each physical and mechanical characteristic. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1(86), 51–60. DOI: 10.24412/0136-4545-2024-1-51-60. (In Russian)
8. Glukhov, A.A. (2024). Dispersion relations for shear waves in an anisotropic functional gradient layer with two-factor exponential transverse inhomogeneity in mechanical characteristics. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 4, 2–10. DOI: 10.5281/zenodo.14138063. (In Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 05.05.2026.

Доработана / Revision submitted 05.06.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-29-41

EDN:KNJVVU



©2026. Е.С. Глушанков

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПЛАСТИНКЕ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

Решена задача определения термоэлектромагнитоупругого состояния конечной многосвязной пластинки под действием внутренних сосредоточенных источников тепла в условиях конвективного теплообмена с внешней средой через границу. При этом используются комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости, разложения голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворение граничным условиям методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований, с помощью которых установлены закономерности влияния геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также места расположения источников тепла на значения и концентрацию напряжений в пластинке.

Ключевые слова: температурные напряжения, пьезопластинка, конвективный теплообмен, сосредоточенные источники тепла, комплексные потенциалы.

Введение. Во многих областях науки и техники в качестве элементов конструкций широко используются тонкие пластинки из пьезоматериалов с концентраторами напряжений типа отверстий и трещин. Под действием различных тепловых, механических и электромагнитных полей в них могут возникать значительные концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций.

Для определения напряженно-деформированного состояния таких многосвязных пластин к настоящему времени разработаны различные методы как в случае механических воздействий [1–4], так и в случае воздействий температурных полей [5, 6].

В данной работе решена задача термоэлектромагнитоупругости для конечной многосвязной пластинки из пьезоматериала, во внутренних точках которой действуют сосредоточенные источники тепла, когда на контурах имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Задача решена с использованием комплексных потенциалов, разложений функций в ряды Лорана и в степенные

Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8306-395X.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

ряды, удовлетворения граничным условиям методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для случаев круговой и кольцевой пластинок. Описаны закономерности влияния геометрических характеристик пластинок, свойств материала пластинки, характеристик конвективного теплообмена, распределения источников тепла на значения напряжений в пластинке.

Постановка задачи. Рассмотрим конечную многосвязную пластинку из пьезоматериала, занимающую область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Будем полагать, что внешний контур L_0 полностью лежит внутри формального эллиптического контура L_0^+ . Центры эллиптических контуров L_0^+ и L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) расположены в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$), полуоси этих контуров равны a_l и b_l , углы поворота – φ_l . На контурах пластинки имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами h_l с внешними средами, температуры которых равны $\mathfrak{T}_l$. Контур не подкреплён либо жестко подкреплён. Во внутренних точках пластинки $O_r^0(x_{0r}^0, y_{0r}^0)$ ($r = \overline{1, \mathcal{R}}$) действуют сосредоточенные источники тепла интенсивности q_r^0 .

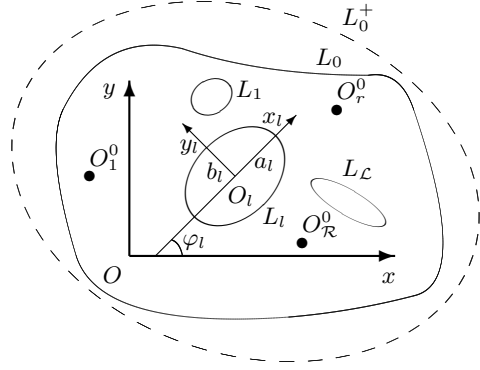


Рис. 1

Будем считать, что задача дана в несвязанной постановке. Тогда решение задачи термоэлектромагнитоупругости сводится к последовательному решению сперва задачи теплопроводности, а затем – собственно задачи термоэлектромагнитоупругости. Для решения указанных задач будет использовать теорию функций комплексной переменной.

В этом случае решение задачи теплопроводности сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$ из граничных условий этой задачи. Обобщенная комплексная переменная z_5 определяется аффинным преобразованием вида

$$z_5 = x + \mu_5 y. \quad (1)$$

Здесь μ_5 – корень характеристического уравнения теплопроводности [5]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (2)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки. После определения функции $F_5(z_5)$ значения основных характеристик температурного поля (относительной температуры T , плотностей потока тепла q_x, q_y) в точках пластинки можно определять по формулам [5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5), \quad (3)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_5, -1) F_5'(z_5), \quad (4)$$

где $\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$.

А решение задачи термоэлектромагнитоупругости сводится к определению комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из граничных условий этой задачи. Обобщенные комплексные переменные z_k ($k = \overline{1, 4}$) определяются аффинными преобразованиями вида

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (5)$$

Здесь μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корни характеристического уравнения электромагнитоупругости [5]

$$l_8(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} – коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости материала. После определения функций $\Phi_k(z_k)$ значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , индукций электрического поля D_x , D_y , индукций магнитного поля B_x , B_y , напряженностей электрического поля E_x , E_y , напряженностей магнитного поля H_x , H_y , перемещений u , v , потенциала электрического поля φ , потенциала магнитного поля ψ) в точках пластинки можно определять по формулам [5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (7)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (8)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (9)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{l_8(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2, \quad l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{21} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k + \left(p_{21} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

α_i – коэффициенты теплового расширения материала; t_i и m_i – пирозлектрические и пирромагнитные модули материала; δ_{ij} – символ Кронекера.

Построение комплексных потенциалов. Функции $F_5(z_5)$ и $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) определены в областях S_5 и S_k ($k = \overline{1, 4}$), получаемых из области S аффинными преобразованиями (1) и (5) соответственно. В общем случае они имеют вид [5, 7]

$$F_5(z_5) = N_5(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\text{sgn } l}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь

$$N_5(z_5) = \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} D_{5r}^0 w_{5r}^0(z_5);$$

$D_{5r}^0 = -q_r^0/4\pi\kappa$; $w_{5r}^0(z_5) = \ln(z_5 - z_{5r}^0)$; $z_{5r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_5 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (1) точкам O_r^0 ; D_{5l} – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$; z_{5l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (1) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{5ln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности;

$$\varphi_{50n}(z_5) = \left(\frac{z_5 - z_{50}}{R_{50}} \right)^n; \quad \varphi_{5ln}(z_5) = \frac{1}{\zeta_{5l}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{5l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) w_{kr}^0(z_k) \quad (k = \overline{1, 4});$$

$A_{kl}, B_{kl}, A_{kr}^0, B_{kr}^0$ ($k = \overline{1, 4}$) – постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = -2\text{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i A_{5l},$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = -2\text{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i B_{5l},$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kr}^0 = -2\text{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i A_{5r}^0,$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kr}^0 = -2\text{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i B_{5r}^0;$$

$A_{5l} = r_5 D_{5l}$; $B_{5l} = r_5 (c_{5l1} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$; $A_{5r}^0 = r_5 D_{5r}^0$; $B_{5r}^0 = -r_5 D_{5r}^0 z_{5r}^0$; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (5) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $w_{kr}^0(z_k) = \ln(z_k - z_{kr}^0)$; $z_{5r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_5 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (5) точкам O_r^0 ; a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости;

$$\varphi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n; \quad \varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy –

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned}$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловой параметр уравнения эллипса.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 5}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию задачи теплопроводности [6]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_5(\tau_5) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = h_l \mathfrak{T}_l, \quad (14)$$

где τ_5 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (1); $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$, s – дуга контура пластинки.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости [5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) &= \\ &= \left(\frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau), \frac{df_{l3}}{ds}(\tau), \frac{df_{l4}}{ds}(\tau) \right) - \\ &- 2 \operatorname{Re} (d_{5l1}, d_{5l2}, d_{5l3}, d_{5l4}) \delta_{5,s}(\tau_5) r_5 F_5(\tau_5), \end{aligned} \quad (15)$$

где τ_k ($k = \overline{1, 4}$) – точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (5); τ – аффикс граничной точки; $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$. Для неподкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) = (u_l(\tau), v_l(\tau), c_{l3}, c_{l4});$$

c_{lp} – неизвестные постоянные интегрирования; $u_l(\tau), v_l(\tau)$ – заданные на границе значения перемещений.

Определение неизвестных постоянных. В общем случае неизвестные постоянные $c_5, D_{5l}, c_{5ln}, a_{kln}$, входящие в функции (11) и (12), следует определять из граничных условий (14) и (15) с помощью метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_j ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$) выбираем систему точек $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_j}$), в которых следует минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (11) в граничное условие (14), для определения неизвестных постоянных c_5, D_{5l}, c_{5ln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_j w_{5l}(\tau_{5jm}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) w'_{5l}(\tau_{5jm})) D_{5l} +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} (h_j \varphi_{5ln}(\tau_{5jm}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) \varphi'_{5ln}(\tau_{5jm})) c_{5ln} = \quad (16)$$

$$= h_j \mathfrak{T}_l - 2 \operatorname{Re} (h_j N_5(\tau_{5jm}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) N'_5(\tau_{5jm}))$$

$$(j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}),$$

где $\tau_{5jm} = x_{jm} + \mu_5 y_{jm}$. После решения системы (16) с использованием метода сингулярных разложений [9, 10] постоянные D_{5l}, c_{5ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции (11) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик температурного поля по формулам (3), (4) [5].

Задача термоэлектромагнитоупругости. При подстановке функций (11) и (12) в граничные условия (15) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) \varphi'_{kln}(\tau_{kjm}) a_{kln} =$$

$$= \frac{df_{jp}}{ds}(\tau_{jm}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) N'_k(\tau_{kjm}) - \quad (17)$$

$$- 2 \operatorname{Re} d_{5jp} \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) r_5 F_5(\tau_{5jm})$$

$$(j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}, p = \overline{1, 4}),$$

где $\tau_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}$, τ_{jm} – аффикс точки M_{jm} . После решения системы (17) с использованием метода сингулярных разложений [9, 10] постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12) будут известны. По известным функциям (12) можно в любой точке пластинки определять значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния по формулам (7), (10) [5].

Численные исследования. Были проведены численные исследования для пластинок из композита на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$, физико-механические постоянные которого следующие [11]:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 7,165s_0, & s_{22} &= 6,797s_0, & s_{66} &= 19,912s_0, & s_{12} &= -2,337s_0, \\ g_{16} &= 2,028g_0, & g_{21} &= -0,496g_0, & g_{22} &= 1,157g_0, \\ p_{16} &= 1,850p_0, & p_{21} &= 0,576p_0, & p_{22} &= 1,186p_0, \\ \beta_{11} &= 0,156\beta_0, & \beta_{22} &= 0,137\beta_0, & \nu_{11} &= -0,190\nu_0, & \nu_{22} &= -0,185\nu_0, \\ \chi_{11} &= 0,336\chi_0, & \chi_{22} &= 0,119\chi_0, & \alpha_1 &= 8,530\alpha_0, & \alpha_2 &= 1,990\alpha_0, \\ t_2 &= 133t_0, & m_2 &= 133m_0, & k_{11} &= 2,5k_0, & k_{22} &= 2,5k_0. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $s_0 = 10^{-6}$ МПа $^{-1}$, $g_0 = 10^{-2}$ МКл $^{-1} \cdot$ м 2 , $p_0 = 10^{-5}$ МТл $^{-1}$, $\beta_0 = 10^3$ МН $\cdot$ м $^2 \cdot$ МКл $^{-2}$, $\nu_0 = 10^{-1}$ МКл $^{-1} \cdot$ м $\cdot$ МА, $\chi_0 = 10^{-1}$ МПа $\cdot$ МТл $^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-6}$ К $^{-1}$, $t_0 = 10^{-3}$ МН $\cdot$ (МКл $\cdot$ К) $^{-1}$, $m_0 = 10^{-3}$ МА $\cdot$ (м $\cdot$ К) $^{-1}$, $k_0 = 1$ Вт $\cdot$ (м $\cdot$ К) $^{-1}$.

При проведении расчетов количество членов в рядах в функциях (11), (12) и количество «коллокационных» точек M_{jm} на контурах L_j увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого в решаемых задачах необходимо было в рядах Лорана сохранять от 50 до 80 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 800 «коллокационных» точек. При этом, решались задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала, и термоупругости (ТУ), когда электромагнитные свойства материала не учитываются.

В таблице 1 для кругового диска из материала М1 радиуса r_0 ($a_0 = b_0 = r_0$), в которой на расстоянии d от центра действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 , измеряемой в Вт $\cdot$ (м $\cdot$ К) $^{-1}$ (рис. 2), когда через контур диска действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры $\mathfrak{T}_0 = 0$ К с коэффициентом теплообмена $h_0 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в некоторых точках контура диска на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от hr_0 для некоторых значений d/r_0 для случая задачи ТЭМУ. В таблице 2 приведены аналогичные значения напряжений σ_s/q_1^0 для случая задачи ТУ.

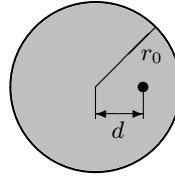


Рис. 2

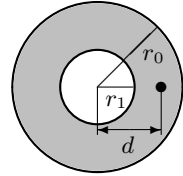


Рис. 3

Таблица 1. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0				
		0, 0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8
0, 01	0	0, 006	-0, 004	-0, 010	-0, 006	0, 029
	$\pi/6$	-0, 020	-0, 039	-0, 047	-0, 029	0, 019
	$\pi/3$	-0, 038	-0, 042	-0, 029	-0, 001	0, 025
	$\pi/2$	-0, 042	-0, 034	-0, 013	0, 010	-0, 002
	$2\pi/3$	-0, 038	-0, 020	0, 002	0, 021	0, 027
	$5\pi/6$	-0, 019	0, 002	0, 020	0, 035	0, 065
	π	0, 006	0, 018	0, 031	0, 042	0, 057
0, 10	0	0, 006	-0, 005	-0, 010	-0, 007	0, 027
	$\pi/6$	-0, 020	-0, 039	-0, 047	-0, 029	0, 018
	$\pi/3$	-0, 038	-0, 042	-0, 029	-0, 001	0, 025
	$\pi/2$	-0, 041	-0, 033	-0, 012	0, 010	-0, 002
	$2\pi/3$	-0, 038	-0, 020	0, 002	0, 021	0, 026
	$5\pi/6$	-0, 020	0, 001	0, 019	0, 034	0, 064
	π	0, 006	0, 018	0, 030	0, 042	0, 056
1, 00	0	0, 006	-0, 005	-0, 012	-0, 011	0, 019
	$\pi/6$	-0, 020	-0, 039	-0, 049	-0, 033	0, 011
	$\pi/3$	-0, 038	-0, 043	-0, 030	-0, 005	0, 020
	$\pi/2$	-0, 041	-0, 033	-0, 013	0, 008	-0, 007
	$2\pi/3$	-0, 038	-0, 020	0, 001	0, 018	0, 022
	$5\pi/6$	-0, 020	0, 000	0, 018	0, 031	0, 058
	π	0, 006	0, 017	0, 029	0, 039	0, 051
10, 00	0	0, 006	-0, 006	-0, 018	-0, 027	-0, 015
	$\pi/6$	-0, 020	-0, 040	-0, 054	-0, 046	-0, 011
	$\pi/3$	-0, 038	-0, 044	-0, 035	-0, 015	0, 004
	$\pi/2$	-0, 041	-0, 034	-0, 018	-0, 002	-0, 020
	$2\pi/3$	-0, 038	-0, 021	-0, 004	0, 009	0, 007
	$5\pi/6$	-0, 020	-0, 001	0, 013	0, 022	0, 042
	π	0, 006	0, 016	0, 024	0, 029	0, 033
∞	0	0, 006	-0, 007	-0, 022	-0, 039	-0, 049
	$\pi/6$	-0, 020	-0, 041	-0, 058	-0, 054	-0, 023
	$\pi/3$	-0, 038	-0, 045	-0, 038	-0, 020	-0, 003
	$\pi/2$	-0, 041	-0, 035	-0, 021	-0, 007	-0, 027
	$2\pi/3$	-0, 038	-0, 022	-0, 006	0, 004	-0, 001
	$5\pi/6$	-0, 020	-0, 002	0, 010	0, 015	0, 031
	π	0, 006	0, 015	0, 021	0, 022	0, 022

В таблице 3 для концентрического кольца с внешним радиусом r_0 и внутренним радиусом r_1 ($a_0 = b_0 = r_0$, $a_1 = b_1 = r_1$), в котором на расстоянии d ($r_1 < d < r_0$) от центра кольца действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 (рис. 3), когда через контуры кольца действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_1 = 0$ K с коэффициентом теплообмена $h_0 = h_1 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в некоторых точках внутреннего и внешнего контуров кольца для некоторых значений hr_0 , когда $r_1/r_0 = 0, 5$.

Из представленных данных видно, что действие сосредоточенных источников тепла может приводить к возникновению высокой концентрации напряжений в пластинках. Чем ближе источник тепла к контуру пластинки, тем более высокими оказываются значения напряжений около этого контура вблизи. Так-

Таблица 2. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0				
		0, 0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8
0, 01	0	0, 031	0, 042	0, 056	0, 075	0, 104
	$\pi/6$	0, 027	0, 032	0, 033	0, 028	0, 021
	$\pi/3$	0, 020	0, 019	0, 018	0, 015	0, 013
	$\pi/2$	0, 017	0, 016	0, 015	0, 013	0, 011
	$2\pi/3$	0, 020	0, 018	0, 015	0, 012	0, 010
	$5\pi/6$	0, 027	0, 021	0, 016	0, 012	0, 010
	π	0, 031	0, 023	0, 016	0, 012	0, 010
0, 10	0	0, 031	0, 042	0, 056	0, 075	0, 103
	$\pi/6$	0, 027	0, 032	0, 033	0, 028	0, 021
	$\pi/3$	0, 020	0, 019	0, 017	0, 015	0, 013
	$\pi/2$	0, 017	0, 016	0, 015	0, 013	0, 011
	$2\pi/3$	0, 020	0, 018	0, 015	0, 012	0, 010
	$5\pi/6$	0, 027	0, 021	0, 016	0, 012	0, 010
	π	0, 031	0, 022	0, 016	0, 012	0, 010
1, 00	0	0, 031	0, 041	0, 055	0, 073	0, 101
	$\pi/6$	0, 027	0, 032	0, 033	0, 027	0, 019
	$\pi/3$	0, 020	0, 019	0, 017	0, 014	0, 012
	$\pi/2$	0, 017	0, 016	0, 015	0, 012	0, 010
	$2\pi/3$	0, 020	0, 018	0, 015	0, 012	0, 009
	$5\pi/6$	0, 027	0, 021	0, 016	0, 011	0, 009
	π	0, 031	0, 022	0, 016	0, 011	0, 009
10, 00	0	0, 031	0, 041	0, 054	0, 069	0, 091
	$\pi/6$	0, 027	0, 031	0, 031	0, 023	0, 012
	$\pi/3$	0, 020	0, 019	0, 016	0, 012	0, 007
	$\pi/2$	0, 017	0, 016	0, 014	0, 010	0, 006
	$2\pi/3$	0, 020	0, 018	0, 014	0, 010	0, 006
	$5\pi/6$	0, 027	0, 021	0, 015	0, 010	0, 005
	π	0, 031	0, 022	0, 015	0, 010	0, 005
∞	0	0, 031	0, 041	0, 052	0, 065	0, 080
	$\pi/6$	0, 027	0, 031	0, 030	0, 021	0, 008
	$\pi/3$	0, 020	0, 019	0, 015	0, 010	0, 004
	$\pi/2$	0, 017	0, 016	0, 013	0, 009	0, 004
	$2\pi/3$	0, 020	0, 018	0, 013	0, 008	0, 004
	$5\pi/6$	0, 027	0, 021	0, 014	0, 008	0, 004
	π	0, 031	0, 022	0, 015	0, 008	0, 004

же на распределение напряжений в пластинке влияют свойства ее материала и характеристики конвективного теплообмена с внешней средой.

При значениях коэффициента теплообмена $hr_i < 0, 01$ можно полагать, что контур пластинки теплоизолирован, а при значениях $hr_i > 100$ – что на контуре пластинки задана температура, равна температуре внешней среды.

Наименьшая концентрация напряжений в окрестности контура диска имеет место для случая, когда источник тепла находится в центре диска. При перемещении источника тепла к краю диска значения напряжений резко возрастают в области сближения, а также в противоположной области, тогда как в остальных областях значения напряжений существенно убывают. Видимо, это обусловлено специфическим влиянием электромагнитных свойств материала пластинки, в т.ч. пирозлектрических и пиромагнитных свойств, поскольку в случае пренебрежения этими свойствами (при решении задачи ТУ) численными исследова-

Таблица 3. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0								
		0,6	0,7	0,8	0,9	0,6	0,7	0,8	0,9	
		Внутренний контур				Внешний контур				
		Задача ТЭМУ								
0,01	0	0,099	0,071	0,084	0,111	0,005	-0,006	-0,011	-0,046	
	$\pi/6$	0,077	0,031	-0,010	-0,038	-0,069	-0,052	-0,028	0,007	
	$\pi/3$	0,026	-0,003	-0,035	-0,060	-0,029	-0,014	0,003	0,011	
	$\pi/2$	0,014	-0,001	-0,018	-0,031	0,020	0,030	0,040	0,047	
	$2\pi/3$	-0,104	-0,107	-0,110	-0,112	0,049	0,052	0,056	0,067	
	$5\pi/6$	-0,141	-0,133	-0,125	-0,118	0,077	0,075	0,073	0,065	
1,00	π	-0,152	-0,140	-0,128	-0,118	0,094	0,090	0,080	-0,003	
	0	0,050	0,025	0,039	0,065	0,019	0,007	-0,001	-0,039	
	$\pi/6$	0,038	-0,006	-0,045	-0,071	-0,054	-0,038	-0,016	0,019	
	$\pi/3$	0,017	-0,010	-0,040	-0,063	-0,019	-0,005	0,011	0,018	
	$\pi/2$	0,013	-0,001	-0,017	-0,029	0,014	0,023	0,032	0,037	
	$2\pi/3$	-0,074	-0,077	-0,078	-0,078	0,030	0,033	0,036	0,045	
∞	$5\pi/6$	-0,090	-0,083	-0,074	-0,065	0,052	0,050	0,047	0,038	
	π	-0,098	-0,088	-0,074	-0,063	0,064	0,060	0,049	-0,035	
	0	-0,069	-0,054	-0,020	0,012	0,008	-0,014	-0,042	-0,113	
	$\pi/6$	-0,005	-0,030	-0,045	-0,041	-0,024	-0,024	-0,013	0,012	
	$\pi/3$	0,013	0,003	-0,010	-0,015	-0,007	-0,002	0,004	0,003	
	$\pi/2$	0,004	-0,001	-0,008	-0,009	-0,002	0,002	0,005	0,005	
∞	$2\pi/3$	-0,011	-0,014	-0,013	-0,009	0,002	0,003	0,005	0,011	
	$5\pi/6$	-0,013	-0,013	-0,008	-0,002	0,008	0,008	0,006	-0,003	
	π	-0,016	-0,014	-0,007	-0,001	0,010	0,009	0,000	-0,073	
			Задача ТУ							
	0,01	0	0,052	0,028	0,008	-0,006	0,063	0,079	0,100	0,130
		$\pi/6$	-0,074	-0,064	-0,052	-0,043	0,027	0,024	0,021	0,020
$\pi/3$		-0,048	-0,043	-0,037	-0,033	0,019	0,017	0,015	0,013	
$\pi/2$		-0,013	-0,010	-0,008	-0,005	0,012	0,010	0,009	0,007	
$2\pi/3$		0,015	0,015	0,015	0,016	0,000	0,000	-0,001	-0,001	
$5\pi/6$		0,029	0,027	0,026	0,024	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011	
1,00	π	0,033	0,031	0,028	0,026	-0,017	-0,017	-0,016	-0,015	
	0	0,066	0,041	0,021	0,007	0,051	0,067	0,088	0,117	
	$\pi/6$	-0,058	-0,048	-0,036	-0,027	0,019	0,016	0,013	0,011	
	$\pi/3$	-0,035	-0,030	-0,025	-0,020	0,015	0,013	0,011	0,009	
	$\pi/2$	-0,011	-0,009	-0,007	-0,004	0,010	0,009	0,007	0,006	
	$2\pi/3$	0,006	0,007	0,007	0,006	0,001	0,001	0,001	0,000	
∞	$5\pi/6$	0,017	0,015	0,014	0,012	-0,007	-0,006	-0,006	-0,005	
	π	0,021	0,019	0,017	0,014	-0,009	-0,009	-0,008	-0,007	
	0	0,079	0,055	0,033	0,015	0,021	0,041	0,061	0,082	
	$\pi/6$	-0,017	-0,016	-0,010	-0,004	0,001	0,000	-0,001	-0,001	
	$\pi/3$	-0,007	-0,007	-0,005	-0,002	0,004	0,004	0,002	0,001	
	$\pi/2$	-0,003	-0,003	-0,002	-0,001	0,002	0,002	0,002	0,001	
∞	$2\pi/3$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
	$5\pi/6$	0,003	0,003	0,002	0,001	-0,001	-0,001	-0,001	0,000	
	π	0,004	0,005	0,003	0,001	-0,002	-0,002	-0,001	-0,001	

ниями выявляется рост напряжений в области сближения источника тепла, а в противоположной области напряжения убывают.

Увеличение количества отверстий в пластинке приводит к существенному росту напряжений во внутренних областях пластинки, тогда как напряжения на внешнем контуре снижаются. При этом, наибольшая концентрация напряжений возникает около контура, являющегося самым близким к источнику тепла. Из

других данных следует, что уменьшение расстояния между контурами пластинки приводит к заметному росту концентрации напряжений в зоне между этими контурами и менее существенным изменениям вне этой зоны, причем чем меньше значения hr_i , тем более резким является рост концентрации напряжений.

Выводы. Решена задача термоэлектромагнитоупругости о действии сосредоточенных источников тепла во внутренних точках многосвязной пьезопластинки, а на контурах имеет место конвективный теплообмен с окружающей средой. Задача решена с использованием комплексных потенциалов, разложений функций в ряды Лорана и ряды по полиномам Фабера с определением коэффициентов рядов методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований, с помощью которых установлено, что от действия сосредоточенных источников тепла в пластинке возникает высокая концентрация температурных напряжений. Исследовано влияние расстояний между источниками тепла и контурами пластинки, характеристик конвективного теплообмена на значения напряжений в пластинке. Показано, что пренебрежение электромагнитными свойствами материала пластинки приводит к существенному искажению значений напряжений.

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
4. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
5. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
6. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2021. – № 2 (75). – С. 18–29.
7. Глушанков Е.С. Действие сосредоточенных источников тепла в конечной многосвязной анизотропной пластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2025. – № 3 (92). – С. 121–132.
8. Глушанков Е.С. Действие сосредоточенных источников тепла в бесконечной многосвязной пластинке из пьезоматериала, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2026. – № 1 (94). – С. 19–31.
9. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
10. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

E.S. Glushankov

The concentrated heat sources' action in a multiply connected piezoelectric plate under the convective heat transfer condition.

A problem is solved for evaluation of thermo-electro-magneto-elastic state of finite multiply connected piezoelectric plate being under convective heat transfer condition, acted with concentrated heat sources. The thermo-electro-magneto-elasticity complex potentials, the expansion of functions in Laurent series and Faber polynomials series, and the satisfaction of the boundary conditions with the least squares were used for solving the problem. The results of numerical studies are presented, and the effects of plate's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the distribution of heat sources on the values of the stresses in the plate are obtained through them.

Keywords: *thermal stresses, piezoelectric plate, convective heat transfer, concentrated heat sources, complex potentials*

References

1. Berlincourt D.A., Curran D.R. & Jaffe H. (1964) Piezoelectric and Piezomagnetical Materials and Their Function in Transducers. In: Mason W.P. (ed.) *Physical Acoustics*. New York: Academic Press, 1A, 169–270.
2. Maugin G.A. (1988) *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. Amsterdam; New York: North Holland, xxii, 598 p. ISBN 978-0-44470-399-3.
3. Grinchenko V.T., Ulitko A.F. & Shul'ga N.A. (1989). *Electroelasticity*. In: Guz' A.N. (ed.) *Mechanics of Coupled Fields in Structural Elements*. Kiev: Naukova Dumka, 5, 280 p. (In Russian).
4. Parton V.Z. & Kudryavtsev B.A. (1988) *Electromagnetoelasticity: Piezoelectric and Electrically Conductive Solids*. Moscow: Nauka, 472 p. (In Russian).
5. Kaloerov S.A. & Sorochan O.A. (2009) Plane problem of thermoelectromagnetoelasticity for multiply connected bodies. *Int. Appl. Mech.* 45 (4), 413–423. DOI: 10.1007/s10778-009-0194-7.
6. Glushankov E.S. (2021) The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the convective heat transfer under linear heat flow action. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = J. Theoret. Appl. Mech.* 2 (75), 18–29. (In Russian).
7. Glushankov E.S. (2025) The concentrated heat sources' action in an infinite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = J. Theoret. Appl. Mech.* 3 (92), 121–132. DOI: 10.24412/0136-4545-2025-3-121-132. (In Russian).
8. Glushankov E.S. (2026) The concentrated heat sources' action in an infinite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = J. Theoret. Appl. Mech.* 1 (94), 19–31. DOI: 10.24412/0136-4545-2026-1-19-31. (In Russian).
9. Voevodin V.V. (1977) *Computational Basics of Linear Algebra*. Moscow: Mir. 304 p. (In Russian).
10. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p. ISBN 978-0-13165-332-0.
11. Tian W.-Y. & Gabbert U. (2004) Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids. *Europ. J. Mech. Part A*. 23, 599–614. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002.

Поступила в редакцию / Original submitted 14.05.2026.

Доработана / Revision submitted 03.06.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-42-55

EDN:OBCJEB



©2026. С.А. Калоеров, М.А. Полянский

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЯЗКОУПРУГОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЯМИ, ТРЕЩИНАМИ И ВЫЕМАМИ

Дано решение задачи вязкоупругости для полосы с произвольными жестко подкреплёнными эллиптическими отверстиями (в частности, круговыми отверстиями или прямолинейными трещинами), в том числе пересекающихся друг с другом и пересекающих прямолинейные границы с образованием выемов. Задача решена с использованием метода малого параметра и комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Функции, голоморфные вне отверстий, представлены рядами Лорана, а функции, голоморфные в сплошной полосе, выбраны рядами Лорана для эллипсов, симметричных заданным эллипсам относительно прямолинейных границ полосы. Для определения неизвестных коэффициентов рядов из граничных условий на контурах отверстий и на некоторых отрезках прямолинейных границ обобщённым методом наименьших квадратов получены переопределённые системы линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярных разложений. Даны описания результатов численных исследований для полосы с центральным или нецентральной отверстием, или прямолинейным разрезом, в том числе выходящими на прямолинейные границы.

Ключевые слова: анизотропная полоса с отверстиями, вязкоупругость, комплексные потенциалы, обобщённый метод наименьших квадратов.

Введение. Пластинки с отверстиями и узкими вырезами-трещинами получили широкое распространение в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники. Под различными внешними воздействиями около таких отверстий и трещин возникают высокие концентрации напряжений, которые со временем могут претерпевать значительные изменения, что нужно учитывать при проектировании конструкций, решая соответствующие задачи вязкоупругости. Решение таких задач особенно актуально в случаях, когда

Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1339-6035.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Полянский Максим Алексеевич – асп. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: m4xpolyan@yandex.ru, ORCID: 0009-0007-2281-3220.

Polianskii Maxim Alekseevich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

отверстия и трещины располагаются вблизи внешних прямолинейных границ пластинки.

Известно, что наиболее достоверные результаты по определению упругого состояния пластин с отверстиями и трещинами получаются при решении соответствующих задач методами, использующими комплексные потенциалы С.Г. Лехницкого [1]. При этом, если пластинка представляется полуплоскостью, то лучшим подходом удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе является использование метода интегралов типа Коши [2, 3], что позволяет удовлетворять этим условиям точно. Но использование метода интегралов типа Коши при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе приводит к появлению громоздких выражений для функций, голоморфных в соответствующих нижних полуплоскостях. Более того, для случая полуплоскости с пересекающимися прямолинейную границу отверстиями и трещинами применение метода интегралов типа Коши к граничным условиям приведет еще более сложным выражениям для функций и серьезно усложнить общее решение задач. В этих случаях, используя результаты применения интегралов типа Коши к решению задач для многосвязной полуплоскости при выборе функций [4], удобнее для удовлетворения граничным условиям и на прямолинейной границе, и на контурах отверстий и трещин использовать обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [5].

В данной статье последним подходом решена задача теории упругости для анизотропной полосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на прямолинейные границы. Описаны результаты численных исследований, с помощью которых установлены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния (НДС) полосы в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения и сочетания.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим анизотропную полосу, занимающую многосвязную область S с прямолинейными границами L^+ , L^- и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l (рис. 1). Выберем основную прямоугольную систему координат Oxy с началом в произвольной точке полосы на расстояниях h^+ , h^- от границ L^+ , L^- соответственно и осью Ox , параллельной прямолинейным границам. Отнесем эллипсы L_l к локальным системам координат $O_l x_l y_l$ с началами в их центрах и направлениями осей Ox_l вдоль полуосей a_l так, что в локальных и в основной системах координат параметрические уравнения L_l имеют вид

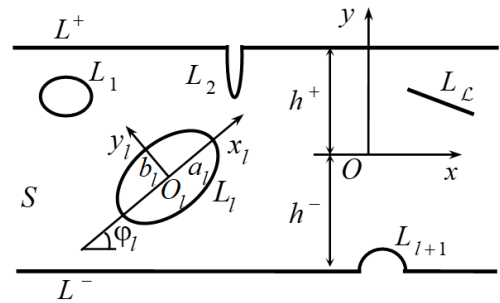


Рис. 1.

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta; \quad (1)$$

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l} , y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки. Будем считать, что прямолинейные границы не загружены, каждый из контуров отверстий не загружен или жестко подкреплён; на бесконечности полоса растягивается усилиями $\sigma_x^\infty = p$ и в силу не загруженности прямолинейных границ $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$.

Если задачу о вязкоупругом состоянии полосы решать методом малого параметра, в качестве которого взять изменение во времени коэффициента Пуассона материала пластинки ν_{n12} [6] с мгновенным его значением ν_{n12}^0 , т. е.

$$\lambda = \nu_{n12} - \nu_{n12}^0, \quad (3)$$

то при использовании комплексных потенциалов Лехницкого С.Г. [1] это решение сводится к нахождению комплексных потенциалов приближений $\Phi_{jk}(z_k)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$; $k = 1, 2$) [6] обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (4)$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения, из граничных условий на контурах

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik}^0 \Phi_{jk}(t_k) = \delta_j^0 f_{il}(t) - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik}^1 \Phi_{j-1k}(t_k) \quad (5)$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2);$$

$$g_{ik}^0 = (1, \mu_k), \quad g_{ik}^1 = (0, 0),$$

$$(f_1(t), f_2(t)) = \mp \int_0^s (Y_n, X_n) ds + (c_1, c_2), \quad (6)$$

если на контуре заданы (в том числе равные нулю) внешние усилия X_n, Y_n ,

$$g_{ik}^0 = (p_{k0}, q_{k0}), \quad g_{ik}^1 = (p_{k1}, q_{k1}), \quad (f_1(t), f_2(t)) = (u^* + c_1, v^* + c_2), \quad (7)$$

когда на контуре заданы перемещения u^*, v^* ;

$$p_{k0} = (\mu_k^2 - \nu_{n12}^0) s_{11} - s_{16} \mu_k, \quad q_{k0} = -\mu_k \nu_{n12}^0 s_{11} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26}, \quad (8)$$

$$p_{k1} = -s_{11}; \quad q_{k1} = -s_{11} \mu_k;$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; c_i – постоянные, произвольные на одном из контуров области S ; δ_j^0 – символ Кронекера.

Функции $\Phi_{jk}(z_k)$ определены и голоморфны в областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (4) и ограниченных прямолинейными границами L_k^+ , L_k^- и контурами L_{kl} , соответствующими при этих преобразованиях заданным контурам L^+ , L^- и L_l . Исходя из общих представлений комплексных потенциалов приближений [2, 3], в рассматриваемом случае эти функции представим в виде

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{jkl n} \varphi_{kl n}(z_k) + b_{jkl n} \varphi_{kl n}^+(z_k) + c_{jkl n} \varphi_{kl n}^-(z_k)], \quad (9)$$

в котором Γ_{jk} – постоянные, которые находятся решением систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} &= \left(0, 0, \sigma_x^\infty, \frac{s_{16} \sigma_x^\infty}{2s_{22}} \right), \\ \Gamma_{jk} &= 0 \quad (j \geq 1); \\ \varphi_{kl n}(z_k) &= \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \varphi_{kl n}^+(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{kl}^+)^n}, \quad \varphi_{kl n}^-(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{kl}^-)^n}; \end{aligned} \quad (10)$$

ζ_{kl} , ζ_{kl}^+ , ζ_{kl}^- – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (11)$$

$$z_k = -(\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left(\zeta_{kl}^+ + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}^+} \right); \quad (12)$$

$$z_k = (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^- + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left(\zeta_{kl}^- + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}^-} \right);$$

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$a_{jkl n}$, $b_{jkl n}$, $c_{jkl n}$ – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана.

Неизвестные постоянные $a_{jkl n}$, $b_{jkl n}$, $c_{jkl n}$ определим из граничных условий на контурах отверстий L_l ($l = 1, \mathcal{L}$) и на отрезках прямолинейных границ L^+ , L^- , где влияние L_l на напряженное состояние полосы значительно. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных c_l . Эту форму удобнее

получать дифференцированием условий по дуге s контуров области. Они имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik}^0 \delta_{k,s} \Phi'_{jk}(t_k) = \delta_j^0 \frac{df_i(t)}{ds} - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik}^1 \delta_{k,s} \Phi'_{j-1k}(t_k) \quad (14)$$

$$(i = 1, 2; j = 0, 1, 2, \dots),$$

в котором $\delta_{k,s} = \frac{dt_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$; x' , y' – производные переменных (2) по параметру θ параметрического задания эллипсов; s – длина дуги контуров, обходимых против часовой стрелки, причем для прямолинейных границ L^+ , L^- , где $f_i(t) = 0$ и производная $\delta_{k,s} = 1$, правая часть уравнений $\frac{df_i(t)}{ds} = 0$;

$$\Phi'_{jk}(t_k) = \Gamma_{jk} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_{kln}(t_k) a_{jkl n} + \varphi'^+_{kln}(t_k) b_{jkl n} + \varphi'^-_{kln}(t_k) c_{jkl n} \right]; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{kln}(t_k) &= -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \varphi'^+_{kln}(t_k) &= -\frac{n}{(\zeta_{kl}^+)^{n-1} \overline{R_{kl}} \left((\zeta_{kl}^+)^2 - \overline{m_{kl}} \right)}, \\ \varphi'^-_{kln}(t_k) &= -\frac{n}{(\zeta_{kl}^-)^{n-1} \overline{R_{kl}} \left((\zeta_{kl}^-)^2 - \overline{m_{kl}} \right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничным условиям (14) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [5, 7, 8]. Для этого выберем на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и на выбранных отрезках прямолинейных границ L^+ , L^- систему точек $M_m(x_m, y_m)$ ($m = \overline{1, M}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (9). Тогда для определения неизвестных постоянных $a_{jkl n}$, $b_{jkl n}$ и $c_{jkl n}$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^0 \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{km}) a_{jkl n} + \varphi'^+_{kln}(t_{km}) b_{jkl n} + \varphi'^-_{kln}(t_{km}) c_{jkl n} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik}^0 \delta_{k,s} \Gamma_{jk} \quad (i = 1, 2; m = \overline{1, M}) \end{aligned} \quad (17)$$

в случае задания на контурах усилий или из уравнений

$$\begin{aligned}
 & 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^0 \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{km}) a_{jkl n} + \varphi'_{kln}{}^+(t_{km}) b_{jkl n} + \varphi'_{kln}{}^-(t_{km}) c_{jkl n} \right] = \\
 & = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik}^0 \delta_{k,s} \Gamma_{jk} - (1 - \delta_j^0) 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^1 \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{km}) a_{j-1kl n} + \right. \\
 & \left. + \varphi'_{kln}{}^+(t_{km}) b_{j-1kl n} + \varphi'_{kln}{}^-(t_{km}) c_{j-1kl n} \right] - (1 - \delta_j^0) 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ik}^1 \delta_{k,s} \Gamma_{j-1k} \\
 & \quad (i = 1, 2; m = \overline{1, M})
 \end{aligned} \tag{18}$$

в случае, когда на контурах заданы перемещения.

Системы (17), (18) будем решать методом сингулярного разложения [9, 10]. После нахождения псевдорешений этой системы комплексные потенциалы приближений $\Phi_{jk}(z_k)$ станут известными и по ним можно найти комплексные потенциалы задачи [6]

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}(z_k), \tag{19}$$

а по ним и основные напряжения в любой момент времени по формулам

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k). \tag{20}$$

По основным напряжениям можно найти также напряжения на произвольных площадках с нормалью n и касательной s по формулам [11]

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
 \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
 \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)).
 \end{aligned} \tag{21}$$

При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), используя формулы [12]

$$\begin{aligned}
 k_1^{\pm} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl}, \\
 k_2^{\pm} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl},
 \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$M_{kl} = - \sum_{j=0} \lambda^j \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{jkl n}. \tag{23}$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний – к его левому концу.

Описание результатов численных исследований. Проведены численные исследования вязкоупругого состояния полосы из «слабо анизотропного» электромагнитоупругого композита на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ без учета пьезосвойств (материал М1) [13, 14] и полосы из «сильно анизотропного» электромагнитоупругого композита, упругие и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ без учета пьезосвойств (материал М2) [15].

В численных исследованиях количество членов в рядах (15) для каждого отверстия L_p и количество точек M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (17), (18), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений и индукций на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3} , а соответствующих деформаций не менее 10^{-10}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 100 членов, и на каждом из контуров и на отрезке длины 2 диаметра отверстия брать от 100 до 1000 «коллокационных точек».

В таблицах 1, 2 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полосы с центральным круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) соответственно свободным и жестко подкрепленным контуром с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c_1/a_1 , где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и границей полосы. При этом для случая жесткого подкрепления контура значения напряжений приведены как в начальном, так в стационарном состояниях; характерными были точки $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $D(0, a_1 + c_1/2)$, $E^+(0, a_1 + c_1)$, $K^+(a_1, a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1, a_1 + c_1)$. Отрицательные значения c_1/a_1 соответствуют случаям, когда жестко подкрепленное отверстие выходит за прямолинейные границы полосы на величину $a_1 - c_1$. На рисунках 3, 4 изображены графики распределения нормальных напряжений σ_s около контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру, напряжений σ_y в точках перемычки и напряжений σ_x в точках прямолинейной границы.

Как видно из данных таблиц 1, 2 и рисунков 3, 4, в полосе с неподкрепленным отверстием при уменьшении длины перемычек c_1 происходит резкое увеличение значений напряжений в окрестности перемычки, особенно около контура отверстия и около прямолинейных границ, кроме точек перемычек на прямолинейных

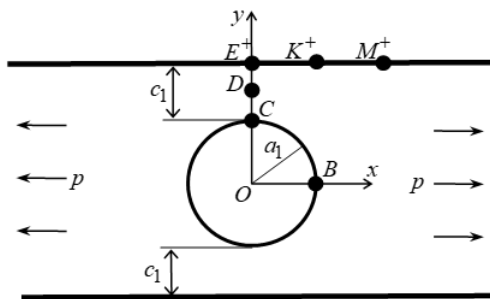


Рис. 2.

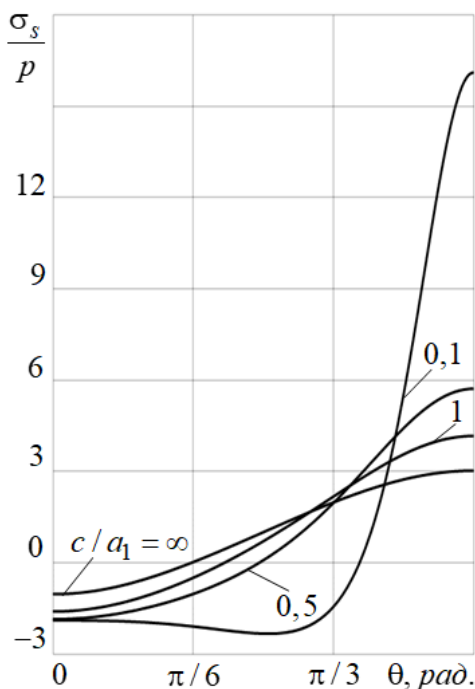


Рис. 3. Графики распределения σ_s/p около контура.

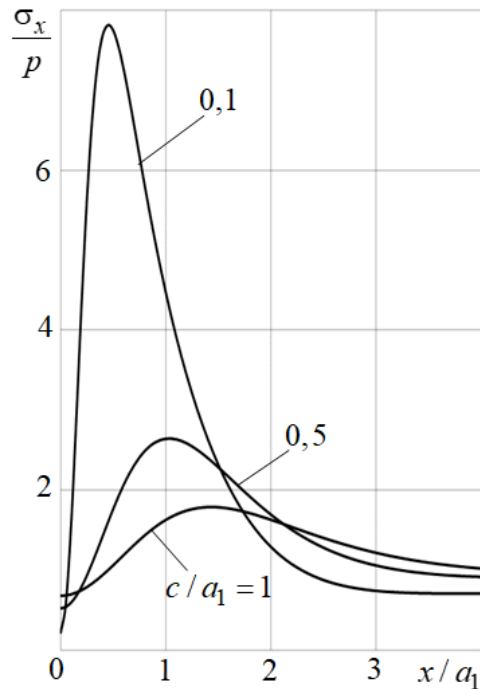


Рис. 4. Графики распределения σ_x/p по прямолинейной границе.

границах, где с уменьшением длин перемычек происходит резкое уменьшение значений напряжений. Жесткое подкрепление контура отверстия приводит к резкому уменьшению значений напряжений в указанных зонах. Но при таком подкреплении контура отверстия со временем происходят значительные изменения значений напряжений, пока не установится стационарное состояние. Такое состояние устанавливается через 1000 час., причем при переходе в стационарное состояние значения напряжений в зонах их высокой концентрации изменяются на 1,5–2 раза.

Таблица 1. Значения напряжений в точках полосы с центральным круговым отверстием в зависимости от c_1/a_1

Точка	Напряжение	c_1/a_1					
		∞	5	2	1	0,5	0,1
B	σ_y	-1,027	-1,104	-1,313	-1,589	-1,838	-1,877
C	σ_x	3,018	3,092	3,403	4,153	5,714	16,079
D	σ_x	1,000	1,063	1,282	1,720	2,535	7,742
E^+	σ_x	1,000	0,950	0,825	0,675	0,516	0,209
K^+	σ_x	1,000	0,972	1,092	1,622	2,639	4,468
M^+	σ_x	1,000	1,019	1,307	1,624	1,689	1,289

Таблица 2. Значения напряжений в точках полосы с центральным жестко подкрепленным круговым отверстием в зависимости от c_1/a_1

Точка	Напряжение	Время	c_1/a_1									
			∞	5	2	1	0,5	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5
B	σ_y	нач	0,514	0,492	0,466	0,147	0,223	0,272	0,094	0,347	0,249	0,216
		стац	0,733	0,723	0,653	0,272	0,347	0,358	0,197	0,542	0,367	0,345
C	σ_x	нач	-0,001	0,050	0,252	0,877	0,964	0,935	0,900	-	-	-
		стац	-0,049	-0,038	0,221	0,864	0,968	0,943	0,932	-	-	-
D	σ_x	нач	1,000	0,971	0,914	1,008	1,066	0,978	0,898	-	-	-
		стац	1,000	0,976	0,931	1,030	1,102	1,002	0,934	-	-	-
E^+	σ_x	нач	1,000	1,022	1,062	1,083	1,171	1,007	0,897	-	-	-
		стац	1,000	1,040	1,109	1,141	1,243	1,044	0,936	-	-	-
K^+	σ_x	нач	1,000	1,012	0,976	0,989	0,971	0,965	0,976	0,707	0,723	0,814
		стац	1,000	1,026	0,997	0,996	0,968	0,947	0,954	0,697	0,720	0,827
M^+	σ_x	нач	1,000	0,991	0,905	0,966	0,953	0,963	0,987	0,940	0,961	0,998
		стац	1,000	0,998	0,896	0,947	0,932	0,949	0,973	0,918	0,951	0,996

В таблице 3 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полосы с круговым жестко подкрепленным отверстием радиуса a_1 (рис. 5) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках в зависимости от отношения c_1/a_1 , где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $4a_1$, $c_2 = 2a_1 - c_1$, а характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $E^+(0, a_1 + c_1)$, $K^+(a_1, a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1, a_1 + c_1)$, $E^-(0, -a_1 - c_2)$, $K^-(a_1, -a_1 - c_2)$, $M^-(2a_1, -a_1 - c_2)$.

Как видно из данных таблицы 3, закономерности изменения напряжений такие же, как и в случае центрального жесткого кругового включения. Вдали от отверстия значения напряжений и их изменение во времени незначительны, причем для случая, когда круговое включение выходит на прямолинейную границу, что приводит к снижению концентрации напряжений как в начальном, так и в стационарном состояниях.

В таблицах 4, 5 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полосы с линейным включением и трещиной соответствен-

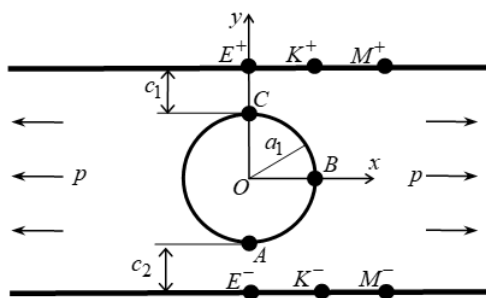


Рис. 5

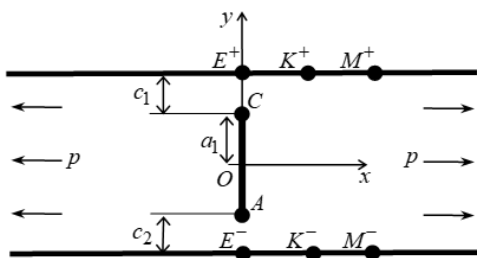


Рис. 6

но длины $2a_1$ (рис. 6) с точностью до множителя p приведены значения напряжений и КИН в некоторых характерных точках в зависимости от отношения c_1/a_1 , где c_1 – длина перемычки между контуром включения и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $4a_1$, $c_2 = 2a_1 - c_1$, а характерными были точки

$$\begin{aligned} &A(0, -a_1), \quad C(0, a_1), \\ &E^+(0, a_1 + c_1), \quad K^+(a_1, a_1 + c_1), \quad M^+(2a_1, a_1 + c_1), \\ &E^-(0, -a_1 - c_2), \quad K^-(a_1, -a_1 - c_2), \quad M^-(2a_1, -a_1 - c_2). \end{aligned}$$

Таблица 3. Значения напряжений в некоторых точках полосы с круговым отверстием в зависимости от c_1/a_1

Точка	Величина	Время	c_1/a_1						
			1	0,5	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5
A	σ_x	нач	0,445	0,494	0,789	0,813	0,804	0,781	0,676
		стац	0,873	0,760	0,745	0,732	0,787	0,710	0,647
B	σ_y	нач	0,292	0,299	0,312	0,329	0,355	0,338	0,288
		стац	0,262	0,387	0,423	0,441	0,511	0,494	0,394
C	σ_x	нач	0,445	0,950	1,025	1,093	-	-	-
		стац	0,873	0,938	1,025	1,034	-	-	-
E^+	σ_x	нач	1,023	1,074	1,096	1,102	-	-	-
		стац	1,340	1,233	1,135	1,028	-	-	-
K^+	σ_x	нач	0,879	0,909	0,973	0,983	0,731	0,750	0,830
		стац	0,998	0,989	0,986	0,984	0,736	0,765	0,825
M^+	σ_x	нач	0,884	0,926	0,926	0,935	0,861	0,879	0,915
		стац	0,950	0,909	0,905	0,898	0,858	0,870	0,898
E^-	σ_x	нач	1,023	1,033	1,039	1,048	1,056	1,046	1,023
		стац	1,140	1,084	1,068	1,064	1,076	1,061	1,025
K^-	σ_x	нач	0,879	0,993	1,007	1,006	1,009	1,008	1,002
		стац	0,998	1,004	1,011	1,013	1,010	1,003	1,002
M^-	σ_x	нач	0,884	0,975	0,976	0,982	0,972	0,976	0,985
		стац	0,950	0,955	0,970	0,971	0,965	0,972	0,983

Из данных таблиц 4, 5 следует, что при сближении жесткого линейного включения наблюдается концентрация напряжений в точках перемычки и в точках прямолинейной границы; влияние прямолинейных границ на значения КИН незначительно, причем наибольшее влияние жесткого линейного включения на прямолинейную границу наблюдается в точке перемычки, где эти изменения наиболее значительны как в начальном, так и в стационарном состояниях.

Таблица 4. Значения напряжений и КИН в некоторых точках полосы с линейным включением в зависимости от c_1/a_1

Точка	Величина	Время	c_1/a_1						
			1	0,5	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5
A	k_1^+	нач	0,024	0,018	0,016	0,016	0,016	0,016	0,017
		стац	0,027	0,020	0,018	0,018	0,018	0,019	0,020
C	k_1^-	нач	0,024	0,025	0,024	0,015	-	-	-
		стац	0,027	0,029	0,027	0,018	-	-	-
E^+	σ_x	нач	1,013	1,037	1,294	2,254	-	-	-
		стац	1,019	1,052	1,409	2,806	-	-	-
K^+	σ_x	нач	0,997	0,994	0,994	0,994	0,993	0,991	0,986
		стац	0,996	0,994	0,993	0,993	0,991	0,987	0,980
M^+	σ_x	нач	0,998	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,998
		стац	0,997	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,998
E^-	σ_x	нач	1,013	1,001	1,001	1,000	1,001	1,000	1,000
		стац	1,019	1,002	1,001	1,000	1,001	1,001	1,001

Таблица 5. Значения напряжений и КИН в некоторых точках полосы с трещиной в зависимости от c_1/a_1

Точка	Величина	c_1/a_1		
		1	0,5	0,1
A	k_1^+	1,139	1,169	1,438
C	k_1^-	1,139	1,313	2,265
E^+	σ_x	1,010	1,150	1,411
K^+	σ_x	1,480	1,872	1,730
M^+	σ_x	1,219	1,169	0,939
E^-	σ_x	1,010	0,887	0,672
K^-	σ_x	1,480	1,181	0,970
M^-	σ_x	1,219	1,191	1,192

Выводы. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов и метода малого параметра решена задача о вязкоупругом состоянии полосы с произвольными отверстиями, трещинами и выемами, в том числе с пересекающимися контурами и пересекающих прямолинейные границы полосы. При этом граничные условия на контурах отверстий, так и на прямолинейных границах удовлетворены обобщенным методом наименьших квадратов. Задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием или жестким включением и для полосы с трещиной или жестким линейным включением, причем контуры могут пересекаться и пересекать прямолинейные границы. Для указанных задач установ-

лены закономерности влияния геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения на значения напряжений, физико-механических свойств материалов и времени после приложения внешних воздействий. Полученные результаты численных исследований для частных случаев полосы в начальном состоянии совпадают с известными [16–18].

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., перераб. и доп. / С.Г. Лехницкий. – М: Наука, 1977. – 415 с.
2. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
3. Калоеров С.А. Решение основных задач теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 44–63.
4. Калоеров С.А. Решение задачи об изгибе многосвязной пьезополуплоскости с приближенным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестн. ДонГУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2024. – № 1. – С. 28–41.
5. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
6. Калоеров С.А., Полянский М.А. Основные соотношения для комплексных потенциалов электромагнитовязкоупругости и их использование при решении задач о действии сосредоточенных сил / С.А. Калоеров, М.А. Полянский // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2025. – № 6. – С. 152–175.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моултер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
10. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.
11. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
13. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
14. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
15. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.
16. Калоеров С.А. Метод последовательных приближений для анизотропной полосы с эллиптическим отверстием / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, вып. 9. – С. 73–79.

17. Калоеров С.А. Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропных слоя и полосы с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, К.Г. Хорошев // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 44–52.
18. Калоеров С.А. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37. DOI: 10.31857/S0572329922600438

S.A. Kaloerov, M.A. Polianskii

Solution of the problem of the viscoelastic state of a strip with holes, cracks and recesses.

A solution to the viscoelasticity problem is given for a strip with arbitrary rigidly supported elliptical holes (in particular, circular holes or rectilinear cracks), including those intersecting each other and intersecting rectilinear boundaries to form notches. The problem is solved using the small parameter method and complex potentials of the plane elasticity problem of an anisotropic solid. Functions holomorphic outside the holes are represented by Laurent series, while functions holomorphic within the solid strip are chosen using Laurent series for ellipses symmetric to the given ellipses relative to the rectilinear boundaries of the strip. To determine the unknown coefficients of the series from the boundary conditions on the contours of the holes and on certain segments of the rectilinear boundaries, a generalized least squares method is used to obtain overdetermined systems of linear algebraic equations solvable by the singular value decomposition method. Descriptions are given of the results of numerical studies for a strip with a central or non-central hole, or a straight cut, including those extending to straight boundaries.

Keywords: *anisotropic strip with holes, viscoelasticity, complex potentials, generalized least squares method.*

References

1. Lekhnitskii, S.G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow: Nauka. 416 p. (In Russian).
2. Kaloerov, S.A. (1966). [Stress state of an anisotropic half-plane with a finite number of elliptic holes.] *Soviet Applied Mechanics*. 2(10), 45–49.
3. Kaloerov, S.A. & Avdyushina, E.V. (1988). [Solution of the fundamental problems of elasticity theory for a multiconnected anisotropic half-plane]. *J. Math. Sciences*. 90(1), 1829–1839.
4. Kaloerov S.A. & Seroshtanov A.V. (2024). Solution of the problem of bending of a multiply connected piezoelectric half-plane with approximate satisfaction of boundary conditions on a rectilinear boundary. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 1, 28–41. (In Russian).
5. Kaloerov, S.A. & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*, 48(3), 319–331.
6. Kaloerov, S.A. & Polyansky, M.A. (2025). [Fundamental relations for complex potentials of electromagnetoviscoelasticity and their application to problems of concentrated forces]. *Mechanics of Solids*. 6, 152–175. DOI: 10.7868/S3034543X25060097. (In Russian)
7. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian)
8. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
9. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29(4), 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
10. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29(4), 1343–1362. DOI: 10.1137/05063920X
11. Muskhelishvili, N.I. (1966). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Moscow: Nauka. 708 p. (In Russian)

12. Kaloerov, S.A. (2007). Determining the intensity factors for stresses , electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media. *International Applied Mechanics*. 43(6), 631–637.
13. Yamamoto, Y. & Miya, K. (1987). *Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures*. Amsterdam: Elsevier Science-North Holland. 450 p.
14. Tian, W.-Y. & Gabbert, U. (2004). Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 23, 599–614.
15. Hou, P.F., Teng, G.-H. & Chen, H.-R. (2009). Three-dimensional Green’s function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material. *Mechanics of Materials*. 41, 329–338.
16. Kaloerov, S.A. (1977). Successive approximation of an anisotropic strip with an elliptical hole. *Soviet Applied Mechanics*. 13(9), 909–914.
17. Kaloerov, S.A., Avdyushina, E.V. & Khoroshev K.G. (2003). [An approximate method for determining the stress state of an anisotropic layer and strip with holes and cracks]. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = J. Theoret. Appl. Mech.* 38, 44–52. (In Russian).
18. Kaloerov S.A., Glushankov E.S. & Mironenko A.B. (2023). Solution of problems of elasticity theory for multiply connected half-planes and strips. *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids*. 4, 23–37. DOI: 10.31857/S0572329922600438. (In Russian).

Поступила в редакцию / Original submitted 20.05.2026.

Доработана / Revision submitted 25.05.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

УДК 539.33

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-56-76

EDN:OCZEMD



©2026. С.А. Калоеров, Е.И. Сошина

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО КРУЧЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

Приводятся основные соотношения обобщенного кручения анизотропного цилиндра. Введением функций напряжений задача об определении напряженно-деформированного состояния такого цилиндра приведена к определению этих функций из системы двух дифференциальных уравнений в частных производных 4-го и 3-го порядков. Затем дифференциальными преобразованиями указанная система сведена к двум дифференциальным уравнениям 6-го порядка. Для решения задач введены комплексные потенциалы обобщенного кручения, которые являются функциями трех обобщенных комплексных параметров. Получены выражения напряжений и перемещений через эти функции, граничные условия для определения этих комплексных потенциалов. Найдены общие представления этих функций для любого многосвязного цилиндра. Для цилиндра эллиптического сечения методом рядов получено точное решение задачи. С использованием разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и удовлетворением граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов решение задачи об обобщенном кручении многосвязного цилиндра сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Рассмотрены случаи чистого кручения, когда цилиндр имеет плоскость упругой симметрии, перпендикулярную к его оси, а также случаи ортотропного и изотропного цилиндров.

Ключевые слова: обобщенное кручение тела, цилиндрические полости и плоские трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, коэффициенты интенсивности напряжений.

Введение. В современных конструкциях в качестве элементов используются цилиндры с осевыми полостями или плоскими трещинами из анизотропных материалов. При эксплуатации таких конструкций вблизи таких полостей и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Поэтому еще в середине XIX

Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1339-6035.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Сошина Евгения Игоревна – ст. препод. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: ye.soshyna.tuvm@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-5673-1433.

Soshyna Evgeniya Igorevna – Senior Lecturer, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

века начались разработки по определению напряженного состояния цилиндрических тел при кручении [1]. Но первые задачи в этом направлении были решены лишь в 30–50-е годы XX века [2, 3], и то для цилиндров из изотропных или ортотропных материалов. Несколько позже по решению таких классов задач были опубликованы даже монографии [4–6].

Если же многосвязные цилиндры обладают общей анизотропией, то исследования по определению их напряженно-деформированного состояния не проводились.

Как показывают наши исследования, наиболее достоверные результаты при определении напряженно-деформированного состояния многосвязных цилиндров при чистом кручении получаются при использовании комплексного потенциала кручения [7], с определением этих функций обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [8]. В статьях [9, 10] для многосвязного прямолинейно-анизотропного цилиндра таким подходом решены различные задачи по кручению.

В данной статье решена задача о кручении цилиндра с произвольной анизотропией и произвольными отверстиями и трещинами. Решение получено с использованием комплексных потенциалов, разложений функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и удовлетворением граничным условиям задачи ОМНК. Рассмотрены случаи цилиндра с одной плоскостью упругой симметрии, ортотропного и изотропного цилиндров.

Обобщенное кручение цилиндрического тела. Рассмотрим длинный однородный анизотропный цилиндр постоянного поперечного сечения с $\mathcal{L}$ продольными полостями, ограниченный внешней и внутренними цилиндрическими поверхностями, образующие которых параллельны оси цилиндра (рис. 1). Отнесем цилиндр к прямоугольной системе координат $Oxyz$ с центром в его свободном конце и направлением оси Oz по оси цилиндра так, что в поперечном его сечении будем иметь многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Внешняя поверхность цилиндра и поверхности цилиндрических полостей свободны от внешних усилий, один из концов цилиндра жестко закреплен, на другом приложены усилия (напряжения $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$), приводящиеся к крутящему моменту M , т. е. их главный вектор равен нулю, главный момент $M_R(0, 0, M)$ равен:

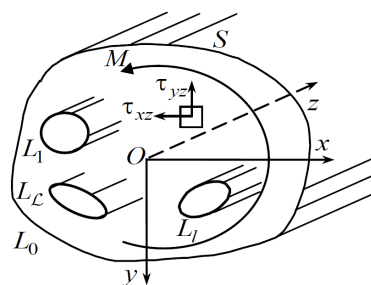


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \iint_S \tau_{xz} dx dy &= 0, \quad \iint_S \tau_{yz} dx dy = 0, \quad \iint_S \sigma_z dx dy = 0, \\ \iint_S \sigma_z y dx dy &= 0, \quad \iint_S \sigma_z x dx dy = 0, \quad \iint_S (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = M. \end{aligned} \quad (1)$$

Под действием указанных усилий цилиндр будет находиться в условиях обобщенного кручения, когда поперечные сечения поворачиваются относительно друг друга, напряжения, а, следовательно, и деформации (на основании уравнений закона Гука) не зависят от координаты z .

Для получения основных соотношений обобщенного кручения будем исходить из постановки общей трехмерной краевой задачи теории упругости, когда определение напряженно-деформированного состояния тела сводится к решению основной системы уравнений, состоящей из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

уравнений закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{34}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{35}\sigma_z + a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

и соотношений Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4)$$

где a_{ij} – коэффициенты деформации, X, Y, Z – компоненты объемных сил, при заданных граничных условиях, в частности, если на границе заданы усилия X_n, Y_n, Z_n , то при условиях

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) + \tau_{xz} \cos(nz) &= X_n, \\ \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yz} \cos(nz) &= Y_n, \\ \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) &= Z_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Для рассматриваемого случая кручения, когда напряжения и деформации не зависят от координаты z , уравнения равновесия (2) будут такими [11]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Здесь и далее принято, что объемные силы отсутствуют ($X = Y = Z = 0$).

Обозначив ε_z через D , из третьего уравнения системы (3) найдем

$$D = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}, \quad (7)$$

$$\sigma_z = \frac{D}{a_{33}} - \frac{1}{a_{33}} (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}). \quad (8)$$

Тогда уравнения (3) примут вид [11]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{14}\tau_{yz} + \beta_{15}\tau_{xz} + \beta_{16}\tau_{xy} + \frac{a_{13}}{a_{33}}D, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{24}\tau_{yz} + \beta_{25}\tau_{xz} + \beta_{26}\tau_{xy} + \frac{a_{23}}{a_{33}}D, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = D, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy} + \frac{a_{34}}{a_{33}}D, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy} + \frac{a_{35}}{a_{33}}D, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{46}\tau_{yz} + \beta_{56}\tau_{xz} + \beta_{66}\tau_{xy} + \frac{a_{36}}{a_{33}}D, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = \overline{1, 6}). \quad (10)$$

Граничные условия (5) на цилиндрических поверхностях, на которых $\cos(nz) = 0$, $X_n = Y_n = Z_n = 0$, будут такими

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) &= 0, \\ \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) &= 0, \quad \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

а на торцах цилиндра и для любого поперечного сечения должны выполняться равенства (1).

Проинтегрировав третье, четвертое и пятое уравнения системы (9), получим

$$\begin{aligned} w &= zD + W(x, y), \\ u &= -\frac{z^2}{2} \frac{\partial D}{\partial x} + z(\beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy} - \frac{\partial W}{\partial x}) + U(y), \\ v &= -\frac{z^2}{2} \frac{\partial D}{\partial y} + z(\beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy} - \frac{\partial W}{\partial y}) + V(x), \end{aligned} \quad (12)$$

где $W(x, y)$, $U(y)$, $V(x)$ – произвольные функции своих аргументов.

Подставив выражения (12) в первое, второе и шестое уравнения (9) и приравняв коэффициенты при z^2 , z и свободные члены в левых и правых частях получаемых равенств, получим [11] три уравнения для определения D

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = 0 \quad (13)$$

и две системы уравнений для определения $W(x, y)$, $U(y)$, $V(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy} - \frac{a_{35}}{a_{33}}D - \frac{\partial W}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy} - \frac{a_{34}}{a_{33}}D - \frac{\partial W}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy} - \frac{a_{35}}{a_{33}}D - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy} - \frac{a_{34}}{a_{33}}D - \frac{\partial W}{\partial y} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{14}\tau_{yz} + \beta_{15}\tau_{xz} + \beta_{16}\tau_{xy} + \frac{a_{13}}{a_{33}}D, \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{24}\tau_{yz} + \beta_{25}\tau_{xz} + \beta_{26}\tau_{xy} + \frac{a_{23}}{a_{33}}D, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} &= \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{46}\tau_{yz} + \beta_{56}\tau_{xz} + \beta_{66}\tau_{xy} + \frac{a_{36}}{a_{33}}D. \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнений (13) следует, что D является линейной функцией x и y , т. е. в общем случае

$$D = Ax + By + C, \quad (16)$$

где A, B, C – произвольные постоянные. Поэтому на основании (8) для σ_z найдем

$$\sigma_z = \frac{1}{a_{33}} (Ax + By + C) - \frac{1}{a_{33}} (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}) \quad (17)$$

или

$$a_{33}\sigma_z = Ax + By + C - a_{13}\sigma_x - a_{23}\sigma_y - a_{34}\tau_{yz} - a_{35}\tau_{xz} - a_{36}\tau_{xy}.$$

Учитывая, что в последнем равенстве все величины зависят от x и y , кроме постоянной C , заключаем, что $C = 0$. Оставшиеся постоянные A и B определим из условий на нагруженном конце цилиндра.

Интегрируя первые два равенства (14) по x и y , и удовлетворяя третьему равенству, получаем уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy} - \frac{a_{35}}{a_{33}}D + \vartheta y + w_1,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy} - \frac{a_{34}}{a_{33}}D - \vartheta x + w_2, \quad (18)$$

ϑ – постоянная, называемая круткой; w_1, w_2 – произвольные постоянные. Исключив путем дифференцирования, сложения и вычитания функции U, V, W из равенств (15) и (18), получим уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{14}\tau_{yz} + \beta_{15}\tau_{xz} + \beta_{16}\tau_{xy}) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{24}\tau_{yz} + \beta_{25}\tau_{xz} + \beta_{26}\tau_{xy}) - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{46}\tau_{yz} + \beta_{56}\tau_{xz} + \beta_{66}\tau_{xy}) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial y} (\beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy}) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (\beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy}) = -2\vartheta + \frac{Aa_{34} + Ba_{35}}{a_{33}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции напряжений. Введем функции напряжений $F(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ таким образом, чтобы уравнения равновесия (6) удовлетворялись тождественно, положив

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом оставшееся напряжение σ_z определяется по формуле (17), а подставив эти выражения τ_{xz} и τ_{yz} в последнее из равенств (1) и проинтегрировав его найдем

$$2 \iint_s \Psi(x, y) dx dy = M. \quad (21)$$

Из четвертого и пятого уравнений системы (1) получим равенства

$$\begin{aligned} B \cdot I_1 - \frac{1}{a_{33}} \iint_s (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}) y dx dy &= 0, \\ A \cdot I_2 - \frac{1}{a_{33}} \iint_s (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}) x dx dy &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$I_1 = \iint_S y^2 dx dy, \quad I_2 = \iint_S x^2 dx dy - \quad (23)$$

главные моменты инерции сечения цилиндра, причем с учетом уравнений равновесия и условий на боковой поверхности равенства (22) упростятся. Вычислив

все интегралы в равенствах (22) и решив полученную систему уравнений из (22) получим

$$A = \frac{a_{34}}{2I_2} M, \quad B = -\frac{a_{35}}{2I_1} M. \quad (24)$$

Подставив выражения (20) в уравнения (19), получим систему дифференциальных уравнений [11]

$$\begin{aligned} L_4 F + L_3 \Psi &= 0, \\ L_3 F + L_2 \Psi &= f(x, y), \end{aligned} \quad (25)$$

где L_4, L_3, L_2 – дифференциальные операторы вида

$$\begin{aligned} L_4 &= \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ L_3 &= -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_2 &= \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$f(x, y) = -2\vartheta + \frac{Aa_{34} - Ba_{35}}{a_{33}}. \quad (27)$$

На цилиндрических поверхностях функции напряжений должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Так, в случае первой основной задачи теории упругости, учитывая, что на контурах области поперечного сечения

$$\cos(nx) = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos(ny) = \mp \frac{dx}{ds}, \quad (28)$$

где верхние знаки относятся к внешнему контуру, нижние к внутренним контурам, и подставляя выражения (20) в условия (11), получим равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos(nx) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos(ny) &= 0, \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos(nx) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos(ny) &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(nx) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(ny) &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

интегрированием которых по дуге контура L_l будем иметь граничные условия

$$\frac{dF}{dx} = c_{1l}, \quad \frac{dF}{dy} = c_{2l}, \quad \Psi = c_{3l} \quad (30)$$

для случая неподкрепленной цилиндрической поверхности.

Используя функции напряжений, приведем решение задачи о кручении цилиндра прямоугольного сечения.

Кручение цилиндра прямоугольного сечения. Рассмотрим цилиндр прямоугольного сечения (рис. 2). Пусть один конец цилиндра жестко подкреплён, на другом, свободном конце приложены усилия

$$\tau_{xz} = -\tau_1 y, \quad \tau_{yz} = \tau_2 x. \quad (31)$$

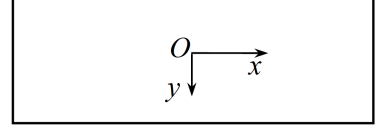


Рис. 2.

Положим функцию напряжений $F(x, y)$, равной нулю, а функцию напряжений $\Psi(x, y)$ выберем в виде полинома второй степени переменных x, y :

$$\Psi(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy. \quad (32)$$

Подставив эту функцию в формулы (20) и приравняв коэффициенты при степенях переменных

$$a = \frac{\tau_2}{2}, \quad b = -\frac{\tau_1}{2}, \quad c = 0.$$

Следовательно, функция напряжений будет такой

$$\Psi(x, y) = \frac{\tau_2 x^2 - \tau_1 y^2}{2}, \quad (33)$$

а для напряжений τ_{xz} и τ_{yz} не только на сторонах, но и во всех точках цилиндра имеют место формулы (31).

Комплексные потенциалы обобщенного кручения. Операторными преобразованиями систему (25) можно привести к двум дифференциальным уравнениям

$$(L_4 L_2 - L_3^2) F = L_3 f(x, y), \quad (34)$$

$$(L_4 L_2 - L_3^2) \Psi = L_4 f(x, y), \quad (35)$$

для функций $F(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ с соответствующими граничными условиями.

Общее решение однородного уравнения (34) будем искать в виде функции от линейной формы $z = x + \mu y$ [11]

$$F(x, y) = F(x + \mu y), \quad (36)$$

где μ – постоянная, подлежащая определению.

Подставив (36) в (34), получим уравнение

$$[l_4(\mu)l_2(\mu) - l_3^2(\mu)] F^{VI}(x + \mu y) = 0. \quad (37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_4(\mu) &= \beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22}, \\ l_3(\mu) &= \beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56})\mu^2 + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu - \beta_{24}, \\ l_2(\mu) &= \beta_{55}\mu^2 - 2\beta_{45}\mu + \beta_{44}. \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая, что производная функции $F(x + \mu y)$ не может тождественно равняться нулю, получаем, что μ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$l_4(\mu)l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0. \quad (39)$$

Как установил С. Г. Лехницкий [11], для реальных анизотропных материалов корни μ_k ($k = \overline{1, 6}$) уравнения (39) не могут быть вещественными, а являются комплексными. В силу вещественности коэффициентов уравнения (39) эти корни попарно сопряжены: те $\mu_j = \overline{\mu_j}$ ($j = \overline{1, 3}$). Учитывая, что $F(x, y)$ является вещественной функцией и общим решением уравнения (34) является сумма произвольных функций от каждого корня, получим

$$F(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3) + F_4(\overline{z_1}) + F_5(\overline{z_2}) + F_6(\overline{z_3}). \quad (40)$$

Но в силу вещественности функции $F(x, y)$ нужно принимать, что

$$F_{k+3}(\overline{z_k}) = \overline{F_k(z_k)} = \overline{F_k(z_k)} (k = \overline{1, 3}),$$

и общим решением уравнения (34) имеет вид

$$F(x, y) = F_0(x, y) + 2Re \sum_{k=1}^3 F_k(z_k), \quad (41)$$

где $F_0(x, y)$ – частное решение уравнения (34), $F_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) – аналитические функции обобщенных комплексных переменных,

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (42)$$

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_k > 0.$$

Аналогично предыдущему решением уравнения (35) будет

$$\Psi(x, y) = \psi_0(x, y) + 2Re \sum_{k=1}^3 \psi_k(z_k), \quad (43)$$

где $\psi_0(x, y)$ – частное решение уравнения (35), $\psi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) – аналитические функции обобщенных комплексных переменных (42), причем функции $\psi_k(z_k)$ связаны с функциями $F_k(z_k)$ и эту связь легко установить на основе первого уравнения системы (25). Подставив в это уравнение функции (41) и (43) без учета частных решений, получим

$$l_4(\mu_k) F_k^{IV}(z_k) + l_3(\mu_k) \psi_k'''(z_k) = 0,$$

или после интегрирования

$$\psi_k(z_k) = -\frac{l_4(\mu_k)}{l_3(\mu_k)} F_k'(z_k).$$

Учитывая равенство (39), последнее условие можно переписать и в виде

$$\psi_k(z_k) = -\frac{l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)} F'_k(z_k) + a_k z_k + b_k, \quad (44)$$

где a_k, b_k – произвольные постоянные. Тогда для функции (43) получим

$$\Psi(x, y) = \psi_0(x, y) + 2Re \sum_{k=1}^3 \lambda_k F'_k(z_k), \quad (45)$$

$$\lambda_k = \frac{l_4(\mu_k)}{l_3(\mu_k)} = \frac{l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)} = -\frac{\beta_{15}\mu_3^3 - (\beta_{14} + \beta_{56})\mu_3^2 + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu_3 - \beta_{24}}{\beta_{11}\mu_3^4 - \beta_{16}\mu_3^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu_3^2 - 2\beta_{23}\mu + \beta_{22}}. \quad (46)$$

Подставив функции (41) и (45) в выражения (20), для напряжений получим

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = 2Re \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k, \mu_k \lambda_k, -\lambda_k) \Phi'_k(z_k), \quad (47)$$

где

$$\Phi_k(z_k) = F'_k(z_k). \quad (48)$$

Подставив напряжения (47) в уравнения (15) и (18), и проинтегрировав получим выражения для перемещений

$$(u, v, w) = 2Re \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, w_0), \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} p_k &= \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} + \beta_{14}\mu_k \lambda_k - \beta_{15}\lambda_k - \beta_{16}\mu_k, \\ q_k &= \beta_{12}\mu_k + \frac{\beta_{22}}{\mu_k} + \beta_{24}\lambda_k - \frac{\beta_{25}}{\mu_k} \lambda_k - \beta_{26}, \\ r_k &= \beta_{14}\mu_k + \frac{\beta_{24}}{\mu_k} + \beta_{44}\lambda_k - \frac{\beta_{45}\lambda_k}{\mu_k} - \beta_{46}. \end{aligned} \quad (50)$$

Частное решение первого уравнения системы (25) выберем в виде

$$F_0(x, y) = 0. \quad (51)$$

Частное решение второго уравнения системы (25) выберем в виде полинома второй степени. Исходя из постоянства функции (27), выберем это частное решение в виде полинома второй степени $\psi_0(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ и найдем его коэффициенты из равенства (27). Окончательно для частного решения получаем

$$\psi_0(x, y) = \gamma z_3 \bar{z}_3. \quad (52)$$

где γ – неизвестный коэффициент, определяемый из равенства

$$\gamma(a_{44} - a_{45}(\mu_3 + \bar{\mu}_3) + a_{55}\mu_3\bar{\mu}_3) = -1. \quad (53)$$

Поэтому

$$\gamma = \frac{1}{(a_{44} - a_{45}(\mu_3 + \overline{\mu_3}) + a_{55}\mu_3\overline{\mu_3})} = -\frac{a_{55}}{2(a_{44}a_{55} - a_{45}^2)} \quad (54)$$

или

$$\gamma = -\frac{1}{2a_{55}\beta_3^2}. \quad (55)$$

Граничные условия для определения комплексных потенциалов. Из равенств (30), (45) и (48) для случая первой основной задачи имеем

$$2Re \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \lambda_k) \Phi_k(t_k) = (c_{1l}, c_{2l}, c_{3l} - \psi_0(t_3)), \quad (56)$$

где c_{1l}, c_{2l}, c_{3l} – постоянные, произвольные для одного из контуров L_l области поперечного сечения. В случае второй основной задачи, когда на цилиндрической поверхности задаются перемещения $u = u^*(s)$, $v = v^*(s)$, $w = w^*(s)$, из (49). Получаем граничные условия в виде

$$2Re \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k) \Phi_k(z_k) = (u^* + \omega_3 y + u_0, v^* - \omega_3 x + v_0, w^* - w_0), \quad (57)$$

в котором ω_3 – угол жесткого поворота; u_0, v_0 – жесткие смещения пластинки.

Кручение сплошного цилиндра эллипсоидального сечения. Если область поперечного сечения является односвязной областью, то неизвестные коэффициенты рядов комплексных потенциалов можно определять методом рядов. Пусть поперечным сечением цилиндра является эллипс с контуром L_0 и полуосями a_0, b_0 . Тогда функции $\Phi_k(z_k)$, голоморфные в областях S_k можно представить рядами

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_{kn}(z_k) \quad (58)$$

по полиномам Фабера [13]

$$P_{k0}(z_k) = 1, \quad P_{kn}(z_k) = \zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n},$$

где ζ_{k0} – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = R_{k0} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right),$$

$$R_{k0} = \frac{a_0 + i\mu_k b_0}{2}, \quad m_{k0} = \frac{a_0 - i\mu_k b_0}{2R_{k0}}.$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{k0}| \geq 1$ на внешности L_{k0} областей S_k .

Подставив функции (58) в граничные условия (56) с учетом того, что на границе $\zeta_{k0} = \sigma$, $\overline{\zeta_{k0}} = \frac{1}{\sigma}$, получим

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1, \mu_k, \lambda_k) \left[a_{kn} \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) \right] + (1, \overline{\mu_k}, \overline{\lambda_k}) \left[\overline{a_{kn}} \left(\frac{1}{\sigma^n} + \overline{m_{k0}^n} \sigma^n \right) \right] \right\} = \\ = \left(0, 0, -\gamma R_{30} \overline{R}_{30} \left(\frac{m_0}{\sigma^2} + \overline{m_0} \sigma^2 \right) \right). \quad (59)$$

Приравняв в равенствах (59) коэффициенты при одинаковых степенях σ , получим, что $a_{k0n} = 0$ при $n \neq 2$ и систему

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ (1, \mu_k, \lambda_k) m_{k0}^2 a_{k2} + (1, \overline{\mu_k}, \overline{\lambda_k}) \overline{a_{k2}} \right\} = (0, 0, -\gamma R_{30} \overline{R}_{30} m_0). \quad (60)$$

Решив систему (60), найдем коэффициенты a_{k2} ($k = 1, 2, 3$). Для комплексных потенциалов, их производных и напряжений найдем следующие выражения:

$$\Phi_k(z_k) = a_{k2} P_{2n}(z_k) = a_{k2} \left(\zeta_{k0}^2 + \frac{m_{k0}^2}{\zeta_{k0}^2} \right) = a_{k2} \frac{z_k^2}{R_{k0}^2},$$

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{2a_{k2}}{R_{k0}^2} z_k,$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = 2Re \sum_{k=1}^3 \left(\mu_k^2, 1, -\mu_k, \mu_k \lambda_k, -\lambda_k \right) \frac{2a_{k2}}{R_{k0}^2} z_k. \quad (61)$$

Общие представления комплексных потенциалов для многосвязного цилиндра. Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из заданной конечной области S , аффинным преобразованием (42). Области S_k ограничены контурами L_{kl} , соответствующим контурам L_l в области S . Исходя, из условий непрерывности и однозначности напряжений и перемещений можно найти общее представление комплексных потенциалов. В силу непрерывности основных характеристик непрерывными в S_k , вплоть до границы, будут и функции $\Phi_k(z_k)$ и их производные. Что же касается однозначности напряжений и перемещений, в задачах кручения она влияет на вид функций не так, как в других классах задач теории упругости.

Пусть контур L'_l окружает только контур отверстия L_l , не задевая контуров других отверстий (рис. 3). При полном обходе по контуру L'_l функции $\Phi_k(z_k)$ в силу произвольности контура L'_l могут получать постоянные приращения $\Delta_{kl} = 2\pi i A_{kl}$ (коэффициент $2\pi i$ введен для удобства записи последующих соотношений), т.е. содержать слагаемые вида

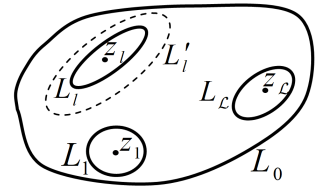


Рис. 3.

$A_{kl} \ln(z_k - z_{kl})$, z_{kl} – точка, соответствующая при аффинных преобразованиях (42) произвольной точке z_l внутри контура L_l . Тогда в общем случае $\Phi_k(z_k)$ имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \Phi_{k0}(z_k), \quad (62)$$

где $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, однозначные (голоморфные) в областях S_k .

В задачах кручения главные векторы приложенных к любым контурам L_l , а, следовательно, и L'_l , усилий равны нулю. Следовательно, для приращений на основе (56) имеют место соотношения

$$2Re \sum_{k=1}^3 ((1, \mu_k, \lambda_k)) \Delta_{kl} = (0, 0, 0)$$

или равенства

$$2Re \sum_{k=1}^3 ((1, \mu_k, \lambda_k)) i A_{kl} = (0, 0, 0), \quad (63)$$

из которых следует, что $A_{kl} = 0$.

Следовательно, комплексные потенциалы кручения $\Phi_k(z_k)$ являются функциями, голоморфными в областях S_k и их можно представить в виде сумм

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k), \quad (64)$$

где $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные внутри L_{k0} , $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) – функции, голоморфные вне отверстий L_{kl} областей S_k .

Функции $\Phi_{k0}(z_k)$, голоморфные внутри контура L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера [12, 13]

$$\Phi_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn} P_{kn}(z_k),$$

а после перевода полиномов $P_{kn}(z_k)$ в степенные ряды [13] степенными рядами вида

$$\Phi_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z_k^n. \quad (65)$$

Функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) голоморфны вне отверстий L_{kl} и их можно разложить в ряды Лорана. При этом контуры L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) лучше представить эллипсами или линейными разрезами, а контуры отверстий другой конфигурации аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов. Тогда поперечным сечением цилиндра будет многосвязная область, ограниченная внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полюсами a_l , b_l , причем в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов

L_l и направлениями осей вдоль осей эллипсов их параметрические уравнения будут такими

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (66)$$

а в основной системе координат Oxy имеют вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (67)$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l} , y_{0l} – координаты начал локальных систем координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки.

Отобразив конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [14] по формулам

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}, \end{aligned} \quad (69)$$

и разложив функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) в ряды Лорана

$$\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n},$$

комплексный потенциал задачи окончательно запишем в виде

$$\Phi_k(z_k) = a_{k00} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (70)$$

где

$$\varphi_{k0n}(z_k) = z_k^n, \quad \varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

a_{kln} – неизвестные постоянные. Эти постоянные будем определять из граничных условий на контурах L_l поперечного сечения S цилиндра. В случаях многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из граничных условий (56) дифференцированием по дуге контура, имеют вид:

$$2Re \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \lambda_k) \delta_k \Phi'_k(z_k) = (0, 0, -\gamma (\overline{\delta_3 z_3} + \delta_3 \overline{z_3})), \quad (71)$$

в котором $\delta_k = dz_k/ds$;

$$\Phi'_k(z_k) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \delta_k \varphi'_{kln}(z_k), \quad (72)$$

$$\varphi'_{k0n}(z_k) = n z_k^{n-1},$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, L}).$$

Граничным условиям (71) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [8, 15, 16]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (72). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2Re \sum_{k=1}^3 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (1, \mu_k, \lambda_k) \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = (0, 0, -\gamma (\overline{\delta_3 t_{3lm}} + \delta_3 \overline{t_{3lm}}))$$

$$(p = \overline{0, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}). \quad (73)$$

Систему (73) будем решать методом сингулярных разложений [17, 18]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $\Phi'_k(z_k)$ будут известны и по ним можно вычислять основные характеристики напряженно-деформируемого состояния цилиндра. Напряжения на произвольной площадке с нормалью n и касательной s находим по формулам

$$\tau_{nz} = \tau_{yz} \cos ny + \tau_{xz} \cos nx,$$

$$\tau_{sz} = \tau_{yz} \cos nx - \tau_{xz} \cos ny. \quad (74)$$

а в случае, когда контур L_l является трещиной (эллипсом с полуосью $b_l = 0$), также коэффициенты интенсивности напряжений продольного сдвига $k_3^{\pm}$ [19]

$$k_3^{\pm} = \sqrt{a_l} Re \left((\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n \frac{a_{3ln}}{R_{3l}} \right), \quad (75)$$

в которой верхний знак относится к правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний знак – к левому его концу.

Основные соотношения кручения цилиндра для частных случаев его материала. Если находящееся в состоянии кручения цилиндрическое тело имеет одну плоскость упругой симметрии, перпендикулярную к его оси, то

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0. \quad (76)$$

В этом случае кручение называется чистым [11] и приведенные соотношения резко упрощаются.

Так, равенства (7) – (9) перейдут в такие:

$$D = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy}; \quad (77)$$

$$\sigma_z = \frac{D}{a_{33}} - \frac{1}{a_{33}} (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy}); \quad (78)$$

$$\varepsilon_x = \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{16}\tau_{xy} + \frac{a_{13}}{a_{33}}D,$$

$$\varepsilon_y = \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{26}\tau_{xy} + \frac{a_{23}}{a_{33}}D,$$

$$\varepsilon_z = D,$$

$$\gamma_{yz} = \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz}, \quad \gamma_{xz} = \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz},$$

$$\gamma_{xy} = \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{66}\tau_{xy} + \frac{a_{36}}{a_{33}}D. \quad (79)$$

В связи с этим оператор $L_3 = 0$ и из системы дифференциальных уравнений (25) получим два отдельных уравнения:

$$L_4 F = 0, \quad (80)$$

$$L_2 \Psi = -2\vartheta. \quad (81)$$

Если удовлетворяющую однородному дифференциальному уравнению (80) и независимым от координат граничным условиям (30) функцию $F(x, y)$ принять равной нулю, то решение задачи о чистом кручении сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка (81) при оставшемся от (30) граничном условии

$$\Psi = c_{3l}. \quad (82)$$

При таком подходе из выражений (30) будем иметь

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,$$

откуда следует, что все деформации (79), кроме γ_{xz} , γ_{yz} , также равны нулю:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0,$$

что в теории кручения изотропных стержней принято по известному принципу Сен-Венана. Тогда для γ_{xz} , γ_{yz} на основе (3) с учетом того, что $u = v = 0$, имеют место выражения

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} = a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} = a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}. \quad (83)$$

Продифференцировав первое из этих равенств по x и отняв от него продифференцированное по y второе соотношение, с учетом равенства (81) получим уравнение

$$a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2\vartheta \quad (84)$$

для определения функции напряжений $\Psi(x, y)$.

Если общее решение однородного уравнения (84) искать в виде функции от линейной формы $\Psi(x, y) = \Phi_3(x + \mu y)$, то будем иметь, что это общее решение $\Psi(x, y) = 2Re\Phi_3(z_3)$, где

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (85)$$

$\mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3$, $\beta_3 > 0$ – один из корней характеристического уравнения

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0. \quad (86)$$

Тогда общим решением неоднородного уравнения (84) будет

$$\Psi(x, y) = \psi_0(x, y) + 2Re\Phi_3(z_3), \quad (87)$$

где $\psi_0(x, y)$ – частное решение уравнения (35), $\Phi_3(z_3)$ – аналитическая функция обобщенного комплексного переменного (42).

Для напряжений и перемещения получим выражения

$$(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 2Re(\mu_3, -1)(\Phi'_3(z_3) + \gamma\bar{z}_3). \quad (88)$$

$$w = 2Re r_3 \Phi_3(z_3) + w_0. \quad (89)$$

При этом на основе (50)

$$r_3 = a_{44}\lambda_3 - \frac{a_{45}\lambda_3}{\mu_3}. \quad (90)$$

Граничные условия для определения функции $\Phi_3(z_3)$ получаются из (82) с учетом выражения (71) и имеют вид

$$2Re\Phi_3(t_3) = -\gamma t_3 \bar{t}_3 + c_l, \quad (91)$$

где c_l – постоянная, произвольная на одном из контуров, например, на L_0 , где можно принять $c_0 = 0$.

В общем случае многосвязной области на основе (70) для комплексного потенциала чистого кручения имеем

$$\Phi_3(z_3) = a_{300} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \quad (92)$$

где

$$\varphi_{30n}(z_3) = z_3^n, \quad \varphi_{3ln}(z_3) = \frac{1}{\zeta_{3l}^n} (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

ζ_{3l} – переменные, получаемые из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{3l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{3l} [14]:

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l} \left(\zeta_{3l} + \frac{m_{3l}}{\zeta_{3l}} \right); \quad (93)$$

$$\begin{aligned} z_{3l} &= x_{0l} + \mu_3 y_{0l}, \\ R_{3l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{3l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2R_{3l}}; \end{aligned} \quad (94)$$

a_{3ln} – неизвестные постоянные. Эти постоянные определим из граничных условий на контурах L_l поперечного сечения цилиндра.

Как и в других случаях, в случае многосвязной области в поперечном сечении цилиндра этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из граничных условий (71) дифференцированием по дуге контура, имеют вид:

$$2Re\delta_3\Phi'_3(z_3) + \gamma(\overline{\delta_3}z_3 + \delta_3\overline{z_3}) = 0, \quad (95)$$

в котором $\delta_3 = dz_3/ds$;

$$\Phi'_3(z_3) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \delta_3 \varphi'_{3ln}(z_3), \quad (96)$$

$$\varphi'_{30n}(z_3) = n z_3^{n-1}, \quad \varphi'_{3ln}(z_3) = -\frac{n}{R_{3l} \zeta_{3l}^{n-1} (\zeta_{3l}^2 - m_{3l})} \quad (l = \overline{1, L}).$$

Граничным условиям (95) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [8, 15, 16], выбирая на каждом из контуров L_p систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (96). И для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2Re \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_3 \varphi'_{3ln}(t_{3lm}) a_{3ln} = -\gamma(\overline{\delta_3} t_{3lm} + \delta_3 \overline{t_{3lm}}) \quad (p = \overline{0, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}). \quad (97)$$

После решения системы уравнений (97) методом сингулярного разложения постоянные a_{3ln} , а, следовательно, и функции (96) будут известными и можно найти основные напряжения (88), а по ним и касательные напряжения (74) на произвольной площадке с нормалью n и касательной s . При этом, если некоторое эллиптическое отверстие L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину длины

$2a_l$ (полуось $b_l = 0$), то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности напряжений по формуле (75).

Если цилиндр изготовлен из ортотропного материала (имеет еще одну плоскость упругой симметрии, параллельную оси), то во всех приведенных в этом пункте формулах нужно считать, что $a_{45} = 0$. В этом случае корни уравнения (84) будут чисто мнимыми $\mu_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}$ и записи основных соотношений несколько упростятся.

Если цилиндр изотропный, то дополнительно к предыдущему, $a_{55} = a_{44} = 1/G$, где G – модуль сдвига, $\mu_{1,2} = \pm i$, и основные соотношения будут еще проще.

Выводы. Приведены основные соотношения обобщенного кручения анизотропного цилиндра. Введением функций напряжений задача об определении напряженно-деформированного состояния такого цилиндра приведена к определению этих функций из системы двух дифференциальных уравнений в частных производных 4-го и 3-го порядков. Дифференциальными преобразованиями указанная система сведена к двум дифференциальным уравнениям 6-го порядка. Для решения задач в этом случае введены комплексные потенциалы обобщенного кручения, которые являются функциями трех обобщенных комплексных переменных. Получены через эти функции выражения напряжений и перемещений, найдены граничные условия для определения этих комплексных потенциалов, общие представления функций. Для цилиндра эллиптического сечения методом рядов получено точное решение задачи. С использованием разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и удовлетворением граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов решение задачи сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Рассмотрены частные случаи, когда для материала цилиндра имеют место наличие одной плоскости упругой симметрии, ортотропия или изотропия.

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. *Saint-Venant B.* Memoire sur la torsion des prismes. Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, Institut de France. Sciences math. et phys. 14, Paris, 1856, 233-560.
2. *Найман М.И.* Напряжения в балке с криволинейным отверстием / М.И. Найман. – М.: Изд-во ЦАГИ, 1937. – 86 с. – (Тр. ЦАГИ. – 1937. – Вып. 313.)
3. *Степанов Р.Д.* Кручение круглого бруса, ослабленного продольными цилиндрическими круговыми полостями / Р.Д. Степанов, Д.И. Шерман // Инж. сб. – 1952. – Т. 11. – С. 127–150.
4. *Арутюнян Н.Х.* Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. – М: Физматгиз, 1963. – 686 с.
5. *Weber C.* Torsionstheorie / C. Weber, W. Gunther. – Braunschweig: Vieweg; Berlin: Akademie-Verlag, 1958. – 307 p.
6. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней / С.Г. Лехницкий. – М: Наука, 1971. – 240 с.
7. *Горянская Е.С.* Кручение анизотропных стержней с полостями и плоскими трещинами / Е.С. Горянская, С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. –

- С. 36–43
8. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
 9. Калоеров С.А. Кручение анизотропного цилиндра с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, Е.И. Сошина // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – № 6 (52). – С. 45–51.
 10. Калоеров С.А. Кручение анизотропного цилиндра с продольными полостями и плоскими трещинами / С.А. Калоеров, Е.И. Сошина, А.Б. Мироненко // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2024. – № 2. – С. 108–122. – DOI: 10.5281/zenodo.13752268.
 11. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
 12. Смирнов В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. – М.; Л.: – Наука, 1964. – 438 с.
 13. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / С.А. Калоеров. – К.; Донецк: Вища шк. – 1983. – 160 с.
 14. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
 15. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин – М.: Наука, 1977. – 304 с.
 16. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Мулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
 17. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
 18. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.
 19. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

S.A. Kaloerov, E.I. Soshyna

Basic relations of generalized torsion of elastic bodies.

Basic relations of generalized torsion for an anisotropic cylinder are presented. By introducing stress functions, the problem of determining the stress–strain state of such a cylinder is reduced to finding these functions from a system of two partial differential equations of the 4th and 3rd orders. Using differential transformations, this system is then reduced to two differential equations of the 6th order. To solve the problems, complex potentials of generalized torsion are introduced, which are functions of three generalized complex parameters. Expressions for stresses and displacements in terms of these functions, as well as boundary conditions for determining these complex potentials, are obtained. General representations of these functions for an arbitrary multiply connected cylinder are found. For a cylinder of elliptical cross-section, an exact solution of the problem is obtained using the series method. Using expansions of holomorphic functions into Laurent series and Faber polynomials, and satisfying the boundary conditions by the generalized least squares method, the problem of generalized torsion of a multiply connected cylinder is reduced to an overdetermined system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. Cases of pure torsion are considered, when the cylinder has a plane of elastic symmetry perpendicular to its axis, as well as cases of orthotropic and isotropic cylinders.

Keywords: *generalized torsion of a body, cylindrical cavities and plane cracks, complex potentials, generalized least squares method, stress intensity factors.*

References

1. Saint-Venant, B. (1856). Memoire sur la torsion des prismes. *Memoires presentes par divers savants a l'Academie des sciences, Institut de France. Sciences mathematiques et physiques*, 14, 233–560. (In French).
2. Naiman, M.I. (1937). [Stresses in a beam with a curvilinear hole]. *Proceedings of the Central Aero-Hydrodynamic Institute*. 313, 1–86. (In Russian)
3. Stepanov, R.D. & Sherman, D.I. (1952). [Torsion of a circular bar weakened by longitudinal cylindrical cavities]. *Inzhenernyi Sbornik = Engineering Collection*, 11, 127–150. (In Russian)
4. Arutyunyan, N.Kh. & Abramyan, B.L. (1963). *Torsion of elastic bodies*. Moscow: Fizmatgiz. 686 p. (In Russian)
5. Weber, C. & Gunther, W. (1958). *Torsionstheorie*. Braunschweig: Vieweg; Berlin: Akademie-Verlag. 307 p. (In German).
6. Lekhnitskii, S.G. (1971). *Torsion of anisotropic and inhomogeneous rods*. Moscow: Nauka. 240 p. (In Russian)
7. Goryanskaya, E.S. & Kaloerov, S.A. (1996). [Torsion of anisotropic rods with cavities and planar cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 26, 36–43. (In Russian)
8. Kaloerov, S.A. & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*. 48(3), 319–331.
9. Kaloerov, S.A., Avdyushina, E.V. & Soshina, E.I. (2013). [Torsion of an anisotropic cylinder with holes and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 6(52), 45–51. (In Russian)
10. Kaloerov, S.A., Soshina, E.I., & Mironenko, A.B. (2024). Torsion of an anisotropic cylinder with longitudinal cavities and planar cracks. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 2, 108–122. DOI: 10.5281/zenodo.13752268. (In Russian)
11. Lekhnitskii, S.G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. 2nd ed., rev. and enl. Moscow: Nauka. 415 p. (In Russian)
12. Smirnov, V.I. (1964). *Constructive Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow; Leningrad: Nauka. 438 p. (In Russian)
13. Kosmodamianskii, A.S. & Kaloerov, S.A. (1983). *Temperature stresses in multiply connected plates*. Kyiv; Donetsk: Vyshcha Shkola. 160 p. (In Russian)
14. Kaloerov, S.A. & Goryanskaya, E.S. (1995). [Two-dimensional stress state of a multiply connected anisotropic body with cavities and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 25, 45–56. (In Russian)
15. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian)
16. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
17. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29(4), 1322–1342. DOI: 10.1137/050639193.
18. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29(4), 1343–1362. DOI: 10.1137/05063920X
19. Kaloerov, S.A. (2007). Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media. *International Applied Mechanics*. 43(6), 631–637.

Поступила в редакцию / Original submitted 15.05.2026.

Доработана / Revision submitted 20.05.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.837:622.838

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-77-86

EDN:UONJZG



©2026. Н.Я. Азаров, Ф.М. Голубев, И.А. Украинский, Н.С. Болоцкая

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МНОГОКРАТНОЙ ПОДРАБОТКЕ НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В работе выполнена оценка влияния обусловленной отработкой горных выработок техногенной пустотности на упругие параметры горного массива. Оценка проведена на основе обработки данных геофизических исследований. В результате разработана модель, отражающая влияние многократной подработки на параметры основных зон сдвижения массива при различных горно-геологических и горнотехнических условиях, изучено влияние величины междупластья отрабатываемых горизонтов на параметры сдвижения.

Ключевые слова: подработка угленородного массива, свойства горных пород, Донецко-Макеевский угленосный район, лава, мульда сдвижения, граничные углы, модуль Юнга, конечно-элементное моделирование.

Азаров Николай Янович – докт. геол.-мин. наук, проф., научный консультант РАНИМИ, Донецк, e-mail: ranimi@ranimi.org.

Azarov Nikolay Yanovich – Doctor of Geological and Mineralogical Sciences, Professor, Scientific Consultant, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, зав. отд. геодинамических и геофизических процессов РАНИМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru, ORCID: 0009-0008-5093-4916.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

Украинский Игорь Александрович – инженер отд. геодинамических и геофизических процессов РАНИМИ, Донецк, e-mail: igorukrainskii70@mail.ru.

Ukrainsky Igor Aleksandrovich – Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

Болоцкая Наталья Сергеевна – лаборант отд. геодинамических и геофизических процессов РАНИМИ, Донецк, e-mail: nataliabolotsckaya@yandex.com.

Boloczkaya Natal'ya Sergeevna – Laboratory Assistant, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geodynamic and Geophysical Processes.

Введение. Задача прогнозирования деформаций земной поверхности при подработке угольных пластов возникла на ранних этапах развития горного дела, когда были отмечены случаи массового повреждения зданий и сооружений. В середине XX века, на основе обобщения многолетних натурных наблюдений на шахтах основных угольных бассейнов, были разработаны нормативные методы прогноза [1, 2]. Эти методы базируются на эмпирических зависимостях и учитывают лишь ключевые геометрические параметры выемочного поля (длину лавы, мощность пласта, глубину разработки). Однако по мере вовлечения в отработку участков со сложным геологическим строением и при многократной подработке (последовательной выемке нескольких сближенных пластов) стало очевидным, что нормативные документы не учитывают горнотехническую специфику отработки конкретного участка. Как следствие, пространственно-временное перераспределение зон деформаций в толще горного массива не находит в них адекватного отражения. Маркшейдерские наблюдения систематически фиксируют значительные расхождения между фактическими оседаниями и расчётными значениями, полученными по нормативным методикам. Это приводит к непредсказуемым последствиям — вовлечению в зону влияния горных работ промышленных и социально значимых объектов, для которых подработка не предусматривалась проектом [3, 4].

Разработка и внедрение новых методик на базе современных геоинформационных систем и методов математического моделирования (в частности, КЭМ) позволяет существенно повысить качество прогнозов и минимизировать негативное воздействие горных работ на инфраструктуру и окружающую среду [5].

В условиях многократной подработки физико-механические характеристики массива претерпевают необратимые изменения. Как показывают исследования [6], проницаемость горных пород может возрастать на несколько порядков. Более того, интенсивные последовательные деформации растяжения и сжатия приводят к разупрочнению даже скальных пород, снижению их сопротивляемости сдвигу и, как следствие, к росту вероятности геодинамических явлений — оползней, обвалов, внезапных выбросов [7, 8]. Конечно-элементные модели, в отличие от эмпирических или аналитических, позволяют непосредственно исследовать эволюцию полей напряжений и деформаций, отслеживать зоны концентрации сдвиговых и растягивающих напряжений, что критически важно для прогноза локализации очагов разрушения.

Повышение точности прогнозирования деформаций требует перехода к комплексному подходу, который интегрирует не только геометрию выемочного поля (длины лавы, мощности пласта, глубины разработки), но и структурно-литологические особенности массива, а также полный набор физико-механических характеристик вмещающих пород (модуля упругости, коэффициента Пуассона, сцепления, угла внутреннего трения). Наиболее перспективным инструментом реализации такого подхода является конечно-элементное моделирование (КЭМ). Преимущества КЭМ перед аналитическими методами заключаются в следующем: возможен учёт сложной геометрии границ пластов, тектонических наруше-

ний и зон трещиноватости; а также учет неоднородных свойств пород по всему объёму модели; пошаговое воспроизведение динамики очистных работ и многократной подработки.

В связи с указанным перспективным направлением является создание трёхмерных геомеханических конечно-элементных моделей, воспроизводящих сложную структурную неоднородность горного массива и динамику изменения его напряжённо-деформированного состояния в процессе ведения горных работ. Такие модели позволяют прогнозировать не только величину оседания земной поверхности, но и распределение деформаций в толще массива по глубине. Это создаёт основу для установления количественной причинно-следственной связи между горнотехническими параметрами отработки (скорости продвижения лавы, наличия целиков, порядка выемки) и характеристиками сдвижения дневной поверхности, что исследовано в данной работе.

Постановка и метод решения задачи. Для однократно подработанного массива представляет интерес решение задачи выявления корреляционной зависимости между степенью техногенной нарушенности (трещиноватости) горного массива и его упругими свойствами. Интенсификация трещинообразования приводит к редукции динамического модуля упругости, что, в соответствии с теорией распространения упругих возмущений в сплошных средах, обуславливает значимое снижение скорости распространения продольных сейсмических волн (V_p). Количественно данная взаимосвязь описывается классическим выражением для скорости продольной волны в изотропном упругом теле.

Важнейшим интегральным параметром, характеризующим нарушенность пород и влияющим на их фильтрационные и деформационные свойства, является пустотность, объединяющая как природную и техногенную трещиноватость, и поровое пространство. Показатель пустотности связан с показателями скорости продольных волн через понятие добротности, которое определяется по формуле:

$$Q = 100 \frac{V_{p.тр.}}{V_{p.ск.}} \quad (1)$$

где $V_{p.ск.}$ – расчетная скорость Р-волн в массиве; $V_{p.тр.}$ – измеренная скорость Р-волн в трещиноватом массиве. При этом параметр Q определяется из равенства

$$Q = 100 - 1,6K_{п} - 22K_{п.тр.} \quad (2)$$

в котором $K_{п}$ – коэффициент общей пористости, принимаемый для условий отработки, свойственных Донецко-Макеевскому угленосному району, равным 5 %; $K_{п.тр.}$ – коэффициент трещинной пустотности [14].

Сравнительные графики изменения с глубиной расчетных и измеренных скоростей распространения упругих волн приведены на рисунке 1.

Зафиксированное отклонение и является величиной изменения свойств горного массива над выработкой. Анализ результатов обработки геофизических исследований, выполненных на горном отводе шахты им. С.М. Кирова (рис. 1, б),

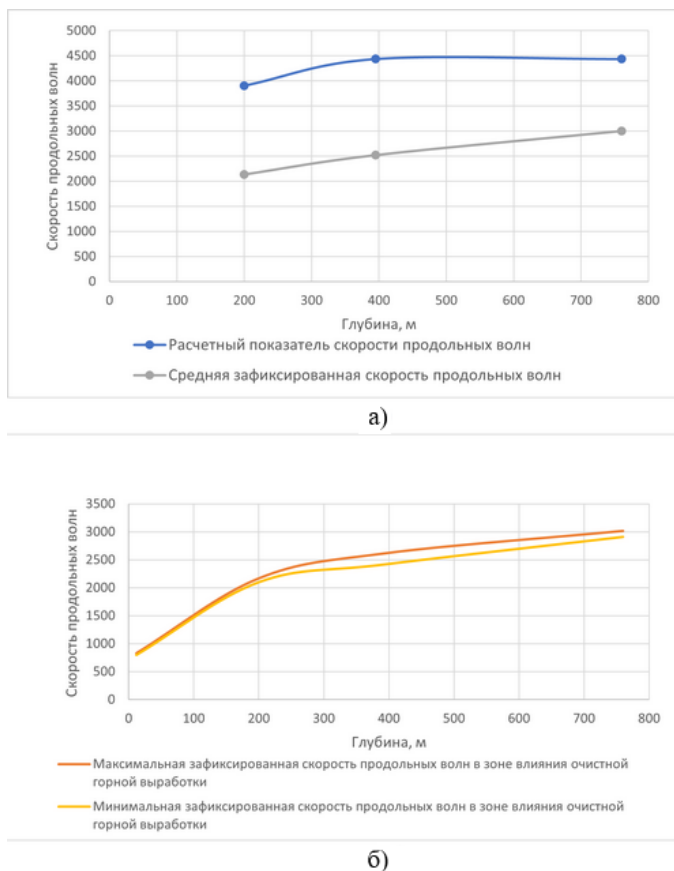


Рис. 1. Сравнение расчетных (а) и измеренных (б) скоростей распространения упругих волн

показывает, что при первичной подработке массива по одному пласту максимальное влияние очистной выработки на физико-механические свойства пород ограничивается интервалом до 100 м над лавой. В этой зоне относительное изменение контролируемого параметра составляет 8–10 %, что соответствует расчётной высоте зоны водопроводящих трещин. Вместе с тем характер представленных на рисунке 1 зависимостей свидетельствует о распространении техногенного влияния выработки на глубину до 200 м. Это позволяет сделать вывод о наличии в интервале глубин 200–350 м пород с повышенными значениями показателя техногенной пустотности.

Приведённые данные получены для условий однократной подработки. В случае многократной подработки аналогичные изменения физического состояния массива могут проявляться в значительно более широких масштабах.

Прикладная значимость установленных зависимостей позволяет перейти к прямой количественной оценке прогнозных параметров сдвижения на основе объективных физико-механических свойств конкретного породного массива. Это

позволяет детализировать и регионально дифференцировать нормативные значения граничных углов; повышать точность прогнозных расчетов зон влияния горных работ, границ мульд сдвижения и величин деформаций; заложить основу для геомеханического районирования угольного бассейна, что критически важно для планирования безопасной подработки объектов инфраструктуры в сложных горно-геологических условиях Донбасса.

Выявленная закономерность служит основой для совершенствования методов прогноза сдвижений путем учета реальной пространственной изменчивости прочностных свойств горного массива, связанной с многократной подработкой и метаморфической зональностью бассейна, что возможно реализовать при помощи конечно-элементного моделирования.

При этом все литолого-стратиграфические пакки в модели можно имитировать как самостоятельные слои, обладающие ортотропией физико-механических свойств. Такой подход является ключевым для корректного воспроизведения поведения осадочных пород, в которых свойства вдоль и поперек линии напластования могут отличаться в несколько раз. Ортотропию материалов можно моделировать введением связи между модулями упругости в вертикальном (E_z) и горизонтальном (E_x , E_y) направлениях. Это соотношение является типичным и обосновано рядом геомеханических факторов.

Для разработки конечно-элементной модели влияния многократной подработки на параметры сдвижения последовательно имитировалось наличие над выработкой нескольких зон разуплотнения в виде трапеций согласно схеме на рисунке 2.

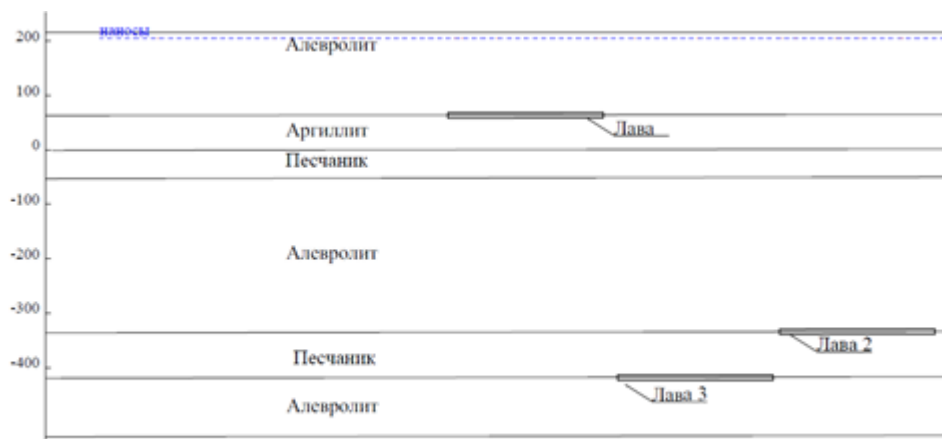


Рис. 2. Схема моделирования многократной подработки

При этом расстояние между лавой 2 и лавой 3 изменялось от 150 до 50 метров. В результате проведенного моделирования были получены результаты, представленные на рисунке 3.

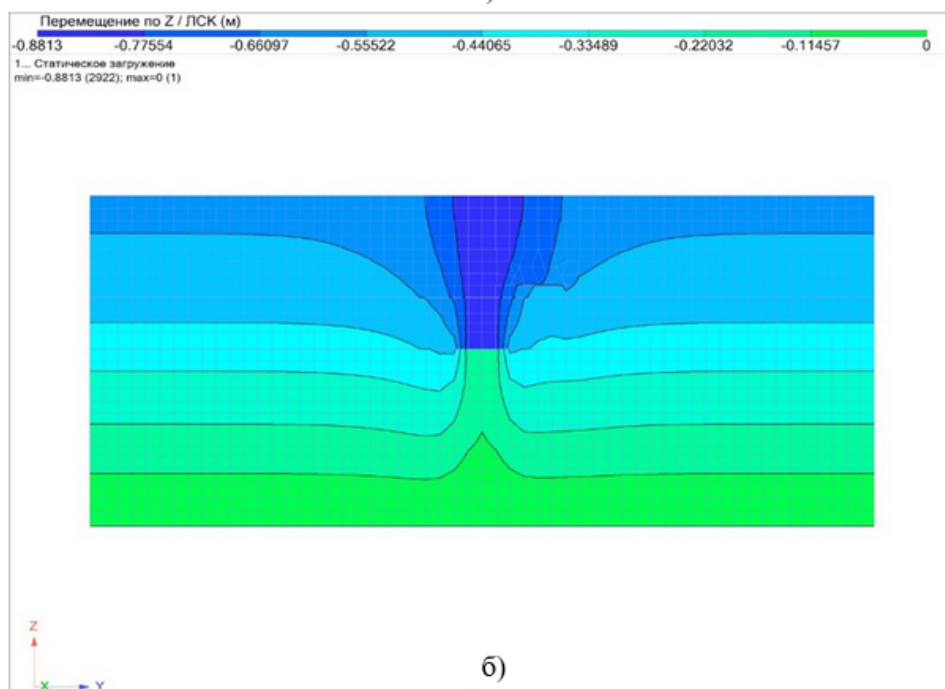
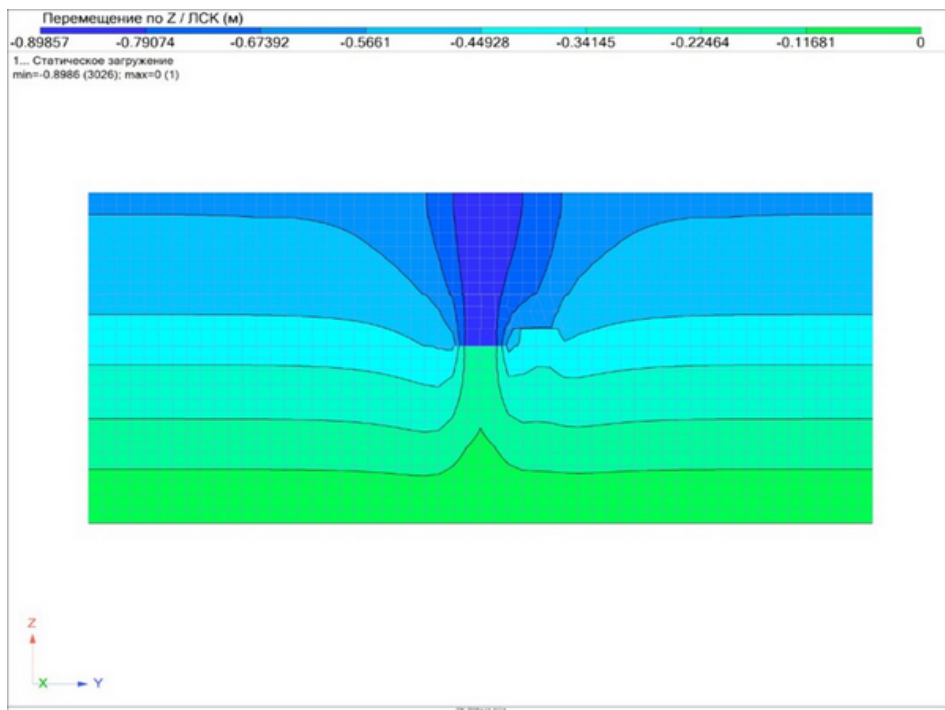


Рис. 3. Изменение параметров сдвижения при различной величине междупластья, отработанной ранее и обрабатываемой выработкой: а) – 50 м; б) – 150 м

Суммарный анализ результатов моделирования показывает, что оседания при различных случаях подработки распределяются согласно рисунку 4.

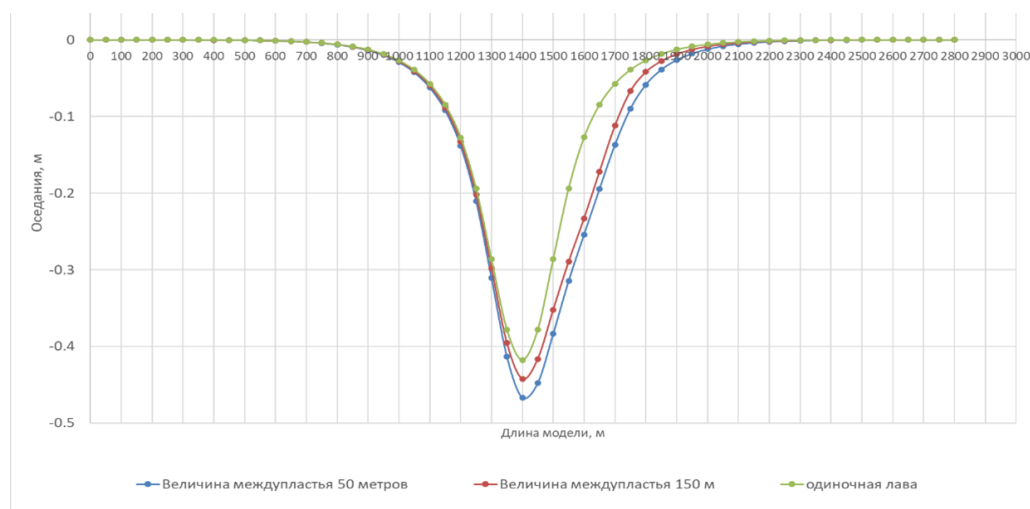


Рис. 4. Оседания в моделях при различной величине междупластья отработанной ранее и обрабатываемой выработкой

Описание результатов численных исследований. На основе численных исследований методом конечно-элементного моделирования, а также лабораторных испытаний образцов горных пород были получены данные, позволившие установить ряд закономерностей. В частности, подтверждено, что многократная подработка массива (повторное воздействие очистными работами на одни и те же толщи пород) приводит к существенному изменению его упругих свойств. Это, в свою очередь, оказывает прямое влияние на параметры сдвижения земной поверхности – изменяются величины оседаний, смещений и форма мульды сдвижения.

Одним из ключевых факторов, определяющих характер деформирования как массива, так и дневной поверхности, является величина междупластья – расстояния между горизонтами, на которых ведутся очистные работы, и ранее отработанными горизонтами. Установлено, что при увеличении этого расстояния происходит нелинейное изменение параметров деформаций земной поверхности. Особенно ярко это проявляется в зонах, где над действующей очистной выработкой присутствуют диагонально ориентированные области разуплотнения пород, сформированные на вышележащих горизонтах в результате предыдущих горных работ. В таких условиях при возрастании мощности междупластья с 50 до 150 м размеры зоны влияния горных работ увеличиваются дополнительно на 50–100 м, что свидетельствует о перераспределении напряжений и вовлечении в процесс деформирования более обширных областей массива.

Выводы. Таким образом, на основе обработки геофизических измерений на горном отводе шахты им. С.М. Кирова подтверждено, что при первичной подра-

ботке массива по одному пласту максимальное техногенное изменение физико-механических свойств пород (снижение скорости продольных волн на 8–10%) ограничивается интервалом до 100 м над лавой, что соответствует расчётной высоте зоны водопроводящих трещин. Вместе с тем влияние горной выработки прослеживается до глубины 200 м, а в интервале 200–350 м фиксируются породы с повышенной техногенной пустотностью.

Разработанная конечно-элементная модель с ортотропными свойствами литолого-стратиграфических пачек и возможностью задания зон разуплотнения в виде трапеций позволяет воспроизвести динамику многократной подработки при варьировании расстояния между лавами от 50 до 150 м. Установлено, что с увеличением мощности междупластья размеры зоны влияния горных работ возрастают дополнительно на 50–100 м, что свидетельствует о перераспределении напряжений и вовлечении в деформирование более обширных областей массива.

Как следует из исследований, многократная подработка приводит к существенному изменению упругих свойств пород, что прямо влияет на параметры сдвижения земной поверхности — на величины оседаний, смещений и форму мульды сдвижения. При наличии диагонально ориентированных зон разуплотнения от вышележащих горизонтов наблюдается нелинейное изменение деформаций в зависимости от междупластья.

Результаты исследований позволяют детализировать и регионально дифференцировать нормативные значения граничных углов, повышать точность прогнозных расчётов зон влияния горных работ, заложить основу для геомеханического районирования угольных бассейнов, что позволяет обоснованно подходить к оценке безопасности подработки промышленных и социально значимых объектов в сложных горно-геологических условиях Донбасса.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ FRSR-2024-0002).

Список литературы

1. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом: ГСТУ 101.00159226.001-2003: Введ. 01.01.2004. – К., 2004. – 128 с.
2. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях: ПБ 07-269-98: утв. Госгортехнадзором России 16.03.1998: Введ. 01.10.1998. – М., 1998. – 188 с.
3. СП 21.13330.2012. СНиП 2.01.09-91. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах: Введ. 01.01.2013. – М.: Стандартинформ, 2012. – 47 с.
4. Бугаёва Н.А. Определение параметров деформаций земной поверхности по стохастическим мульдам оседания / Н.А. Бугаёва, К.В. Яремчук, В.В. Назимко // Проблемы горного давления. – 2009. – № 17. – С. 192–225.
5. Грищенко Н.Н. Пространственное моделирование зон многократной подработки горными выработками участков со сложной структурой рельефа / Н.Н. Грищенко, В.Б. Скаженик, Е.А. Бардакова, И.В. Чернышенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3(88). – С. 89–99.
6. Дрибан В.А. Фильтрационная модель многократно подработанного массива / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // Сб. науч. тр. Донбас. гос. тех. ун-та. – 2017. – № 7(50). – С. 31–37.
7. Машенко А.В. Специальные разделы механики грунтов и механики скальных грунтов

- / А.В. Мащенко, А.Б. Пономарев, Е.Н. Сычкина. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – 176 с.
8. *Посыльный Ю.В.* Методика исследования влияния толщи горных пород на максимальное оседание земной поверхности / Ю.В. Посыльный // Неделя горняка. – 2007. – № 2. – С. 115–123.
 9. *Мельников Н.В.* Справочник (кадастр) физических свойств горных пород / Н.В. Мельников, В.В. Ржевский, М.М. Протодяконов. – М.: Недра. – 1975. – 279 с.
 10. Геология месторождений угля и горючих сланцев СССР / И.А. Кузнецова, В.В. Лагутина, М.Л. Левенштейна [и др.]. – М., 1963. – 1168 с.
 11. *Гречухин В.В.* Петрофизика угленосных формаций / В.В. Гречухин. – М.: Недра, 1990. – 472 с.
 12. Методы и средства решения задач горной геомеханики / Г.Н. Кузнецов, К.А. Ардашев, Н.А. Филатов [и др.]. – М.: Недра, 1987. – 248 с.
 13. Моделирование проявлений горного давления / Г.Н. Кузнецов, М.Н. Будько, Ю.И. Васильев [и др.]. – Л.: Недра, 1968. – 280 с.
 14. *Иванов Л.А.* Петроскоростной разрез Донецкого угольного бассейна / Л.А. Иванов, В.В. Туманов, И.Ю. Николаев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Геология. – 2025. – № 3. – С. 41–50.

N.Ya. Azarov, F.M. Golubev, I.A. Ukrainsky, N.S. Bolotskaya
Modeling of geomechanical processes during multiple mining operations based on physical and geological model data.

This study assessed the impact of man-made voids caused by mine workings on the elastic parameters of the rock mass. The assessment was based on the processing of geophysical survey data. As a result, a model was developed reflecting the influence of multiple undermining on the parameters of the main displacement zones of the rock mass under various geological and mining conditions. The influence of the interbed spacing between the mined horizons on displacement parameters was studied.

Keywords: *undermining of the coal-rock mass, rock properties, Donetsk-Makeevka coal-bearing region, longwall face, subsidence trough, boundary angles, Young's modulus, finite element modeling.*

References

1. *Rules for undermining buildings, structures, and natural objects during underground coal mining: GSTU 101.00159226.001–2003.* (2004). Kyiv. 128 p. (in Russian)
2. *Rules for the protection of structures and natural objects from harmful effects of underground mining at coal deposits: PB 07-269-98.* (1998). Moscow. 188 p. (in Russian)
3. *SP 21.13330.2012 SNiP 2.01.09-91. Buildings and structures on undermined territories and subsiding soils.* (2012). Moscow: Standartinform. 47 p. (in Russian)
4. Bugaeva, N.A., Yaremchuk, K.V. & Nazimko, V.V. (2009). Determination of ground surface deformation parameters using stochastic subsidence troughs. *Problems of Rock Pressure*. 17, 192–225. (in Russian)
5. Grishchenkov, N.N., Skazhenik, V.B., Bardakova, E.A. & Chernyshenko, I.V. (2024). Spatial modeling of zones of repeated undermining by mine workings in areas with complex terrain structure. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 3(88), 89–99. (in Russian)
6. Driban, V.A. & Dubrova, N.A. (2017). Filtration model of a repeatedly undermined rock mass. *Proceedings of Donbass State Technical University*, 7(50), 31–37. (in Russian)
7. Mashchenko, A.V., Ponomarev, A.B. & Sychkina, E.N. (2014). *Special sections of soil mechanics and rock mechanics*. Perm: Perm National Research Polytechnic University. 176 p. (in Russian)
8. Posylny, Yu.V. (2007). Methodology for studying the influence of rock strata on maximum surface subsidence. *Mining Week*, 2, 115–123. (in Russian)

9. Melnikov, N.V., Rzhovsky, V.V., & Protodyakonov, M.M. (1975). *Handbook (cadastre) of physical properties of rocks*. Moscow: Nedra. 279 p. (in Russian)
10. Kuznetsova, I.A., Lagutina, V.V., Levenshtein, M.L., et al. (1963). *Geology of coal and oil shale deposits of the USSR*. Moscow. 1168 p. (in Russian)
11. Grechukhin, V.V. (1990). *Petrophysics of coal-bearing formations*. Moscow: Nedra. 472 p. (in Russian)
12. Kuznetsov, G.N., Ardashev, K.A., Filatov, N.A., et al. (1987). *Methods and tools for solving problems of mining geomechanics*. Moscow: Nedra. 248 p. (in Russian)
13. Kuznetsov, G.N., Budko, M.N., Vasiliev, Yu.I., et al. (1968). *Modeling of rock pressure manifestations*. Leningrad: Nedra. 280 p.(in Russian)
14. Ivanov, L.A., Tumanov, V.V. & Nikolaev, I.Yu. (2025). Petrovelocity section of the Donetsk coal basin. *Bulletin of Voronezh State University. Series: Geology*, 3, 41–50. (in Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 22.04.2026.

Доработана / Revision submitted 14.05.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

УДК 622.837:622.838

doi:10.24412/0136-4545-2026-2-87-98

EDN:TYRNRV



©2026. Л.А. Иванова, Т.И. Рахманова, Е.А. Бардакова, В.П. Сажнев

ОЦЕНКА СТРУКТУРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ЗДАНИЙ ПРИ ЛИКВИДАЦИИ УГОЛЬНЫХ ШАХТ В УСЛОВИЯХ ЦЕНТРАЛЬНОГО РАЙОНА ДОНБАССА

Выполнено обобщение результатов обследований подработанных зданий г. Горловки. Исследование основано на натурных наблюдениях за деформациями зданий и сооружений, подработанных горными выработками, и расположенных на участках со сложным рельефом. На основе анализа инструментальных замеров и визуальной оценки повреждений установлены закономерности совместного влияния мезорельефа и активизации сдвижения земной поверхности от затопления выработок ликвидированных шахт на объекты различного типа.

Ключевые слова: типовые структурные деформации зданий, отработка крутых пластов угля, мезорельеф земной поверхности, повреждение объектов поверхности, горные работы, подземная добыча угля.

Введение. При разработке угольных месторождений под застроенными территориями возникают деформации в виде неравномерных вертикальных оседа-

Иванова Лариса Александровна – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: ivlarisa213@yandex.ru.

Ivanova Larisa Aleksandrovna – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Рахманова Татьяна Ивановна – ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: rahmanovatata@yandex.ru.

Rakhmanova Tatiana Ivanovna – Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Бардакова Елена Александровна – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru, ORCID: 0009-0009-9446-4925.

Bardakova Elena Aleksandrovna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Сажнев Вячеслав Петрович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: vyacheslav.p.sazhnev@yandex.ru.

Sazhnev Vyacheslav Petrovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

ний и горизонтальных сдвижений земной поверхности [1–13]. Неравномерность оседаний, характерная для районов с крутым залеганием пород, обуславливает значительные наклоны и кривизну поверхности, а неравномерность горизонтальных сдвижений порождает деформации растяжения и сжатия в конструкциях подработанных объектов. Эти процессы не прекращаются после очистных работ и повторно активизируются при затоплении выработок, вызывая дополнительные деформации подработанных объектов [2, 3].

В Центральном районе Донбасса (ЦРД) при отработке крутых пластов помимо плавных деформаций формируются сосредоточенные – уступы (локальные перепады высот) и горизонтальные сдвиги. Их образование связано с контактами пород разной крепости, выходами пластов или тектонических нарушений, а также с многократной подработкой и затоплением выработок. Объекты на трассах уступов получают значительные повреждения [14, 15]. При высоте уступа более 50 мм возникают локальные перегибы, срезы кладки, трещины с большим раскрытием, вплоть до частичного разрушения несущих элементов. Как показано в работах [16, 17], дополнительным фактором, провоцирующим увеличение деформаций, является мезорельеф (неровности с перепадами высот до десятков метров и уклонами до 3–5°). Установлено, что даже небольшие уклоны изменяют распределение деформаций в основании подработанных объектов и вызывают дополнительные усилия в конструкциях, особенно при совместном действии сосредоточенных деформаций.

Таким образом, научный и практический интерес представляет установление закономерностей совместного влияния сложного рельефа и подземной добычи крутых пластов на здания с разными конструктивными характеристиками. Цель данной работы – анализ влияния уступов, горизонтальных сдвигов и мезорельефа на структурные деформации зданий ЦРД. Объект исследования – зоны влияния горных работ ликвидированной шахты «Кочегарка» в г. Горловке с длительным периодом эксплуатации и последующим затоплением выработок. Актуальность обусловлена дефицитом жилого фонда на подработанных территориях, усугублением повреждений из-за боевых действий и необходимостью разработки мер защиты объектов в условиях сложного рельефа. Решение этих задач невозможно без анализа натурных данных о повреждениях реальных зданий, чему и посвящено данное исследование.

Постановка и метод решения задачи. Для обоснования мер защиты зданий на подработанных территориях со сложным рельефом необходимо количественно оценить влияние на объекты поверхности сосредоточенных деформаций (уступов и горизонтальных сдвигов), активизируемых при затоплении выработок. Для этого следует провести анализ геологических и горнотехнических условий эксплуатации объектов исследования, а также выполнить натурные наблюдения за деформациями зданий.

Территория горного отвода шахты «Кочегарка» приурочена к центральной части южного крыла Главной антиклинали и находится в границах плотной застройки Центрально-Городского района Горловки. В геологическом разрезе

свит среднего карбона (C_2^5 , C_2^6 , C_2^7), разрабатывавшихся шахтой, преобладают песчаники, сланцы (песчаные, глинистые, углисто-глинистые) и известняки. Четвертичные отложения имеют мощность от нуля до пяти метров.

Западная часть шахтного поля отличается относительно пологим залеганием пород с мелкими тектоническими разрывами и углами падения от 40° до 68° . Шахта вела отработку 28 угольных пластов. Полное или частичное извлечение запасов производилось на горизонтах 640, 750, 860, 970 и 1080 м. Именно эти горизонты, находящиеся в режиме затопления последнее десятилетие, обеспечили наибольшее влияние на объекты поверхности (рис. 1).

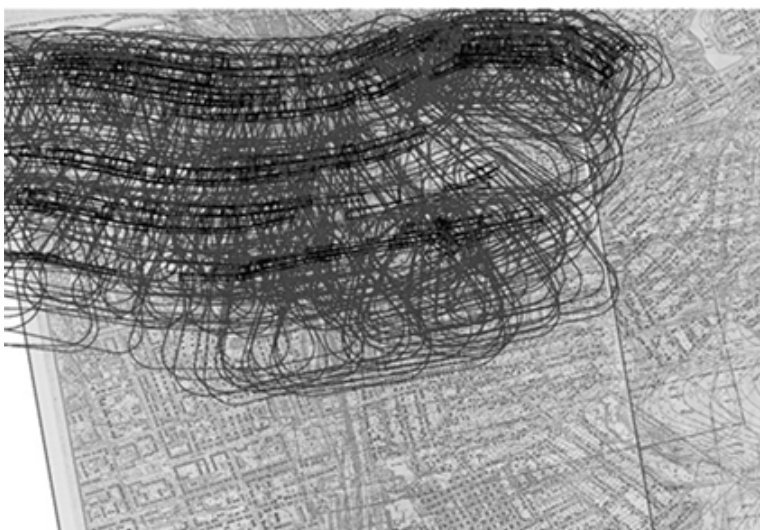


Рис. 1. Зоны влияния части горных выработок шахты «Кочегарка» на земную поверхность

Особенностью процесса сдвижения при крутом залегании угольных пластов является развитие сосредоточенных деформаций в виде уступов. Согласно [1], характер развития уступа при многократной подработке можно определить как расчетный показатель высоты уступа h_y в миллиметрах с применением выражения:

$$h_y = h_{ys}, \quad (1)$$

где h_{ys} – суммарная высота уступа, определяемая по формуле:

$$h_s = \sum_{n=1}^N h_{yn}, \quad (2)$$

где h_{yn} – расчетная высота уступа от одной n -й горной выработки, определяемая в соответствии с [1], мм; n – номер горной выработки в порядке ее отработки; N – число горных выработок.

Ожидаемую высоту уступа h_y вычисляют по формуле:

$$h_y = a|i_z|l\sin^2\alpha \leq 0,3\eta_m, \quad (3)$$

где i_z – максимальная величина ожидаемого или вероятного наклона в месте прогнозирования уступа, рассчитанная на ту же стадию отработки пластов, что и уступы, безразмерная величина; l – расстояние между уступами, (определяется по данным наблюдений или принимается равным 30 м в районе залегания углей марки Д и Г, 20 м – в районе залегания углей марки К, Ж, ОС и 15 м – в районе залегания антрацитов), м; α – угол падения свиты пластов, градус; η_m – максимальное ожидаемое оседание земной поверхности, рассчитанное на ту же стадию отработки пластов, м; a – эмпирический коэффициент, который вычисляют по формуле:

$$a = \frac{1}{1,69 - 0,02\alpha}, \quad (4)$$

Наклон i_y на участке между уступами вычисляют по формуле:

$$i_y = ai_z. \quad (5)$$

Сосредоточенные деформации земной поверхности возникают в двух случаях: над выходами под наносы контактов пород с резким различием коэффициента крепости (например, песчаников или известняков с глинистыми сланцами), а также над выходами под наносы отрабатываемых угольных пластов либо тектонических нарушений.

Деятельность шахты «Кочегарка» была остановлена в 1997 г. по причине сложных горно-геологических условий, характерных для ее шахтного поля. В процессе ликвидации шахты вода в полном объеме через прямые гидравлические связи поступала на шахту имени В.И. Ленина, где функционировал водоотливной комплекс. Впоследствии затопление выработок обеих шахт происходило единым контуром. Уровень воды на шахте «Кочегарка» 23 апреля 2025 года достиг отметки +71,8 м.

Поскольку горный массив на рассматриваемом участке ранее неоднократно подрабатывался, его обводнение привело к активизации деформаций земной поверхности, что, в свою очередь, спровоцировало дальнейшее развитие сосредоточенных деформаций вдоль уже сформировавшихся при подработке трасс уступов.

Результаты натурных наблюдений подтверждают, что трассы уступов на поверхности ориентированы согласно простиранию залегания пластов. Вдоль этих трасс в основании зданий, находящихся на подработанной территории, возникают зоны сосредоточенных деформаций, что сопровождается появлением характерных повреждений, как на фасадах, так и во внутренних помещениях (рис. 2).

Выполнен анализ имеющихся результатов обследования 102-ух зданий, расположенных в Центрально-Городском районе г. Горловки в пределах горного

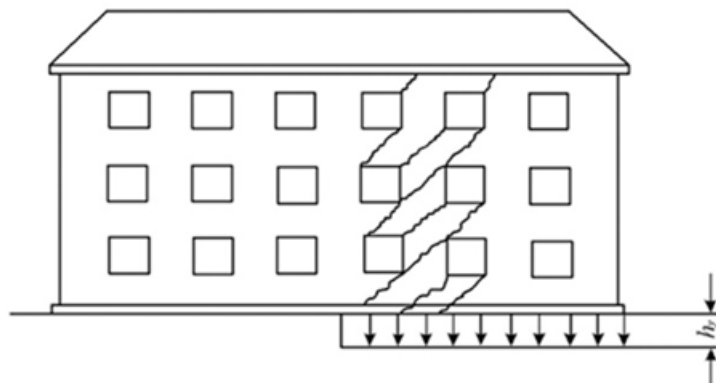


Рис. 2. Повреждение здания в зоне влияния сосредоточенных деформаций

отвода ликвидированной шахты «Кочегарка». По результатам проведенного обследования были отобраны здания, имеющие различную этажность и конструктивные особенности, а также характерные повреждения от влияния сосредоточенных деформаций земной поверхности и расположенные на участках с мезорельефом земной поверхности с уклоном от двух до трех градусов.

Рассмотрены результаты обследования двухэтажных, трехэтажных, четырехэтажных и пятиэтажных жилых домов, расположенных по трассам уступов, установленным при инструментальных наблюдениях за сдвижением и деформациями земной поверхности в период отработки вышележащих горизонтов, имеющих характерные повреждения конструкций.

При обследовании жилых домов фиксировались все имеющиеся деформации и повреждения конструктивных элементов: наличие, расположение и величина раскрытия трещин в стенах; отклонение стен в вертикальной плоскости; изгиб кладки стен и цоколя в горизонтальной и вертикальной плоскостях; состояние кладки и штукатурки стен и цоколя; перекосы оконных и дверных проемов; срез кладки под опорными частями перемычек; изгиб оконных перемычек и поясов кладки под окнами.

Двухэтажные жилые дома построены, в основном, в 1950–1953 гг. Фундаменты домов ленточные каменные, стены шлакоблочные и кирпичные, оштукатуренные, перекрытия из щитового наката по деревянным балкам или железобетонные, лестничные площадки и марши деревянные или железобетонные. Все двухэтажные жилые дома построены без конструктивных мер защиты от влияния горных выработок, так как первые нормативные документы, которые регламентировали вопросы проектирования и строительства зданий и сооружений на угленосных площадях введены в действие позже – «ВТУ 01-58» [18] в 1958 г., а «СН 289-64 [19] в 1964 г.» В некоторых домах выполнены температурные или осадочные швы шириной 20–30 мм.

Трехэтажные жилые дома построены в 1950–1954 гг. Фундаменты домов ленточные каменные, стены шлакоблочные и кирпичные, перекрытия, лестничные

площадки и марши железобетонные и деревянные, над подвалами перекрытия железобетонные. Дома не имеют конструктивных мер защиты от влияния горных выработок.

Четырехэтажные и пятиэтажные жилые дома построены в 1957–1963 гг. Фундаменты домов ленточные каменные или из бетонных блоков, стены из кирпича или из крупных бетонных блоков, перекрытия из железобетонных плит, лестничные площадки и марши железобетонные. Здания имеют деформационные швы, разделяющие их на отсеки, у части зданий имеются цокольные железобетонные пояса.

Четырехэтажные и пятиэтажные жилые дома имеют комплекс конструктивных мер защиты, который не рассчитан на восприятие сосредоточенных деформаций земной поверхности.

Меры защиты зданий были рассчитаны на легкие и средние горно-геологические условия: радиус кривизны R менее или равен 7 км и относительные горизонтальные деформации ε менее или равны $5,0 \times 10^{-3}$. Меры защиты зданий не могли обеспечить эксплуатационную пригодность жилых домов при воздействии сосредоточенных деформаций основания, так как первые нормативные документы, содержащие рекомендации по проектированию зданий на воздействие сосредоточенных деформаций введены в действие только в 1971 г. – «РСН 227-71» [20] и «СНиП II-A. 14-71» [21].

Для большого количества зданий были выполнены ремонтные работы с заделкой имеющихся трещин в стенах цементным раствором, для части зданий выполнено усиление конструктивных элементов (фундаментов – железобетонными обоймами, стен – металлическими поясами и др.). Мезорельеф земной поверхности в данном районе небольшой, уклон составляет $2 - 3^\circ$. При уклоне поверхности менее 3° влияние мезорельефа на здания незначительное.

Анализ полученных результатов. Из анализа повреждений подработанных двухэтажных, трёхэтажных и многоэтажных зданий при отработке крутых угольных пластов следует, что в двухэтажных шлакоблочных, а также двух- и трёхэтажных кирпичных зданиях характерными деформациями являются: образование наклонных и вертикальных трещин по трассам сосредоточенных деформаций с раскрытием до 10–15 мм (рис. 3, 4), отклонение стен от вертикали до 100 мм, перегибы кладки стен и цоколя, перекосы оконных и дверных проёмов, повреждение штукатурного слоя. При ориентации зданий вдоль линии уклона рельефа раскрытие трещин увеличивается, что связано с влиянием мезорельефа.

В четырех и пятиэтажных жилых домах с кирпичными стенами характерными повреждениями являются: образование наклонных и вертикальных трещин на отдельных участках стен по трассам сосредоточенных деформаций земной поверхности с максимальным раскрытием до 10–15 мм (рис. 5, 6), часть трещин заделана цементным раствором. Отмечается отклонение стен от вертикали и перекосы оконных и дверных проёмов по трассам сосредоточенных деформаций. При этом если здания расположены вдоль линии уклона рельефа земной

поверхности, отмечается увеличение раскрытия трещин в стенах и увеличение раскрытия деформационных швов, что можно отнести к влиянию мезорельефа земной поверхности.



Рис. 3. Трещины в стене левого фасада жилого дома по ул. Свердлова, 21



Рис. 4. Трещина в стене левого фасада жилого дома по ул. Свердлова, 26



Рис. 5. Трещины в стене главного фасада жилого дома по ул. Горького, 33б



Рис. 6. Трещины в стене главного фасада жилого дома по ул. Первомайской, 31в

В крупноблочных четырехэтажных и пятиэтажных жилых домах характерными повреждениями являются: трещины в швах между блоками и в отдельных блоках стен с максимальным раскрытием до 5–10 мм, трещины в заделке швов между стеновыми блоками раскрытием 2–5 мм, повреждение защитного слоя бетона в блоках междуэтажных поясов с оголением и коррозией арматуры по трассам сосредоточенных деформаций земной поверхности (рис. 7).



Рис. 7. Повреждения стены дворового фасада жилого дома по ул. Свердлова, 32

В результате выполненных исследований установлено, что при отработке крутых угольных пластов в условиях Центрального геолого-промышленного района Донбасса и последующем затоплении горных выработок, на земной поверхности формируются сосредоточенные деформации в виде уступов и горизонтальных сдвигов. Трассы этих деформаций совпадают с простиранием залегания пластов и являются зонами повышенного повреждения зданий и сооружений.

Установлено, что существовавшие на момент строительства (1950-1963 гг.) конструктивные меры защиты зданий были рассчитаны на плавные деформации (радиус кривизны до 7 км, относительные горизонтальные деформации до $5,0 \times 10^{-3}$) и не учитывали воздействие сосредоточенных деформаций. Нормативные документы, регламентирующие проектирование зданий на таких деформациях, появились лишь в 1971 г., поэтому большинство обследованных зданий не имеют соответствующей защиты.

Дополнительным фактором, провоцирующим повреждения объектов поверхности, является мезорельеф земной поверхности – при уклоне $2 - 3^\circ$ и расположении зданий вдоль линии склона рельефа происходит увеличение раскрытия трещин и деформационных швов.

Выводы. На основании анализа результатов обследования и определения технического состояния зданий Центрально-Городского района города Горловки установлены типовые (характерные) повреждения зданий на подрабатываемых территориях с мезорельефом и сосредоточенными деформациями земной поверхности от совместного влияния сложной структуры рельефа, подземной добычи крутых пластов угля и активизации сдвижения земной поверхности при затоплении горных выработок закрытых шахт. Установлено, что 1) для двухэтажных шлакоблочных зданий без конструктивных мер защиты типовыми повреждениями от подработки являются: наклонные и вертикальные трещины на отдельных участках стен, перекосы оконных и дверных проемов по трассам сосредоточенных деформаций земной поверхности (уступов); 2) для трех-, четырех- и пятиэтажных кирпичных зданий с конструктивными мерами защиты типовыми повреждениями от подработки являются: наклонные трещины на отдельных участках стен, перекосы оконных и дверных проемов по трассам сосредоточенных деформаций земной поверхности (уступов); 3) для трех-, четырех- и пятиэтажных крупноблочных зданий с конструктивными мерами защиты типовыми повреждениями от подработки являются: трещины в швах между блоками и в отдельных блоках стен; повреждение защитного слоя бетона в блоках междуэтажных поясов с оголением и коррозией арматуры по трассам сосредоточенных деформаций земной поверхности (уступов); 4) влияние мезорельефа для зданий без конструктивных мер защиты заключается в увеличении раскрытия трещин в стенах, если здания расположены (ориентированы в плане) вдоль линии уклона рельефа земной поверхности. Для зданий с конструктивными мерами защиты дополнительно отмечено увеличение раскрытия деформационных швов, образование вертикальных трещин с двух сторон заделки швов, раскрытие не заделанных швов; 5) типовые повреждения зданий от влияния сосредоточенных деформаций земной поверхности при подработке и активизации процесса сдвижения в процессе затопления горных выработок на территориях с мезорельефом необходимы для эффективного применения мер защиты подрабатываемых объектов поверхности в сложных горно-геологических условиях.

Исследование проводилось в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ FRSR-2026-0007).

Список литературы

1. ПБ 07-269-98. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях / Утв. постанов. Госгортехнадзора России от 16.03.1998 № 13. – Введ. 1998-03-16. – М., 1998. – 188 с.
2. Ларченко В.Г. Скорректированная методика расчета ожидаемых сдвижений и деформаций земной поверхности при подземной разработке угольных пластов / В.Г. Ларченко, Е.В. Коваленко, Н.В. Хоружая // Тр. РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41). – Т. 2 – С. 18–33.
3. Борисенко Э.В. Прогноз сдвижений земной поверхности на основе исследования деформационных свойств водонасыщенных горных пород / Э.В. Борисенко, Ф.М. Голубев, С.А. Попович // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2024. – № 5. – С. 73–79.
4. Кузьмин Д.К. Вертикальные смещения земной поверхности при разработке нефтегазовых месторождений / Д.К. Кузьмин // Тр. РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41). – Т. 2 – С. 124–138.
5. Литвинский Г.Г. Геомеханические модели процессов сдвижения подработанного горного массива / Г.Г. Литвинский // Тр. РАНИМИ. – Донецк, 2024. – № 3 (41). – Т. 1 – С. 101–128.
6. Иофис М.А. Сдвижение горных пород и земной поверхности при разработке месторождений полезных ископаемых: учебное пособие / М.А. Иофис, А.В. Гришин, Е.Н. Есина. – М.: РУДН, 2011. – 103 с.
7. Писаренко М.В. Прогноз ожидаемых сдвижений и деформаций земной поверхности с помощью ГИС технологий / М.В. Писаренко // Горн. информ.-аналит. бюл. – 2009. – № 12. – С. 310–315.
8. Антонов В.А. Методология обнаружения и прогнозирования горизонтальной деформации земной поверхности смежных блоков горных пород по данным GPS мониторинга / В.А. Антонов // Горн. информ.-аналит. бюл. – 2021. – № 5 (2). – С. 16–29.
9. Khau L. V. Determination of parameters of the underground inclined coal seam mining in Quang Ninh basin under protected objects on the surface / L.V. Khau // J. Mining Institute. – 2017. – Vol. 226. – P. 412–419.
10. Zhang Y. Study on stability evaluation of goaf based on AHP and EWM-taking the northern new district of Liaoyuan city as an example / Y. Zhang, Z. Wen, J. Zhang, J. Huang // Scientific reports. – 2024. – Vol. 14. – DOI: 10.21203/-4447967/v1.
11. Qi J. Study on the restoration of ecological environments in mining area based on GIS technology / J. Qi, Y. Zhang, J. Zhang, C. Wu // Sustainability. – 2023. – Vol. 15 (7). – DOI: 10.3390/su15076128.
12. Hou H. Spatial estimate of ecological and environmental damage in an underground coal mining area on the Loess Plateau: Implications for planning restoration interventions / H. Hou, Z. Ding, S. Zhang, S. Guo, Y. Yang, Z. Chen, J. Mi, X. Wang // J. Cleaner Production. – 2021. – Vol. 287. – DOI: 10.1016/j.jclepro.2020.125061.
13. Xu Z Research on monitoring and stability evaluation of ground subsidence in gypsum mine goaf / Z. Xu, W. Xu, Z. Zhu, J. Zhao // Frontiers in Environmental Science. – 2023. – Vol. 10. – DOI: 10.3389/fenvs.2022.1097874.
14. Шнеер В.Р. Локальные меры защиты зданий города Горловка после ликвидации шахты «Кочегарка» / В.Р. Шнеер, Л.А. Иванова // Тр. РАНИМИ. – 2018. – № 5 (20). – С. 102–114.
15. Грищенков Н.Н. Определение безопасных условий эксплуатации жилых и общественных зданий на горных отводах закрывающихся шахт г. Горловки / Н.Н. Грищенков, Е.Т. Сушко, Ф.М. Голубев, Л.А. Иванова, Т.И. Рахманова, В.П. Сажнев // Тр. РАНИМИ. – 2023. – № 20–21 (35–36). – С. 119–137.
16. Иванова Л.А. Влияние мезорельефа на деформации земной поверхности при подработке города Кировское / Л.А. Иванова, Ф.М. Голубев, Н.С. Федосова // Тр. РАНИМИ. – 2023. – № 22–23 (37–38). – С. 27–35.
17. Иванова Л.А. Анализ деформированного состояния зданий при подработке на склонах мезорельефа / Л.А. Иванова, В.П. Сажнев // Тр. РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41). – Т. 2. – С. 34–46.
18. ВТУ-01-58. Временные технические условия проектирования и строительства зданий и

- сооружений на угленосных площадях Донецкого угольного бассейна. Введ. 1958-04-15. – К., 1958. – 68 с.
19. СН 289-64. Указания по проектированию зданий и сооружений на подрабатываемых территориях. Введ. 1965-01-01. – М., 1965. – 83 с.
 20. РСН 227-71. Указания по проектированию бескаркасных зданий в Центральном районе Донбасса на площадях залегания крутопадающих пластов. Введ. 1971-10-01. – Донецк, 1971. – 60 с.
 21. СНиП II-A. 14-71. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях. Введ. 1972-02-01. – М., 1972. – 14 с.

L.A. Ivanova, T.I. Rakhmanova, E.A. Bardakova, V.P. Sazhnev

Assessment of structural deformations of buildings during the liquidation of coal mines in the Central region of Donbass.

A summary of the results of surveys of undermined buildings in the city of Horlivka has been completed. The study is based on in-situ observations of deformations in buildings and structures undermined by mine workings and located in areas with complex terrain. Based on an analysis of instrumental measurements and visual damage assessments, patterns were established in the combined influence of mesorelief and increased ground movement due to flooding of abandoned mine workings on various types of structures.

Keywords: *typical structural deformations of buildings, mining of steep coal seams, mesorelief of the earth's surface, damage to surface objects, mining operations, underground coal mining.*

References

1. *PB 07-269-98. Rules for the protection of structures and natural objects from harmful effects of underground mining at coal deposits.* (1998). Moscow. 188 p. (in Russian)
2. Larchenko, V.G., Kovalenko, E.V. & Khoruzhaya, N. V. (2024). Corrected methodology for calculating expected surface subsidence and deformation during underground coal seam mining. *Proceedings of RANIMI*. 3(41), Vol. 2, 18–33. (in Russian)
3. Borisenko, E.V., Golubev, F.M. & Popovich, S.A. (2024). Prediction of surface subsidence based on deformation properties of water-saturated rocks. *Physical and Technical Problems of Mineral Resource Development*. 5, 73–79. (in Russian)
4. Kuzmin, D.K. (2024). Vertical displacements of the earth surface during oil and gas field development. *Proceedings of RANIMI*. 3(41), Vol. 2, 124–138. (in Russian)
5. Litvinsky, G.G. (2024). Geomechanical models of subsidence processes in undermined rock masses. *Proceedings of RANIMI*. 3(41), Vol. 1, 101–128. (in Russian)
6. Iofis, M.A., Grishin, A.V. & Esina, E.N. (2011). *Subsidence of rock masses and earth surface during mineral deposit development*. Moscow: RUDN University. 103 p. (in Russian)
7. Pisarenko, M.V. (2009). Forecast of expected subsidence and deformation of the earth surface using GIS technologies. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 12, 310–315. (in Russian)
8. Antonov, V.A. (2021). Methodology for detection and prediction of horizontal ground deformation of adjacent rock blocks based on GPS monitoring data. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 5(2), 16–29. (in Russian)
9. Khau, L.V. (2017). Determination of parameters of underground inclined coal seam mining in Quang Ninh basin under protected surface objects. *Journal of Mining Institute*. 226, 412–419.
10. Zhang, Y., Wen, Z., Zhang, J. & Huang, J. (2024). Study on stability evaluation of goaf based on AHP and EWM: Case study of Liaoyuan city northern district. *Scientific Reports*. 14. DOI: 10.21203/rs.3.rs-4447967/v1
11. Qi, J., Zhang, Y., Zhang, J. & Wu, C. (2023). Study on restoration of ecological environments in mining areas based on GIS technology. *Sustainability*. 15(7). DOI: 10.3390/su15076128
12. Hou, H., Ding, Z., Zhang, S., Guo, S., Yang, Y., Chen, Z., Mi, J. & Wang, X. (2021). Spatial estimation of ecological and environmental damage in underground coal mining areas on the

- Loess Plateau. *Journal of Cleaner Production*. 287. DOI: 10.1016/j.jclepro.2020.125061
13. Xu, Z., Xu, W., Zhu, Z. & Zhao, J. (2023). Monitoring and stability evaluation of ground subsidence in gypsum mine goaf. *Frontiers in Environmental Science*. 10. DOI: 10.3389/fenvs.2022.1097874
 14. Shneer, V.R. & Ivanova, L.A. (2018). Local protective measures for buildings in Horlivka after closure of the “Kochegarka” mine. *Proceedings of RANIMI*. 5(20), 102–114. (in Russian)
 15. Grishchenkov, N.N., Sushko, E.T., Golubev, F.M., Ivanova, L.A., Rakhmanova, T.I. & Sazhnev, V.P. (2023). Determination of safe conditions for operation of residential and public buildings in mining lease areas of closed mines in Horlivka. *Proceedings of RANIMI*. 20–21(35–36), 119–137. (in Russian)
 16. Ivanova, L.A., Golubev, F.M. & Fedosova, N.S. (2023). Influence of mesorelief on ground surface deformation in the city of Kirovske. *Proceedings of RANIMI*. 22–23(37–38), 27–35. (in Russian)
 17. Ivanova, L.A. & Sazhnev, V.P. (2024). Analysis of the stress-strain state of buildings under mining influence on mesorelief slopes. *Proceedings of RANIMI*. 3(41), Vol. 2, 34–46. (in Russian)
 18. Ministry of Construction of the Ukrainian SSR. (1958). *Temporary technical conditions for design and construction of buildings and structures on coal-bearing areas of the Donetsk basin (VTU-01-58)*. Kyiv. 68 p (in Russian)
 19. State Construction Committee of the USSR. (1965). *Design guidelines for buildings and structures on undermined territories (SN 289-64)*. Moscow. 83 p. (in Russian)
 20. State Construction Committee of the Ukrainian SSR. (1971). *Guidelines for design of frameless buildings in the Central Donbass region on steep coal seams (RSN 227-71)*. Donetsk. 60 p. (in Russian)
 21. State Construction Committee of the Ukrainian SSR. (1972). *Buildings and structures on undermined territories (SNiP II-A.14-71)*. Moscow. 14 p. (in Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 18.04.2026.

Доработана / Revision submitted 19.05.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 10.06.2026.

**ФГБОУ ВО
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ЖУРНАЛ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ**

Научный журнал

Основан в 1970 г

№ 2 (95) / 2026

Подписано в печать 26.06.2026

**ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
(83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24;
тел.: технический редактор: +7 856 302 92 71,
тел.: ответственный секретарь: +7 856 302 92 71,
e-mail: jtam_donnu@mail.ru,
URL: <http://donnu.ru/jtam>, <http://dongu-jtam.ru/>)**