

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 3 (92)

2025

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. **A.B. Анциферов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **A.O. Ватулян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.В. Георгиевский**, д-р техн. наук, с.н.с. **A.A. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **G.V. Gorr**, д-р техн. наук, проф. **Н.Н. Грищенков**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносевич**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Мазнев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **I.A. Moiseyenko**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Мущанов**, д-р физ.-мат. наук, доц. **R.N. Нескородев**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыши**, д-р физ.-мат. наук, проф. **A.N. Соловьев**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **C.H. Царенко**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of phys. and math., prof. **D.V. Georgievskiy**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**, Dr. of tech., prof. **N.N. Grishchenkov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Maznev**, Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of phys. and math., docent **R.N. Neskorodev**, Dr. of tech., prof. **V.N. Pavlysh**, Dr. of phys. and math., prof. **A.N. Soloviev**, Dr. of tech., docent **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., docent **S.N. Tsarenko**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donn@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки). Квартиль К2 с 23.05.2025. Журнал включен в актуальную версию Единого государственного перечня научных изданий («Белый список» научных журналов) – 4 уровень.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 230-11/2025 от 17 ноября 2025 г.).

Утверждено к изданию ученым советом

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

№ 3 (92) / 2025

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

<i>Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.</i> Условия глобальной устойчивости бестоковой модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки	5
<i>Зыза А.В., Мазнев А.В., Нескородев Р.Н., Ткаченко Д.Н.</i> Исследование уравнений Кирхгофа-Пуассона на основе специальных классов частных решений	22

Механика деформируемого твердого тела

<i>Бычков А.А.</i> Исследование распределения компонент сплава SiGe в полупроводниковой пленке	38
<i>Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О.</i> О прикладных моделях деформирования пористого прямоугольника	50
<i>Ватульян А.О., Дударев В.В., Нестеров С.А.</i> Об особенностях идентификации переменных характеристик неоднородных упругих тел с пустыми порами	61
<i>Баузэр С.М., Дорофеев Н.П., Нестерчук Г.А., Смирнов А.Л.</i> Собственные колебания сопряженных стержней	73
<i>Явруян О.В.</i> Оптимизация механических свойств и геометрии простейших элементов конструкции	82
<i>Карасев Д.С., Сторожев С.В., Сторожев В.И.</i> Аналитическая методика построения базисных частных решений для системы уравнений распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн в полуబесконечных телах с многофакторной приповерхностной неоднородностью ..	93

<i>Дзундза А.И., Моисеенко В.А., Моисеенко И.А., Нескородев Р.Н.</i> Осесимметричные нормальные волны в протяженных полых цилиндрах с многофакторной функциональной радиальной неоднородностью изотропного материала	103
<i>Глушанков Е.С.</i> Действие сосредоточенных источников тепла в конечной многосвязной анизотропной пластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой	121
<i>Полянский М.А.</i> Решение задачи электроупругости для полу平面ости с отверстиями и трещинами	133

**Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэrogазодинамика и горная теплофизика**

<i>Дрибан В.А., Дуброва Н.А., Сажнев В.Р., Колесник М.В., Антипенко А.В.</i> Геомеханическая модель критического деформирования приповерхностной зоны подработанного массива горных пород	150
---	-----

Nº 3 (92) / 2025

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

<i>Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.</i> Global stability conditions for the no-current model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment	5
<i>Zyza A.V., Maznev A.V., Neskorochev R.N., Tkachenko D.N.</i> Study of Kirchhoff-Poisson equations based on special classes of partial solutions	22

Solid Mechanics

<i>Bychkov A.A.</i> Investigation of the distribution of SiGe alloy components in a semiconductor film	38
<i>Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov V.O.</i> On applied models of deformation of a porous rectangle	50
<i>Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nesterov S.A.</i> On the features of identification of variable characteristics of inhomogeneous elastic bodies with voids	61
<i>Bauer S.M., Dorofeev N.P., Nesterchuk G.A., Smirnov A.L.</i> Free vibrations of coupled rods	73
<i>Yavruyan O.V.</i> Optimization of mechanical properties and geometry of simple structural elements	82
<i>Karasev D.S., Storozhev S.V., Storozhev V.I.</i> Analytical method for constructing basic partial solutions for the system of equations of propagation of longitudinal-shear electroelastic waves in semi-infinite bodies with multifactor near-surface heterogeneity	93
<i>Dzundza A.I., Moiseyenko V.A., Moiseyenko I.A., Neskorochev R.N.</i> Axisymmetric normal waves in extended hollow cylinders with a multifactorial functional radial inhomogeneity of an isotropic material	103

Nº 3 (92) / 2025

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

<i>Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.</i> Global stability conditions for the no-current model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment	5
<i>Zyza A.V., Maznev A.V., Neskorochev R.N., Tkachenko D.N.</i> Study of Kirchhoff-Poisson equations based on special classes of partial solutions	22

Solid Mechanics

<i>Bychkov A.A.</i> Investigation of the distribution of SiGe alloy components in a semiconductor film	38
<i>Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov V.O.</i> On applied models of deformation of a porous rectangle	50
<i>Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nesterov S.A.</i> On the features of identification of variable characteristics of inhomogeneous elastic bodies with voids	61
<i>Bauer S.M., Dorofeev N.P., Nesterchuk G.A., Smirnov A.L.</i> Free vibrations of coupled rods	73
<i>Yavruyan O.V.</i> Optimization of mechanical properties and geometry of simple structural elements	82
<i>Karasev D.S., Storozhev S.V., Storozhev V.I.</i> Analytical method for constructing basic partial solutions for the system of equations of propagation of longitudinal-shear electroelastic waves in semi-infinite bodies with multifactor near-surface heterogeneity	93
<i>Dzundza A.I., Moiseyenko V.A., Moiseyenko I.A., Neskorochev R.N.</i> Axisymmetric normal waves in extended hollow cylinders with a multifactorial functional radial inhomogeneity of an isotropic material	103

<i>Glushankov E.S.</i> The concentrated heat sources' action in a finite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition	121
<i>Polianskii M.A.</i> Solution to the problem of electroelasticity for a half-plane with holes and cracks	133

**Geomechanics, Rock Damage,
Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics**

<i>Driban V.A., Dubrova N.A., Sazhnev V.P., Kolesnik M.V., Antypenko A.V.</i> Mechanism of sinkhole development above mine workings in the weathered rocks zone	150
--	-----

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.36, 517.925.51

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-5-21

EDN:VRMBZP



©2025. Б.И. Коносевич¹, Ю.Б. Коносевич²

УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ БЕСТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ МОМЕНТЕ НАГРУЗКИ

При помощи разработанного ранее подхода, основанного на методе нелокального сведения Г.А. Леонова, получены в явном виде условия глобальной устойчивости бестоковой модели синхронного электромотора при нелинейном диссипативном моменте нагрузки.

Ключевые слова: синхронный электромотор, глобальная устойчивость, метод нелокального сведения, принцип инвариантности Ла-Салля.

Введение. Приведем несколько известных определений и фактов из теории фазовых систем. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений, у которой при записи в нормальном виде ее правая часть периодична по некоторым компонентам фазового вектора (по угловым переменным), в теории фазовой синхронизации называют *фазовой* [1, стр. 265]. Если автономная фазовая система имеет стационарное решение, то она имеет счетное множество стационарных решений, которые получаются из исходного сдвигами на периоды по угловым переменным. Важной научной и практической задачей является установление условий, при которых любое решение фазовой системы стремится с течением времени к одному из стационарных решений, то есть, согласно определению [2, стр. 67], она является *системой градиентного типа*, или, по терминологии [1, стр. 271], эта система *глобально асимптотически устойчива*. Если система градиентного типа имеет только одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение (с точностью до сдвигов на периоды), то ее называют *глобально устойчивой* [2, стр. 67].

¹Коносевич Борис Иванович – докт. физ.-мат. наук, главный научный сотрудник отдела прикладной механики ИПММ, Донецк, e-mail: konos.donetsk@yandex.ru.

Konosevich Boris Ivanovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Applied Mechanics.

²Коносевич Юлия Борисовна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела прикладной механики ИПММ, Донецк, e-mail: techmech@iamm.su.

Konosevich Yuliya Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Applied Mechanics.

Общий подход к получению достаточных условий глобальной асимптотической устойчивости автономной фазовой системы дает принцип инвариантности Ла-Салля в форме теоремы VIII [3]. Но непосредственное применение этой теоремы к фазовым системам затруднено даже в случае фазовой системы с одной угловой переменной. Это затруднение вызвано тем, что используемая в данной теореме функция Ляпунова с неположительной производной по времени в силу рассматриваемой системы уравнений должна быть ограниченной снизу во всем фазовом пространстве. Однако обычные методы построения функций Ляпунова для конкретных систем, основанные на теореме об изменении энергии, приводят к функциям, содержащим член, линейный по угловой переменной, и поэтому неограниченным в фазовом пространстве.

Способ преодоления указанного затруднения предложил Г.А. Леонов, получив для автономных фазовых систем с одной угловой переменной достаточные условия ограниченности угловой переменной [4, теорема 1; 1, теорема 4.4.1]. Это позволило ему разработать *метод нелокального сведения*, позволяющий вывести свойство глобальной устойчивости многомерной автономной фазовой системы с одной угловой переменной из свойства глобальной устойчивости одного эталонного дифференциального уравнения второго порядка.

На основе этого метода в [5] найдены легко проверяемые достаточные условия глобальной устойчивости *многотоковой* модели синхронного электромотора, предложенной в [6].

При изучении динамики механических систем, содержащих электромотор (гиростат, гироскоп в кардановом подвесе), вместо многотоковой модели синхронного электромотора удобно использовать его *бестоковую* модель [7, 8]. В настоящей работе с помощью разработанного в [5] подхода получены в явном виде достаточные условия глобальной устойчивости бестоковой модели синхронного электромотора.

1. Бестоковая модель синхронного электромотора. Синхронный электромотор состоит из двух основных частей — статора и вращающегося в нем ротора. В статоре имеются обмотки провода, на которые подается переменный электрический ток, создающий магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого постоянен по модулю и вращается вокруг оси ротора с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$. Ротор синхронного электромотора содержит демпферную обмотку, выполненную в виде "беличьего колеса", и обмотку возбуждения, состоящую из большого числа витков провода, на нее через угольные щетки подается электрический ток. Для описания работы электромоторов могут использоваться различные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, структура которых зависит от конструкции электромотора и принятой степени детализации происходящих в нем процессов [9].

Рассматриваемая в литературе [1, 2] упрощенная бестоковая модель синхронного электромотора (с линейным моментом демпфирования и постоянной нагрузкой) описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$C\ddot{\gamma} = -a_0\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - M. \quad (1)$$

Здесь C — осевой момент инерции ротора; $\gamma = \varphi - \omega t$ — угол рассогласования магнитного поля ротора и равномерно вращающегося магнитного поля статора; $-a_0\dot{\gamma}$ ($a_0 > 0$) — линейный демпфирующий момент; $-b_0 \sin \gamma$ ($b_0 > 0$) — вращающий момент; $-M$ — момент нагрузки на электромотор, который предполагается в [2, 6] постоянной отрицательной величиной. В теории фазовых систем вместо угла γ используется угол $\theta = -\gamma$.

На практике момент нагрузки является постоянным в редких случаях, например, при работе подъемного крана. Чаще он имеет диссипативный характер. В этом случае, объединив диссипативный момент нагрузки с демпфирующим моментом, создаваемым силами трения, получаем суммарный диссипативный момент, который будем предполагать непрерывной нечетной монотонно убывающей функцией $M_d(\dot{\gamma})$ угловой скорости $\dot{\gamma}$ вращения ротора электромотора относительно его статора. В результате этого, вместо (1) имеем более сложную *бестоковую модель синхронного электромотора*, которая описывается дифференциальным уравнением

$$C\ddot{\gamma} = \Delta M_d(\dot{\gamma}) - b_0 \sin \gamma - c_0. \quad (2)$$

Здесь $c_0 = -M_d(\omega) > 0$ — постоянная, а момент

$$\Delta M_d(\dot{\gamma}) = M_d(\dot{\gamma} + \omega) - M_d(\omega) \quad (3)$$

является монотонно убывающей функцией переменной $\dot{\gamma}$, так как момент $M_d(\dot{\gamma})$ является монотонно убывающей функцией переменной $\dot{\gamma}$. Поэтому, при $\dot{\gamma} \neq 0$ знак этого момента противоположен знаку $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma}\Delta M_d(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad \Delta M_d(0) = 0, \quad (4)$$

то есть момент $\Delta M_d(\dot{\gamma})$ является диссипативным по отношению к $\dot{\gamma}$.

Далее предполагается, что существует постоянная $k > 0$ такая, что

$$\Delta M_d(\dot{\gamma}) \leq -k\dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma} \geq 0), \quad \Delta M_d(\dot{\gamma}) \geq -k\dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma} \leq 0). \quad (5)$$

Геометрически это предположение означает, что прямая $-k\dot{\gamma}$ отделяет график диссипативного момента $\Delta M_d(\dot{\gamma})$ от горизонтальной оси $O_\omega \gamma$, где O_ω — точка графика момента $M_d(\dot{\gamma})$, соответствующая значению $\dot{\gamma} = \omega$.

Два неравенства (5) эквивалентны одному неравенству $\dot{\gamma}[\Delta M_d(\dot{\gamma}) + k\dot{\gamma}] \leq 0$. Отсюда следует, что при любом $\dot{\gamma}$ выполняется неравенство

$$\dot{\gamma}\Delta M_d(\dot{\gamma}) \leq -k\dot{\gamma}^2, \quad (6)$$

т. е. график функции $\dot{\gamma}\Delta M_d(\dot{\gamma})$ лежит под параболой $-k\dot{\gamma}^2$.

В данной работе рассматривается усложненная по сравнению с (1) бестоковая модель синхронного электромотора, описываемая уравнением (2).

Рассмотрим следующие функции фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}$ уравнения (2)

$$W(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2, \quad E(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}C(\omega + \dot{\gamma})^2,$$

$$U(\gamma) = \int_0^\gamma (b_0 \sin \alpha + c_0) d\alpha = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma, \quad V(\gamma, \dot{\gamma}) = W(\dot{\gamma}) + U(\gamma).$$
(7)

Производные функций W, E, V по времени в силу уравнения (2) равны

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}) = \dot{\gamma}\Delta M_d(\dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0), \quad (8)$$

$$\dot{V}(\dot{\gamma}) = \dot{\gamma}\Delta M_d(\dot{\gamma}), \quad (9)$$

$$\dot{E}(\gamma, \dot{\gamma}) = (\omega + \dot{\gamma})[\Delta M_d(\dot{\gamma}) - b_0 \sin \gamma - c_0]. \quad (10)$$

Согласно определению (7), функция W является определенно положительной по отношению к переменной $\dot{\gamma}$. Ее можно интерпретировать как кинетическую энергию рассматриваемой системы, функцию U — как ее потенциальную энергию, а функцию V — как полную энергию. Формула (9) выражает теорему об изменении энергии.

Условием существования стационарного решения $(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma^0, 0)$ уравнения (2) является выполнение при $\gamma = \gamma^0$ тригонометрического соотношения

$$b_0 \sin \gamma^0 + c_0 = 0. \quad (11)$$

Далее предполагается, что

$$c_0/b_0 < 1. \quad (12)$$

Тогда условие (11) определяет для уравнения (2) два счетных семейства стационарных решений

$$(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_s, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (13)$$

$$(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_s, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (14)$$

которые соответствуют значениям d_s, e_s угла γ , равным

$$d_s = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad e_s = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (15)$$

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \quad (16)$$

Основные результаты данной работы получены с помощью теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского, а также принципа инвариантности Ж. Ла-Салля, в которых применяются функции Ляпунова со знакопостоянной отрицательной производной по времени в силу рассматриваемой системы дифференциальных уравнений или одного такого уравнения. Для уравнения (2) качестве таких функций Ляпунова используется функция $V(\gamma, \dot{\gamma})$, определенная в (7), а также функции, которые отличаются от нее на константу. В теоремах Е.А. Барбашина

и Н.Н. Красовского предполагается, что множество M точек фазового пространства уравнения (2), в которых $\dot{V}(\dot{\gamma}) = 0$, не содержит целых фазовых траекторий этого уравнения, кроме его стационарных точек. Такое предположение необходимо также для получения условий глобальной устойчивости уравнения (2) с помощью принципа Ла-Салля. Его справедливость установлена в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть дифференциальное уравнение (2) имеет решение*

$$\gamma(t), \dot{\gamma}(t) \quad (t \geq 0), \quad (17)$$

на котором для определенной в (9) функции $\dot{V}(\dot{\gamma})$ при всех $t \geq 0$ выполнено равенство $\dot{V}(\dot{\gamma}(t)) = 0$. Тогда для этого решения при всех $t \geq 0$ выполняются равенства

$$\dot{\gamma}(t) = 0, \gamma(t) = \gamma_0,$$

где γ_0 — одно из стационарных значений (15) угла γ , определенных уравнением (11).

Доказательство. Из формулы (9) для \dot{V} следует, что на решении (17) равенство $\dot{V}(\dot{\gamma}(t)) = 0$ выполняется при всех $t \geq 0$ только в том случае, когда

$$\dot{\gamma}(t) = 0 \quad (t \geq 0). \quad (18)$$

Следовательно, $\gamma(t) = \gamma_0$ — величина постоянная. Покажем, что постоянная γ_0 удовлетворяет уравнению (11), которое определяет стационарные значения угла γ .

На решении (17) определенная в (7) функция $E(\dot{\gamma})$ становится функцией времени $E(t)$. При этом из определения (7) функции $E(\dot{\gamma})$ и тождественного равенства (18) следует, что $E(t) = \frac{1}{2}C\omega^2$ ($t \geq 0$), то есть $E(t)$ — ненулевая постоянная.

Допустим теперь, что значение γ_0 нестационарное, то есть $b_0 \sin \gamma_0 + c_0 \neq 0$. Но на рассматриваемом решении (17), согласно (18), (3), в формуле (10) для \dot{E} исчезают члены $\dot{\gamma}, \Delta M_d(\dot{\gamma})$, и тогда из этой формулы следует, что

$$\dot{E}(t) = -\omega(b_0 \sin \gamma_0 + c_0) = \text{const} \neq 0, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, функция $E(t)$ неограниченно возрастает по модулю при возрастании t . Но это противоречит установленному выше факту постоянства величины $E(t)$ решении (17). Значит, допущение о нестационарности значения γ_0 неверно. \square

Теорема 1. *Стационарные решения (13) уравнения (3) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (14) — неустойчивы.*

Доказательство. Из определения (7) функции $U(\gamma)$ следует, что при условии (12) значения d_s и e_s являются, соответственно, точками локальных минимумов и локальных максимумов этой функции. Поэтому каждая из функций $V_{1s} = V - U(d_s)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) определенно положительна по отношению к возмущениям $\gamma - d_s, \dot{\gamma}$ стационарного решения (13), а каждая из функций $V_{2s} = V - U(e_s)$ принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарного решения (14).

Производные $\dot{V}_{1s}, \dot{V}_{2s}$ этих функций по t в силу уравнения (2) совпадают с производной (9) функции V и поэтому неположительны согласно (4). Согласно лемме 1, множество точек фазового пространства уравнения (2), где эти производные равны нулю при всех $t \geq 0$, состоит только из стационарных точек (13), (14). Поскольку стационарные точки изолированы, то в некоторой окрестности каждой из двух стационарных точек (13), (14) с данным номером s не существует других решений уравнения (2), для которых $\dot{V}_{1s} = 0$ или $\dot{V}_{2s} = 0$ при всех $t \geq 0$.

Поэтому, в соответствии с приведенными в [10] теоремами 5.2 и 6.3 Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского, стационарные решения (13) уравнения (2) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (15) неустойчивы. Теорема 1 доказана. \square

Теорема 2. В любом решении $\gamma(t), \dot{\gamma}(t)$ ($t \geq 0$) уравнения (2) функция $\gamma(t)$ ограничена сверху при $t \geq 0$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t), \dot{\gamma}(t)$ – решение уравнения (2), определенное при $t \geq 0$, а $W(t), U(t), V(t)$ – определенные в (7) функции $W(\dot{\gamma}), U(\gamma), V(\gamma, \dot{\gamma})$, рассматриваемые на этом решении. Изучим на плоскости (γ, V) кривую $(\gamma(t), V(t))$ ($t \geq 0$).

Поскольку $W(\dot{\gamma}) \geq 0$ согласно (7), то $W(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$.

В частности, $W(0) \geq 0$. Поэтому в начальный момент $t = 0$ изображающая точка $(\gamma(0), V(0))$ рассматриваемой кривой расположена выше соответствующей точки $(\gamma(0), U(0))$ графика функции $U(t)$ или совпадает с ней.

Из (9) следует, что $\dot{V}(t) \leq 0$ ($t \geq 0$). Поэтому при возрастании t от 0 до $+\infty$ изображающая точка перемещается, не поднимаясь вверх. Но при этом она не может сместиться на бесконечное расстояние вправо. Действительно, при неограниченном смещении вправо и вниз изображающая точка в некоторый момент времени t' пересекает график функции $U(\gamma)$, немонотонно возрастающей при $b_0/c_0 < 1$ и монотонно возрастающей при $b_0/c_0 \geq 1$. Тогда при значениях $t > t'$, близких к t , точки рассматриваемой кривой лежат ниже соответствующих точек графика функции $U(\gamma)$, то есть справедливо неравенство $V(t) < U(t)$. Но оно, с учетом определения (7) функции $V(\gamma, \dot{\gamma})$, эквивалентно неравенству $W(t) + U(t) < U(t)$, которое является невыполнимым, поскольку $W(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. \square

2. Принцип инвариантности Ла-Салля и условия его применения для изучения глобальной устойчивости. При получении условий глобальной устойчивости уравнения (2) воспользуемся принципом инвариантности Ла-Салля в виде теоремы VIII из книги [3], сформулированной следующим образом применительно к отдельно взятому решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 3. Пусть задана автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),$$

где функция $f : R^n \rightarrow R^n$ непрерывно дифференцируема. Пусть $V : R^n \rightarrow R$

— непрерывно дифференцируемая функция, производная которой по времени в силу этой системы удовлетворяет условию

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in R^n.$$

Обозначим через M максимальное инвариантное множество, образованное фазовыми траекториями непродолжаемых влево и вправо решений $x(t)$ рассматриваемой системы, для которых $\dot{V}(x(t)) = 0$ для всех t из максимального интервала их существования.

Пусть для решения $x(t)$, $t \in [0, \infty)$, этой системы выполнены условия:

- (1) на решении $x(t)$ функция $V(x(t))$ ограничена снизу при всех $t \in [0, \infty)$;
- (2) решение $x(t)$ ограничено на промежутке $[0, \infty)$.

Тогда решение $x(t)$ неограниченно приближается к M при $t \rightarrow \infty$.

В отличие от теоремы 3, в теореме VIII [3] предполагается, что $f(0) = 0$, а функция $V(x)$ со знакопостоянной отрицательной производной $\dot{V}(x)$ положительна при всех $x \neq 0$. При таких предположениях в теореме VIII [3] доказывается, что каждое ограниченное при $t \geq 0$ решение рассматриваемой системы уравнений с течением времени неограниченно приближается к множеству M точек фазового пространства, состоящему из фазовых траекторий тех ее решений, определенных при $t \geq 0$, для которых $\dot{V} = 0$. Однако точка $x = 0$ здесь ничем не выделяется среди других возможных положений равновесия. Поэтому предположение, что $f(0) = 0$, является излишним, и оно не используется в теореме 3. Кроме того, вместо положительности функции $V(x)$ при $x \neq 0$ достаточно предположить, что эта функция ограничена снизу на рассматриваемом решении системы. Это приводит к формулировке принципа Ла-Салля в виде теоремы 3.

3. Центральная теорема Г.А. Леонова о достаточном условии ограниченности угловой переменной γ . В данной работе для получения условий глобальной устойчивости используется принцип Ла-Салля в виде теоремы 3 с функцией $V(\gamma, \dot{\gamma})$, определенной в (7) и имеющей знакопостоянную отрицательную производную (9) по времени в силу изучаемого здесь уравнения (2). Функция $V(\gamma, \dot{\gamma})$ не является ограниченной снизу во всем фазовом пространстве, так как в ее определение входит функция $U(\gamma)$, которая, согласно (7), содержит линейный по γ член $c_0\gamma$. Поэтому для применимости теоремы 3 с такой функцией $V(\gamma, \dot{\gamma})$ следует найти условия, при которых угол γ ограничен снизу на решениях уравнения (2). Такие условия для фазовых систем с одной угловой переменной дает центральная теорема метода сведений Г.А. Леонова, которая изложена в [1] в виде теоремы 4.4.1.

Для ясности изложения формулировка и подробное доказательство центральной теоремы Г.А. Леонова даны ниже в теореме 4 для уравнения вида (2), тогда как в [1] эта теорема приведена без указания вида изучаемой фазовой системы. В рассматриваемой здесь теореме 4 получены достаточные условия, при которых ограниченность угловой переменной в уравнении (2) при $t \in [0, +\infty)$ следует из

ограниченности такой переменной во всех решениях дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} = -a_0\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0, \quad (19)$$

где $b_0, c_0 > 0$ — известные постоянные параметры в уравнении (2), а вид постоянной $a_0 > 0$ конкретизируется в формулировке теоремы.

Приведем основные результаты исследования уравнения вида (19) [1, 11, 12].

Стационарные решения $(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma^0, 0)$, $\gamma^0 = \text{const}$, уравнения (19) определяются тригонометрическим уравнением $b_0 \sin \gamma + c_0 = 0$. Поэтому в предположении (12) уравнение (19) имеет два счетных набора стационарных решений, которые определяются указанными в (13)–(16) значениями d_s, e_s постоянной γ^0 .

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно установить, что стационарные точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_s, 0)$ являются для уравнения (19) асимптотически устойчивыми особыми точками типа "фокус" или "узел", а точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_s, 0)$ — неустойчивые особые точки типа "седло".

Глобальный анализ уравнения вида (19) дал Ф. Трикоми [11]. Введя безразмерные параметры $a, c > 0$ и безразмерную независимую переменную τ по формулам

$$a = a_0/\sqrt{b_0 C}, \quad c = c_0/b_0, \quad \tau = t\sqrt{b_0/C}, \quad (20)$$

он привел уравнение (19) к виду

$$\gamma'' = -a\gamma' - \sin \gamma - c, \quad (21)$$

где штрих означает дифференцирование по τ . Ф. Трикоми установил, что существует *критическое значение* параметра a , которое является непрерывной монотонно возрастающей функцией $a_{\text{cr}}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$ и обладает следующими свойствами [2, 12]. В случае, когда $a > a_{\text{cr}}$, каждое решение уравнения (21) и, соответственно, каждое решение уравнения (19) стремится к одной из его стационарных точек при $t \rightarrow +\infty$. При $a = a_{\text{cr}}$ и $a < a_{\text{cr}}$ кроме решений, стремящихся к стационарным, существуют решения, вдоль которых угол γ неограниченно убывает с течением времени. Одно из этих неограниченных решений является периодическим, а остальные стремятся к нему с течением времени. Неравенство $a > a_{\text{cr}}$, обеспечивающее глобальную устойчивость дифференциального уравнения (21), будем называть *условием Трикоми*. Для всех этих трех случаев Ф. Трикоми получил фазовые портреты уравнения (21).

Для функции $a_{\text{cr}}(c)$ не существует явного выражения, но разными авторами найдены ее аналитические оценки сверху и снизу (см. [12], с. 122–123). При получении этих оценок вместо угла γ используют угол $\theta = -\gamma$. Тогда указанному в (16) главному стационарному значению $\gamma^{(0)} \in (-\pi/2, 0)$ угла γ соответствует главное стационарное значение $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ угла θ . Так как $\theta_0 = \arcsin c$, то $c = \sin \theta_0$, и величина $a_{\text{cr}}(c)$ переходит в функцию $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. В [13] при помощи компьютерных расчетов построен график функции $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(\theta_0)$ и получены фазовые портреты рассматриваемого уравнения. В [13, 14] для функции $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(\theta_0)$ предложены линейная, параболическая и синусоидальная аппроксимации.

проксимации, которые обеспечивают вычисление критических значений с абсолютными и относительными погрешностями порядков 10^{-2} , 10^{-3} и 10^{-5} соответственно.

Приведем теперь теорему, которая является формулировкой центральной теоремы 4.4.1 [1] метода сведения Г.А. Леонова применительно к уравнению (2) бестоковой модели синхронного электромотора и дает достаточные условия ограниченности угла γ в решениях этого уравнения.

Теорема 4. Предположим, что существуют значения постоянных параметров $\lambda, \varepsilon > 0$ такие, что

- 1) любое решение исходного эталонного дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (22)$$

где $b_0, c_0 > 0$ ($c_0/b_0 < 1$) — параметры в уравнении (2), является ограниченным при $t \geq 0$;

- 2) при всех значениях фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}$ выполнено неравенство

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}) + 2\lambda W(\dot{\gamma}) + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) + \varepsilon C^{-1} \dot{\gamma}^2 \leq 0, \quad (23)$$

где функция W определена в (7).

Тогда в любом решении

$$\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \quad t \geq 0, \quad (24)$$

уравнения (2) функция $\gamma(t)$ ограничена на полуоси $t \geq 0$.

Доказательство теоремы 4 состоит из четырех частей.

1. *Определение и свойства функций $F_s(\gamma)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).* Этalonное уравнение (22) имеет вид изученного Ф. Трикоми уравнения (19), в котором $a_0 = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$. Согласно изложенным выше результатам Ф. Трикоми, условие 1 теоремы 4 означает, что для уравнения (22) имеет место случай $a > a_{cr}(c)$, где a и c — безразмерные параметры, определенные в (20), $c \in (0, 1)$, $a_{cr}(c)$ — критическое значение коэффициента демпфирования a в уравнении вида (21), полученном после перехода к этим безразмерным параметрам и безразмерному времени τ в уравнении (22). Фазовый портрет уравнения (22) для такого случая изображен на рисунке 1.

Этот случай характерен тем, что через каждую седловую точку $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_s, 0)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) уравнения (22) проходит фазовая кривая $\dot{\gamma} = F_s(\gamma)$, которая не имеет других точек пересечения с осью абсцисс, кроме данной седловой точки, и уходит на плюс или минус бесконечность при стремлении γ к минус или плюс бесконечности:

$$F_s(e_s) = 0, \quad F_s(\gamma) \rightarrow \pm\infty \quad (\gamma \rightarrow \mp\infty). \quad (25)$$

Вследствие 2π -периодичности правой части уравнения (22) по γ , график функции $F_s(\gamma)$ получается из графика функции $F_0(\gamma)$ параллельным сдвигом на $2\pi s$ вдоль оси абсцисс. Поэтому при любом γ выполняются соотношения

$$F_s(\gamma + 2\pi s) = F_0(\gamma) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

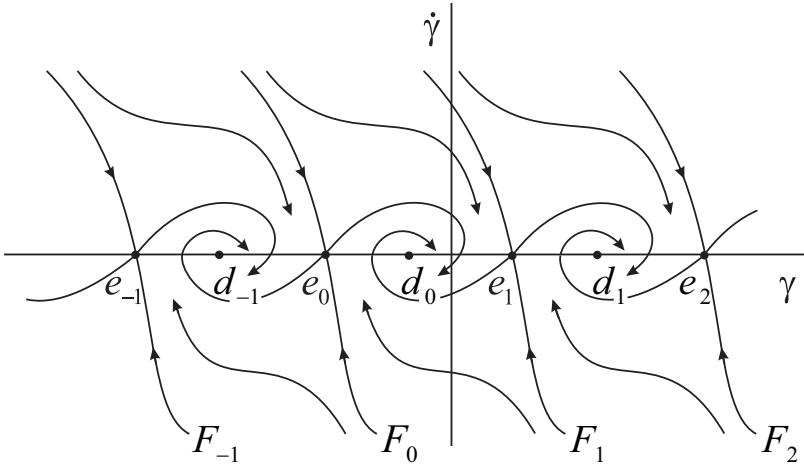


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения упрощенной бестоковой модели синхронного электромотора в случае его глобальной устойчивости

Полагая здесь $\sigma = \gamma + 2\pi s$, приходим к равенству $F_s(\sigma) = F_0(\sigma - 2\pi s)$. Заменив в нем букву σ буквой γ , получаем

$$F_s(\gamma) = F_0(\gamma - 2\pi s) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (26)$$

Согласно определению функций $F_s(\gamma)$, они удовлетворяют уравнению

$$C\dot{\gamma} \frac{d\dot{\gamma}}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0$$

фазовых траекторий $\dot{\gamma}(\gamma)$ уравнения (22), то есть они обращают уравнение фазовых траекторий в тождество по γ :

$$CF_s(\gamma) \frac{dF_s(\gamma)}{d\gamma} = -2\sqrt{\lambda\varepsilon}F_s(\gamma) - b_0 \sin \gamma - c_0 \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (27)$$

Подставив сюда вместо γ функцию $\gamma(t)$ из решения (24) уравнения (2), получим тождество по t .

2. *Функции V_s и неравенство $\dot{V}_s + 2\lambda V_s \leq 0$.* Рассмотрим набор функций

$$V_s(\gamma, \dot{\gamma}) = W(\dot{\gamma}) - \frac{1}{2}CF_s^2(\gamma) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (28)$$

где функция $W(\dot{\gamma})$ определена в (7). Покажем, что во всем фазовом пространстве для любого номера s выполняется неравенство

$$\dot{V}_s(\gamma, \dot{\gamma}) + 2\lambda V_s(\gamma, \dot{\gamma}) \leq 0, \quad (29)$$

где \dot{V}_s — производная функции V_s по t в силу уравнения (2).

Обозначая штрихом дифференцирование по γ и пользуясь формулой (27), получаем из (28) выражение

$$\dot{V}_s = \dot{W} - \dot{\gamma}CF_sF'_s = \dot{W} + \dot{\gamma}(2\sqrt{\lambda\varepsilon}F_s + b_0 \sin \gamma + c_0).$$

Поэтому, с учетом (28), имеем

$$\dot{V}_s + 2\lambda V_s = \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) + 2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_s - \lambda CF_s^2. \quad (30)$$

Так как $\lambda, \varepsilon > 0$, то

$$\varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 - 2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_s + \lambda CF_s^2 = C^{-1}(\sqrt{\varepsilon}\dot{\gamma} - \sqrt{\lambda}CF_s)^2 \geq 0,$$

и поэтому

$$2\dot{\gamma}\sqrt{\lambda\varepsilon}F_s - \lambda CF_s^2 \leq \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2. \quad (31)$$

Из соотношений (30), (31) и условия (23) следует, что

$$\dot{V}_s + 2\lambda V_s \leq \dot{W} + 2\lambda W + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) + \varepsilon C^{-1}\dot{\gamma}^2 \leq 0.$$

Неравенство (29) доказано.

3. *Ограничность переменной γ снизу.* Докажем, что при условиях теоремы 4 в любом решении уравнения (2) функция $\gamma(t)$ ограничена снизу при $t \geq 0$. Допустим, что это уравнение имеет решение (24), в котором функция $\gamma(t)$ неограничена снизу на полуоси $t \geq 0$. Так как γ — угловая переменная, без ограничения общности будем предполагать, что начальное значение $\gamma_0 = \gamma(0)$ принадлежит промежутку $(e_0, e_1]$ длины 2π . Тогда в неограниченном снизу решении непрерывная функция $\gamma(t)$ при $t \geq 0$ принимает все значения e_s с номерами $s \leq 0$. Для каждого номера $s \leq 0$ обозначим через t_s момент времени, когда функция $\gamma(t)$ в первый раз принимает значение e_s . Функция $F_s(\gamma(t))$ в этот момент времени обращается в нуль:

$$F_s(\gamma(t_s)) = F_s(e_s) = 0 \quad (s = 0, -1, -2, \dots). \quad (32)$$

В начальный момент $t = 0$ функция $F_s(\gamma(t))$ принимает значение $F_s(\gamma_0)$. Из формулы (26) получаем равенство $F_s(\gamma_0) = F_0(\gamma_0 - 2\pi s)$. Его правая часть, согласно (25), стремится к $-\infty$ при $\gamma_0 - 2\pi s \rightarrow +\infty$, то есть при $s \rightarrow -\infty$. Таким образом,

$$F_s(\gamma_0) \rightarrow -\infty \quad (s \rightarrow -\infty). \quad (33)$$

Рассмотрим формулы (28), (29) на выбранном решении с неограниченной снизу функцией $\gamma(t)$. Воспользовавшись свойством (33), выберем номер $s = s_0 \leq 0$ так, чтобы правая часть формулы (28) оказалась отрицательной при $t = 0$, то есть чтобы для функции $V_{s_0}(t)$ выполнялось неравенство $V_{s_0}(0) < 0$. При $s = s_0$ неравенство (29) принимает на рассматриваемом решении вид $\dot{V}_{s_0}(t) \exp(2\lambda t) \leq 0$ ($t \geq 0$), откуда при $V_{s_0}(0) < 0$ следует, что

$$V_{s_0}(t) \leq V_{s_0}(0) \exp(-2\lambda t) < 0, \quad t \geq 0. \quad (34)$$

С другой стороны, полагая $s = s_0$ в (32), имеем $F_{s_0}(\gamma(t_{s_0})) = F_{s_0}(e_{s_0}) = 0$. Отсюда, с учетом определения (28) функций V_s , следует, что $V_{s_0}(t_{s_0}) = W(t_{s_0})$. Но функция W неотрицательна согласно ее определению (7). Поэтому справедливо неравенство $V_{s_0}(t_{s_0}) \geq 0$, которое противоречит (34). Полученное противоречие означает, что допущение о неограниченности функции $\gamma(t)$ снизу неверно.

4. *Ограничность переменной γ сверху* установлена в теореме 2 без использования предположений теоремы 4. \square

4. Получение условий глобальной устойчивости бестоковой модели синхронного электромотора при помощи центральной теоремы Леонова. Найдем условия на параметры λ, ε , обеспечивающие выполнение предположений теоремы 4. Пользуясь ими, получим достаточные условия ограниченности решений уравнения (2) по обеим фазовым переменным $\gamma, \dot{\gamma}$, а затем с помощью принципа Ла-Салля установим достаточные условия глобальной устойчивости этого уравнения.

4.1. Применение центральной теоремы Леонова для получения условий ограниченности угловой переменной. Условием 2 теоремы 4 является неравенство (23). Подставим в его левую часть выражения (7), (8) функций W, \dot{W} и затем, воспользовавшись верхней оценкой (6) функции $\dot{\gamma}\Delta M_d(\dot{\gamma})$, потребуем, чтобы полученное в результате выражение было неположительным. Приходим к неравенству $(-k + \lambda C + \varepsilon C^{-1})\dot{\gamma}^2 \leq 0$, эквивалентному неравенству (23). Оно выполняется при всех значениях $\dot{\gamma}$ только в случае, когда параметры λ, ε удовлетворяют неравенству $\lambda C + \varepsilon C^{-1} \leq k$. Его анализ приводит к такому выводу.

Лемма 2. *Пусть существует постоянная $k > 0$ такая, что для диссипативного момента $\Delta M_d(\dot{\gamma})$ выполнены линейные оценки (5), и пусть значения $\varepsilon_1, \lambda_1 > 0$ и точки X, Y плоскости (λ, ε) определены формулами*

$$\varepsilon_1 = kC, \quad \lambda_1 = kC^{-1},$$

$$X = (0, \varepsilon_1), \quad Y = (\lambda_1, 0).$$

Тогда множество D_0 значений параметров $\lambda, \varepsilon > 0$, удовлетворяющих условию 2 теоремы 4, непусто, и оно содержит множество D , которое состоит из точек плоскости (λ, ε) , лежащих внутри прямоугольного треугольника OXY и на его стороне XY (рис. 2).

Лемма 2 позволяет заменить в теореме 4 предположение о существовании значений параметров λ, ε , обеспечивающих выполнение условия 2, конкретным указанием области изменения этих параметров, в которой выполнено данное условие.

Рассмотрим теперь условие 1 теоремы 4. Определение (20) безразмерных параметров a, c в случае эталонного уравнения (22) принимает вид $a = d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 C}$, $c = c_0/b_0$, где $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$. Согласно результатам Ф. Трикоми, условие 1 ограниченности решений уравнения (22) в теореме 4 означает, что для этого уравнения имеет место случай $a > a_{\text{cr}}(c)$, то есть выполнено неравенство $d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$.

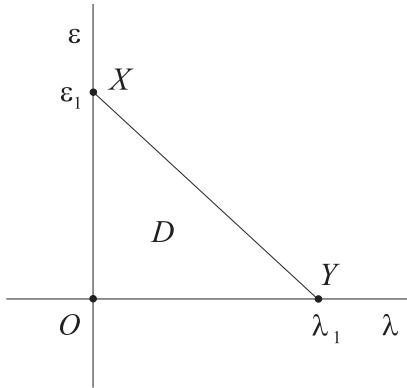


Рис. 2. Область D значений параметров λ, ε .

Если такое неравенство выполнено в некоторой точке $(\lambda, \varepsilon) \in D$, то оно тем более выполнено в точке $(\lambda_{\max}, \varepsilon_{\max}) \in D$, в которой функция $d(\lambda, \varepsilon)$ принимает свое максимальное значение d_{\max} в треугольной области D . Если же указанное неравенство не выполнено ни в одной точке области D , то оно, в частности, не выполнено и в точке $(\lambda_{\max}, \varepsilon_{\max})$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Точка $(\lambda, \varepsilon) \in D$, в которой для эталонного уравнения (22) выполнено условие Трикоми $d(\lambda, \varepsilon)/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$ ограничности его решений, существует только в том случае, когда выполнено неравенство $d_{\max}/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$, где d_{\max} — максимум функции $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ в области D .

Чтобы найти d_{\max} , заметим, что при любом $K > 0$ функция $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ строго монотонно возрастает вдоль луча $\varepsilon = K\lambda$ ($\lambda \geq 0$), идущего на плоскости (λ, ε) из начала координат в первый квадрант. Поэтому свое максимальное значение d_{\max} в выпуклой области D функция $d(\lambda, \varepsilon)$ принимает на "северо-восточной" границе этой области, то есть на отрезке XY (рис. 2).

На этом отрезке функция $d(\lambda, \varepsilon)$ становится функцией $d_0(\lambda) = 2\sqrt{\lambda C(k - \lambda C)}$ переменной $\lambda \in [0, k/C]$. Ее производная по λ равна $d'_0(\lambda) = C(k - 2\lambda C)/\sqrt{\lambda C(k - \lambda C)}$, и она обращается в ноль при значении $\lambda = \lambda_0 = k/2C$, которое соответствует середине отрезка XY . При этом слева от точки $\lambda = \lambda_0$ производная $d'_0(\lambda)$ отрицательна, а справа — положительна. Следовательно, значение λ_0 соответствует точке максимума функции $d_0(\lambda)$ при $\lambda \in [0, k/C]$, а значит, и точке максимума функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в допустимой области D . Подставив значение $\lambda = \lambda_0 = k/2C$ в формулу для $d_0(\lambda)$, находим максимум $d_{\max} = k$ функции $d_0(\lambda)$ по λ , равный максимуму d_{\max} функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в области D .

В результате приходим к такому выводу.

Лемма 4. Для функции $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$, являющейся коэффициентом диссипативного момента в уравнении (22), ее максимум в области D достигается в середине отрезка XY (рис. 2), и он равен

$$d_{\max} = k. \quad (35)$$

Воспользовавшись леммами 2, 3, 4, получаем из теоремы 4 следующий критерий ограниченности угла γ для решений уравнения (2), где в эталонном уравнении вместо коэффициента $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$, зависящего от неопределенных параметров λ, ε , используется его известное максимальное значение (35).

Теорема 5. Пусть момент нагрузки $\Delta M_d(\dot{\gamma})$ удовлетворяет линейным оценкам (5) и пусть для финального эталонного дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + d_{\max}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (36)$$

где $d_{\max} = k$, выполнено неравенство Трикоми $d_{\max}/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$, где $c = c_0/b_0 < 1$.

Тогда в любом решении (24) уравнения (2) функция $\gamma(t)$ является ограниченной при $t \geq 0$.

4.2. Теорема о глобальной устойчивости. Докажем, что для любого решения уравнения (2) в случае ограниченности угловой переменной γ ограниченной является и переменная $\dot{\gamma}$. Для обеспечения ограниченности угла γ достаточно принять условия теоремы 4. Таким образом, необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда любое решение (24) уравнения (2) при $t \geq 0$ ограничено по обеим фазовым переменным $\gamma, \dot{\gamma}$.

Доказательство. Из определения (7) функции $U(\gamma)$ и формул (15), (16) следует, что при условии (12) значения $\gamma = d_s$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют точкам локальных минимумов этой функции, а значения $\gamma = e_s$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — точкам ее локальных максимумов.

При доказательстве ограниченности функции $\gamma(t)$ снизу в теореме 4 для этой функции выводится оценка снизу $\gamma(t) \geq e_{s_0}$ ($t \geq 0$), где номер $s_0 \leq 0$ точки максимума функции $U(\gamma)$ определяется в ходе доказательства. Слева и справа от точки локального максимума $\gamma = e_{s_0}$ функции $U(\gamma)$ расположены точки $\gamma = d_{s_0-1}$ и $\gamma = d_{s_0}$ ее локальных минимумов. При этом значение $\gamma = d_{s_0}$ является точкой минимума функции $U(\gamma)$ на всей полуоси $\gamma \geq e_{s_0}$. Следовательно, на рассматриваемом в теореме 4 решении (24) уравнения (2) функция

$$\Delta U(\gamma) = U(\gamma) - U(d_{s_0}) = \int_{d_{s_0}}^{\gamma} (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0 (\cos d_{s_0} - \cos \gamma) + c_0 (\gamma - d_{s_0}) \quad (37)$$

неотрицательна на этой полуоси $\Delta U(\gamma) \geq 0$, $\gamma \geq e_{s_0}$.

Рассмотрим функцию $v(\gamma, \dot{\gamma}) = W(\dot{\gamma}) + \Delta U(\gamma)$. Она лишь на константу отличается от функции $V(\gamma, \dot{\gamma})$, определенной в (7), и поэтому имеет такую же производную (9) по t в силу уравнения (2) $\dot{v}(\dot{\gamma}) = \dot{\gamma} \Delta M(\dot{\gamma})$. Поскольку $\dot{\gamma} \Delta M(\dot{\gamma}) \leq 0$ согласно (4), то $\dot{v} \leq 0$. Поэтому на решении уравнения (2) функция v не превосходит своего начального значения, то есть фазовые переменные принадлежат множеству

$$\Omega = \{(\gamma, \dot{\gamma}) : W(\dot{\gamma}) + \Delta U(\gamma) \leq v_0\}, \quad (38)$$

где $v_0 = W(\dot{\gamma}_0) + \Delta U(\gamma_0)$ — значение функции v в начальный момент $t = 0$. Из неотрицательности функций $W, \Delta U$ следует, что $v_0 \geq 0$, и тогда из (38) следует, что на решении уравнения (2) выполняются два неравенства

$$W(\dot{\gamma}) \leq v_0, \quad \Delta U(\gamma) \leq v_0. \quad (39)$$

Согласно определению (7), функция W является определенно положительной по отношению к переменной $\dot{\gamma}$. Поэтому первое из неравенств (39) выполняется только для значений этой переменной, удовлетворяющих условию $\dot{\gamma}^2 \leq \rho^2$, где $\rho > 0$ — конечная величина. Второе неравенство (39) с учетом выражения (37) для ΔU приводит к еще одному доказательству ограниченности функции $\gamma(t)$ сверху. \square

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть функция V определена по формуле (7), и пусть M — множество точек фазового пространства $(\gamma, \dot{\gamma})$ уравнения (2), состоящее из целых фазовых траекторий всех решений этого уравнения, определенных на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию $\dot{V} = 0$.*

Множество M состоит только из стационарных точек уравнения (2).

Доказательство. Из формулы (9) для \dot{V} с учетом неравенства (4) следует, что инвариантное множество M образовано целыми фазовыми траекториями, для которых $\dot{\gamma} = 0$. Согласно лемме 1, это множество состоит из стационарных точек $\gamma = \gamma^0, \dot{\gamma} = 0$ уравнения (2). Выше установлено, что множество стационарных точек данного уравнения при $c = c_0/b_0 < 1$ состоит из двух счетных подмножеств, соответствующих значениям d_s, e_s ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) постоянной γ^0 , определенным в (15), (16). \square

В теореме 5 даны условия ограниченности решений уравнения (2) по переменной γ . Далее, в лемме 4 установлено, что из ограниченности решений уравнения (2) по переменной γ следует их ограниченность и по переменной $\dot{\gamma}$.

Тогда из принципа Ла-Салля (теорема 3) с функцией Ляпунова V , определенной в (7), следует, что при выполнении условий теоремы 4 всякое решение уравнения (2) с течением времени неограниченно приближается к инвариантному множеству M . Согласно лемме 6, множество M — это множество стационарных точек уравнения (2). Поскольку расстояния между любыми двумя точками множества M ограничены снизу положительной постоянной $\min(d_0 - e_0, e_1 - d_0) > 0$, то стремление решения к M означает, что оно стремится к одной из стационарных точек. При этом, как показывает теорема 1, на 2π -периоде изменения угла γ существует одна локально асимптотически устойчивая и одна неустойчивая стационарная точка.

Таким образом, при помощи теоремы Леонова (теорема 4) и принципа Ла-Салля (теорема 3) получены следующие условия глобальной устойчивости бестоковой модели синхронного электромотора при нелинейном диссипативном моменте нагрузки.

Теорема 6. *Пусть для дифференциального уравнения (2), описывающего*

бестоковую модель синхронного электромотора, выполнены следующие условия:

- 1) для коэффициентов b_0, c_0 в этом уравнении выполнено неравенство (12);
- 2) нелинейный момент нагрузки $\Delta M_d(\dot{\gamma})$ удовлетворяет указанным в (5) линейным оценкам с коэффициентом $k \geq 0$;
- 3) для финального эталонного дифференциального уравнения (36) при $d_{\max} = k$ выполнено условие глобальной устойчивости Трикоми $d_{\max}/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$, $c = c_0/b_0 < 1$.

Тогда уравнение (2) глобально устойчиво.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, тема № 1023020900001-4-1.1.2;1.1.1.

1. Гелиг А.Х. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения / Г.А. Леонов // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
3. Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
4. Леонов Г.А. Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации / Г.А. Леонов // Прикл. математика и механика. – 1976. – Т. 40, вып. 2. – С. 238–244.
5. Коносевич Б.И. Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки / Б.И. Коносевич, Ю.Б. Коносевич // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2018. – Т. 5 (63), вып. 1. – С. 74–85. – DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.109.
6. Леонов Г.А. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины / Г.А. Леонов, А.М. Зарецкий // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2012. – Вып. 4. – С. 18–27.
7. Коносевич Б.И. Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем / Б.И. Коносевич, Ю.Б. Коносевич // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 3. – С. 57–73. – EDN: QLQICB.
8. Коносевич Б.И. Гиростат с электромотором: математическая модель и стационарные движения / Б.И. Коносевич, Ю.Б. Коносевич // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86, № 6. – С. 814–837. – DOI: 10.31857/S003282352206008X.
9. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин: Учебник для вузов. 3-е изд. / И.П. Копылов. – М.: Высшая школа, 2001. – 607 с.
10. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 24 с.
11. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica / F. Tricomi // Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. – 1933. – Vol. 2, no. 2. – P. 1–20.
12. Барбашин Е.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством / Е.А. Барбашин, В.А. Табуева. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
13. Коносевич Б.И. Компьютерный анализ модели синхронного электромотора, не содержащей электрических токов / Б.И. Коносевич, Ю.Б. Коносевич // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2023. – Т. 10 (68), № 3. – С. 499–515. – DOI: 10.21638/spbu01.2023.305
14. Коносевич Б.И. Пять способов аппроксимации критических значений коэффициента демпфирования в бестоковой модели синхронного электромотора / Б.И. Коносевич, Ю.Б. Коносевич // Вестник С.-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2025. – Т. 12 (70), вып. 2. – С. 377–392. – DOI: 10.21638/spbu01.2025.213

B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich

Global stability conditions for the no-current model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment.

With use of earlier developed approach, based on Leonov's nonlocal reduction method, global stability conditions are obtained for the no-current model of the synchronous electric motor under nonlinear dissipative load moment.

Keywords: *synchronous electric motor, global stability, nonlocal reduction method, LaSalle invariance principle.*

*Статья поступила в редакцию 04.09.2025;
доработана 12.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.*

УДК 531.38; 531.39

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-22-37

EDN:VXWYME



©2025. А.В. Зыза¹, А.В. Мазнев², Р.Н. Нескородев³, Д.Н. Ткаченко⁴

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА-ПУАССОНА НА ОСНОВЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

В статье изучены условия существования двух различных классов решений полиномиальной структуры задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемой уравнениями Кирхгофа-Пуассона. Найдены новые случаи интегрируемости в указанной задаче.

Ключевые слова: гиростат, уравнения Кирхгофа-Пуассона, инвариантные соотношения, полиномиальные решения, эллиптические интегралы Лежандра.

Введение. Классическая задача механики о движении тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, благодаря получению результатов, имеющих большое теоретическое и практическое значение, стала уникальной фундаментальной частью аналитической механики для формирования новых теоретических и практических направлений исследований движения механических систем [1–4]. Известен значительный вклад Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, С.В. Ковалевской, К. Якоби, Л. Пуансо, С. Пуассона, С.А. Чаплыгина, А.М. Ля-

¹Зыза Александр Васильевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: z9125494@mail.ru.

Zyza Alexander Vasilievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

²Мазнев Александр Владимирович – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и методики преподавания математики ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: o.mazniev.dongu@mail.ru.

Mazniev Oleksandr Vladimirovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics.

³Нескородев Роман Николаевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nrromn72@mail.ru.

Neskorodev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

⁴Ткаченко Дмитрий Николаевич – научный сотрудник отдела прикладной механики ИПММ, Донецк, e-mail: Dntkachenko@mail.ru.

Tkachenko Dmitry Nikolaevich – Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Applied Mechanics.

пунова, Н.Е. Жуковского и многих других в решение проблем постановок задач динамики твердого тела и интегрирования уравнений движения сложных механических систем (роботов, гироскопических систем, спутников) [5, 6].

Актуальность построения частных решений уравнений динамики твердого тела обусловлена неинтегрируемостью в квадратурах этих уравнений по Якоби [5] и подчеркивалась, например, Ф. Кляйном, А. Зоммерфельдом [7], П.В. Харламовым [8]. Несомненно, что новые решения динамики твердого тела и гиросстата не только позволяют применять геометрические методы исследования движения, но и приносят дополнительную информацию об интегральных многообразиях. Эти направления в динамике твердого тела и гиросстата особое развитие получили в Донецкой школе механики [1, 9–11].

Одним из обобщений классической задачи динамики твердого тела является задача о движении гиросстата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями Кирхгофа-Пуассона [10].

К настоящему времени построено значительное количество частных решений движения гиросстата в полях сложной структуры. В обзорных монографиях [6, 9] изложены результаты по получению частных решений уравнений динамики твердого тела и гиросстата. В монографии [12] Г.В. Горром дана полная классификация инвариантных соотношений решений уравнений движения гиросстата под действием потенциальных и гироскопических сил, из выводов которой следует, что полиномиальные решения уравнений динамики занимают важное место по их количеству. Именно решения В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева, С.А. Чаплыгина, которые установили новые решения для уравнений Эйлера-Пуассона [6], послужили развитию исследований решений различных полиномиальных классов в обобщенных задачах динамики гиросстата [1, 9, 10, 13–16].

В статье изучены условия существования частных решений двух классов решений полиномиальной структуры в задаче о движении гиросстата под действием потенциальных и гироскопических сил, дифференциальные уравнения которой относятся к уравнениям класса Кирхгофа [5]. Построены два новых частных решения рассматриваемых полиномиальных классов.

1. Постановка задачи. Преобразование уравнений движения гиросстата. Структура специальных классов частных решений. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиросстата под действием потенциальных и гироскопических сил. Возникновение потенциальных сил происходит при ньютонаовском притяжении масс и взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, а также электрических зарядов с электрическим полем. При этом центры ньютонаовского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку. Орт этой оси коллинеарен вектору напряженности постоянного магнитного поля. Лоренцево воздействие магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклические движения роторов в теле – носителе определяют гироскопические силы. Уравнения движения такого гиросстата – это уравнения Кирхгофа-Пуассона, которые в векторной

форме [10] таковы:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Уравнения (1) допускают три первых интеграла:

$$A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 2E, \quad 2(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 2\tilde{k}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1.$$

В уравнениях (1), (2) обозначения таковы: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – орт, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ – гиростатический момент, характеризующий вращательное движение роторов либо по инерции, либо с постоянной относительной скоростью; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ и $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрицы, характеризующие гирокопические и потенциальные силы, соответственно; точка над переменными обозначает относительную производную; E и \tilde{k} – постоянные интегралов энергии и площадей соответственно.

Запишем уравнения (1) и интегралы (2) в скалярном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + B_3\omega_2\nu_3 - B_2\omega_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 + \lambda_2\omega_3 + s_2\nu_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + B_1\omega_3\nu_1 - B_3\omega_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 - \lambda_1\omega_3 - s_1\nu_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + B_2\omega_1\nu_2 - B_1\omega_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + \lambda_1\omega_2 - \\ \quad - \lambda_2\omega_1 + s_1\nu_2 - s_1\nu_1; \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2) + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_3\nu_3^2 = 2E, \\ 2(A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + 2(A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + 2A_3\omega_3\nu_3 - B_1\nu_1^2 - B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2 = 2\tilde{k}, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) решений двух специальных классов полиномиальной структуры.

Первый класс частных решений имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p, \quad \omega_2 = Q(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad \omega_3^2 = R(p) = \sum_{i=0}^m c_i p^i, \\ \nu_1 &= \varphi(p) = \sum_{j=0}^l a_j p^j, \quad \nu_2 = \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \nu_3 = \frac{\kappa(p)}{p} \omega_3, \\ \kappa(p) &= \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j, \end{aligned} \quad (6)$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Если свободный член полинома $\kappa(p)$ из (6) $f_0 = 0$, то указанным классом в задаче о движении тяжелого гиростата описывается решение А.И. Докшевича [9].

Второй класс частных решений таков:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} b_i \sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{\tilde{m}} c_j \sigma^j, \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\tilde{l}} a_k \sigma^k, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}_1} g_i \sigma^i, \quad \nu_3 = \frac{\kappa(\sigma)}{\sigma} \sqrt{R(\sigma)}, \\ \kappa(\sigma) &= \sum_{j=0}^{\tilde{m}_1} f_j \sigma^j. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{l}, \tilde{n}_1, \tilde{m}_1$ – целые неотрицательные числа; b_i, c_j, a_k, g_i, f_j – параметры, которые необходимо определить.

Указанный в (7) класс частных решений впервые был введен в работе [13], в которой частично исследованы условия его существования для уравнений Кирхгофа-Пуассона. В [13] построено новое частное решение класса (7) уравнений (3), (4), характеризуемое значениями:

$$\tilde{n} = 3, \quad \tilde{m} = 6, \quad \tilde{l} = 2, \quad \tilde{n}_1 = 3, \quad \tilde{m}_1 = 1.$$

2. Новое частное решение класса (6). Рассмотрим условия существования для уравнений движения гиростата (3), (4) частных решений первого класса (6). Для этого запишем уравнения движения (3), (4) и геометрический интеграл из (5) с учетом значений для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ из (6):

$$\dot{p} = \Omega(p) \sqrt{R(p)} (\psi'(p))^{-1}, \quad \Omega(p) = \kappa(p) - \varphi(p); \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'(p) (p\psi(p) - Q(p)\kappa(p)) &= \varphi'(p) \Omega(p) p, \\ (R(p)\kappa^2(p)p^{-2})' \Omega(p) p &= 2\psi'(p)\kappa(p)(Q(p)\varphi(p) - p\psi(p)); \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1\Omega(p)p &= \psi'(p) \{ ((C_3 - C_2)\psi(p) + B_3Q(p) + s_2)\kappa(p) + \\ &\quad + ((A_2 - A_3)Q(p) - B_2\psi(p) + \lambda_2)p \}, \\ A_2Q'(p)\Omega(p)p &= \psi'(p) \{ ((C_1 - C_3)\varphi(p) - B_3p - s_1)\kappa(p) + \\ &\quad + (B_1\varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1)p \}, \\ A_3R'(p)\Omega(p)p &= 2\psi'(p) \{ ((C_2 - C_1)\psi(p) - B_1Q(p) - s_2)\varphi(p) + \\ &\quad + (B_2\varphi(p) + (A_1 - A_2)Q(p) - \lambda_2)p + s_1\psi(p) + \lambda_1Q(p) \}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$(\varphi^2(p) + \psi^2(p) - 1)p^2 + R(p)\kappa^2(p) = 0. \quad (11)$$

В уравнениях (8)–(10) штрихом обозначена производная по переменной p . Если функции $Q(p)$, $R(p)$, $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $\kappa(p)$ определены, то зависимость $p = p(t)$ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (8).

Рассмотрим случай, когда алгебраические многочлены из (6) таковы:

$$\begin{aligned} Q(p) &= b_2p^2 + b_1p + b_0, & R(p) &= c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0, \\ \varphi(p) &= a_2p^2 + a_1p + a_0, & \psi(p) &= g_2p^2 + g_1p + g_0, & \kappa(p) &= f_1p + f_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим полиномы из (12) в первое динамическое уравнение из (10).

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левых и правых частях уравнения и обозначая $\alpha = C_3 - C_2$, заключаем, что первое уравнение из (10) при $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ может быть тождеством по p только при выполнении условия

$$(\alpha g_2 + B_3 b_2) f_1 + (A_2 - A_3) b_2 - B_2 g_2 = 0. \quad (13)$$

В силу (13) рассматриваемое уравнение упрощается

$$\Omega(p) = \psi'(p)(d_2p^2 + d_1p + d_0)(A_1p)^{-1}. \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_2 &= (\alpha g_1 + B_3 b_1) f_1 + (\alpha g_2 + B_3 b_2) f_0 + (A_2 - A_3) b_1 - B_2 g_1, \\ d_1 &= (\alpha g_0 + B_3 b_0 + s_2) f_1 + (\alpha g_1 + B_3 b_1) f_0 + (A_2 - A_3) b_0 - B_2 g_0 + \lambda_2, \\ d_0 &= (\alpha g_0 + B_3 b_0 + s_2) f_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношение (14) позволяет упростить другие уравнения исследуемой системы (9), (10). Вначале с помощью (14) исключим функцию $\Omega(p)$ из уравнений (9), (10). Затем подставим в упрощенные уравнения, геометрический интеграл (11), а также в уравнение (14) полиномы (12). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по p , приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты полиномов из (12) решения (6):

$$\begin{aligned} A_1 a_2 + 2g_2 d_2 &= 0, \\ A_1(a_1 - f_1) + g_1 d_2 + 2g_2 d_1 &= 0, & g_1 d_0 &= 0, \\ A_1(a_0 - f_0) + g_1 d_1 + 2g_2 d_0 &= 0, & A_1(b_2 f_1 - g_2) + 2a_2 d_2 &= 0, \\ A_1(b_1 f_1 + b_2 f_0 - g_1) + a_1 d_2 + 2a_2 d_1 &= 0, \\ A_1(b_0 f_1 + b_1 f_0 - g_0) + a_1 d_1 + 2a_2 d_0 &= 0, & A_1 b_0 f_0 + a_1 d_0 &= 0, \\ \gamma_2 d_2 - 2A_1 b_2 a_2 &= 0, \\ \gamma_2 d_1 + \gamma_1 d_2 - 2A_1(b_2 a_1 + b_1 a_2 - g_2) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma_2 d_0 + \gamma_1 d_1 + \gamma_0 d_2 - 2A_1 (b_2 a_0 + b_1 a_1 + b_0 a_2 - g_1) = 0, \\
 & \gamma_1 d_0 + \gamma_0 d_1 - 2A_1 (b_1 a_0 + b_0 a_1 - g_0) = 0, \quad \gamma_0 d_0 - 2A_1 d_0 a_0 = 0, \\
 & 2A_2 b_2 d_2 - A_1 (\beta f_1 + B_1) a_2 = 0, \tag{16} \\
 & A_2 b_1 d_0 - A_1 (\beta a_0 - s_1) f_0 = 0, \\
 & A_2 (b_1 d_2 + 2b_2 d_1) - A_1 ((\beta a_1 - B_3) f_1 + B_1 a_1 + \beta a_2 f_0 + A_3 - A_1) = 0, \\
 & c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \\
 & A_2 (b_1 d_1 + 2b_2 d) - A_1 ((\beta a_0 - s_1) f_1 + (\beta a_1 - B_3) f_0 + B_1 a_0 - \lambda_1) = 0, \\
 & 2A_3 c_4 d_2 - A_1 \delta_2 a_2 = 0, \\
 & A_3 (4c_4 d_1 + 3c_3 d_2) - 2A_1 (\delta_2 a_1 + \delta_1 a_2 + B_2 g_2 + (A_1 - A_2) b_2) = 0, \\
 & A_3 (4c_4 d_0 + 3c_3 d_1 + 2c_2 d_2) - 2A_1 (\delta_2 a_0 + \delta_1 a_1 + \delta_0 a_2 + \\
 & \quad + B_2 g_1 + (A_1 - A_2) b_1 + s_1 g_2 + \lambda_1 b_2) = 0, \\
 & A_3 (3c_3 d_0 + 2c_2 d_1) - 2A_1 (\delta_1 a_0 + \delta_0 a_1 + B_2 g_0 + (A_1 - A_2) b_0 - \lambda_2 + s_1 g_1 + \lambda_1 b_1) = 0, \\
 & c_2 A_3 d_0 - A_1 (\delta_0 a_0 + s_1 g_0 + \lambda_1 b_0) = 0, \quad a_0^2 + g_0^2 + c_2 f_0^2 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь $\beta = C_1 - C_3$, $\gamma_0 = 2c_2 f_1 + c_3 f_0$, $\gamma_1 = 3c_3 f_1 + 2c_4 f_0$, $\gamma_2 = 4c_4 f_1$, $\delta_0 = -(\alpha + \beta) g_0 - B_1 b_0 - s_2$, $\delta_1 = -(\alpha + \beta) g_1 - B_1 b_1$, $\delta_2 = -(\alpha + \beta) g_2 - B_1 b_2$.

Система алгебраических уравнений (13), (15), (16) в случае $d_0 = 0$ разрешима при выборе свободных параметров A_2 , A_3 , B_2 , B_3 , f_1 , g_2 . Считая $\hat{h} = g_2/a_2$, запишем ее решение:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{4}{\mu_*} \left\{ \left((B_2^2 A_2 - B_3^2 A_3) f_1^2 - 2(A_2 - A_3) (B_2 A_2 + B_3 A_3) f_1 + (A_2 - A_3)^3 \right) \hat{h}^4 + \right. \\
 &\quad + \left(-A_3 (B_3 f_1)^2 - (2B_2 A_2^2 - (B_2 - 3B_3) A_2 A_3 - 2B_3 A_3^2) f_1 + (2A_2 - A_3) (A_2 - A_3)^2 \right) \hat{h}^2 + \\
 &\quad \left. + \left((A_2 - A_3)^2 - A_3 B_3 f_1 \right) A_2 \right\}, \\
 B_1 &= \frac{(2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3) f_1) \hat{h}^2 + 2(A_2 - A_3) + B_3 f_1}{f_1}, \\
 \alpha &= -\frac{(A_2 - A_3 - (B_2 - B_3) f_1) \hat{h}^2 + A_2 - A_3 + B_3 f_1}{(\hat{h} f_1)^2}, \\
 \beta &= -\frac{(2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3) f_1) \hat{h}^4 + (3A_2 - 2A_3 + B_3 f_1) \hat{h}^2 + A_2}{(\hat{h} f_1)^2}, \\
 \lambda_1 &= \frac{1}{8\hat{h}^4 f_1^2 a_2} \left\{ -8\Delta_1 (a_1 - f_1) (2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3) f_1) \hat{h}^6 + \right. \\
 &\quad + 4(a_1 - f_1) (2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3) f_1) g_1 f_1 \hat{h}^5 - 2 \left(-(B_2 - B_3) (g_1 f_1)^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2\left((A_2 - A_3)g_1^2 - \Delta_1(5A_2 - 4A_3 - 2B_3a_1)\right)f_1 + 2\Delta_1a_1(7A_2 - 4A_3)\hat{h}^4 + \\
 & +2g_1(-2f_1^3B_3 - 2(3A_2 - 2A_3 - B_3a_1)f_1^2 + 2(3A_2 - 2A_3)a_1f_1 + \Delta_1A_2)\hat{h}^3 + \\
 & +2(2A_2f_1^3 - (B_3g_1^2 + 5A_2a_1)f_1^2 + ((2A_3 - 3A_2)g_1^2 + A_2(3a_1^2 + 2\Delta_1))f_1 - \\
 & \quad -6\Delta_1a_1A_2)\hat{h}^2 - A_2g_1((5a_1 - 4f_1)f_1 - 2\Delta_1)\hat{h} + A_2f_1g_1^2\Big\}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 = & -\frac{1}{4\left(\hat{h}f_1\right)^2a_2}\left\{-4\Delta_1\left((B_2 - B_3)b_1f_1^2 - (B_2 - B_3)g_1f_1 + (A_2 - A_3)g_1\right)\hat{h}^2 + \right. \\
 & \left.+2f_1^2(a_1 - f_1)(B_2a_1 + A_1)\hat{h} - g_1\left((B_2a_1 + A_1)f_1^2 + 4\Delta_1(A_2 - A_3 + B_3f_1)\right)\right\},
 \end{aligned}$$

$$s_1 = \beta a_0, \quad s_2 = -\alpha g_0,$$

$$b_2 = \frac{(\hat{h}^2 + 1)a_2}{\hat{h}f_1}, \quad c_4 = -\frac{(\hat{h}^2 + 1)a_2^2}{f_1^2}, \quad b_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 b_1 = & -\frac{2}{\mu_*\hat{h}A_3}\left\{4(A_2 - A_3)(A_2 - A_3 - B_2f_1)(2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3)f_1)\hat{h}^8 + \right. \\
 & +2\left(-(4B_2B_3A_2 + (B_2^2 - 3B_2B_3 - 2B_3^2)A_3)f_1^2 - \right. \\
 & \quad \left.- (2(5B_2 - 3B_3)A_2^2 - 2(8B_2 - 3B_3)A_2A_3 + \right. \\
 & \quad \left.+ (7B_2 - B_3)A_3^2)f_1 + 2(A_2 - A_3)(6A_2^2 - 8A_2A_3 + 3A_3^2)\right)\hat{h}^6 + \\
 & \quad +(-2(2B_2(B_2 + B_3)A_2 - B_3(B_2 + 4B_3)A_3)f_1^2 - \\
 & \quad \left.- (4(B_2 - 3B_3)A_2^2 - 4(B_2 + B_3)A_2A_3 + \right. \\
 & \quad \left.+ (4B_2 + 7B_3)A_3^2)f_1 + 24A_2^3 - 34A_2^2A_3 + 14A_2A_3^2 - 3A_3^3)\hat{h}^4 + \\
 & \quad \left.+ \left(4A_3(B_3f_1)^2 + (4(B_2 + B_3)A_2^2 - 4(B_2 - 3B_3)A_2A_3 - 5B_3A_3^2)f_1 + \right. \right. \\
 & \quad \left.\left.+ 8A_2^3 + 4A_2^2A_3 - 10A_2A_3^2 + A_3^3\right)\hat{h}^2 + 2(3A_2 - 2A_3 + 2f_1B_3)A_2A_3\right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 = & -\frac{4f_1}{\mu_*A_3}\left\{2(A_2 - A_3)(A_2 - A_3 - B_2f_1)(2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3)f_1)\hat{h}^6 + \right. \\
 & +(-2(B_2 + B_3)(A_2B_2 - A_3B_3)f_1^2 - (4(B_2 - B_3)A_2^2 - 3(2B_2 - B_3)A_2A_3 + \\
 & +(4B_2 - B_3)A_3^2)f_1 + (A_2 - A_3)(8A_2^2 - 9A_2A_3 + 5A_3^2))\hat{h}^4 + \left(2A_3(B_3f_1)^2 + \right. \\
 & +(2(B_2 + B_3)A_2^2 - (2B_2 - 3B_3)A_2A_3 - B_3A_3^2)f_1 + 4A_2^3 - 2A_2^2A_3 - A_3^3)\hat{h}^2 + \\
 & \quad \left.\left.+ (3A_2 - 2A_3 + 2B_3f_1)A_2A_3\right)\right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1 = & -\frac{2\hat{h}f_1}{\mu_*A_3}\left\{4(A_2 - A_3)(A_2 - A_3 - B_2f_1)(2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3)f_1)\hat{h}^6 + \right. \\
 & +2(-2(B_2 + B_3)(A_2B_2 - A_3B_3)f_1^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(4(B_2 - B_3) A_2^2 - (7B_2 - 3B_3) A_2 A_3 + 4B_2 A_3^2 \right) f_1 + \\
& + 2(A_2 - A_3) (4A_2^2 - 5A_2 A_3 + 2A_3^2) \hat{h}^4 + \left(4A_3 (B_3 f_1)^2 + 2(2A_2 - A_3) \times \right. \\
& \times ((B_2 + B_3) A_2 + 2B_3 A_3) f_1 + (8A_2^2 - 8A_2 A_3 + A_3^2) A_2 \hat{h}^2 + \\
& \left. + (4A_2 - 3A_3 + 4B_3 f_1) A_2 A_3 \right), \\
c_3 = & - \frac{2a_2}{3\hat{h}f_1^3} \left[-\Delta_1 \hat{h}^3 + (2b_1 f_1 + g_1) f_1 \hat{h}^2 + (2f_1^2 - \Delta_1) \hat{h} + g_1 f_1 \right], \\
c_2 = & \frac{1}{3\hat{h}f_1^4} \left\{ -(\Delta_1 + 6f_1^2) \Delta_1 \hat{h}^3 + ((g_1 + 2b_1 f_1) \Delta_1 + 6(-f_1 b_1 + g_1) f_1^2) f_1 \hat{h}^2 + \right. \\
& + \left. (-(\Delta_1 + 4f_1^2) \Delta_1 + 3f_1^3 (2(a_1 - f_1) - g_1 b_1)) \hat{h} - (3f_1^2 - \Delta_1) g_1 f_1 \right\}, \\
& c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \\
f_0 = & \frac{\Delta_1}{a_2}, \quad g_0 = \frac{\Delta_2}{a_2}, \quad a_0 = \frac{\Delta_3}{a_2}, \quad a_2 = \sqrt{c_2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mu_* = & 4(2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3) f_1)^2 \hat{h}^6 + (8(B_3 - B_2) B_3 f_1^2 - 4((4B_2 - 9B_3) A_2 - \\
& - (3B_2 - 8B_3) A_3) f_1 + 4(9A_2 - 7A_3)(A_2 - A_3)) \hat{h}^4 + \\
& + (4B_3^2 f_1^2 + 8(3A_2 - 2A_3) B_3 f_1 + 24A_2^2 - 35A_2 A_3 + 12A_3^2) \hat{h}^2 + \\
& + (4B_3 f_1 + 4A_2 - 3A_3) A_2, \\
\Delta_1 = & - \frac{2f_1^2}{\mu_*} \left[2(A_2 - A_3 + B_3 f_1) (2(A_2 - A_3) - (B_2 - B_3) f_1) \hat{h}^4 + \right. \\
& + \left. \left(2(B_3 f_1)^2 + ((8B_3 - B_2) A_2 - 4B_3 A_3) f_1 + (A_2 - A_3)(7A_2 - 2A_3) \right) \hat{h}^2 + \right. \\
& \left. + (3A_2 - 2A_3 + 2B_3 f_1) A_2 \right], \\
\Delta_2 = & \frac{4\hat{h}^2 b_1 \Delta_1 + (2\hat{h}(f_1 - a_1) + g_1) a_1}{4\hat{h}^2}, \quad \Delta_3 = \frac{4\hat{h}^2 \Delta_1 + (2\hat{h}(a_1 - f_1) - g_1) g_1}{4\hat{h}^2}.
\end{aligned}$$

Зависимость переменной p от времени в решении (6), (12), (17) устанавливаем из дифференциального уравнения, вытекающего из (8)

$$\begin{aligned}
\dot{p} = & A_1^{-1} (d_2 p + d_1) p \sqrt{c_4 p^2 + c_3 p + c_2}, \\
d_2 = & -\frac{A_1}{2\hat{h}}, \quad d_1 = \frac{(2\hat{h}(f_1 - a_1) + g_1) A_1}{4\hat{h}^2 a_2}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Укажем числовой пример действительности полученного решения уравнений (3), (4). Полагая, что выполнены равенства

$$A_2 = \frac{5}{2}a, \quad A_3 = 2a, \quad B_2 = 2b, \quad B_3 = 3b, \quad f_1 = \frac{a}{4b}, \quad \hat{h} = 1 \quad (a > 0, \quad b > 0), \quad (19)$$

преобразуем условия на параметры задачи из (17)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{5}{8}a, \quad B_1 = 12b, \quad \alpha = -\frac{32b^2}{a}, \quad \beta = -\frac{128b^2}{a}, \\ s &= -\frac{16\sqrt{26}b^2}{65a} (180; 1; 0), \quad \lambda = \frac{\sqrt{26}b}{65} (268; 89; 0), \end{aligned} \quad (20)$$

и в силу (17), (19) запишем решение (6), (12):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p, \quad \omega_2 = -\frac{\sqrt{26}}{512b} (-25ap + 64\sqrt{26}b)p, \quad \omega_3 = p\sqrt{R^*(p)}, \\ R^*(p) &= \frac{1}{262144b^2} (-8125a^2p^2 + 25600\sqrt{26}abp - 352256b^2), \\ v_1 &= \frac{\sqrt{26}}{692224b^2} (-65ap + 96\sqrt{26}b)^2, \\ v_2 &= -\frac{\sqrt{26}}{266240b^2} (-1625a^2p^2 + 3520\sqrt{26}abp + 2048b^2), \\ v_3 &= -\frac{1}{260b} (-65ap + 64\sqrt{26}b)\sqrt{R^*(p)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Функцию $p = p(t)$ получим путем обращения интеграла, вытекающего из (18) при условиях (17), (19). Переменная $p(t)$ изменяется на отрезке

$$p \in \left[-\frac{64\sqrt{26}(\sqrt{21}-8)b}{325a}; \frac{64\sqrt{26}(\sqrt{21}+8)b}{325a} \right]. \quad (22)$$

На указанном в (22) отрезке изменения p функция $R^*(p) \geq 0$ и принимает положительные значения, исключая граничные точки. Следовательно, действительность решения (18)–(22) установлена. Например, если $a = b$, то из (18) при выполнении условий из (17), (19) находим

$$\begin{aligned} &\frac{5\sqrt{13}\sqrt{43}\sqrt{277}}{333508} \left(2\sqrt{43}\operatorname{arctg} \left(\frac{(\sqrt{26}475p - 24832)}{\sqrt{554} \cdot 512\sqrt{R^*(p)}} \right) + \right. \\ &\left. + \sqrt{277}\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{86}(25\sqrt{26}p - 688)}{43 \cdot 128\sqrt{R^*(p)}} \right) \right) = (t - t_0). \end{aligned} \quad (23)$$

Равенство (23) позволяет указать получение зависимости от времени всех переменных задачи в (21).

Построенное решение (19)–(23) также можно характеризовать, как решение с двумя линейными инвариантными соотношениями вида

$$(b_2g_1 - b_1g_2)\omega_1 + g_2\omega_2 - b_2\nu_2 + (b_2g_0 - b_0g_2) = 0,$$

$$(g_1 - a_1)\omega_1 + \nu_1 - \nu_2 + (g_0 - a_0) = 0,$$

производная которых в силу уравнений (3), (4) не обращаются тождественно в нуль на этих соотношениях. Это решение имеет свойства, отличные от свойств решения, представленного в [17, 18].

3. Новое частное решение класса (7). Изучим теперь условия существования для дифференциальных уравнений (3), (4) частных решений второго класса (7). Для этого преобразуем эти уравнения с учетом соотношений из (7). Получим:

$$\dot{\sigma} = (\varphi'(\sigma))^{-1} (\psi(\sigma) - Q(\sigma)\kappa(\sigma)\sigma^{-1}) \sqrt{R(\sigma)}; \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\sigma - Q(\sigma)\kappa(\sigma)) &= \varphi'(\sigma)\sigma P_*(\sigma), \quad P_*(\sigma) = \sigma\kappa(\sigma) - \varphi(\sigma), \\ (R(\sigma)(\kappa(\sigma)\sigma^{-1})^2) \sigma P_*(\sigma) &= 2\psi'(\sigma)\kappa(\sigma)(Q(\sigma)\varphi(\sigma) - \psi(\sigma)\sigma^2); \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} 2A_1\sigma^2 P_*(\sigma) &= \psi'(\sigma) \{ ((C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_3Q(\sigma) + s_2)\varepsilon(\sigma) + \\ &\quad + ((A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_2\psi(\sigma) + \lambda_2)\sigma \}, \\ A_2Q'(\sigma)\sigma P_*(\sigma) &= \psi'(\sigma) \{ ((C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_3\sigma^2 - s_1)\varepsilon(\sigma) + \\ &\quad + ((A_3 - A_1)\sigma^2 + B_1\varphi(\sigma) - \lambda_1)\sigma \}, \\ A_3R'(\sigma)P_*(\sigma) &= 2\psi'(\sigma) \{ ((C_2 - C_1)\varphi(\sigma) + B_2\sigma^2 + s_1)\psi(\sigma) + \\ &\quad + ((A_1 - A_2)\sigma^2 - B_1\varphi(\sigma) + \lambda_1)Q(\sigma) - \lambda_2\sigma^2 - s_2\varphi(\sigma) \}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Геометрический интеграл из (5) на основании (7) примет вид

$$(\varphi^2(\sigma) + \psi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + R(\sigma)\kappa^2(\sigma) = 0. \quad (27)$$

В уравнениях (24)–(26) штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной σ . После интегрирования уравнений (25), (26) зависимость σ от времени находим из уравнения (24).

Будем считать, что полиномы решения (7) таковы

$$Q(\sigma) = b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \quad R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \quad (28)$$

$$\varphi(\sigma) = a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \psi(\sigma) = g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \quad \psi(\sigma) = f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0.$$

Подставим алгебраические многочлены (28) в уравнения (25), (26) и интеграл (27), и потребуем их тождественности при всех σ . Получим условия на параметры, которые характеризуются системой алгебраических уравнений:

$$2A_1(a_3 - f_2) + 2g_2d_4^* = 0, \quad 2A_1(a_2 - f_1) + g_1d_4^* + 2g_2d_3^* = 0,$$

$$2A_1(a_1 - f_0) + g_1d_3^* + 2g_2d_2^* = 0, \quad 2A_1a_0 + g_1d_2^* + 2g_2d_1^* = 0,$$

$$\begin{aligned}
& g_1 d_1^* + 2g_2 d_0^* = 0, \quad g_1 d_0^* = 0, \quad a_3 d_4^* = 0, \\
& 2A_1 b_2 f_2 + 2a_2 d_4^* + 3a_3 d_3^* = 0, \\
& 2A_1 (b_2 f_1 + b_1 f_2 - g_2) + a_1 d_4^* + 2a_2 d_3^* + 3a_3 d_2^* = 0, \\
& 2A_1 (b_2 f_0 + b_1 f_1 + b_0 f_2 - g_1) + a_1 d_3^* + 2a_2 d_2^* + 3a_3 d_1^* = 0, \\
& 2A_1 (b_1 f_0 + b_0 f_1 - g_0) + a_1 d_2^* + 2a_2 d_1^* + 3a_3 d_0^* = 0, \tag{29} \\
& 2A_1 b_0 f_0 + a_1 d_1^* + 2a_2 d_0^* = 0, \quad a_1 d_0^* = 0, \\
& \gamma_6^* d_6^* + \gamma_7^* d_5^* + \gamma_8^* d_4^* = 0, \quad \gamma_6^* d_4^* = 0, \\
& \gamma_5^* d_4^* + \gamma_6^* d_3^* - 4A_1 b_2 a_2 = 0, \\
& \gamma_4^* d_4^* + \gamma_5^* d_3^* + \gamma_6^* d_2^* + 4A_1 (g_2 - b_2 a_2 - b_1 a_3) = 0, \\
& \gamma_3^* d_4^* + \gamma_4^* d_3^* + \gamma_5^* d_2^* + \gamma_6^* d_1^* + 4A_1 (g_1 - b_2 a_1 - b_1 a_2 - b_0 a_3) = 0, \\
& \gamma_2^* d_4^* + \gamma_3^* d_3^* + \gamma_4^* d_2^* + \gamma_5^* d_1^* + \gamma_6^* d_0^* + 4A_1 (g_0 - b_2 a_0 - b_1 a_1 - b_0 a_2) = 0, \\
& \gamma_1^* d_4^* + \gamma_2^* d_3^* + \gamma_3^* d_2^* + \gamma_4^* d_1^* + \gamma_5^* d_0^* - 4A_1 (b_1 a_0 + b_0 a_1) = 0, \\
& \gamma_0^* d_4^* + \gamma_1^* d_3^* + \gamma_2^* d_2^* + \gamma_3^* d_1^* + \gamma_4^* d_0^* + \gamma_5^* d_0^* - 4A_1 b_0 a_0 = 0, \\
& \gamma_0^* d_3^* + \gamma_1^* d_2^* + \gamma_2^* d_1^* + \gamma_3^* d_0^* = 0, \quad \gamma_0^* d_2^* + \gamma_1^* d_1^* + \gamma_2^* d_0^* = 0, \quad \gamma_0^* d_1^* + \gamma_1^* d_0^* = 0, \\
& \gamma_0^* d_0^* = 0, \quad A_1 \beta f_2 a_3 = 0, \\
& A_2 (2b_2 d_4^* + 3b_3 d_3^*) - 2A_1 (f_2 \varepsilon_1 + (B_1 + \beta f_1) a_3) = 0, \\
& A_2 (b_1 d_4^* + 2b_2 d_3^* + 3b_3 d_2^*) - 2A_1 (f_1 \varepsilon_1 + \beta (f_2 a_1 + f_0 a_3) + B_1 a_2 + A_3 - A_1) = 0, \\
& A_2 (b_1 d_3^* + 2b_2 d_2^* + 3b_3 d_1^*) - 2A_1 (f_0 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_0 + (B_1 + \beta f_1) a_1) = 0, \\
& A_2 (b_1 d_2^* + 2b_2 d_1^* + 3b_3 d_0^*) - 2A_1 (f_1 \varepsilon_0 + \beta f_0 a_1 - \tau_2) = 0, \\
& A_2 (b_1 d_1^* + 2b_2 d_0^*) - 2A_1 f_0 \varepsilon_0 = 0, \quad b_1 d_0^* = 0, \\
& A_3 A_4 d_4^* + A_1 ((\alpha + \beta) g_2 a_3 + B_1 b_2 a_3) = 0, \\
& A_3 (3c_3 d_4^* + 4c_4 d_3^*) + 4A_1 (\alpha + \beta) g_1 a_3 - g_2 \tau_4 - b_2 \tau_3 + B_1 b_1 a_3 = 0, \\
& A_3 (2c_2 d_4^* + 3c_3 d_3^* + 4c_4 d_2^*) + \\
& + 4A_1 ((\alpha + \beta) (g_0 a_3 + g_2 a_1) - g_1 \tau_4 - b_1 \tau_3 + B_1 (b_0 a_3 + b_2 a_1) + s_2 a_3) = 0, \\
& A_3 (c_1 d_4^* + 2c_2 d_3^* + 3c_3 d_2^* + 4c_4 d_1^*) + \\
& + 4A_1 ((\alpha + \beta) g_1 a_1 - g_0 \tau_4 - b_0 \tau_3 + B_1 b_1 a_1 - g_2 \tau_1 - b_2 \tau_2 + s_2 a_2 + \lambda_2) = 0, \\
& A_3 (c_1 d_3^* + 2c_2 d_2^* + 3c_3 d_1^* + 4c_4 d_0^*) + \\
& + 4A_1 ((\alpha + \beta) g_0 a_1 + B_1 b_0 a_1 - g_1 \tau_1 - b_1 \tau_2 + s_2 a_1) = 0, \\
& A_3 (c_1 d_2^* + 2c_2 d_1^* + 3c_3 d_0^*) - 4A_1 (g_0 \tau_1 + b_0 \tau_2 - s_2 a_0) = 0, \\
& c_1 d_1^* + 2c_2 d_0^* = 0, \quad c_1 d_0^* = 0,
\end{aligned}$$

$$a_0^2 - 1 + g_0^2 + (2f_0 f_2 + f_1^2) c_0 + 2f_0 f_1 c_1 + f_0^2 c_2 = 0.$$

Здесь

$$\alpha = C_3 - C_2, \quad \beta = C_1 - C_3,$$

$$\eta_2 = B_3 b_2 + \alpha g_2, \quad \eta_1 = B_3 b_1 + \alpha g_1, \quad \eta_0 = B_3 b_0 + \alpha g_0 + s_2,$$

$$d_4^* = f_2 \eta_2, \quad d_3^* = f_1 \eta_2 + f_2 \eta_1 - B_2 g_2 + (A_2 - A_3) b_2,$$

$$d_2^* = f_0 \eta_2 + f_1 \eta_1 + f_2 \eta_0 - B_2 g_1 + (A_2 - A_3) b_1,$$

$$d_1^* = f_0 \eta_1 + f_1 \eta_0 - B_2 g_0 + (A_2 - A_3) b_0 + \lambda_2, \quad d_0^* = f_0 \eta_0,$$

$$\gamma_6^* = 6c_4 f_2, \quad \gamma_5^* = 4c_4 f_1 + 5c_3 f_2, \quad \gamma_4^* = 2c_4 f_0 + 3c_3 f_1 + 4c_2 f_2,$$

$$\gamma_3^* = c_3 f_0 + 2c_2 f_1 + 3c_1 f_2, \quad \gamma_2^* = c_1 f_1 + 2c_0 f_2, \quad \gamma_1^* = -c_1 f_0, \quad \gamma_0^* = -2c_0 f_0,$$

$$\varepsilon_1 = \beta a_2 - B_3, \quad \varepsilon_0 = \beta a_0 - s_1,$$

$$\tau_4 = B_2 - (\alpha + \beta) a_2, \quad \tau_3 = A_1 - A_2 - B_1 a_2, \quad \tau_2 = \lambda_1 - B_1 a_0,$$

$$\tau_1 = s_1 - (\alpha + \beta) a_0.$$

Значения коэффициентов полиномов из (28) решения (7) и параметры задачи установим из условий совместности системы уравнений (29). При $g_1 \neq 0$, $f_0 = 0$ запишем ее решение, считая свободными ненулевые параметры A_2 , A_3 , B_3 , g_2 .

$$A_1 = A_3, \quad B_1 = B_3, \quad C_1 = C_3, \quad \eta_* = \sqrt{2A_2(A_2 - A_3)}, \quad k_* = \frac{4A_3 - 3A_2}{3A_2},$$

$$\alpha = \frac{B_3^2}{A_2}, \quad s_1 = -\frac{g_2^2 B_3 A_3}{3A_2 f_2^2},$$

$$s_2 = -\frac{g_2}{216 A_2^4 f_2^2} \left[32 (A_2 - 3A_3) (g_2 B_3 + 3\eta_*) (g_2 B_3)^3 + \right.$$

$$+ 24A_2 (15A_2^2 - 46A_2 A_3 + 27A_3^2) (g_2 B_3)^2 + 18A_2 \eta_* (21A_2^2 - 52A_2 A_3 + 27A_3^2) g_2 B_3 + \\ \left. + (9A_2 (A_2 - A_3))^2 (5A_2 - 3A_3) \right],$$

$$\lambda_1 = \frac{A_3 (A_3 - A_2) g_2^2}{2A_2 f_2^2},$$

$$\lambda_2 = -\frac{g_2 (A_2 - A_3)}{216 A_2^4 B_3 f_2^2} \left[32 (A_2 - 4A_3) (g_2 B_3 + 3\eta_*) (g_2 B_3)^3 + 9A_2 (8 (A_2 - 3A_3) \times \right.$$

$$\times (5A_2 - 4A_3) (g_2 B_3)^2 + 6\eta_* (7A_2^2 - 21A_2 A_3 + 12A_3^2) g_2 B_3 + \\ \left. + 9A_2 (A_2 - A_3)^2 (5A_2 - 4A_3) \right],$$

$$b_2 = -\frac{B_3 g_2}{A_2}, \quad b_1 = -\frac{(2\eta_* g_2 B_3 + A_2 (3A_2 - 5A_3)) g_2}{2A_2^2 f_2},$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{g_2}{108A_2^3B_3f_2^2} \left[16(g_2B_3 + 3\eta_*)(g_2B_3)^3 + 18A_2(7A_2 - 11A_3)(g_2B_3)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 27A_2(A_2 - 3A_3)\eta_*g_2B_3 + (9A_2(A_2 - A_3))^2 \right], \quad (30) \\
c_4 &= -1, \quad c_3 = \frac{4g_2^2B_3}{3A_2f_2}, \quad c_2 = \frac{\left(-4(g_2B_3)^2 + 6\eta_*g_2B_3 + 9A_2(2A_2 - 3A_3)\right)g_2^2}{(3A_2f_2)^2}, \\
c_1 &= -\frac{g_2^2}{18A_2^3B_3f_2^3} \left[8\eta_*(g_2B_3)^3 + 12A_2(3A_2 - 5A_3)(g_2B_3)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 18A_2\eta_*(A_2 - 2A_3)g_2B_3 + 27(A_2(A_2 - A_3))^2 \right], \\
c_0 &= \frac{g_2^3}{36A_2^3B_3f_2^4} \left[4(A_2 - 3A_3)(2g_2B_3 + 3\eta_*)(g_2B_3)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 9A_2(A_2 - A_3)((5A_2 - 7A_3)g_2B_3 + 3\eta_*(A_2 - A_3)) \right], \\
a_3 &= f_2, \quad a_2 = \frac{3(\eta_*g_2B_3 + A_2(A_2 - A_3))}{2A_2B_3}, \\
a_1 &= -\frac{\left(8(g_2B_3)^2 + 24\eta_*g_2 + 45A_2(A_2 - A_3)\right)g_2^2}{18A_2^2f_2}, \\
a_0 &= -\frac{g_2^2}{36A_2^3B_3f_2^2} \left[4(g_2B_3)^2 + 9(\eta_*g_2B_3 + 2A_2(A_2 - A_3)) \right] \times \\
&\quad \times (2\eta_*g_2B_3 + 3A_2(A_2 - A_3)), \\
g_1 &= \frac{(3A_2(A_2 - A_3) + 2\eta_*g_2B_3)g_2}{2A_2B_3f_2}, \\
g_0 &= \frac{g_2}{72A_2^3B_3^2f_2^2} \left[-32A_3(g_2B_3 + 3\eta_*)(g_2B_3)^3 + 9A_2(A_2 - A_3) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(4(A_2 - 6A_3)(g_2B_3)^2 + 6\eta_*(2A_2 - 3A_3)g_2B_3 + 9A_2(A_2 - A_3)^2\right) \right], \\
f_1 &= \frac{1}{6A_2B_3} \left[4(g_2B_3)^2 + 9(\eta_*g_2B_3 + A_2(A_2 - A_3)) \right].
\end{aligned}$$

Здесь f_2 – действительный корень уравнения

$$f_2^4 = \tilde{\Delta}_1^2 + \tilde{\Delta}_2^2 + \tilde{\Delta}_3f_1^2,$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_1 &= \frac{g_2^2}{36A_2^3B_3} \left[4(g_2B_3)^2 + 9(\eta_*g_2B_3 + 2A_2(A_2 - A_3)) \right] (2\eta_*g_2B_2 + 3A_2(A_2 - A_3)), \\
\tilde{\Delta}_2 &= \frac{g_2}{72A_2^3B_3^2} \left(-32A_3(g_2B_3 + 3\eta_*)(g_2B_3)^3 + 9A_2(A_2 - A_3) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(4(A_2 - 6A_3)(g_2 B_3)^2 + 6\eta_* (2A_2 - 3A_3) g_2 B_3 + 9A_2 (A_2 - A_3)^2 \right), \\ & \tilde{\Delta}_3 = \frac{g_2^3}{36A_2^3 B_3} \left(4(A_2 - 3A_3)(2g_2 B_3 + 3\eta_*) (g_2 B_3)^2 + \right. \\ & \left. + 9A_2 (A_2 - A_3)((5A_2 - 7A_3) g_2 B_3 + 3\eta_* (A_2 - A_3)) \right). \end{aligned}$$

Зависимость вспомогательной переменной σ от времени t установим из дифференциального уравнения (24)

$$\dot{\sigma} = \frac{(d_3^* \sigma + d_2^*)}{2A_3} \sqrt{c_4 \sigma^4 + c_3 \sigma^3 + c_2 \sigma^2 + c_1 \sigma + c_0}, \quad (31)$$

$$d_3^* = \frac{2A_3 B_3 g_2}{3A_2}, \quad d_2^* = \frac{\left(4(g_2 B_3)^2 + 9(\eta_* g_2 B_3 + 2A_2 (A_2 - A_3)) \right) A_3 g_2}{9A_2^2 f_2}.$$

Укажем при выполнении условий (30) действительный числовой пример решения (7), (28).

Пусть

$$A_2 = 9a, \quad A_3 = 7a, \quad B_3 = b, \quad g_2 = \frac{a}{b} \quad (a > 0, b > 0). \quad (32)$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= 7a, \quad B_1 = b, \quad B_2 = \frac{b}{27}, \quad C_1 = C_3, \quad \alpha = C_3 - C_2 = \frac{b_2}{9a}, \\ \lambda &= \frac{a^3}{9b^2 f^2} \left(-7; \frac{46871}{19683}; 0 \right), \quad s = -\frac{a^2}{27bf^2} \left(7; \frac{12494}{2187}; 0 \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Запишем исследуемое решение в случае (32), (33)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \frac{1}{9} \left(-\sigma^2 + \frac{10a}{3bf} \sigma + \frac{1696a^2}{2187(bf)^2} \right), \\ r^2 &= R(\sigma) = -\sigma^4 + \frac{1}{27} \left(\frac{4a}{bf} \sigma^3 - \frac{211a^2}{27(bf)^2} \sigma^2 - \frac{512a^3}{81(bf)^3} \sigma + \frac{352a^4}{81(bf)^4} \right), \\ \nu_1 &= \varphi(\sigma) = f \sigma^3 + \frac{4a}{b} \sigma^2 - \frac{481a^2}{729b^2 f} \sigma - \frac{2101a^3}{2187b^3 f^2}, \quad f = \frac{\sqrt[4]{156092770}}{81} \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}, \\ \nu_2 &= \psi(\sigma) = \frac{a}{b} \left(\sigma^2 + \frac{11a}{3bf} \sigma + \frac{1169a^2}{6561(bf)^2} \right), \quad \nu_3 = \left(f\sigma + \frac{110a}{27b} \right) \sqrt{R(\sigma)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Действительность функции $\sigma = \sigma(t)$, которая находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{27} \left(\sigma + \frac{191a}{27bf} \right) \sqrt{R(\sigma)}, \quad (35)$$

и действительность решения (32)–(35) уравнений (3), (4) следуют из условия того, что подкоренная функция $R(\sigma)$ при $\sigma = 0$ принимает положительное значение. При этом $\sigma = \sigma(t)$ – функция, полученная обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из (35).

Указанный пример (32)–(35) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a и b . Зависимость всех переменных задачи от времени находится подстановкой функции $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (34).

Построенное решение можно характеризовать, как решение с одним линейным инвариантным соотношением вида

$$(g_2 b_1 - g_1 b_2) \omega_1 + g_1 \omega_2 - b_1 \nu_2 + (b_1 g_0 - b_0 g_1) = 0,$$

которое не является частным случаем решения П.В. Харламова [19].

Выводы. Построенные в статье решения полиномиальной структуры дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил являются новыми решениями, которые не имеют аналогов в классической задаче динамики твердого тела и в задаче о движении тяжелого гиростата.

Информация о финансовой поддержке. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, тема № 1023020900001-4-1.1.2;1.1.1.

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 416 с.
4. Макреев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью / А.П. Макреев. – М.: Наука. Физматлит, 1992. – 336 с.
5. Борисов А.В. Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
6. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2012. – 401 с.
7. Klein F. Über die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld. – New York: Johnson reprint сорг., 1965. – 966 p.
8. Харламов П.В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–13.
9. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2013. – 408 с.
10. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
11. Горр Г.В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического столкновения движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
12. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии) / Г.В. Горр. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. – 424 с.
13. Зыза А.В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата / А.В. Зыза // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 7–25.

14. Зыза А.В. Классификация полиномиальных решений уравнений динамики гиростата, имеющего неподвижную точку / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 90–108.
15. Зыза А.В. Новые классы частных решений одной задачи о движении гиростата / А.В.Зыза, Т.В.Хомяк, Е.С.Платонова // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2022. – Т. 32, вып. 2. – С. 298–318.
16. Зыза А.В. О новых решениях полиномиального класса Коносевича-Поздняковича одной задачи динамики твердого тела с неподвижной точкой / А.В. Зыза, Р.Н. Нескородев // Журнал теорет. и прикладной механики. – 2024. – № 2 (87). – С. 5–17. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-2-5-17. – EDN: BDPNVF.
17. Скрыпник С.В. О двух линейных инвариантных соотношениях в одной задаче динамики твердого тела / С.В. Скрыпник // Тр. ИПММ НАН Украины.– 1999. – Т. 4. – С. 171–179.
18. Скрыпник С.В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики / С.В. Скрыпник // Механика твердого тела. – 1999. – Вып 28. – С. 31–40.
19. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П.В. Харламов // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1963. - № 4. – С. 17–29.

A.V. Zyza, A.V. Maznev, R.N. Neskorodev, D.N. Tkachenko

Study of Kirchhoff-Poisson equations based on special classes of partial solutions.

The article studies the existence conditions of two different solution classes of the polynomial structure related to the problem of the gyrostat motion under the influence of potential and gyroscopic forces, described by the Kirchhoff-Poisson equations. New cases of integrability in this problem are found.

Keywords: *gyrostat, Kirchhoff-Poisson equations, invariant relations, polynomial solutions, Legendre elliptic integrals.*

*Статья поступила в редакцию 07.10.2025;
доработана 17.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.*

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.371

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-38-49

EDN:XBDDLS



©2025. А.А. Бычков¹

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ СПЛАВА SIGE В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКЕ

Исследованы условия равновесия двухкомпонентного упругого слоя, содержащего дислокации несоответствия. Рассматриваются пленка *SiGe* нанометровой толщины на *Si* подложке и *SiGe* островки нанометровых размеров на смачивающем слое. Учитывается неравномерное распределение *Ge* в объеме образцов. Построены трехмерные модели плоской пленки с дислокацией и островков. Расчет упругих деформаций выполнен с использованием метода конечных элементов. Для расчета распределения *Ge* в пленке, использованы аппроксимирующие формулы и итерационный алгоритм. Согласно полученным результатам, неравномерное распределение *Ge* обеспечивает релаксацию упругой энергии в сплаве, а атомы *Ge* концентрируются на выступах возмущенной поверхности пленки и в вершинах островков. Учет неоднородности распределения *Ge* в образцах оказывает существенное влияние на рост островков (стабильный рост происходит при меньших размерах островков) и волнистости на свободной поверхности.

Ключевые слова: тонкая пленка, метод конечных элементов, *Ge*, *SiGe*, дислокации несоответствия, гетероэпитаксия.

Введение. Известно, что при гетероэпитаксии возникает деформация несоответствия, которая является следствием рассогласования постоянных атомной решетки пленки и подложки. В результате в пленке при ее напылении возникают упругие напряжения, влияющие на дальнейший рост и форму поверхности. Для тонких пленок, толщиной несколько десятков нанометров, существенное значение имеет также поверхностная энергия на свободной границе пленки. Конкуренция упругой и поверхностной энергий определяет устойчивость первоначально плоской поверхности. На рисунке 1 показана зависимость деформации несоответствия от доли *Ge* в сплаве. При изменении доли *Ge* от 0 до 1, деформация несоответствия меняется от 0 до, примерно, 4%.

¹Бычков Андрей Александрович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной информатики и инноватики института высоких технологий и пьезотехники ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: az710@yandex.ru.

Bychkov Andrej Aleksandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Advanced Technologies and Piezotechnics, Chair of Applied Informatics and Innovation.

Имеются следующие механизмы релаксации напряжения в пленке при малой деформации несоответствия: неустойчивость Азаро-Тиллера-Гринфельда (образование волнистости на поверхности) [1]; возникновение на границе пленки и подложки дислокаций несоответствия [2, 3]; перераспределение атомов вблизи волнистой поверхности пленки за счет уменьшения упругой энергии в напыленной на подложку полупроводниковой пленке [4, 5]; уменьшение поверхностной энергии пленки при увеличении ее толщины [6]; образование на поверхности пленки наноразмерных изолированных островков (режим роста Странского-Крастанова) [7]; за счет образования двойников несоответствия [8].

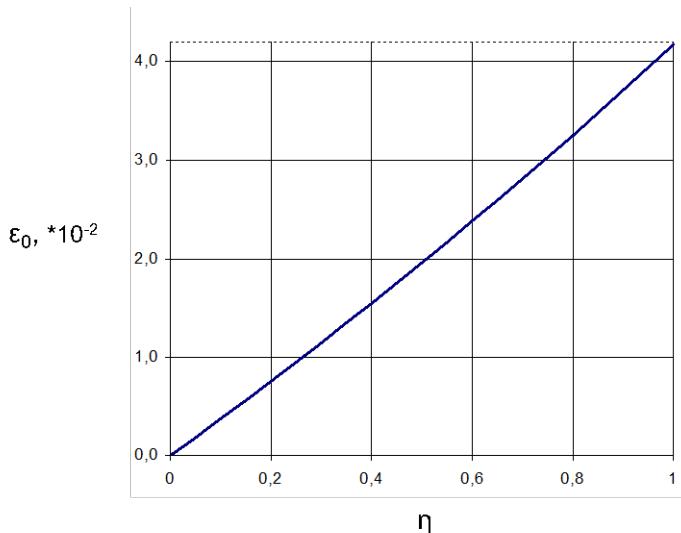


Рис. 1. Зависимость деформации несоответствия SiGe пленки ε_0 от объемной доли Ge в сплаве η

В данной работе приведены результаты расчетов, продолжающие исследование [9–11] для полупроводниковой пленки с учетом перечисленных факторов для различных значений параметров пленки и островков.

1. Постановка задачи. Рассмотрим модели расположенных на смачивающем слое островков SiGe (рис. 2–3) и полупроводниковой пленки на подложке SiGe/Si (рис. 4). На рисунке 2 показаны модельные образцы островков на смачивающем слое. Островки образуются при определенных условиях роста, на поверхности пленки, далее они могут расти или уменьшаться, и принимать различную форму. Наиболее часто встречаются островки в форме полной и усеченной пирамиды, которые и рассматриваются в настоящей работе. На рисунке 3 показаны модели группы островков. Модели позволяют учсть межостровковое взаимодействие. Рассматривались группы из 4 и 9 островков. Известно также, что на пленке образуются возвышения с относительно плоскими вершинами и узкими углублениями, т.е. форма такой поверхности близка к укороченной циклоиде. На рисунке 4 показан трехмерный образец и его вид вдоль оси OY.

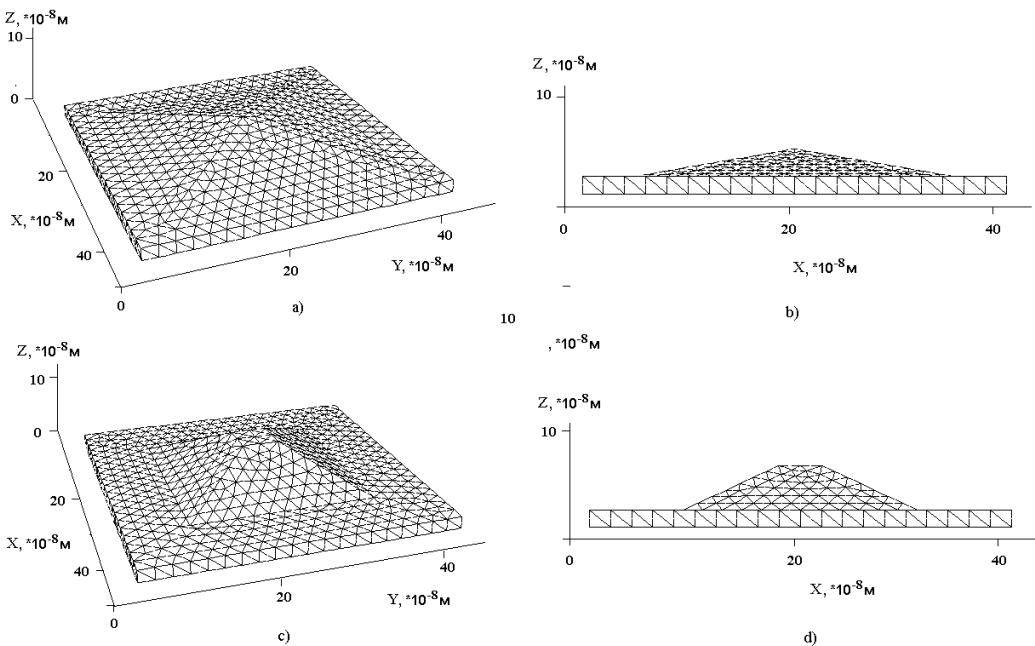


Рис. 2. Различные формы островков: пирамида (а), (б); усеченная пирамида (с), (д)

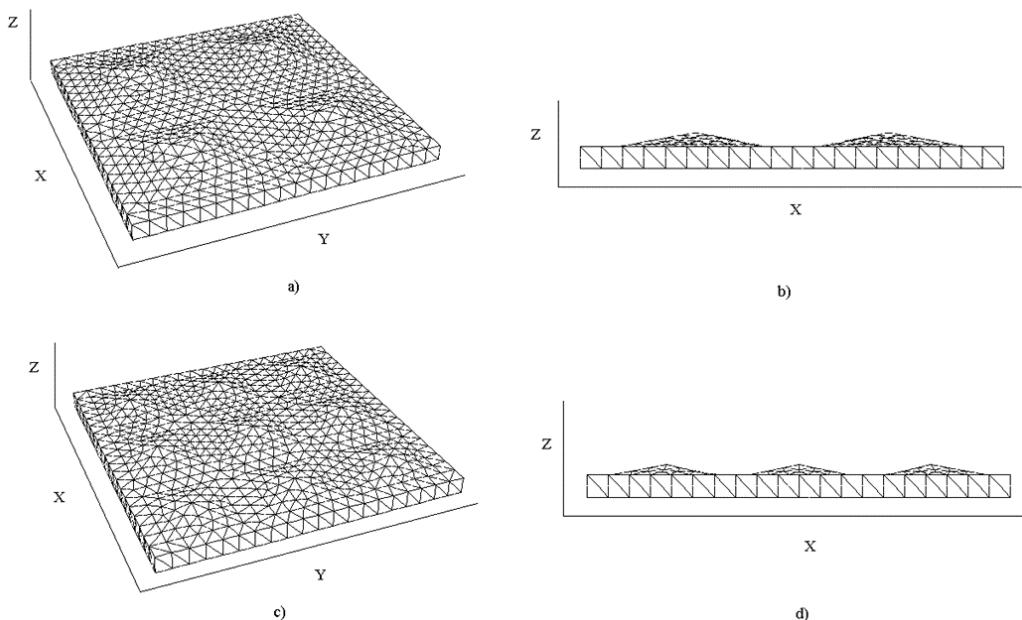


Рис. 3. Вид модельных образцов островков на сма�ивающем слое: четыре островка пирамидальной формы на образце (а), вид образца вдоль оси Ox (б); девять островков пирамидальной формы на образце (с), вид образца вдоль оси Ox (д)

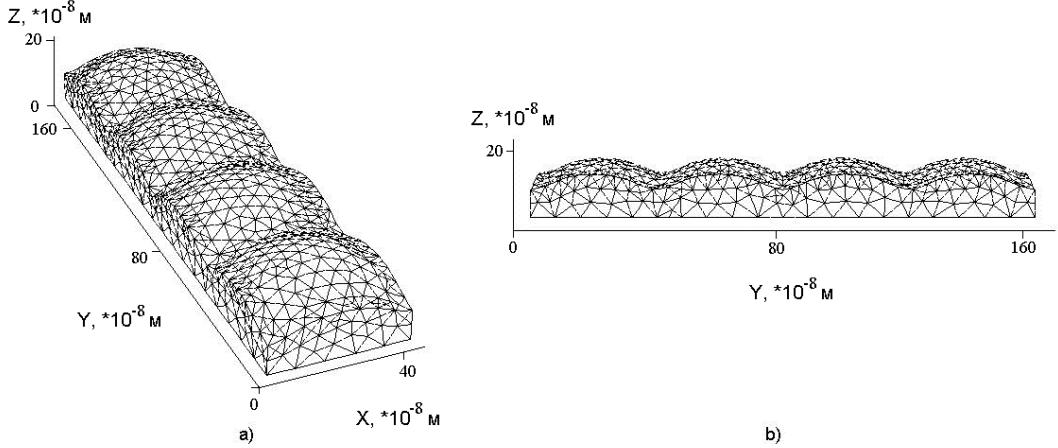


Рис. 4. Полупроводниковая пленка SiGe со свободной поверхностью в форме двумерной циклоиды

Свободная поверхность пленки: $z = h(x, y) = h_0 + h_1(x, y)$ – двумерная циклоида с длиной волны $\lambda = 2\pi a$ вдоль осей Ох и Оу, в параметрической форме (t_1, t_2 – параметры) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= at_1 - dsint_1, \\ y &= at_2 - dsint_2, \\ z &= h_0 - d^2/a - d(cost_1 + cost_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где d – ширина пленки ($d=400$ нм); Γ_D – граница пленка-подложка; Γ_N – свободная граница; Ω – область, занятая телом. Учитывается постоянство объёма образца $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1(t_1, t_2) \frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_1 dt_2 = 0$. Циклоида, аналогично [10, 11], представлена рядом Фурье.

Введем обозначения: $\gamma = c\gamma_{Ge} + (1 - c)\gamma_{Si}$ – удельная поверхностная энергия; γ_{Ge} и γ_{Si} – удельная поверхностная энергия соответственно для Ge и Si; $c = c(x, y, z)$ – доля Ge в сплаве; $w = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$ – плотность упругой энергии на поверхности пленки; γ_0 – удельная поверхностная энергия невозмущенной пленки; S_0 – площадь свободной поверхности невозмущенной пленки; W_0 – упругая энергия невозмущенной пленки. Тогда приращение свободной энергии поверхности пленки [1]

$$\Delta F = \int_{\Gamma_N} \gamma dS + \int_{\Omega} w dV - \gamma_0 S_0 - W_0, \quad (2)$$

и условие неустойчивости плоской поверхности пленки $\Delta F \leq 0$.

Закон Гука $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*)$, где $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_m c(x, y, z) \delta_{ij}$ – деформация несоответствия, $\varepsilon_m = 0,04$ [7].

Из решения упругой задачи

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0 \text{ в области } \Omega, \\ u_i &= 0 \text{ на поверхности } \Gamma_D, \\ \sigma_{ij}n_j &= 0 \text{ на поверхности } \Gamma_N,\end{aligned}\tag{3}$$

были получены напряжения в пленке.

Неоднородность распределения атомов Ge рассчитывалось согласно [7]:

$$\Delta c = \frac{1}{3\varepsilon_m} (Tr\varepsilon - \overline{Tr\varepsilon}) + (\bar{c} - c),\tag{4}$$

где $\overline{Tr\varepsilon} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} Tr\varepsilon dV$ – средняя деформация дилатации; $\bar{c} = c_{cp}$ – средняя доля атомов Ge ; $\frac{1}{V} \int_{\Omega} \Delta c(x, y, z) dV = 0$.

Расчет $c = c(x, y, z)$, соответствующего минимальной упругой энергии W , выполнялся по итерационной формуле

$$c_{i+1,j} = c_{i,j} + \Gamma \left[\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr\varepsilon_i - \overline{Tr\varepsilon_i}) - (\bar{c} - c_{i,j}) \right],$$

где $c_{i,0} = c_i$; Γ – параметр ($\Gamma \leq 10^{-2}$); $c_{i,j}$ при $j \rightarrow \infty$ сходится к некоторому $c_{i,\infty} = c_{i+1}$:

$$\frac{1}{3\varepsilon_0} (Tr\varepsilon_i - \overline{Tr\varepsilon_i}) + (\bar{c} - c_{i,\infty}) = 0.$$

Учитывалось условие $0 \leq c(x, y, z) \leq 1$.

Расчет упругих деформаций в образцах выполнен методом конечных элементов.

2. Обсуждение результатов. Результаты расчетов представлены на рисунках 5–13. На рисунке 5 показано полученное распределение Ge в пленке. Показан участок волнистой поверхности, соответствующий одному периоду возмущения. Рисунок 5а – распределение на верхней свободной поверхности, рисунок 5б – распределение в сечении образца, параллельном плоскости Oyz. Красный цвет соответствует максимальной доле $Ge = 0,55$; сиреневый – минимальной доле $Ge = 0,44$. Средняя доля Ge в данном образце и последующих образцах составляет 0,5. На рисунке 6 показано распределение Ge в образце с островком в форме полной пирамиды. Рисунок 6а – свободная поверхность, рисунок 6б – сечение образца. Красный цвет – максимальная доля $Ge = 0,6$; сиреневый – минимальная доля $Ge = 0,44$. На рисунке 7 показано распределения Ge в образце с островком в форме усеченной пирамиды. Как видно из представленных результатов, атомы Ge концентрируются на выступах возмущенной поверхности пленки и в вершинах островков.

Исследование распределения компонент сплава SiGe в полупроводниковой пленке

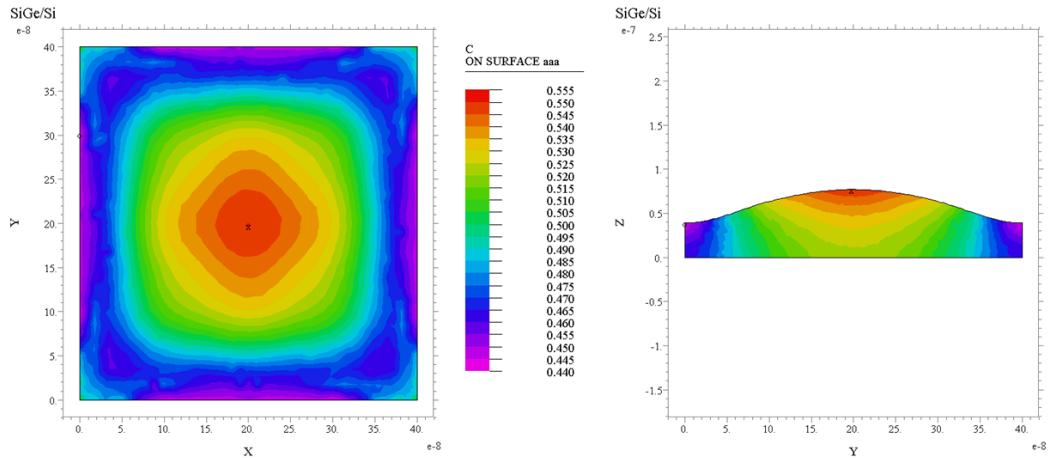


Рис. 5. Распределение Ge в пленке SiGe с волнистой поверхностью: а) на свободной поверхности; б) в сечении образца вдоль оси Oy (показан фрагмент пленки, равный длине волны возмущения, $c=0,5$)

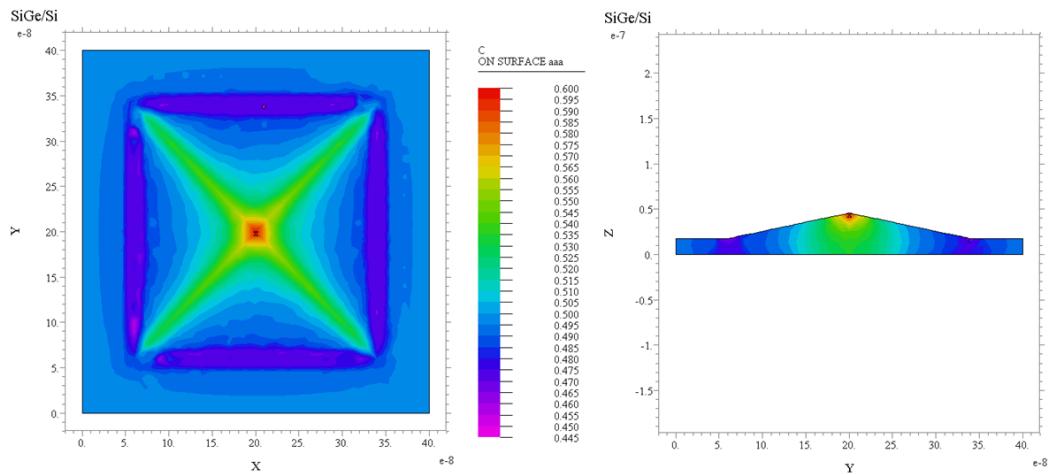


Рис. 6. Распределение Ge в пирамидальном островке SiGe на смачивающем слое: а) на свободной поверхности; б) в сечении образца вдоль оси Oy ($c=0,5$)

На рисунке 8 показано распределение плотности упругой энергии в сечении образца с островком в форме полной пирамиды. Рисунок 8а – показан результат расчета без учета перераспределения компонент сплава, рисунок 8б – результат, учитывающий перераспределение Ge и Si. На рисунке 9 показаны аналогичные результаты для островка в форме усеченной пирамиды.

На рисунке 10 показана полученная зависимость поверхностной (рис. 10а) и упругой (рис. 10б) энергии от размера островков в форме полной пирамиды. Здесь L – длина основания пирамиды; $a=400$ нм – длина всего образца; $c_{cp}=0,5$.

Кривая (1) представляет расчет без учета перераспределения Ge , кривая (2) – расчет с учетом перераспределения Ge . Как можно видеть из представленных результатов, при включении в модель изменения распределения атомов Si и Ge поверхностная энергия увеличивается, а упругая энергия пленки уменьшается.

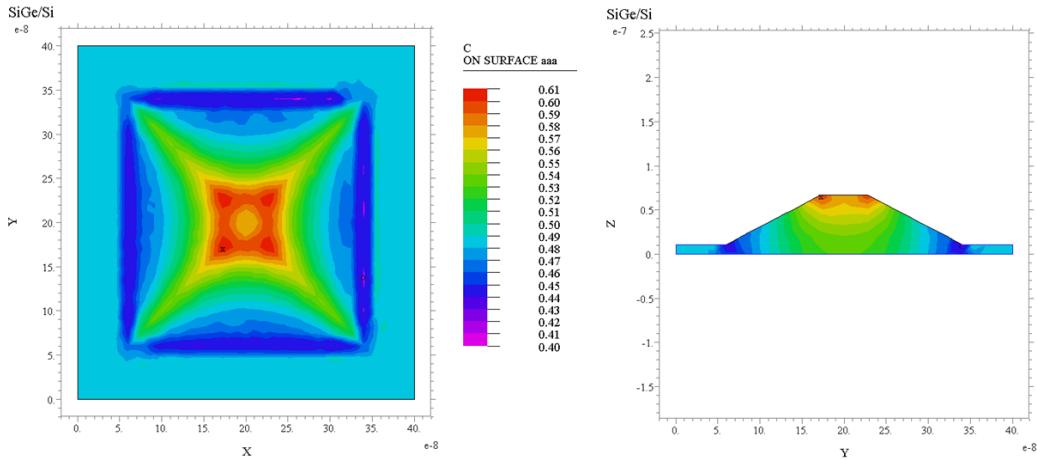


Рис. 7. Распределение Ge в сплаве $SiGe$ в островке в форме усеченной пирамиды ($c_{cp} = 0, 5$)

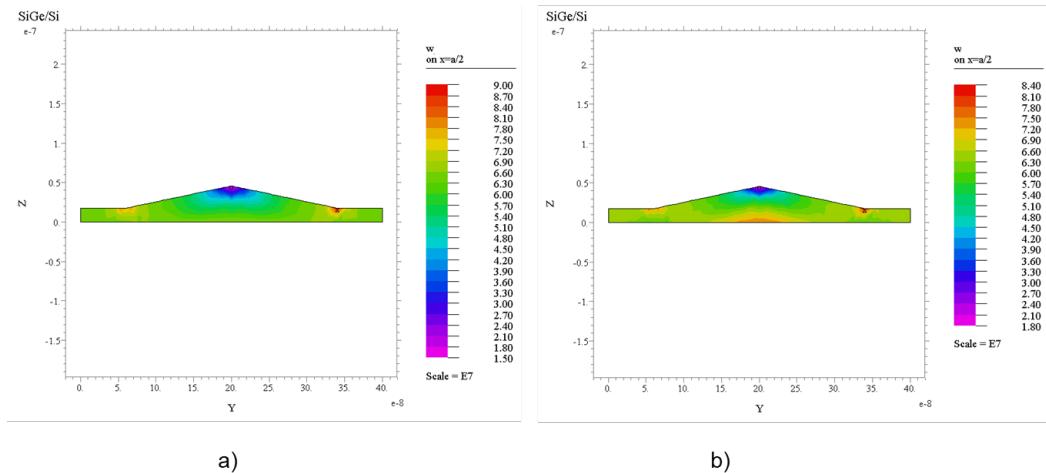


Рис. 8. Распределение плотности упругой энергии w ($\text{Дж}/\text{м}^3$) в сечении образца вдоль оси Oy : а) без учета перераспределения, $c=c_{cp}$; б) с учетом перераспределения, $c=c(x,y,z)$. Островок в форме полной пирамиды

Графики на рисунке 11 показывают зависимость приращения свободной энергии образца от размера островков и доли Ge в сплаве. Изменение знака приращения свободной энергии соответствует переходу от устойчивой плоской формы поверхности пленки к форме роста, связанной с образованием островков. Кривые разного цвета соответствуют различной средней доле Ge в пленке – от 35% до 50%. Показаны результаты для островка в форме полной пирамиды.

Исследование распределения компонент сплава SiGe в полупроводниковой пленке

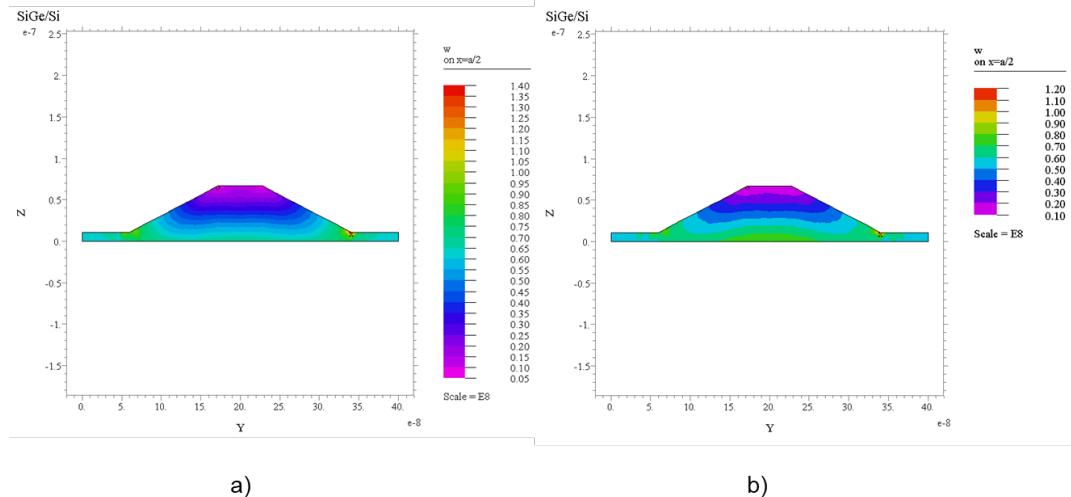


Рис. 9. Распределение плотности упругой энергии w ($\text{Дж}/\text{м}^3$) в сечении образца вдоль оси Oy : а) без учета перераспределения, $c=c_{cp}$; б) с учетом перераспределения, $c=c(x,y,z)$. Островок в форме усеченной пирамиды

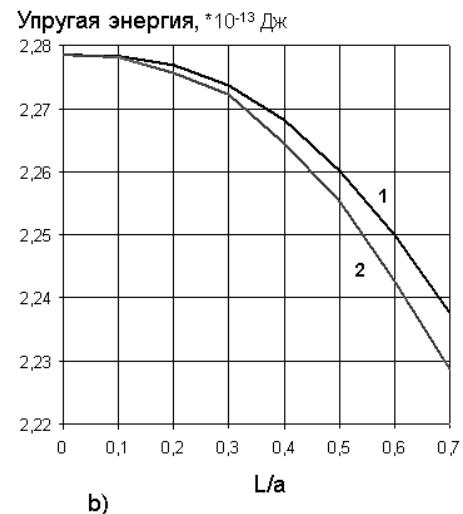
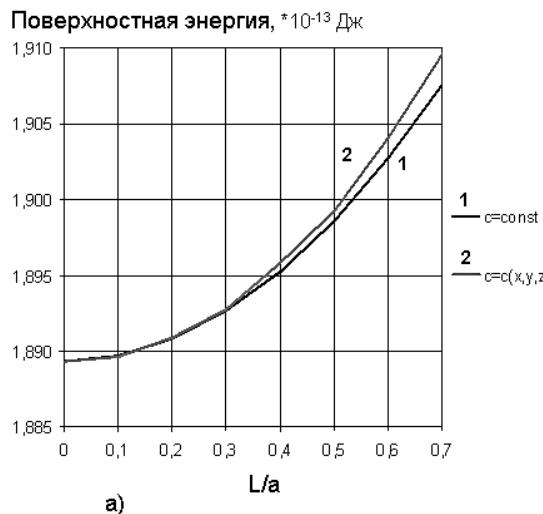


Рис. 10. Поверхностная (а) и упругая (б) энергия в зависимости от размера островков, с учетом перераспределения Ge ($c=c_{cp}$) и без учета перераспределения Ge ($c=c(c,y,z)$), $c_{cp}=0,5$.

На рисунке 11а показаны результаты расчета без учета перераспределения компонент пленки, на рисунке 11б – результаты с учетом такого перераспределения. Как видно из представленных результатов, учет перераспределения компонент пленки вносит существенную поправку в значения критического размера островка. Эта поправка тем больше, чем меньше доля Ge в пленке. На рисунке 12 показаны аналогичные результаты для островка в форме усеченной пирамиды. Выводы, сделанные для предыдущего случая, остаются верны, учет перерас-

пределения компонент пленки приводит к существенному ослаблению условий появления островков на поверхности.

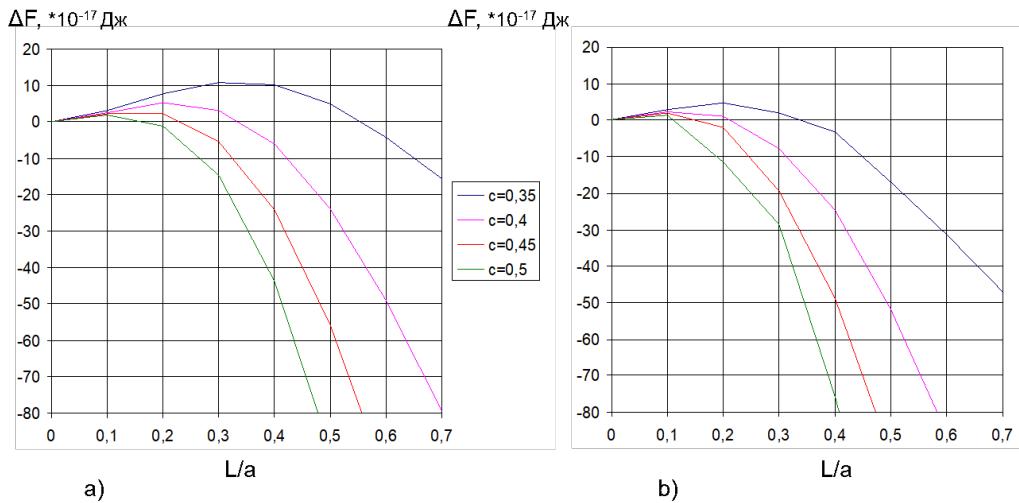


Рис. 11. Зависимость приращения свободной энергии ΔF островка в форме полной пирамиды от параметра L/a , определяющего его размер (L – длина основания пирамиды, a – длина образца), для различных средних объемных долей G_e в пленке c_c : а) без учета перераспределения, $c=c_{cp}$; б) с учетом перераспределения, $c=c(x,y,z)$. Отношение высоты островка к длине его основания $h/L=0,1$

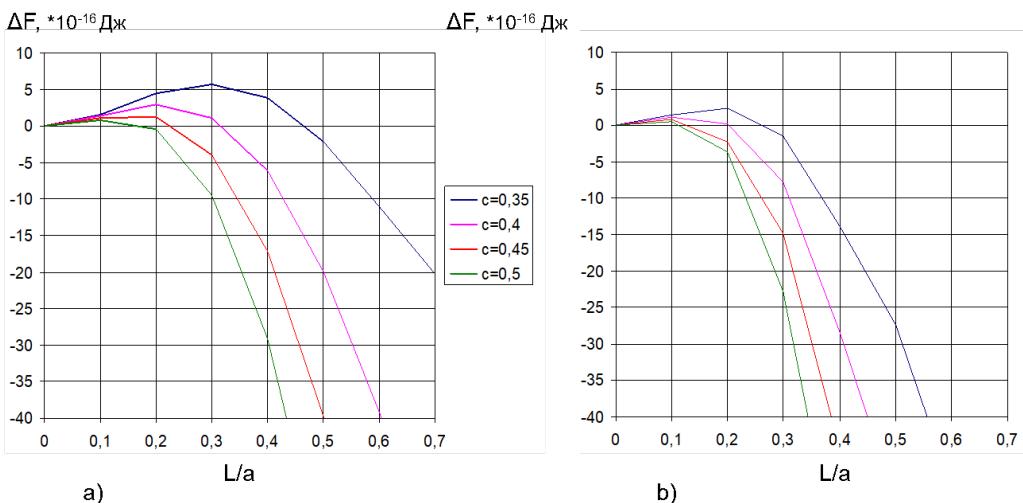


Рис. 12. Зависимость приращения свободной энергии ΔF островка в форме усеченной пирамиды от параметра L/a , определяющего его размер (L – длина основания пирамиды, a – длина образца), для различных средних объемных долей G_e в пленке c_c : а) без учета механодиффузии $c=c_{cp}$; б) с учетом механодиффузии, $c=c(x,y,z)$. Отношение высоты островка к длине его основания $h/L=0,2$

На рисунке 13 показана зависимость приращения свободной энергии ΔF островка в форме полной пирамиды от параметра L/a , определяющего его размер (L – длина основания пирамиды, a – длина образца), для различных средних объемных долей Ge в пленке c , с учетом перераспределения, $c=c(x,y,z)$. Отношение высоты островка к длине его основания $h/L=0,1$. Рисунок 13а – на образце расположены четыре островка, рисунок 13б – на образце расположены девять островков.

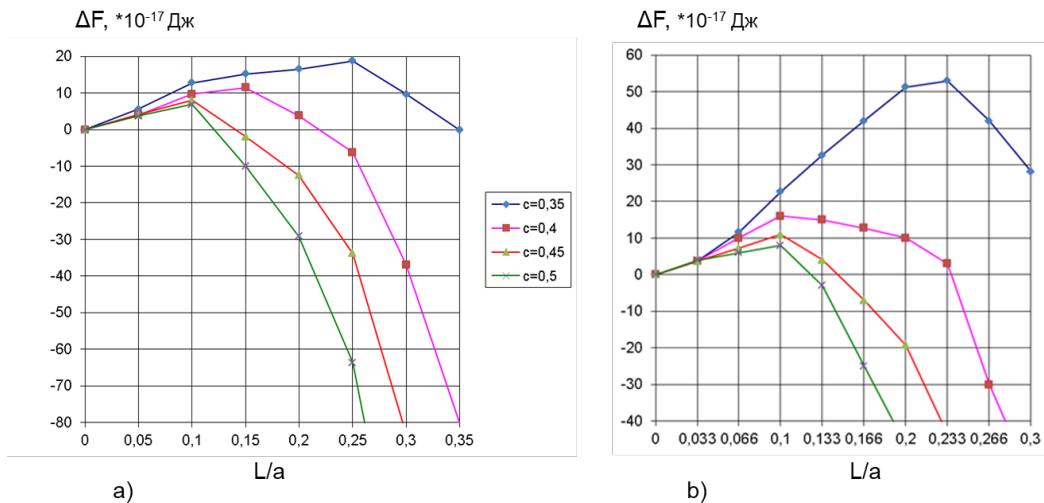


Рис. 13. Зависимость приращения свободной энергии ΔF островка в форме полной пирамиды от параметра L/a , определяющего его размер (L – длина основания пирамиды, a – длина образца), для различных средних объемных долей Ge в пленке c , с учетом перераспределения, $c=c(x,y,z)$. Отношение высоты островка к длине его основания $h/L=0,1$; а) на образце расположены четыре островка, б) на образце расположены девять островков

Как можно заметить, учет неоднородного распределения Ge в образцах пленки и островков значительно меняет критический размер островка в меньшую сторону. Этот эффект усиливается при уменьшении доли Ge в сплаве.

Обнаружена зависимость изменения концентрации Ge от амплитуды возмущения пленки. При увеличении амплитуды возмущения неоднородность Δc растет. Аналогичный эффект наблюдается при росте островков. Для более высоких островков на поздних стадиях роста значение Δc увеличивается. Сравнение полученных результатов с расчетом, не учитывающим механизм механодиффузии, показывает существенную релаксацию упругой энергии в пленке, что согласуется с результатом [5], полученным для плоской задачи.

Выводы. Выполнен расчет условий образования шероховатой поверхности тонкой полупроводниковой пленки $SiGe$ на Si подложке при различных концентрациях Ge . Расчет учитывает неоднородность распределения атомов Ge и Si в пленке. Исследовано распределение концентрации Ge в пирамидальных островках на свободной поверхности полупроводниковой пленки состоящей из сплава

SiGe. Построены трехмерные модели островков в форме полной и усеченной пирамиды, и групп островков на свободной поверхности. Результаты расчетов показали: величина деформации несоответствия существенно влияет на величину критической амплитуды возмущения свободной поверхности пленки; перераспределение атомов *Ge* и *Si* в полупроводниковой пленке связано с обогащением атомами *Ge* вершин шероховатости на свободной поверхности и вершин островков и обеднением впадин между ними; из-за различия упругих модулей *Ge* и *Si* происходит дополнительная релаксация упругой энергии в пленке с волнистой поверхностью; учет влияния перераспределения компонент пленки приводит к ослаблению условий появления островков на поверхности (переход происходит при меньших размерах островков) и этот эффект особенно заметен при малых концентрациях *Ge*.

1. *Paul D.J.* Si/SiGe heterostructures: from material and physics to devices and circuits / D.J. Paul // Semicond. Sci. Technol. – 2004. – Vol. 19. – R75–R108.
2. *Ovidko I.A.* Misfit dislocations in nanocomposites with quantum dots, nanowires and their ensembles / I.A. Ovidko, A.G. Sheinerman // Advances in Physics. – 2006. – Vol. 55. – Nos. 7–8. – P. 627–689.
3. *Berbezier I.* SiGe nanostructures / I. Berbezier, A. Ronda // Surface Science Report. – 2009. – Vol. 54. – P. 47–98.
4. *Aqua J.N.* Growth and self-organization of SiGe nanostructures / J.N. Aqua, I. Berbezier, L. Favre, T. Frisch, A. Ronda // Physics Reports. – 2013. – Vol. 522. – P. 59–189.
5. *Wu C.-C.* Composition and stress fields in undulated thin films / C.-C. Wu, R. Hull // J. Appl. Phys. – 2006. – Vol. 100. – 083510.
6. *Li X.-L.* Theoretical determination of contact angle in quantum dot self-assembly / X.-L. Li, G.W. Yang // Appl. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 92. – 171902.
7. *Digiuni D.* Aspect-ratio-dependent driving force for nonuniform alloying in Stranski-Krastanow islands / D. Digiuni, R. Gatti, F. Montalenti // Physical review. – 2009. – Vol. 80. – 155436.
8. *Liu L.* Stress relaxation in heteroepitaxial films by misfit twinning. I. Critical thickness. / L. Liu, Y. Zhang, T.-Y. Zhang // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol. 101. – 063501.
9. *Бычков А.А.* Влияние процессов релаксации на форму поверхности полупроводниковой пленки на подложке / А.А. Бычков, Д.Н. Карпинский // Актуальные проблемы прочности: сборник трудов XLVIII Международной конференции, посвященной памяти М.А. Криштала. – Тольятти: ТГУ, 2009. – С. 220–221.
10. *Бычков А.А.* Оценка влияния дислокационных петель и дислокаций несоответствия на распределение Ge в пленке SiGe/Si / А.А. Бычков // Инженерный вестник Дона. – 2016. – № 4. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3822.
11. *Бычков А.А.* Равновесное распределение компонент сплава SiGe в полупроводниковой пленке на Si подложке / А.А. Бычков // Инженерный вестник Дона. – 2020. – № 1. – URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N1y2020/6267>.

A.A. Bychkov

Investigation of the distribution of SiGe alloy components in a semiconductor film.

The equilibrium conditions of a two-component elastic layer containing mismatch dislocations are investigated. A nanometer-thick *SiGe* film on a *Si* substrate and nanometer-sized *SiGe* islands on a wetting layer are considered. The uneven distribution of *Ge* in the sample volume is taken into account. Three-dimensional models of a flat film with dislocation and islands are constructed.

The calculation of elastic deformations is performed using the finite element method. Approximating formulas and an iterative algorithm were used to calculate the Ge distribution in the film. According to the results obtained, the uneven distribution of Ge provides relaxation of elastic energy in the alloy, and Ge atoms are concentrated on the protrusions of the perturbed surface of the film and at the tips of the islands. Taking into account the heterogeneity of the Ge distribution in the samples has a significant effect on the growth of islands (stable growth occurs with smaller island sizes) and undulations on the free surface.

Keywords: *thin film, finite element method, Ge, SiGe, mismatch dislocations, heteroepitaxy.*

*Статья поступила в редакцию 21.10.2025;
доработана 10.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-50-60

EDN:XXKIUR



©2025. А.О. Ватульян¹, С.А. Нестеров², В.О. Юров³

О ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

В рамках модели Ковина-Нунзиато исследована задача о деформировании изотропного вытянутого пористого прямоугольника. Левая сторона прямоугольника жестко закреплена, на правой стороне действуют нормальная и касательная нагрузки, остальные стороны свободны от напряжений. На основе метода Канторовича и вариационного принципа Лагранжа построена приближённая аналитическая модель поставленной задачи. Модель верифицирована путем сравнения с конечно-элементным решением, найденным в пакете FlexPDE. Исследовано влияние неклассических параметров на распределение компонент напряжений, смещений и пористости.

Ключевые слова: прямоугольник, микро-дилатационная теория, растяжение, изгиб, метод Канторовича, вариационный принцип Лагранжа.

Введение. Пористые материалы широко применяются в различных областях техники благодаря высоким теплоизоляционным и звукопоглощающим свойствам. Теория Ковина-Нунзиато [1] широко используется при описании механического поведения упругих тел с пустыми порами. На основе этой теории в работах [1–9] были получены аналитические решения статических задач пороупругого

¹ Ватульян Александр Ованесович – доктор физ.-мат. наук, зав. каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: aovatulyan@sfedu.ru.

Vatulyan Aleksandr Ovanesovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity.

² Нестеров Сергей Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела дифференц. уравнений Южного математического инст-та – филиала ВНЦ РАН, Владикавказ, e-mail: 1079@list.ru.

Nesterov Sergey Anatolyevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Department of Differential Equations.

³ Юров Виктор Олегович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела дифференц. уравнений Южного математического инст-та – филиала ВНЦ РАН, Владикавказ; ст. преп. каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: vyurov@sfedu.ru.

Yurov Viktor Olegovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Department of Differential Equations; Senior Lecturer, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity.

сти для стержня, балки, пластины, цилиндра. Однако задача о деформировании упругого прямоугольника с пустыми порами остается неисследованной.

Теория Ковина-Нунзиато содержит неклассические параметры, для нахождения которых в последнее время развиваются теоретические и экспериментальные подходы [10–13]. Отметим, что при интерпретации данных экспериментов и оценке модулей часто используется стержневая модель. Вместе с тем для ряда материалов, например, костной ткани, весьма сложно изготовить длинные образцы и подвергать их растяжению, изгибу, кручению. Поэтому важной проблемой является построение промежуточных моделей деформирования, для которых можно найти аналитическое решение.

Задачам о деформировании упругого прямоугольника посвящено множество исследований [14–22], начиная с работ Файлона. Обычно основное внимание уделяется их исследованию на основе соотношений ортогональности Папковича и доказательству квазиволнерегулярности. Альтернативой такому подходу являются либо использование конечно-элементных технологий, либо построение прикладных аналитических моделей. Используя прикладные модели можно проводить интерпретацию результатов механических испытаний упругих тел с пустыми порами с учётом конечности их размеров.

В настоящее время метод Канторовича является одним из методов построения прикладных аналитических моделей деформирования упругих тел [23–25].

В данной работе на основе метода Канторовича и вариационного принципа Лагранжа получена приближённая аналитическая модель деформирования прямоугольника с пустыми порами. Проведена верификация приближенной модели путем сравнения с решением в конечно-элементном (КЭ) пакете FlexPDE. Да-на оценка приближенных решений в зависимости от параметра относительной толщины.

1. Постановка задачи о деформировании пористого прямоугольника. Рассмотрим задачу о деформировании пористого прямоугольника $S = [0, L] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$. Верхняя и нижняя стороны прямоугольника $x_3 = \pm \frac{b}{2}$ свободны от нагрузок, левая граница $x_1 = 0$ защемлена, а к правой стороне $x_1 = L$ прикладывается один из видов статической нагрузки: 1) нормальные напряжения $\sigma_{11}(L, x_3) = p_1(x_3)$, касательные напряжения отсутствуют; 2) касательные напряжения $\sigma_{31}(L, x_3) = p_2(x_3)$, нормальные напряжения отсутствуют. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{33,3} = 0; \quad (2)$$

$$\alpha(\varphi_{11} + \varphi_{33}) - \xi\varphi - \beta(u_{1,1} + u_{3,3}) = 0; \quad (3)$$

$$u_1(0, x_3) = u_3(0, x_3) = h_1(0, x_3) = 0; \quad (4)$$

$$h_1(L, x_3) = 0, \quad \sigma_{11}(L, x_3) = p_1(x_3), \quad \sigma_{13}(L, x_3) = p_3(x_3); \quad (5)$$

$$\sigma_{13}(x_1, \pm b/2) = \sigma_{33}(x_1, \pm b/2) = h_3(x_1, \pm b/2) = 0. \quad (6)$$

Здесь $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \beta\varphi\delta_{ij}$ — компоненты тензора классических напряжений; $h_i = a\varphi_i$ — компоненты вектора неклассических напряжений; u_i — компоненты вектора перемещений; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ — компоненты тензора деформаций; φ — функция пористости (микро-дилатация); δ_{ij} — символ Кронекера; λ и μ — модули Ламе; a — параметр диффузии пор; β — параметр связанности; ξ — модуль жёсткости пор.

2. Функционал полной энергии деформации для пористого прямоугольника. Рассмотрим объемную плотность энергии деформации изотропного упругого тела с пустыми порами, которая в теории Ковина-Нунзиато имеет вид [1]:

$$w_v(\varepsilon_{ij}, \varphi, \varphi_i) = \frac{1}{2} (\lambda\varepsilon_{ii}^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + 2\beta\varphi\varepsilon_{ii} + \xi\varphi^2 + a\varphi_{,i}^2). \quad (7)$$

Составим функционал полной энергии деформации пористого прямоугольника Λ , равный разности энергии деформации $W = \int_0^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} w_v dx_3 dx_1$ и работы

$$\text{внешних сил } A = \int_{-b/2}^{b/2} p_i u_i(L, x_3) dx_3 :$$

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\lambda(u_{1,1} + u_{3,3})^2 + 2\mu(u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2) + \mu(u_{1,3} + u_{3,1})^2 \right) dx_3 dx_1 + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} (2\beta\varphi(u_{1,1} + u_{3,3}) + \xi\varphi^2 + a(\varphi_{,1}^2 + \varphi_{,3}^2)) dx_3 dx_1 - \\ & - \int_{-b/2}^{b/2} p_1(x_3) u_1(L, x_3) dx_3 - \int_{-b/2}^{b/2} p_3(x_3) u_3(L, x_3) dx_3. \end{aligned} \quad (8)$$

При исследовании решения задачи (1)–(6) в КЭ-пакете FlexPDE выяснено, что в случае растяжения прямоугольника нагрузкой $p_1(x_3)$, смещение $u_3(x_1, x_3)$ является нечетной функцией, а смещение $u_1(x_1, x_3)$ и пористость $\varphi(x_1, x_3)$ — четными функциями по координате x_3 . В случае изгиба прямоугольника нагрузкой $p_3(x_3)$ функции $\varphi(x_1, x_3)$, $u_1(x_1, x_3)$ являются нечётными по координате x_3 , а функция $u_3(x_1, x_3)$ — чётной по x_3 .

Представим поля перемещений и пористости в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3) &= w_1(x_1) + x_3 v_2(x_1) + x_3^2 w_3(x_1), \\ u_3(x_1, x_3) &= v_1(x_1) + x_3 w_2(x_1) + x_3^2 v_3(x_1), \\ \varphi(x_1, x_3) &= f_1(x_1) + x_3 g_2(x_1) + x_3^2 f_3(x_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты $w_1(x_1)$, $w_2(x_1)$, $w_3(x_1)$, $f_1(x_1)$, $f_3(x_1)$ являются ненулевыми, если действует нормальная нагрузка. Компоненты $v_1(x_1)$, $v_2(x_1)$, $v_3(x_1)$, $g_2(x_1)$

являются ненулевыми, если действует касательная нагрузка. Т.о. гипотезы о четности, нечетности функций $u_1(x_1, x_3)$, $u_3(x_1, x_3)$, $\varphi(x_1, x_3)$ по x_3 учтены в (9) при обоих видах нагружения.

Построим приближенное аналитическое решение краевой задачи (1)–(6), применяя метод Канторовича 1-го порядка в случае растяжения и 2-го порядка в случае изгиба в рамках вариационного принципа Лагранжа.

Т.к. задача (1)–(6) линейная, то сначала можно рассмотреть случай растяжения, а потом случай изгиба.

3. Решение задачи о растяжении пористого прямоугольника. В качестве первой задачи рассмотрим задачу о растяжении пористого прямоугольника равномерно распределенной по грани $x_1 = L$ нормальной нагрузкой. Ограничимся построением приближенной модели 1-го порядка.

Исходя из выражений (9), в случае растяжения прямоугольника примем гипотезы:

$$u_1(x_1, x_3) = w_1(x_1), \quad u_3(x_1, x_3) = x_3 w_2(x_1), \quad \varphi(x_1, x_3) = f_1(x_1). \quad (10)$$

Обозначим знаком «штрих» производную по координате x_1 . Подставив выражения $u_1(L, x_3) = w_1(L)$, $u_{1,1} = w'_1$, $u_{1,3} = 0$, $u_{3,1} = x_3 w'_2$, $\varphi = f_1$, $\varphi_{,1} = f'_1$, $\varphi_{,3} = 0$, $p_1(x_3) = p_0 = \text{const}$, $p_3(x_3) = 0$ в (8) и, проинтегрировав его по x_3 , получим упрощенный функционал:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \frac{b}{2} \int_0^L \left(\lambda (w'_1 + w_2)^2 + 2\mu \left((w'_1)^2 + w_2^2 \right) + \frac{b^2}{12} \mu (w'_2)^2 + 2\beta f_1 (w'_1 + w_2) \right) dx_1 - \\ & + \int_0^L \left(\xi f_1^2 + a (f'_1)^2 \right) dx_1 - w_1(L) b p_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдя стационарное значение функционала (11), получим краевую задачу для определения функций $w_1(x_1)$, $w_2(x_1)$, $f_1(x_1)$, состоящую из 3 дифференциальных уравнений и 6 граничных условий:

$$a f''_1 - \beta w'_1 - \xi f_1 - \beta w_2 = 0; \quad (12)$$

$$(\lambda + 2\mu) w''_1 + \lambda w'_2 + \beta f'_1 = 0; \quad (13)$$

$$\frac{b^2}{12} \mu w''_2 - \lambda w'_1 - (\lambda + 2\mu) w_2 - \beta f_1 = 0; \quad (14)$$

$$w_1(0) = f_1'(0) = w_2(0) = 0; \quad (15)$$

$$f'_1(L) = w'_2(L) = 0, \quad (\lambda + 2\mu) w'_1(L) + \lambda w_2(L) + \beta f_1(L) = p_0. \quad (16)$$

Образуем задачу (12)–(16) по формулам $\zeta = \frac{x_1}{L}$, $\eta = \frac{x_1}{L}$, $\chi = \frac{\lambda}{\mu}$, $\varepsilon = \frac{b}{L}$, $F_1 = \frac{w_1}{L}$, $F_2 = w_2$, $F_3 = \frac{\xi}{\beta} f_1$, $\delta_0 = \frac{\beta^2}{\mu \xi}$, $\alpha = \frac{a}{\xi L^2}$, $P = \frac{p_0}{\mu}$, получим

$$\alpha F''_3 - F'_1 - F_3 - F_2 = 0; \quad (17)$$

$$(\chi + 2) F''_1 + \chi F'_2 + \delta_0 F'_3 = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{12} F''_2 - \chi F'_1 - (\chi + 2) F_2 - \delta_0 F_3 = 0; \quad (19)$$

$$F_1(0) = F_2(0) = F'_3(0) = 0; \quad (20)$$

$$F'_2(1) = F'_3(1) = 0, \quad (\chi + 2) F'_1(1) + \chi F_2(1) + \delta_0 F_3(1) = P. \quad (21)$$

Решение системы (17)–(19) будем искать в виде $F_i(\zeta) = A_i e^{q\zeta}$, $i = 1..3$, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно A_i . Вычисляя определитель полученной СЛАУ, и приравнивая его к нулю, получим характеристическое уравнение $q^2(q^4 b_0 - q^2 b_1 + b_0) = 0$, которое имеет двукратный нулевой корень $q_{1,2} = 0$, соответствующий стержневому решению, и две пары вещественных корней $q_{3,4} = \pm p_1$, $q_{5,6} = \pm p_2$, порождающих погранслойные решения. Здесь $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{b_0}}$, $p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{b_0}}$, $b_0 = \alpha \frac{\varepsilon^2}{12} (\chi + 2)$, $b_1 = \left(4\alpha(\chi + 1) + \frac{\varepsilon^2}{12}(\chi + 2 - \delta_0)\right)$, $b_2 = 4(\chi + 1 - \delta_0)$.

После нахождения $F_i(\zeta)$, $i = 1..3$, далее вычисляются безразмерные функции смещений $U_1 = F_1(\zeta)$, $U_3(\zeta, \eta) = \eta F_2(\zeta)$, пористости $\Phi = F_3(\zeta)$, неклассического напряжения $H_1 = \frac{h_1 L}{a} = \alpha F'_3$ и классических напряжений $\Omega_{11} = \chi(F'_1 + F_2) + 2F'_1 + \delta_0 F_3$, $\Omega_{33} = \chi(F'_1 + F_2) + 2F_2 + \delta_0 F_3$.

4. Решение задачи об изгибе пористого прямоугольника. В качестве второй задачи рассмотрим задачу об изгибе пористого прямоугольника равномерно распределенной по стороне $x_1 = L$ касательной нагрузкой. Ограничимся построением приближенной модели 2-го порядка.

Исходя из выражений (9), в случае изгиба прямоугольника примем гипотезы:

$$u_1(x_1, x_3) = x_3 v_2(x_1), \quad u_3(x_1, x_3) = v_1(x_1) + x_3^2 v_3(x_1), \quad \varphi(x_1, x_3) = x_3 g_2(x_1). \quad (22)$$

Подставив выражения $u_3(L, x_3) = v_1(L) + x_3^2 v_3(L)$, $u_{1,1} = x_3 w'_2$, $u_{1,3} = v_2$, $u_{3,1} = v'_1 + x_3^2 v'_3$, $u_{3,3} = 2x_3 v_3$, $\varphi_{,1} = x_3 g'_2$, $\varphi_{,3} = g_2$, $p_3(x_3) = p_0 = \text{const}$, $p_1(x_3) = 0$ в (8) и проинтегрировав его по x_3 , получим упрощенный функционал:

$$\begin{aligned} 2\Lambda_2 = & b^3 \int_0^L \left(\frac{\lambda}{3} \left(\frac{(v'_2)^2}{4} + v'_2 v_3 + v_3^2 \right) + \frac{\mu}{6} \left((v'_2)^2 + v_2 v'_3 + v'_1 v'_3 + 4v_3^2 \right) \right) dx_1 + \\ & + b \int_0^L \left(\mu \left(v_2^2 + 2v'_1 v_2 + (v'_1)^2 + \frac{b^4}{80} (v'_3)^2 \right) + a \left(\frac{b^2}{12} (g'_2)^2 + g_2^2 \right) + \xi \frac{b^2}{12} g_2^2 \right) dx_1 + \\ & + \frac{b^3}{6} \int_0^L \beta (v'_2 + 2v_3) g_2 dx_1 - 2p_0 b \left(v_1(L) - \frac{b^2}{12} v_3(L) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Найдя стационарное значение функционала (23), получим краевую задачу для определения функций $v_1(x_1)$, $v_2(x_1)$, $v_3(x_1)$, $g_2(x_1)$:

$$\frac{b^2}{12}v''_3 + v''_1 + v'_2 = 0; \quad (24)$$

$$-(\lambda + 2\mu) \frac{b^2}{12}v''_2 + \mu v'_1 - (2\lambda - \mu) \frac{b^2}{12}v'_3 - \beta \frac{b^2}{12}g'_2 + \mu v_2 = 0; \quad (25)$$

$$-ag''_2 + \beta v'_2 + \left(\xi + \frac{12a}{b^2} \right) g_2 + \beta v_3 = 0; \quad (26)$$

$$-\frac{3b^2}{20}\mu v''_3 - \mu v''_1 + (2\lambda - \mu) v'_2 + 4(\lambda + 2\mu) v_3 + 2\beta g_2 = 0; \quad (27)$$

$$v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = g'_2(0) = 0; \quad (28)$$

$$g'_2(L) = 0, \quad \frac{b^2}{12}v'_3(L) + v'_1(L) + v_2(L) = \frac{p_0}{\mu}, \\ (\lambda + 2\mu) v'_2(L) + 2\lambda v_3(L) + \beta g_2(L) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{3b^2}{20}v'_3(L) + v'_1(L) + v_2(L) = \frac{p_0}{\mu}.$$

Переходя в (24)–(29) к безразмерным величинам по формулам раздела 3 и введя дополнительно $G_1 = v_2$, $G_2 = \frac{v_1}{L}$, $G_3 = v_3 L$, $G_4 = \frac{\xi L}{\beta} g_2$, получим

$$\frac{\varepsilon^2}{12}G''_3 + G''_2 + G'_1 = 0; \quad (30)$$

$$-(\chi + 2) \frac{\varepsilon^2}{12}G''_1 + G'_2 - (2\chi - 1) \frac{\varepsilon^2}{12}G'_3 - \delta_0 \frac{\varepsilon^2}{12}G'_4 + G_1 = 0; \quad (31)$$

$$-\alpha G''_4 + G'_1 + \left(1 + \frac{12\alpha}{\varepsilon^2} \right) G_4 + G_3 = 0; \quad (32)$$

$$-\frac{3\varepsilon^2}{20}G''_3 - G''_1 + (2\chi - 1) G'_1 + 4(\chi + 2) G_3 + 2\delta_0 G_4 = 0; \quad (33)$$

$$G_1(0) = G_2(0) = G_3(0) = G'_4(0) = 0; \quad (34)$$

$$G'_4(1) = 0, \quad \frac{\varepsilon^2}{12}G'_3(1) + G'_2(1) + G_1(1) = P,$$

$$(\chi + 2) G'_1(1) + 2\chi G_3(1) + \delta_0 G_4(1) = 0, \quad (35)$$

$$\frac{3\varepsilon^2}{20}G'_3(1) + G'_2(1) + G_1(1) = P.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (30)–(33), имеет вид

$$\gamma^4 (a_0 \gamma^4 - a_1 \gamma^2 + a_2) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) имеет четырехкратный нулевой корень $\gamma_{1-4} = 0$ и две пары корней $\gamma_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}}$, $\gamma_{7,8} = \pm \sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}}$, где $a_0 = \alpha \frac{\varepsilon^4}{540} (1 + \frac{\chi}{2})$, $a_1 = \alpha \frac{\varepsilon^2}{15} (\frac{11}{3} + \frac{7}{2}\chi) + \frac{\varepsilon^4}{540} (1 + \frac{\chi - \delta_0}{2})$, $a_2 = \frac{8}{3}\alpha (1 + \chi) + \frac{2}{9}\varepsilon^2 (\chi + 1 - \delta_0)$.

После нахождения $G_i(\zeta)$, $i = 1..4$, далее вычисляют напряженно-деформированное состояние (НДС): безразмерные смещения $U_1 = \eta G_1(\zeta)$, $U_3(\zeta, \eta) = G_2(\zeta) + \eta^2 G_3(\zeta)$, пористость $\Phi = \eta G_4(\zeta)$, неклассические напряжения $H_1 = \alpha \eta G'_4$, $H_3 = \alpha G_4$ и классические напряжения $\Omega_{11} = \eta ((\chi + 2) G'_1 + 2G_3 + \delta_0 G_4)$, $\Omega_{33} = \eta (2(\chi + 2) G_3 + \chi G'_1 + \delta_0 G_4)$, $\Omega_{13} = G_1 + G'_2 + \eta^2 G_3$.

5. Результаты расчетов. В данном разделе представлены результаты расчетов НДС пористоупругого прямоугольника.

Проведена верификация прикладных моделей (17)–(21) и (30)–(35) путем сравнения с результатами, полученными при решении задач растяжения и изгиба прямоугольника в КЭ-пакете FlexPDE при $P = 1$, $\alpha = 0.08$, $\delta_0 = 0.2$, $\chi = 0.8$. Распределения смещений и пористости по горизонтальной координате на верхней грани в случае растяжения прямоугольника при $\varepsilon = 0.2$ представлены на рисунке 1, а в случае изгиба при $\varepsilon = 0.5$ – на рисунке 2. На рисунках 1, 2 сплошной линией изображены результаты расчетов в пакете FlexPDE, точками – по прикладной теории.

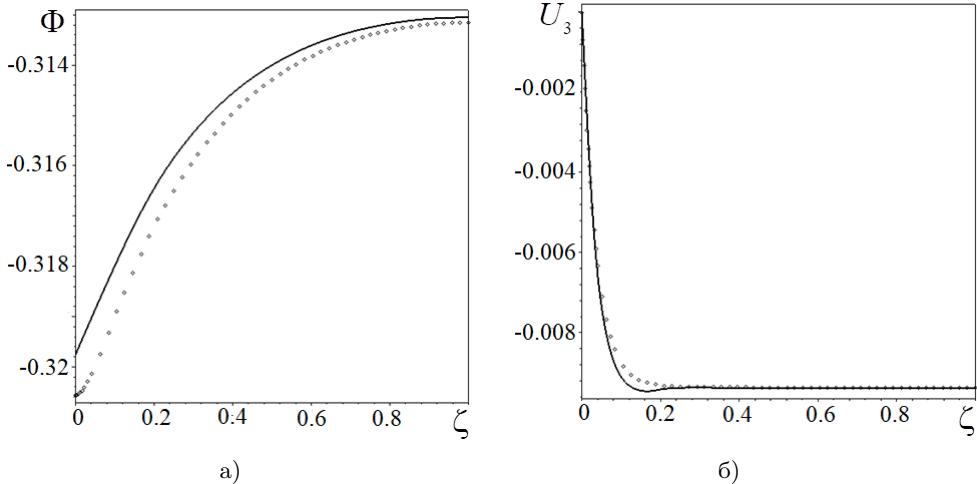


Рис. 1. Распределение функций вдоль координаты ζ : а) Φ , б) U_3 – при действии нормальной нагрузки (растяжение прямоугольника) и $\varepsilon = 0.2$

Итак, прикладные модели с небольшой погрешностью описывают распределение функций пористости и перемещений в случае вытянутых образцов. При этом модель 2-го порядка в случае изгиба прямоугольника дает высокую точность расчетов даже при большом значении параметра относительной толщины $\varepsilon = 0.5$.

Исследовано влияние неклассических параметров на НДС пористоупругого прямоугольника.

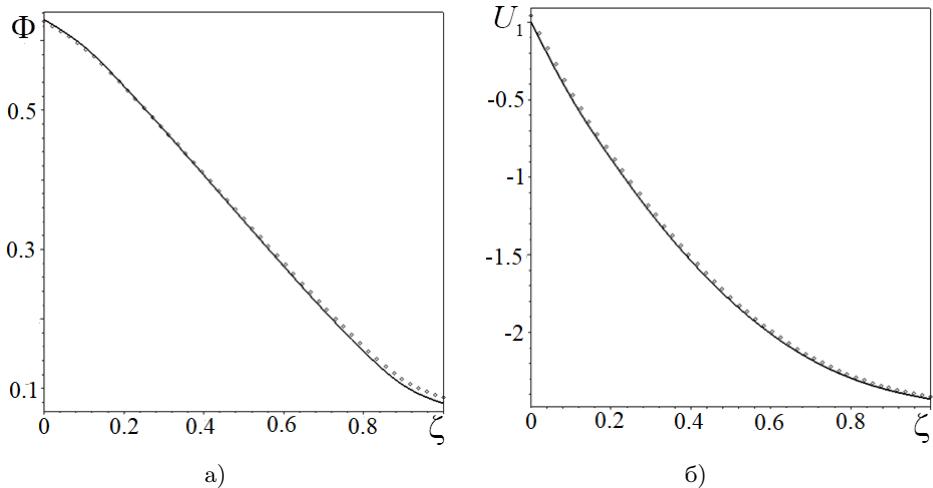


Рис. 2. Распределение функций вдоль координаты ζ : а) Φ , б) U_1 – при действии касательной нагрузки (изгиб прямоугольника) и $\varepsilon = 0.5$

На рисунке 3 показано влияние параметра связности δ_0 на распределение смещений U_1 , U_3 на верхней грани в случае растяжения прямоугольника. В расчетах принято: $\alpha = 0.1$, $P = 1$, $\chi = 1.1$, $\varepsilon = 0.2$. На этом рисунке сплошной линией изображены смещения при $\delta_0 = 0.05$, точками – при $\delta_0 = 0.5$.

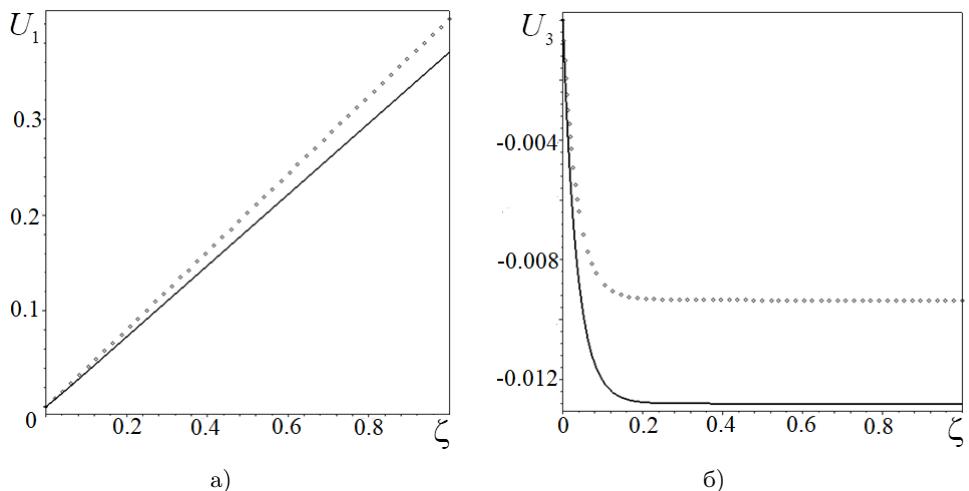


Рис. 3. Изменение вдоль координаты ζ смещений: а) U_1 , б) U_3 – при двух значениях δ

Анализ рисунка 3 показывает, что с увеличением параметра связанности в случае растяжения прямоугольника смещение U_1 увеличивается, а смещение U_3 уменьшается по абсолютной величине.

На рисунке 4 показано влияние параметра α на распределение неклассических напряжений H_1, H_3 на верхней грани в случае изгиба прямоугольника при $P = 1, \chi = 1.1, \varepsilon = 0.2, \delta_0 = 0.25$. При этом сплошной линией представлены напряжения при $\alpha = 0.02$, точками – при $\alpha = 0.2$.

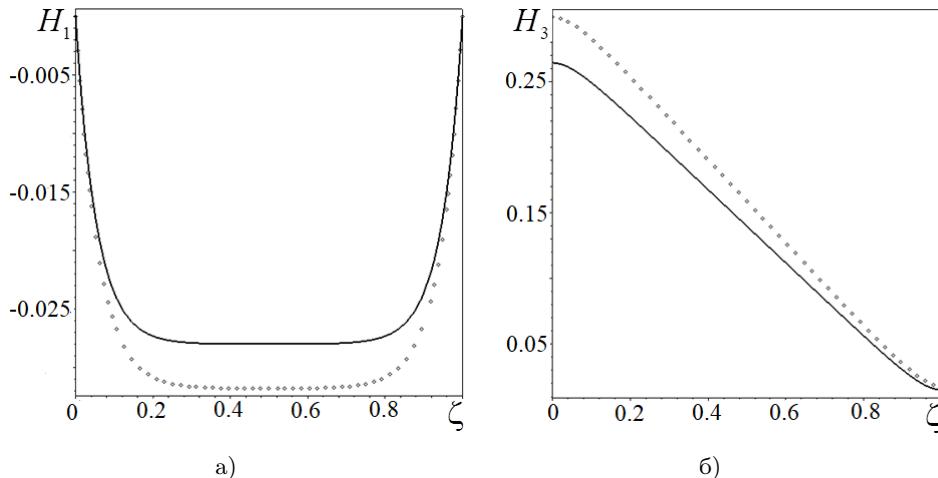


Рис. 4. Распределение вдоль ζ : а) H_1 , б) H_3 – при двух значениях α

Из рисунка 4 следует, что с ростом α значения неклассических напряжений H_1 и H_3 возрастают по абсолютной величине.

Заключение. Исследована задача о деформировании вытянутой пористой прямоугольной области под действием нормальной и касательной нагрузки на одной из сторон. Предложены гипотезы о распределении полей перемещений и функции пористости вдоль продольной координаты в зависимости от приложенной нагрузки. На основе метода Канторовича и вариационного принципа Лагранжа построены приближённые модели для задач растяжения и изгиба прямоугольника соответственно. Проведена верификация прикладных моделей путем сравнения с результатами, полученными в пакете FlexPDE. Выяснено, что в случае изгиба погрешность вычисления перемещений и функции пористости по прикладной модели 2-го порядка не превышает 1% в случае вытянутых образцов; с ростом параметра относительной толщины погрешность вычисления постепенно увеличивается. Также исследовано влияние неклассических модулей на распределение перемещений, функции пористости и неклассических напряжений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Cowin S.C. Linear elastic materials with voids / S.C. Cowin, J.W. Nunziato // J. Elasticity. – 1983. – Vol. 13 (2). – P. 125–147. – DOI: 10.1007/BF00041230.
2. Cowin S.C. A note on the problem of pure bending for linear elastic materials with voids / S.C. Cowin // J. Elasticity. – 1984. – Vol. 14. – P. 227–233. – DOI: 10.1007/BF00041670.
3. Cowin S.C. The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids / S.C. Cowin, P. Puri // J. Elasticity. – 1983. – Vol. 13. – P. 157–163. – DOI: 10.1007/BF00041232.
4. Sha M. Micro-dilatation effects in a two-layered porous structure under uniform heating / M. Sha, A.V. Volkov, A.A. Orekhov, E.L. Kuznetsova // Journal of the Balkan Tribological Association. – 2021. – Vol. 27, № 2. – P. 280–294.

5. Нестеров С.А. О деформировании составных упругих тел с пустыми порами / С.А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 68–79. – DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79.
6. Lyapin A.A. On deformation of porous plates / A.A. Lyapin, A.O. Vatulyan// ZAMM J. Appl. Math. Mech. – 2018. – Vol. 98, № 6. – P. 330–340. – DOI: 10.1002/zamm.201700151.
7. Чебаков М.И. Контактная задача для пороупрого цилиндра конечных размеров на винклеровском основании / М.И. Чебаков, Е.М. Колосова // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2025. – № 3. – С. 44–54. – DOI: 10.18522/1026-2237-2025-3-44-54.
8. Аннин Б.Д. Задача трехточечного изгиба упругой балки из пористого металла / Б.Д. Аннин, В.М. Садовский, О.В. Садовская // ПМТФ. – 2024. – Т. 88, № 2. – С. 217–227. – DOI: 10.31857/S0032823524020043.
9. Зеленцов В.Б. Относительный объем пор при идентировании пористых материалов / В.Б. Зеленцов, А.Д. Загребнева, П.А. Лапина [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2021. – Т. 83, № 4. – С. 462–470. – DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470.
10. Ramezani H. Analytical and numerical studies on penalized micro-dilatation (PMD) theory: macro-micro link concept / H. Ramezani, H. Steeb, J. Jeong // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – Vol. 34. – P. 130–148. – DOI: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.11.002.
11. Jeong J. Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory / J. Jeong, H. Ramezani, P. Sardini, D. Kondo, L. Ponson, M. Siitari-Kauppi // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2015. – Vol. 224. – P. 1805–1816. – DOI: 10.1140/epjst/e2015-02500-2.
12. Bishay P.L. On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory / P.L. Bishay, M. Repka, V. Sladek, J. Sladek // Acta Mech. – 2017.– Vol. 228. – P. 1631–1644. – DOI: 10.1007/s00707-016-1789-9.
13. Chebakov M.I. Methodology of Determination of Porosity Parameters in the Theory of Microdilation / M.I. Chebakov, E.M. Kolosova // In: Springer Proceedings in Materials, Springer, Cham. – 2024. – Vol. 41. – P. 335–344. – DOI: 10.1007/978-3-031-52239-0_32.
14. Filon L.N.G. On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load, with Special Reference to Points of Concentrated or Discontinuous Loading / L.N.G. Filon // Phil. Trans. Roy. Soc. 1903. – Vol. 201. – P. 63–155. – DOI: 10.1098/rsta.1903.0014.
15. Папкович И.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы / И.Ф. Папкович // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 27, № 4. – С. 335–339.
16. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – Л.: Наука, 1980. – 520 с.
17. Крушинский А.Е. Введение в аналитическую механику упругих тел / А.Е. Крушинский. – Минск: БНТУ, 2004. – 335 с.
18. Коваленко М.Д. Точные решения неоднородных краевых задач теории упругости в прямоугольнике / М.Д. Коваленко, А.П. Кержаев, И.В. Меньшова, Ю.Н. Карнет // Доклады РАН. Физика, технические науки. – 2023. – Т. 513, № 1. – С. 61–66. – DOI: 10.31857/S268674002306010X.
19. Ватульян А.О. Масштабно-зависимая модель деформирования слоистого прямоугольника / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Владикавк. мат. журн. – 2022. – Т. 24, № 4. – С. 48–57. – DOI: 10.46698/v8145-3776-3524-q.
20. Vatulyan A. Regarding some thermoelastic models of "coating-substrate" system deformation / A. Vatulyan, S. Nesterov, R. Nedin // Continuum Mech. Thermodyn. – 2020. – Vol. 32 (4). – P. 1173–1186. – DOI: 10.1007/s00161-019-00824-9.
21. Голосков Д.П. Изгиб защемленной тонкой изотропной пластины методом Канторовича с использованием специальных полиномов / Д.П. Голосков, А.В. Матросов, И.В. Олемской // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2023. – Т. 19, вып. 4. – С. 423–442. – DOI: 10.21638/11701/spbu10.2023.401.
22. Голосков Д.П. Размерный эффект при изгибе прямоугольников из вспененных материалов / Д.П. Голосков, А.В. Матросов // Вестник Санкт-Петербургского университета.

- Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2025. – Т. 21, вып. 1. – С. 16–27. – DOI: 10.21638/spbu10.2025.102.
- 23. Канторович Л.В. Приближённые методы высшего анализа. / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 560 с.
 - 24. Aghdam M.M. Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method / М.М. Aghdam, M. Mohammadi, V. Erfanian // Thin-Walled Structures. – 2007. – Vol. 45, № 12. – P. 983–990. – DOI: 10.1016/j.tws.2007.07.012.
 - 25. Singhathanadgid P. The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review / P. Singhathanadgid, T. Singhapanart // Mech. Adv. Mat. Struct. – 2019. – Vol. 26, № 2. – P. 170–188. – DOI: 10.1080/15376494.2017.1365984.

A.O. Vatulyan, S.A. Nesterov, V.O. Yurov

On applied models of deformation of a porous rectangle.

The deformation of an isotropic elongated porous rectangle is investigated using the Cowin-Nunziato model. The left side of the rectangle is rigidly fixed, the right side is subject to normal and shear loads, and the remaining sides are stress-free. An approximate analytical model of the problem is constructed using the Kantorovich method and the Lagrange variational principle. The model is verified by comparing it with a finite element solution found in the FlexPDE package. The influence of nonclassical parameters on the distribution of stress, displacements, and the porosity is examined.

Keywords: *rectangle, micro-dilation theory, tension, bending, Kantorovich method, Lagrange variational principle.*

*Статья поступила в редакцию 22.10.2025;
доработана 10.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.*

УДК 517.95, 539.32, 534.222
doi:10.24412/0136-4545-2025-3-61-72
EDN:AAGAIJ



©2025. А.О. Ватулян¹, В.В. Дударев², С.А. Нестеров³

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ С ПУСТЫМИ ПОРАМИ

В рамках модели Ковина-Нунзиато исследована коэффициентная обратная задача для неоднородных пороупругих тел. Получены операторные уравнения для решения задачи идентификации переменных характеристик конечного пороупрого тела. В качестве примера рассмотрена обратная задача для пороупрого стержня. Исследовано влияние законов неоднородности модуля Юнга, плотности и модуля жесткости пор на торцевое смещение. Операторные уравнения аппроксимировались двумя способами: 1) на основе метода коллокаций; 2) на основе проекционного метода. Представлена итерационная схема реконструкции одномерных поромеханических характеристик. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции физико-механических характеристик как в точках внутри стержня, так и в классе описывающих идентифицируемые характеристики квадратичных функций.

Ключевые слова: микро-дилатационная теория, стержень с пустыми порами, колебания, обратная задача, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, итерационная схема реконструкции.

Введение. Теория Ковина-Нунзиато широко применяется для нахождения напряженно-деформированного состояния упругих материалов с пустыми порами [1]. В рамках этой модели решено большое число задач о деформировании пороупругих однородных и слоистых тел [1–4].

¹ Ватулян Александр Ованесович – доктор физ.-мат. наук, зав. каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: aovatulyan@sfedu.ru.

Vatulyan Aleksandr Ovanesovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity.

² Дударев Владимир Владимирович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, e-mail: vvdudarev@sfedu.ru.

Dudarev Vladimir Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity.

³ Нестеров Сергей Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела дифференц. уравнений Южного математического инст-та - филиала ВНИЦ РАН, Владикавказ, e-mail: 1079@list.ru.

Nesterov Sergey Anatolyevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Department of Differential Equations.

Отметим, что в последнее время стали внедряться функционально-градиентные пористые материалы (ФГПМ) – композиционные материалы, состоящих из двух или более компонентов, объемные доли которых плавно изменяются по заданному закону [5]. Такие пористые структуры являются перспективными, поскольку сочетают в себе преимущества пористых структур и объемных конструкций с переменными свойствами. Градиентный пористый материал теперь стало легче получить благодаря таким методам, как аддитивное производство или 3D-печать [6, 7]. Несмотря на свою практическую важность, исследования, посвященные анализу конструкций из ФГПМ [8–11] и идентификации их свойств путем решения коэффициентных обратных задач (КОЗ), находятся на начальном этапе. Исследование обратных задач опирается на дополнительную информацию, в качестве которой служат измеренные компоненты физических полей либо внутри тела [12], либо на его границе для различных моментов времени [13].

Теория Ковина-Нунзиато содержит ряд неклассических модулей, для нахождения которых в случае однородного тела в последнее время развиваются теоретические и экспериментальные подходы [14–17].

При решении обратных задач для упругих тел с насыщенными жидкостью порами в рамках модели Био, ранее проведенные исследования опираются на минимизацию функционала невязки с использованием градиентных методов [18], различных эвристических алгоритмов [19–21], либо на организацию итерационного процесса и решение операторных уравнений Фредгольма 1-го рода [22–24].

В настоящей работе исследуется коэффициентная обратная задача для неоднородных пороупругих тел модели Ковина-Нунзиато. Представлены результаты идентификации переменных характеристик пороупругого стержня.

1. Общая постановка задачи о колебаниях неоднородных пороупругих тел. Пусть упругое тело с пустыми порами имеет объем V и кусочно-гладкую границу $S = S_u \cup S_\varphi \cup S_\sigma \cup S_h$, где $S_u, S_\varphi, S_\sigma, S_h$ – части поверхности тела, на которых заданы граничные условия для компонент вектора перемещений, функции пористости, классических и неклассических напряжений соответственно.

Постановка задачи динамической пороупругости в рамках модели Ковина-Нунзиато имеет вид [1]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i; \quad (1)$$

$$h_{i,i} + g = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i(t), \quad h_i n_i|_{S_h} = 0; \quad (3)$$

$$u_i|_{S_u} = u_i^0, \quad \varphi|_{S_\varphi} = \varphi_0; \quad (4)$$

$$u_i(x, 0) = \dot{u}_i(x, 0) = \varphi(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} + D_{ijkl}\varphi_{,k} + \beta_{ij}\varphi$ – компоненты тензора классических напряжений; $h_i = a_{ij}\varphi_{,i} + D_{ijk}\varepsilon_{jk}$ – компоненты вектора неклассических напряжений; $g = -(\omega\dot{\varphi} + \xi\varphi + \beta_{ij}\varepsilon_{ij})$ – неклассическая объемная сила; u_i – компоненты

Об идентификации переменных характеристик неоднородных упругих тел с пустыми порами

вектора перемещения; φ – пористость (микродилатация); $\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$ – компоненты классического тензора деформаций; c_{ijkl} – компоненты тензора упругих модулей; β_{ij} и D_{ijk} – компоненты тензора поромеханической связности второго и третьего порядка соответственно; ρ – плотность; a_{ij} – компоненты тензора диффузии пор; ξ – модуль жесткости пор; ω – микровязкоупругий модуль; $p_i(t)$ – компоненты вектора нагрузки, изменяющиеся с течением времени.

Образмерим задачу (1)–(5) по правилам:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad U_i = \frac{u_i}{L}, \quad \Phi = \frac{\xi_0}{\beta_{11}^0} \varphi, \quad G = \frac{g}{\xi_0}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{1111}^0}, \\ H_i &= \frac{h_i}{\xi_0 L}, \quad \bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\xi_0 L^2}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{c}_{ijkl} = \frac{c_{ijkl}}{c_{1111}^0}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{c_{1111}^0}} L, \\ \varepsilon &= \frac{\omega}{\xi_0 t_0}, \quad \delta_0 = \frac{\beta_{11}^2}{\xi_0 c_{1111}^0}, \quad \bar{\beta}_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{11}^0}, \quad \bar{D}_{ijk} = \frac{D_{ijk}}{D_{ijk}^0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad P_i = \frac{p_i}{c_{1111}^0}.\end{aligned}$$

Здесь L – характерный линейный размер тела (например, его длина), δ_0 – параметр связности.

Образмеренная постановка задачи (1)–(5) примет вид:

$$\Omega_{ij,j} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau^2}; \quad (6)$$

$$H_{i,j} + G = 0; \quad (7)$$

$$\Omega_{ij} n_j|_{S_\sigma} = P_i(\tau), \quad H_i n_i|_{S_h} = 0; \quad (8)$$

$$U_i|_{S_u} = U_i^0, \quad \Phi|_{S_\phi} = \Phi_0; \quad (9)$$

$$U_i(\bar{x}, 0) = \frac{\partial U_i}{\partial \tau}(\bar{x}, 0) = \Phi(\bar{x}, 0) = 0. \quad (10)$$

Прямая задача состоит в вычислении функций U_i и Φ из (6)–(10) при известных характеристиках \bar{a}_{ij} , $\bar{\beta}_{ij}$, \bar{D}_{ijk} , \bar{c}_{ijkl} , $\bar{\xi}$, $\bar{\rho}$, δ_0 , ε .

Здесь и далее будем рассматривать случай, когда параметры δ_0 , ε являются постоянными величинами. Обратная задача состоит в нахождении переменных характеристик $\bar{g}(\bar{a}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}, \bar{D}_{ijk}, \bar{\xi}, \bar{\rho}, \bar{c}_{ijkl})$ из (6)–(10) по дополнительной информации, измеренной на части границы S_σ :

$$U_i|_{S_\sigma} = f_i(\bar{x}, \tau), \quad \tau \in [a_1, a_2], \quad i = 1..3, \quad j = 1..m. \quad (11)$$

2. Операторные уравнения для решения обратной задачи. КОЗ (6)–(11) является нелинейной задачей механики связанных полей. Применим для ее исследования итерационный подход [13], на каждом этапе которого необходимо решать операторное уравнение 1-го рода, основанное на слабой постановке.

Сначала, применив к уравнениям в развернутом виде (6)–(9) преобразование Лапласа, с учетом начальных условий (10), получим:

$$\left(\bar{c}_{ijkl} \tilde{U}_{k,l} + \delta_0 \bar{\beta}_{ij} \tilde{\Phi} + \delta_0 \bar{D}_{ijk} \tilde{\Phi}_{,k} \right)_{,j} = p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_i; \quad (12)$$

$$(\bar{a}_i \tilde{\Phi}_{,i} + \bar{D}_{ijk} \tilde{U}_{i,k})_{,j} - \bar{\xi} \tilde{\Phi} - \bar{\beta}_{ij} \tilde{U}_{i,j} = \varepsilon p \tilde{\Phi}; \quad (13)$$

$$(\bar{c}_{ijkl} \tilde{U}_{k,l} + \delta_0 \bar{\beta}_{ij} \tilde{\Phi} + \delta_0 \bar{D}_{ijk} \tilde{\Phi}_{,k}) n_j|_{S_\sigma} = \tilde{P}_i, \quad (\bar{a}_{ij} \tilde{\Phi}_{,i} + \bar{D}_{ijk} \tilde{U}_{i,k}) n_j|_{S_h} = 0; \quad (14)$$

$$\tilde{U}_i|_{S_u} = \tilde{U}_i^0, \quad \tilde{\Phi}|_{S_\phi} = \tilde{\Phi}_0. \quad (15)$$

Умножим уравнения (12) на пробные функции \tilde{v}_i , где $\tilde{v}_i|_{S_u} = 0$. Уравнения (13) умножим на $\chi_1 \tilde{\vartheta}$, где $\tilde{\vartheta}$ – пробная функция, причем $\tilde{\vartheta}|_{S_\phi} = 0$. Полученные произведения сложим и проинтегрируем по объему V . Далее граничное условие (14) на части S_σ умножим на $\chi_2 \tilde{v}_i$ и проинтегрируем по S_σ . Сложив интегралы, применим к ним теорему Остроградского – Гаусса, и, полагая $\chi_1 = \delta_0$, $\chi_2 = -1$, приравняем полученное выражение к нулю. Тогда получим слабую постановку задачи (12)–(15) в виде:

$$\begin{aligned} & - \int_V \bar{c}_{ijkl} \tilde{U}_{i,j} \tilde{\nu}_{k,l} dV - p^2 \int_V \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{\nu}_i dV - \delta_0 \int_V \bar{\beta}_{ij} (\tilde{\Phi} \tilde{\nu}_{i,j} + \tilde{\theta} \tilde{U}_{i,j}) dV - \\ & - \delta_0 \int_V \bar{a}_{ij} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\theta}_{,j} dV - \delta_0 \int_V \bar{\xi} \tilde{\Phi} \tilde{\theta} dV - \delta_0 \int_V \bar{D}_{ijk} (\tilde{\Phi}_{,k} \tilde{\nu}_{i,j} + \tilde{\theta}_{,k} \tilde{U}_{i,j}) dV - \\ & - \delta_0 \varepsilon p \int_V \tilde{\Phi} \tilde{\theta} dV + \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \tilde{v}_i dS = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Будем различать два состояния: первое состояние – для функций $\tilde{U}_i^{(1)}, \tilde{v}_i^{(1)}$, $\tilde{\Phi}^{(1)}, \tilde{\vartheta}^{(1)}, \bar{c}_{ijkl}^{(1)}, \bar{\rho}^{(1)}, \bar{\xi}^{(1)}, \bar{a}_{ij}^{(1)}, \bar{\beta}_{ij}^{(1)}, \bar{D}_{ijk}^{(1)}, \delta_0^{(1)}, \varepsilon^{(1)}$ и второе – для функций $\tilde{U}_i^{(2)}, \tilde{v}_i^{(2)}$, $\tilde{\Phi}^{(2)}, \tilde{\vartheta}^{(2)}, \bar{c}_{ijkl}^{(2)}, \bar{\rho}^{(2)}, \bar{\xi}^{(2)}, \bar{a}_{ij}^{(2)}, \bar{\beta}_{ij}^{(2)}, \bar{D}_{ijk}^{(2)}, \delta_0^{(2)}, \varepsilon^{(2)}$. Найдем разность соотношений (16) для двух состояний и положим в ней $\tilde{v}_i^{(1)} = \tilde{U}_i^{(2)}, \tilde{v}_i^{(2)} = \tilde{U}_i^{(1)}, \tilde{\vartheta}^{(1)} = \tilde{\Phi}^{(2)}, \tilde{\vartheta}^{(2)} = \tilde{\Phi}^{(1)}, \tilde{\Phi}^{(1)} = \tilde{\Phi}^{(n-1)}, \tilde{\Phi}^{(2)} = \tilde{\Phi}^{(n-1)} + \delta \tilde{\Phi}^{(n-1)}, \tilde{U}_i^{(1)} = \tilde{U}^{(n-1)}, \tilde{U}_i^{(2)} = \tilde{U}_i^{(n-1)} + \delta \tilde{U}_i^{(n-1)}, \delta_0^{(1)} = \delta_0^{(2)}, \varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)}, \bar{\beta}_{ij}^{(1)} = \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)}, \bar{\beta}_{ij}^{(2)} = \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)} + \delta \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)}, \bar{D}_{ijk}^{(1)} = \bar{D}_{ijk}^{(n-1)}, \bar{D}_{ijk}^{(2)} = \bar{D}_{ijk}^{(n-1)} + \delta \bar{D}_{ijk}^{(n-1)}, \bar{a}_{ij}^{(1)} = \bar{a}_{ij}^{(n-1)}, \bar{a}_{ij}^{(2)} = \bar{a}_{ij}^{(n-1)} + \delta \bar{a}_{ij}^{(n-1)}, \bar{c}_{ijkl}^{(1)} = \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)}, \bar{c}_{ijkl}^{(2)} = \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)} + \delta \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)}, \bar{\xi}^{(1)} = \bar{\xi}^{(n-1)}, \bar{\xi}^{(2)} = \bar{\xi}^{(n-1)} + \delta \bar{\xi}^{(n-1)}, \bar{\rho}^{(1)} = \bar{\rho}^{(n-1)}, \bar{\rho}^{(2)} = \bar{\rho}^{(n-1)} + \delta \bar{\rho}^{(n-1)}$. Ограничевшись только линейными слагаемыми, с учетом того, что $\tilde{U}_i^{(2)}|_{S_\sigma} = \tilde{f}_i$, получим:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \bar{c}_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{U}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{U}_i^{(n-1)})^2 dV + \\ & + \delta_0 \int_V \delta \bar{\beta}_{ij}^{(n-1)} \tilde{\Phi}^{(n-1)} U_{i,j}^{(n-1)} dV + \delta_0 \int_V \delta \bar{a}_{ij}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,j}^{(n-1)} dV + \\ & + \delta_0 \int_V \delta \bar{D}_{ijk}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,i}^{(n-1)} \tilde{U}_{j,k}^{(n-1)} dV + \delta_0 \int_V \delta \bar{\xi}^{(n-1)} (\tilde{\Phi}^{(n-1)})^2 dV = \end{aligned} \quad (17)$$

$$= - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty).$$

Выражение (17) есть интегральное уравнение Фредгольма (ИУФ) 1-го рода для нахождения функций-поправок $\delta\bar{g}^{(n-1)}$ ($\delta\bar{c}_{ijkl}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\beta}_{ij}^{(n-1)}$, $\delta\bar{D}_{ijk}^{(n-1)}$, $\delta\bar{a}_{ij}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\rho}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\xi}^{(n-1)}$) на $(n-1)$ -ой итерации. В случае раздельного восстановления физико-механических характеристик вместо (17) получим упрощенные уравнения:

$$\int_V \delta\bar{c}_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{U}_{k,l}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (18)$$

$$p^2 \int_V \delta\bar{\rho}^{(n-1)} \left(\tilde{U}_i^{(n-1)} \right)^2 dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (19)$$

$$\delta_0 \int_V \delta\bar{\beta}_{ij}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,k}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (20)$$

$$\delta_0 \int_V \delta\bar{D}_{ijk}^{(n-1)} \tilde{U}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,k}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (21)$$

$$\delta_0 \int_V \delta\bar{a}_{ij}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\Phi}_{,j}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty); \quad (22)$$

$$\delta_0 \int_V \delta\bar{\xi}^{(n-1)} \left(\tilde{\Phi}^{(n-1)} \right)^2 dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{P}_i \left(\tilde{f}_i - \tilde{U}_i^{(n-1)} \right) dS, \quad p \in [0, \infty). \quad (23)$$

Из (19) следует, что при $p = 0$ ядро этого ИУФ обращается в нуль, что делает невозможной реконструкцию функции плотности в пространстве трансформант.

В случае восстановления характеристик на конечном временном интервале уравнения (18)–(23) обращают на основе аппарата операционного исчисления.

3. Численное исследование прямой задачи для пористого стержня.

Рассмотрим динамическую задачу для защемленного на торце $x = 0$ изотропного упругого стержня с пустыми порами. Колебания вызываются под действием на другом торце $x = l$ нагрузки $\sigma_{11}(l, t) = p_1(t)$.

С учетом изотропии и одномерности задачи, выполним ее обезразмеривание по формулам раздела 2, полагая $\bar{c}_{ijkl} = \bar{E}\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\bar{a}_{ij} = \bar{\alpha}\delta_{ij}$, $\bar{\beta}_{ij} = 1$, $\bar{D}_{ijk} = 0$, δ_{ij} – символ Кронекера. Примем за характерный линейный размер – длину стержня l , за безразмерную координату – $z = \frac{x}{l}$. Тогда обезразмеренная постановка задачи для стержня в развернутом виде примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} + \delta_0 \Phi \right) = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \tau \geq 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\alpha}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \bar{\xi}(z) \Phi - \frac{\partial U}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \tau \geq 0; \quad (25)$$

$$U(0, \tau) = \Phi(0, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad \bar{E}(1) \frac{\partial U}{\partial z}(1, \tau) + \delta_0 \Phi(1, \tau) = P_1(\tau); \quad (26)$$

$$U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = \Phi(z, 0) = 0. \quad (27)$$

Выполняя действия, аналогичные решению задачи для термоупругого стержня [13], сведем задачу (24)–(27) к системе ИУФ 2-го рода в трансформантах Лапласа, которая имеет вид [25]:

$$\tilde{\Phi} = \int_0^1 G_1(z, \psi, p) \tilde{\Phi}(\psi, p) d\psi + \int_0^1 G_2(z, \psi, p) \tilde{\Omega}(\psi, p) d\psi; \quad (28)$$

$$\tilde{\Omega}_{11} = \int_0^1 G_3(z, \psi, p) \tilde{\Phi}(\psi, p) d\psi + \int_0^1 G_4(z, \psi, p) \tilde{\Omega}_{11}(\psi, p) d\psi + \tilde{P}_1 \quad (29)$$

где

$$G_1 = - \left(\bar{\xi}(\psi) + p\varepsilon - \frac{\delta_0}{\bar{E}(\psi)} \right) \int_0^{\min\{z, \psi\}} \frac{d\eta}{\bar{\alpha}(\eta)}, \quad G_2 = - \frac{1}{\bar{E}(\psi)} \int_0^{\min\{z, \psi\}} \frac{d\eta}{\bar{\alpha}(\eta)},$$

$$G_3 = - \frac{\delta_0}{\bar{E}(\psi)} p^2 \int_{\min\{z, \psi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad G_4 = - \frac{p^2}{\bar{E}(\psi)} \int_{\min\{z, \psi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta.$$

Для решения системы (28), (29) применялся метод коллокаций, а обращение трансформант функции пористости $\tilde{\Phi}$ и напряжений $\tilde{\Omega}_{11}$ в точках коллокаций z_i , $i = 1..s + 1$ осуществлялось с помощью теории вычетов.

Сравнение решения задачи (24)–(27) для однородного стержня предложенным методом с решением, полученным в КЭ-пакете FlexPDE, показало, что относительная погрешность решения предложенным методом для моментов времени $\tau > 10^{-4}$ не превышает 1%, если взять $s = 35$ узлов коллокаций.

При анализе влияния материальных свойств стержня на смещение в точке $z = 1$ выяснено, что $\bar{\alpha}(z)$ влияния практически не оказывает, влияние $\bar{\xi}(z)$ скрывается только при $\delta_0 \geq 0.25$, а $\bar{E}(z)$ и $\bar{\rho}(z)$ существенно влияют при любом δ_0 .

На рисунке 1 представлены графики торцевого смещения, которые соответствуют двум законам изменения а) модуля Юнга (рис. 1а), б) модуля жесткости пор (рис. 1б) в виде линейной функции (сплошная линия) и экспоненциальной функции $1.8e^{2.6z}$ (точки). В вычислениях полагалось: $\delta_0 = 0.4$, $\bar{\alpha} = 0.08$, $\varepsilon = 10^{-4}$, остальные безразмерные характеристики считались равными 1.

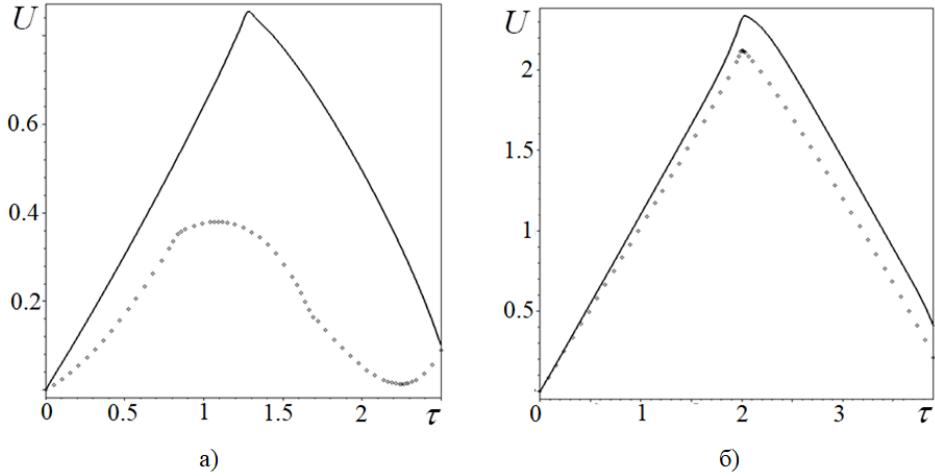


Рис. 1. Графики торцевого смещения для двух законов изменения: а) модуля Юнга; б) модуля жесткости пор

Таким образом, информация о смещении торца стержня в различные моменты времени может служить в качестве входной для идентификации модулей $\bar{E}(z)$, $\bar{\rho}(z)$ и $\bar{\xi}(z)$.

4. Исследование обратной задачи для пористого стержня. Постановка обратной задачи в случае стержня состоит в нахождении характеристик \bar{g} (\bar{E} , $\bar{\rho}$, $\bar{\xi}$) из (24)–(27) по дополнительной информации в некоторых точках временного отрезка:

$$U(1, \tau_j) = f(\tau_j), \quad \tau_j \in [a_1, a_2], \quad j = 1..r.$$

В случае нагрузки $P_1(\tau) = H(\tau)$ ($H(\tau)$ – функция Хевисайда) операторные уравнения для нахождения функций-поправок $\delta\bar{g}^{(n-1)}$ ($\delta\bar{E}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\rho}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\xi}^{(n-1)}$) в оригиналах можно представить в виде

$$\int_0^1 \delta\bar{g}^{(n-1)} M_s(z, \tau) dz = F(\tau), \quad s = 1..3, \quad \tau \in [a_1, a_2]. \quad (30)$$

Здесь $F(\tau) = - (f(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))$ – правая часть интегральных уравнений, а $M_s(z, \tau)$ – ядра. Вид ядер $M_1(z, \tau)$ и $M_2(z, \tau)$ для нахождения модуля Юнга и плотности соответственно совпадает с представленным в [13], а ядро для нахождения модуля жесткости пор имеет вид

$$M_3(z, \tau) = \delta_0 \int_0^\tau \Phi^{(n-1)}(z, \tau_1) \frac{\partial \Phi^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1.$$

В работе конечномерная аппроксимация интегральных уравнений (30) осуществлялась как с помощью метода коллокаций (1-й подход), аналогично [13], так и с помощью проекционного метода (2-й подход). В первом случае физико-механические характеристики уточнялись в узлах коллокаций; во втором случае представлялись в виде разложения по степенным функциям: $\delta\bar{g}^{(n-1)}(z) = \sum_{i=1}^N b_i^{(n-1)} \eta_i(z)$, $\eta_i(z) = z^{i-1}$, $i = 1..N$. Второй подход приводит к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов разложения $b_i^{(n-1)}$:

$$\sum_{i=1}^N b_i^{(n-1)} A_{ij}^{(n-1)} = F_j^{(n-1)}, \quad j = 1..r, \quad (31)$$

где $A_{ij}^{(n-1)} = \int_0^1 \eta_i(z) M_s^{(n-1)}(z, \tau_j) dz$, $F_j^{(n-1)} = F^{(n-1)}(\tau_j)$, $s = 1..3$, $i = 1..N$, $j = 1..r$.

Для решения плохо обусловленной СЛАУ (31) в работе, следуя методу А.Н. Тихонова [26], осуществлен переход к регуляризованной системе с выбором параметра регуляризации по обобщенной невязке.

В работе итерационный процесс реконструкции состоит из двух этапов. Первый этап состоит в нахождении начального приближения $\bar{g}^{(0)} = (\bar{g}_- + \bar{g}_+)/2$. Здесь \bar{g}_- и \bar{g}_+ – минимальное и максимальное значения искомой функции соответственно. Второй этап состоит в уточнении искомых функций по правилу $\bar{g}^{(n)}(z) = \bar{g}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{g}^{(n-1)}(z)$, где функции-поправки $\delta\bar{g}^{(n-1)}(z)$ определяются путем решения интегральных уравнений (30) на $(n-1)$ -й итерации. При этом в случае 2-го подхода физико-механические характеристики уточняются поэтапно, сначала среди констант, затем линейных, а потом – квадратичных функций.

В качестве условий выхода из итерационного процесса выступают либо достижение предельного количества итераций $n = 20$, либо достижение функционалом невязки $J = \int_{a_1}^{a_2} (f(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau$ некоторого значения κ . В случае реконструкции среди констант $\kappa = 10^{-2}$, в классе линейных функций – $\kappa = 10^{-4}$, в классе квадратичных функций – $\kappa = 10^{-5}$.

5. Результаты идентификации. В данном разделе представлены итоги восстановления физико-механических характеристик пороупругого стержня при $\delta_0 = 0.4$, $\bar{\alpha} = 0.08$, $\varepsilon = 10^{-4}$ как поточечно, на основе 1-го подхода, так и в классе квадратичных функций на основе 2-го подхода. На рисунках ниже сплошная линия – точные функции; пунктир – восстановленные функции.

Результаты восстановления характеристик: а) $\bar{\rho}(z) = 0.79 + 0.41z + 1.92z^2$; б) $\bar{\xi}(z) = 2.37 - 1.46z^2$ на основе 1-го подхода представлены на рисунке 2 при $r = 5$ точках измерения входной информации внутри отрезка $[a_1, a_2] = [0.1, 0.9]$.

Из рисунка 2 следует, что модуль $\bar{\xi}(z)$ восстанавливается значительно хуже плотности, что связано с его меньшим влиянием на торцевое смещение.

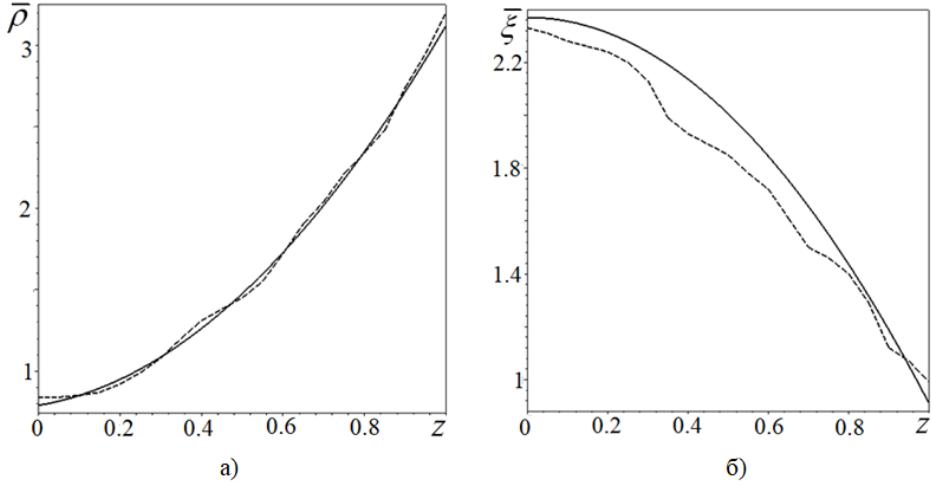


Рис. 2. Результаты реконструкции функций на основе 1-го подхода: а) $\bar{\rho}(z) = 0.79 + 0.41z + 1.92z^2$; б) $\bar{\xi}(z) = 2.37 - 1.46z^2$

На рисунке 3 представлены результаты восстановления функций: а) $\bar{\rho}(z) = 1.25 + 0.72e^{2.14z}$; б) $\bar{E}(z) = 1.43 + 0.56 \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$ на основе 2-го подхода при измерении входной информации в $r = 6$ точках отрезка $[a_1, a_2] = [0.05, 0.75]$.

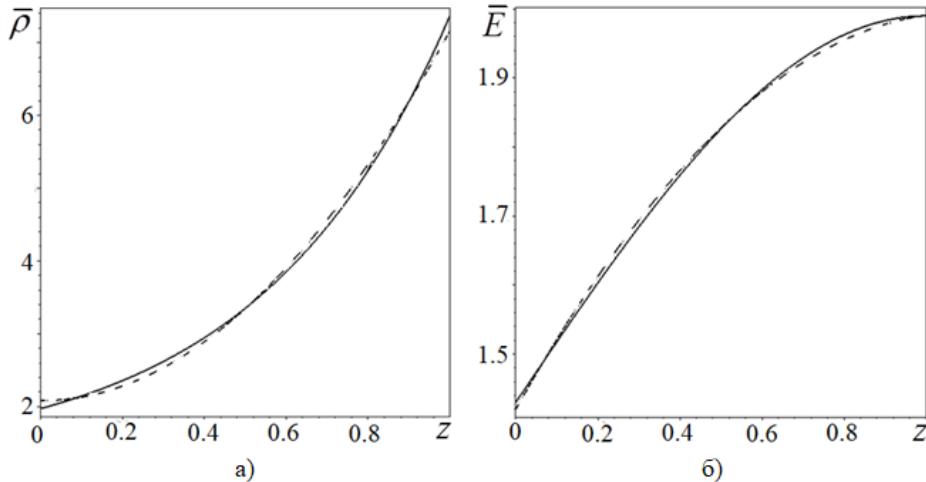


Рис. 3. Результаты реконструкции функций на основе 2-го подхода: а) $\bar{\rho}(z) = 1.25 + 0.72e^{2.14z}$; б) $\bar{E}(z) = 1.43 + 0.56 \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$

Выяснено, что погрешность реконструкции физико-механических характеристик при использовании 2-го подхода на 2–5% меньше, чем при 1-м подходе.

Проведено исследование погрешности реконструкции при различном уровне зашумления входной информации, которое моделировалось формулой $f_d(\tau_j) = (1 + q\nu_j) f(\tau_j)$, $j = 1..r$. Здесь $f(\tau_j)$ – точное значение торцевого смещения

в моменты времени τ_j ; q – амплитуда зашумления; ν_j – случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке.

На рисунке 4 показаны графики восстановления функций: а) $\bar{E}(z) = 2.33 - 1.74z + 2.56z^2$; б) $\bar{\rho}(z) = 1.88 + 0.62e^{-2.74z}$ на основе 2-го подхода при 1%-м зашумлении ($q = 0.01$). Погрешность восстановления характеристик в случае зашумления входной информации не превысила 12%,

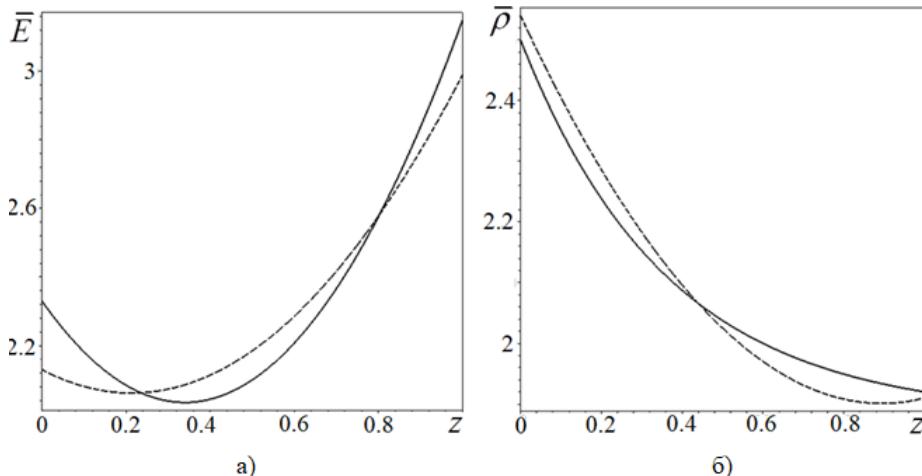


Рис. 4. Результат восстановления функций: а) $\bar{E}(z) = 2.33 - 1.74z + 2.56z^2$; б) $\bar{\rho}(z) = 1.88 + 0.62e^{-2.74z}$ при 1%-м шуме

Заключение. Получены операторные уравнения для решения обратной задачи для неоднородных пороупругих тел в рамках теории Ковина-Нунзиато. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции переменных физико-механических характеристик стержня, как поточечно, так и в классе квадратичных функций. Выяснено, что погрешность реконструкции физико-механических характеристик при использовании проекционного метода на 2–5% меньше, чем при восстановлении в узлах коллокаций. Однако при использовании проекционного метода можно восстановить только гладкие функции, которые хорошо аппроксимируются полиномами. Проверена устойчивость метода при наличии зашумления входных данных. При уровне шума 1% процента погрешность восстановления модуля Юнга и плотности не превысила 12%, что демонстрирует работоспособность алгоритма.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Cowin S.C. Linear elastic materials with voids / S.C. Cowin, J.W. Nunziato // Journal of Elasticity. – 1983. – Vol. 13. – P. 125–147. – DOI: 10.1007/BF00041230.
2. Соляев Ю.О. Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости / Ю.О. Соляев, С.А. Лурье, А.В. Волков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, №2. – С. 137–152. – DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.12.

3. Зеленцов В.Б. Относительный объем пор при идентировании пористых материалов / В.Б. Зеленцов, А.Д. Загребнева, П.А. Лапина, С.М. Айзикович, Ванг Юн-Че. // Проблемы прочности и пластичности. – 2021. – Т. 83, № 4. – С. 462–470. – DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470.
4. Нестеров С.А. О деформировании составных упругих тел с пустыми порами / С.А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 68–79. – DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79.
5. Chen D. Functionally graded porous structures: analyses, performances, and applications – A Review / D. Chen, K. Gao, J. Yang, L. Zhang // Thin-Walled Structures. – 2023. – Vol. 191. – Article N 111046. – DOI: 10.1016/j.tws.2023.111046.
6. Фомин В.М. Создание функционально-градиентного материала методом аддитивного лазерного сплавления / В.М. Фомин, А.Г. Маликов, А.А. Голышев, Н.В. Булина, А.И. Анчаров, И.Е. Витошкин, Т.А. Брусенцева, А.А. Филиппов // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 5. – С. 224–234. – DOI: 10.15372/PMTF20200523.
7. Рудской А.И. Функционально-градиентные материалы и аддитивные технологии их получения / А.И. Рудской, А.А. Попович. – СПб.: ПОЛИТЕХ ПРЕСС, 2022. – 360 с.
8. Turan M. Free vibration and buckling of functionally graded porous beams using analytical, finite element, and artificial neural network methods / M. Turan, U.E. Yaylaci, M. Yaylaci // Arch. Appl. Mech. – 2023. – Vol. 93. – P. 1351–1372. – DOI: 10.1007/s00419-022-02332-w.
9. Iesan D. On the Deformation of Functionally Graded Porous Elastic Cylinders / D. Iesan, A. Scalia // Journal of Elasticity. – 2007. – Vol. 87. – P. 147–159. – DOI: 10.1007/s10659-007-9101-9.
10. Chirita S. Rayleigh Waves on an Exponentially Graded Poroelastic Half Space / S. Chirita // Journal of Elasticity. – 2013. – Vol. 110. – P. 85–199. – DOI: 10.1007/s10659-012-9388-z.
11. Ватульян А.О. Колебания неоднородного пороупругого слоя с пустыми порами / А.О. Ватульян, Д.С. Шведов // Вестник ДГТУ. – 2013. – № 1–2 (70–71). – С. 49–57.
12. Нестеров С.А. Некоторые задачи идентификации физико-механических характеристик неоднородных тел при тепловом нагружении / С.А. Нестеров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 3. – С. 13–23. – DOI: 10.31429/vestnik-22-3-13-23.
13. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи термомеханики / А.О. Ватульян. – Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2022. – 178 с.
14. Ramezani H. Analytical and numerical studies on penalized micro-dilatation (PMD) theory: macro-micro link concept / H. Ramezani, H. Steeb, J. Jeong // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – Vol. 34. – P. 130–148. – DOI: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.11.002.
15. Jeong J. Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory / J. Jeong, H. Ramezani, P. Sardini, D. Kondo, L. Ponson, M. Siitari-Kauppi // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2015. – Vol. 224. – P. 1805–1816. – DOI: 10.1140/epjst/e2015-02500-2.
16. Bishay P.L. On the characterization of porosity-related parameters in micro-dilatation theory / P.L. Bishay, M. Repka, V. Sladek, J. Sladek // Acta Mech. – 2017. – Vol. 228. – P. 1631–1644. – DOI: 10.1007/s00707-016-1789-9.
17. Chebakov M.I. Methodology of Determination of Porosity Parameters in the Theory of Microdilatation / M.I. Chebakov, E.M. Kolosova // Springer Proceedings in Materials, Springer, Cham. – 2024. – Vol. 41. – P. 335–344. – DOI: 10.1007/978-3-031-52239-0_32.
18. Lecampion B. Sensitivity analysis for parameter identification in quasi-static poroelasticity / B. Lecampion, A. Constantinescu // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2005. – Vol. 29. – P. 163–185. – DOI: 10.1002/nag.409.
19. Ляпин А.А. О применении генетических алгоритмов и градиентных методов к задаче реконструкции поля предварительных напряжений в пороупругой неоднородной колонне / А.А. Ляпин, О.В. Руденко, Ю.А. Святко // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – Т. 61, № 3. – С. 481–488. – DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.316.

20. Dehghani H. Poroelastic model parameter identification using artificial neural networks: on the effects of heterogeneous porosity and solid matrix Poisson ratio / H. Dehghani, A. Zilian // Computational Mechanics. – 2020. – Vol. 66. – Р. 625–649. – DOI: 10.1007/s00466-020-01868-4.
21. Имомназаров Х.Х. Прямая и обратная динамическая задача пороупругости / Х.Х. Имомназаров, А.Э. Холмуродов, А.Т. Омонов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 75. – С. 87–99. – DOI: 10.17223/19988621/75/8.
22. Ватульян А.О. Об обратных коэффициентных задачах пороупругости / А.О. Ватульян, А.А. Ляпин // Известия РАН. МТТ. – 2013. – №2. – С. 114–121.
23. Ватульян А.О. Об особенностях идентификации неоднородных пороупругих характеристик полого цилиндра / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 1. – С. 22–29.
24. Vatulyan A.O. On the Determination of the Biot Modulus of Poroelastic Cylinder / A.O. Vatulyan , R.M. Mnukhin, V.V. Dudarev, R.D. Nedin, D.V. Gusakov // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2019. – Vol. 93, № 3. – Article N e201800137. – DOI: 10.1002/zamm.201800137.
25. Ватульян А.О. Об обратной коэффициентной задаче для функционально-градиентных пористоупругих тел / А.О. Ватульян, В.В. Дударев, С.А. Нестеров // Актуальные математические проблемы механики деформируемого твердого тела: Материалы VIII Всероссийской с международным участием научной конференции, посвященной 60-летию создания Донецкого научного центра, Донецкого государственного университета и научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского, Донецк – Севастополь, 18–21 сентября 2025 года. – Донецк: Изд-во Донецкого государственного ун-та – 2025. – С. 36–39.
26. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.

A.O. Vatulyan, V.V. Dudarev, S.A. Nesterov

On the features of identification of variable characteristics of inhomogeneous elastic bodies with voids.

The coefficient inverse problem for inhomogeneous poroelastic bodies is investigated in the framework of the Cowin-Nunziato model. Operator equations are obtained for solving the problem of identifying the variable characteristics of a finite poroelastic body. As an example, the inverse problem for a poroelastic rod is considered. The influence of the laws of inhomogeneity of Young's modulus, density, and pore stiffness on the end displacement is investigated. The operator equations were approximated in two ways: 1) based on the collocation method; 2) based on the projection method. An iterative scheme of reconstruction of one-dimensional poromechanical characteristics is presented. Computational experiments have been carried out to reconstruct the physical and mechanical characteristics, both at points inside the rod and in the class of quadratic functions.

Keywords: micro-dilation theory, rod with voids, oscillations, inverse problem, Fredholm integral equation of the 1st kind, iterative reconstruction scheme.

*Статья поступила в редакцию 28.10.2025;
доработана 12.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.*

УДК 534.11

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-73-81

EDN:AJTXRS



©2025. С.М. Бауэр¹, Н.П. Дорофеев², Г.А. Нестерчук³, А.Л. Смирнов⁴

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматриваются собственные колебания механической конструкции, состоящей из сопряженных под углом тонких упругих стержней. В безразмерных переменных построена система уравнений, описывающая малые колебания такой конструкции, граничные условия и условия сопряжения. Безразмерные собственные частоты находятся как корни частотного уравнения. Сравнение с собственными частотами, найденными с помощью метода конечных элементов (COMSOL), показало хорошее совпадение. Для нулевого и прямого угла сопряжения собственные частоты согласуются с известными аналитическими результатами. При малых значениях угла сопряжения и параметра толщины получены асимптотические формулы для собственных частот.

Ключевые слова: продольные и поперечные колебания стержней, сопряженные тонкие стержни, структура спектра.

Введение. Стержневые (балочные) конструкции широко используются в различных отраслях машиностроения. Такие конструкции могут быть как крупномасштабными, такими как мосты и здания, расположенные в сейсмически активных регионах, так и системами, используемыми в современном электронном оборудовании, подверженном воздействию вибраций. Исследование их динамического поведения имеет фундаментальное значение для эффективного проектирования и контроля вибрации таких конструкций. По этой причине многочисленные работы посвящены изучению свободных колебаний различных конструкций, состоящих из стержней, причем, чаще всего, практическую значимость имеет определение низших собственных частот и форм колебаний.

¹Бауэр Светлана Михайловна – доктор физ.-мат. наук, профессор СПбГУ, Санкт-Петербург, e-mail: s.bauer@spbu.ru.

Bauer Svetlana M. – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, St. Petersburg State University, Saint-Petersburg.

²Дорофеев Никита Павлович – аспирант СПбГУ, Санкт-Петербург, e-mail: nikita.dorofeev@spbu.ru.

Dorofeev Nikita P. – PhD student, St. Petersburg State University, Saint-Petersburg.

³Нестерчук Григорий Анатольевич – кандидат физ.-мат. наук, доцент СПбГУ, Санкт-Петербург, e-mail: g.nesterchuk@spbu.ru.

Nesterchuk Grigorii A. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, St. Petersburg State University, Saint-Petersburg.

⁴Смирнов Андрей Леонидович – кандидат физ.-мат. наук, доцент СПбГУ, Санкт-Петербург, e-mail: a.l.smirnov@spbu.ru.

Smirnov Andrei L. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, St. Petersburg State University, Saint-Petersburg.

Одной из первых работ, в которых изучались колебания сопряженного (согнутого) стержня, была статья Е.Л. Николаи [1], в которой он рассматривал как плоские колебания согнутого стержня, так и колебания перпендикулярные к этой плоскости. В большинстве статей, посвященных этому вопросу, рассматриваются свободные колебания в плоскости системы [2–5], при этом наибольшее внимание уделяется, как правило, рамам, в которых стержни соединены последовательно или под прямым углом [4, 5]. В некоторых статьях рассматриваются чисто изгибные (поперечные) или продольные колебания, однако, такой подход не совсем последователен. Дело в том, что из-за граничных условий в точках сопряжения стержней возникает связь между их продольными и изгибными колебаниями, хотя в линейной постановке дифференциальные уравнения продольных и изгибных колебаний не связаны. Краткий обзор исследований, посвященных таким системам, представлен в работах [2, 3].

В данной работе исследуются низкочастотные изгибно-продольные колебания конструкции, состоящей из двух одинаковых стержней, соединенных под углом, другие концы которых жестко заделаны. Случай малого угла сопряжения позволяет выявить некоторые особенности динамического поведения конструкции.

1. Постановка задачи. Рассматриваются два стержня одинаковой длины L , соединенные под углом β так, что угол сопряжения между касательными к осевым линиям стержней в точке контакта сохраняется в процессе деформации. Предполагается, что материал стержней и их поперечные сечения одинаковы (рис. 1).

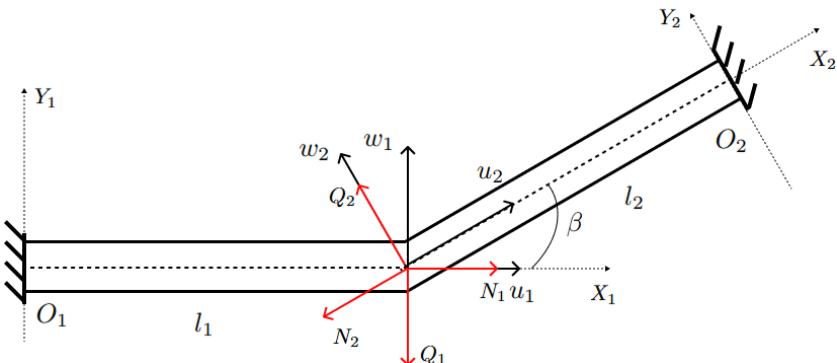


Рис. 1. Сопряженные стержни

Уравнения изгибных и продольных колебаний стержней в системах координат $\{O_i, X_i, Y_i\}$, $i = 1, 2$ (см. рис. 1) таковы

$$EJw_i^{IV}(x_i) + \omega^2 \rho S w_i(x_i) = 0, \quad Eu_i''(x_i) + \omega^2 \rho u_i(x_i) = 0 \quad i = \overline{1, 2}, \quad (1)$$

где w_i и u_i — прогиб и продольное перемещение i -го стержня; E — модуль Юнга; ρ — плотность материала; S — площадь и J — момент инерции поперечного сечения стержня.

Перейдем в уравнениях (1) к безразмерным переменным $x_i^* = x_i/L$ (знак * далее опускаем). Тогда

$$w_i^{IV}(x) + \Lambda^4 w_i(x) = 0, \quad u_i''(x) + \lambda^2 u_i(x) = 0 \quad i = \overline{1, 2}. \quad (2)$$

Здесь

$$\lambda = \Lambda^2 \varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{J/(SL^2)}, \quad \lambda^2 = \omega^2 L^2 \rho/E.$$

Для тонких стержней параметр ε мал; в частности, для стержней круглого сечения $J = \pi r^4/4$, $S = \pi r^2$ и $\varepsilon = r/(2L) \ll 1$ при $r \ll L$, где r — радиус поперечного сечения. Концы стержней предполагаются жестко заделанными в точках $x_i = 0$, то есть

$$w_i(0) = 0, \quad w_i'(0) = 0, \quad u_i(0) = 0 \quad i = \overline{1, 2}. \quad (3)$$

Условия сопряжения в месте соединения имеют следующий вид [5]:

$$\begin{aligned} w_1(1) &= w_2(-1) \cos(\beta) + u_2(-1) \sin(\beta), \\ u_1(1) &= -w_2(-1) \sin(\beta) + u_2(-1) \cos(\beta), \\ w_1'(1) &= w_2'(-1), \\ w_1''(1) &= w_2''(-1), \\ -\varepsilon^2 w_1'''(1) &= -\varepsilon^2 w_2'''(-1) \cos(\beta) + u_2'(-1) \sin(\beta), \\ u_1'(1) &= \varepsilon^2 w_2'''(-1) \sin(\beta) + u_2'(-1) \cos(\beta). \end{aligned} \quad (4)$$

Эти условия гарантируют непрерывность перемещений, моментов и сил, а также сохранение угла между осями стержней в точке сопряжения.

Уравнения (2), граничные условия (3) и условия сопряжения (4) формируют граничную задачу на собственные значения.

2. Аналитическое решение. Общие решения уравнений изгибных колебаний (2) имеют вид:

$$w_i = A_i \cos(\Lambda x_i) + B_i \sin(\Lambda x_i) + C_i \cosh(\Lambda x_i) + D_i \sinh(\Lambda x_i).$$

Учитывая граничные условия (3) в точках $x_i = 0$, имеем $A_i = C_i = 0$.

Уравнения продольных колебаний (2) имеют решения:

$$u_i = R_i \cos \lambda x_i + P_i \sin \lambda x_i.$$

Аналогично, при учете граничных условий (3) получаем $P_i = 0$.

После подстановки решений в условия сопряжения (4) получаем линейную однородную алгебраическую систему вида

$$M Z^T = 0, \quad Z = (B_1, D_1, B_2, D_2, R_1, R_2),$$

где

$$M = \begin{pmatrix} C^- & S^- & -C^- \cos(\beta) & S^- \cos(\beta) & 0 & \sin(\varepsilon\Lambda^2) \sin(\beta) \\ 0 & 0 & C^- \sin(\beta) & -S^- \sin(\beta) & \sin(\varepsilon\Lambda^2) & \sin(\varepsilon\Lambda^2) \cos(\beta) \\ -S^+ & C^- & -S^+ & -C^- & 0 & 0 \\ -C^+ & -S^+ & C^+ & -S^+ & 0 & 0 \\ -\varepsilon\Lambda S^- & \varepsilon\Lambda C^+ & -\varepsilon\Lambda S^- \cos(\beta) & -\varepsilon\Lambda C^+ \cos(\beta) & 0 & -\cos(\varepsilon\Lambda^2) \sin(\beta) \\ 0 & 0 & \varepsilon\Lambda S^- \sin(\beta) & \varepsilon\Lambda C^+ \sin(\beta) & \cos(\varepsilon\Lambda^2) & -\cos(\varepsilon\Lambda^2) \cos(\beta) \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$S^- = \sin(\Lambda) - \sinh(\Lambda)$; $S^+ = \sin(\Lambda) + \sinh(\Lambda)$; $C^- = \cos(\Lambda) - \cosh(\Lambda)$; $C^+ = \cos(\Lambda) + \cosh(\Lambda)$.

Безразмерные собственные частоты Λ находятся как корни характеристического определителя

$$|M(\Lambda)| = 0. \quad (6)$$

3. Анализ влияния угла сопряжения на собственные частоты. Начнем анализ с рассмотрения двух частных случаев: $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$. При $\beta = 0$ характеристическое уравнение (6) распадается на два

$$\cos(2\Lambda) \cosh(2\Lambda) - 1 = 0, \quad (7)$$

$$\sin(2\Lambda^2\varepsilon) = 0. \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, в этом случае собственные частоты конструкции совпадают с частотами поперечных (7) и продольных (8) колебаний стержня длины $2L$. Поскольку для частот продольных колебаний $\Lambda = \sqrt{\pi n/2\varepsilon^{-1/2}}$ $n = 1, 2, \dots$, то низшая часть спектра состоит, в основном, из частот поперечных колебаний. При $\varepsilon = 0.005$ низшая частота продольных колебаний идет на одиннадцатом месте в спектре, при $\varepsilon = 0.02$ — на шестом (см. рис. 2).

При $\beta = \pi/2$ характеристическое уравнение (6) имеет вид

$$\begin{aligned} 4a \cosh(\Lambda) \sin(\Lambda) + 2b \cosh(\Lambda)^2 \sin(2\Lambda) + 4b \cos(\Lambda) \sinh(\Lambda) + 2a \cos(\Lambda)^2 \sinh(2\Lambda) - \\ - \cos(2\varepsilon\Lambda^2)(4b \cosh(\Lambda) \sin(\Lambda) + 2a \cosh(\Lambda)^2 \sin(2\Lambda) + \\ + 2 \cos(\Lambda)(2a \sinh(\Lambda) + b \cos(\Lambda) \sinh(2\Lambda))) - \\ - \varepsilon\Lambda(-5 + \cos(2\Lambda) + (1 + 3 \cos(2\Lambda)) \cosh(2\Lambda)) \sin(2\varepsilon\Lambda^2) = 0, \end{aligned}$$

где $a = 1 + \varepsilon^2\Lambda^2$, $b = -1 + \varepsilon^2\Lambda^2$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ частоты можно искать в виде

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Тогда при $\varepsilon = 0$ уравнение распадается на два

$$\cos(\Lambda_0^n) \cosh(\Lambda_0^n) - 1 = 0, \quad (9)$$

$$\sin(\Lambda_0^n) \cosh(\Lambda_0^n) - \cos(\Lambda_0^n) \sinh(\Lambda_0^n) = 0. \quad (10)$$

Собственные колебания сопряженных стержней

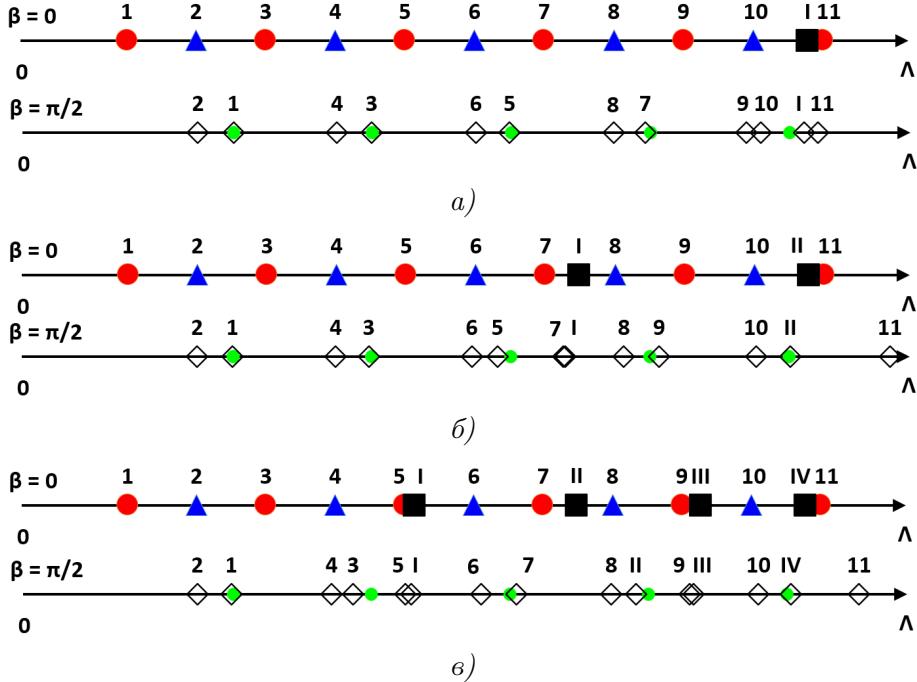


Рис. 2. Собственные частоты конструкции при $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$ при a) $\varepsilon = 0.005$, б) $\varepsilon = 0.01$, в) $\varepsilon = 0.02$

Первое уравнение описывает частоты поперечных колебаний стержня длины L с граничными условиями типа “жесткая заделка–жесткая заделка” (CC), а второе — частоты колебаний стержня длины L с граничными условиями типа “жесткая заделка–шарнир” (CS). Для малых ε низшие формы колебаний с волновыми числами n для соответствующих граничных условий изображены на рисунке 3. Соответствующие формы колебаний были описаны, например, в [5, 6].

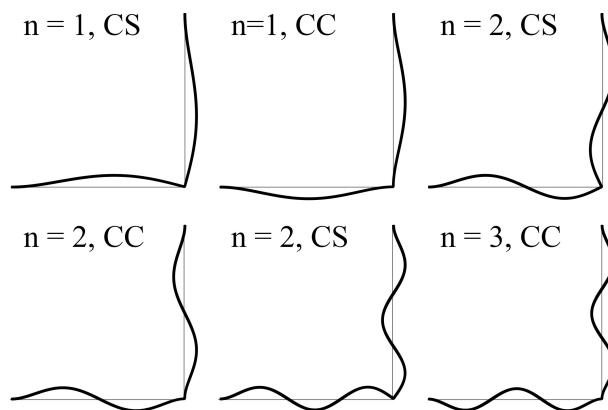


Рис. 3. Низшие формы собственных колебаний при $\beta = \pi/2$

Для определения частот при произвольном угле β следует численно решить уравнение (6). На рисунке 4 представлены зависимости от угла β восьми низших собственных частот, найденные аналитически (6) и численно (COMSOL). Близкие результаты были получены в работе [7].

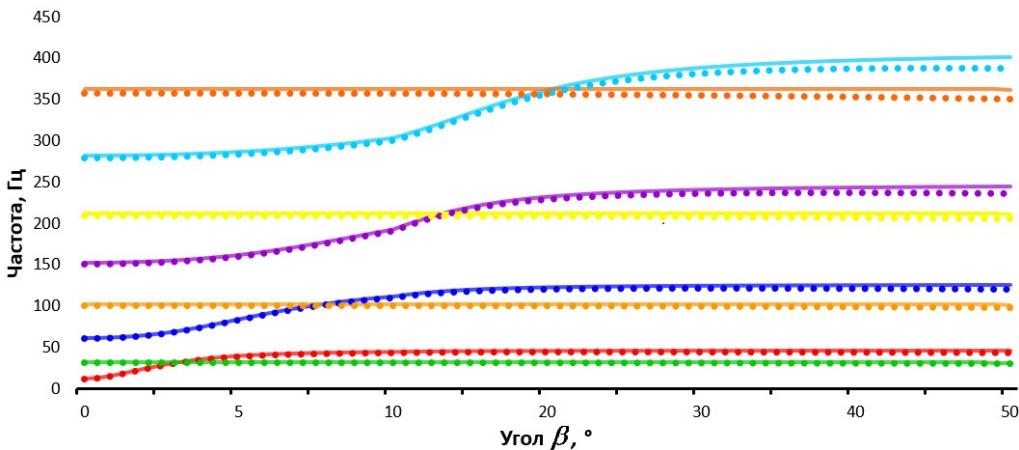


Рис. 4. Зависимости низших собственных частот от угла β при $\varepsilon = 0.0025$, найденные аналитически (сплошные линии) и численно (пунктирные линии)

Отметим, что с ростом β нечетные формы уравнения с $2n - 1$ волнами (7) переходят в формы уравнения (9) с n волнами. Трансформация первой формы $n = 1$ при изменении угла β показана на рисунке 5.

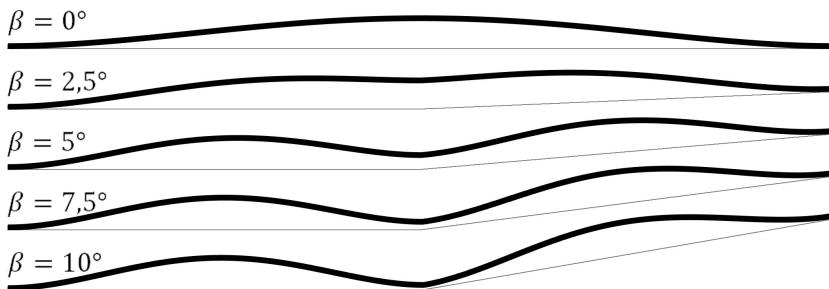


Рис. 5. Первая форма собственных колебаний конструкции при разных углах β

Соответствующая собственная частота меняется быстро, и по мере приближения центральной точки формы к точке сопряжения стержней стремится к частоте, определяемой уравнением (9). Видно, что уже при $\beta = 10^\circ$ первая форма колебаний конструкции переходит в первую форму составляющих стержней.

Четные частоты уравнения (7) отличаются от корней уравнения (10) на величины порядка $\exp(-\Lambda)$, то есть крайне незначительно [8]. Это приводит к тому, что числитель Λ_2^0 практически равен 0. Такая же ситуация имеет место и для всех остальных коэффициентов. То есть с ростом β частоты практически

не меняются и четные формы с $2n$ волнами уравнения (7) переходят в формы уравнения (10) с n волнами. В этом случае узел формы попадает в точку сопряжения, и форма расщепляется на две одинаковые для каждого стержня формы.

Частоты продольных колебаний (8) имеют порядок $\varepsilon^{(-1/2)}$ и быстро растут с уменьшением ε , покидая низшую часть спектра.

Проследить за трансформацией частот можно также по низшей части спектров конструкции, изображенных на рисунке 2. Красными точками обозначены частоты, определяемые уравнением (7), соответствующие симметричным относительно точки сопряжения формам стержня длины $2L$ с граничными условиями типа CC . Для такого же стержня синими треугольниками обозначены частоты (7), соответствующие антисимметричным относительно точки сопряжения формам. Зелеными точками обозначены частоты поперечных колебаний, определяемые уравнением (10), соответствующие формам стержня длины L с граничными условиями типа CS . Как было замечено выше, корни уравнения (10) и корни уравнения (7) для антисимметричных форм близки. Черными квадратами обозначены частоты продольных колебаний, определяемые уравнением (8). Частоты при $\beta = \pi/2$ обозначены ромбами. Частоты и формы поперечных колебаний нумеруются арабскими цифрами в порядке следования частот при $\beta = 0$, при изменении β формы сохраняют свой номер. Частоты продольных колебаний нумеруются римскими цифрами.

При $\beta = 0$ низшая часть спектра состоит из частот поперечных колебаний с небольшим числом частот продольных колебаний, которое зависит от значения ε . С увеличением угла β частоты симметричных форм быстро растут, их значения становятся больше частот антисимметричных форм, и при достижении $\beta = \pi/2$ совпадают со значениями частот поперечных колебаний одного стержня с граничными условиями типа CS (см. рис. 2а). При этом, как и было сказано выше, частоты антисимметричных колебаний практически не меняются.

Кроме того, с увеличением параметра толщины ε частоты продольных колебаний убывают. Так, если при значении $\varepsilon = 0.005$ в диапазоне Λ от 0 до 20, есть только одна такая частота, то при $\varepsilon = 0.02$ их уже четыре. Взаимодействие форм продольных и поперечных колебаний с близкими частотами оказывает существенное влияние на спектр. Поведение частот поперечных колебаний, меньших, чем первая частота продольных колебаний, сохраняется, но, например, частоты поперечных колебаний в диапазоне между первой и второй частотами продольных колебаний не растут, а убывают с ростом β .

4. Частоты поперечных колебаний при малых углах сопряжения.

Исследуем поведение частот при малых углах β . Представим частоту в виде разложения в ряд по β

$$\Lambda = \sum_{i=0}^n \Lambda_i \beta^i, \quad (11)$$

и подставим в уравнение (6). Раскладывая получившееся выражение в ряд по β и

приравнивая нулю коэффициенты разложения при разных степенях β , получаем последовательность линейных уравнений для определения Λ_i [8].

Как и следовало ожидать, уравнения для определения Λ_0 имеют вид (7) и (8). Из следующего приближения получим значение $\Lambda_1 = 0$. Заметим, что нулевыми будут все нечетные коэффициенты Λ_i ($i = 2n + 1$). Из следующего приближения получаем значение Λ_2 , зависящее от ε . В силу малости ε представим

$$\Lambda_2 = \Lambda_2^0(1 + \Lambda_2^1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)),$$

где

$$\Lambda_2^0 = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{(\cos(\Lambda_0) \cosh(\Lambda_0) - 1)(\sin(\Lambda_0) \cosh(\Lambda_0) - \cos(\Lambda_0) \sinh(\Lambda_0))}{\Lambda_0^2(-4\Lambda_0 \cos(2\Lambda_0) \sinh(2\Lambda_0) + \cosh(2\Lambda_0)(4\Lambda_0 \sin 2(\Lambda_0) - 6 \cos(2\Lambda_0) + 6))}.$$

Для нечетных корней Λ_0 уравнения (7) значение Λ_2^0 в силу малости ε велико, что объясняет быстрый рост частоты с увеличением β . Зависимости низших собственных частот от угла β при $\varepsilon = 0.005$ представлены на рисунке 6.

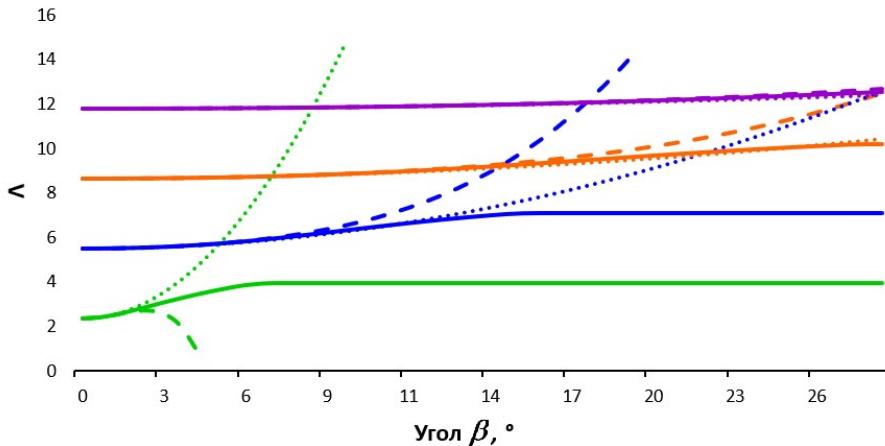


Рис. 6. Зависимости низших собственных частот от угла β при $\varepsilon = 0.005$. Сплошные линии — корни уравнения (6), пунктирные линии — двучленные приближения, штриховые линии — трехчленные приближения

Построенные ряды являются сходящимися лишь в некоторой окрестности нуля. Видно, что в окрестности некоторой точки приближения резко удаляются от точного решения. Область сходимости ряда, то есть область применимости метода возмущений, существенно зависит от показателя изменяемости решения. Заметно, что эта область растет с номером частоты. Исследование области сходимости представляет собой отдельную задачу.

Заключение. Проведенное исследование позволило оценить влияние угла сопряжения и параметра толщины на низшие собственные частоты колебаний конструкции, состоящей из двух жестко сопряженных одинаковых стержней. При малых значениях угла сопряжения и параметра толщины получены асимптотические формулы для собственных частот. Установлено, что при увеличении

параметра толщины существенное влияние на низшую часть спектра начинают оказывать продольные колебания стержней. Сравнение аналитических, асимптотических и численных результатов выявило их хорошую согласованность. Интерес представляет дальнейшее исследование — изучение зависимости собственных частот от разных геометрических характеристик (соотношение длин и площадей поперечных сечений) стержней.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

1. Николаи Е.Л. О колебаниях согнутого стержня / Е.Л. Николаи // Журн. Лен. физ.-мат. общ. – 1926. – Т. 1, вып. 1. – С. 77–88.
2. Pengxin Tao. Wave-based in-plane vibration analysis of multiple coupled beam structures with arbitrary connection angle and elastic boundary restraints / Pengxin Tao, Yang Liu, Jingtao Du, Zhigang Liu // Journal of Vibration and Control. – 2023. – Vol. 29. – Iss. 21–22. – P. 4948–4958.
3. Obradović A. Free vibrations of planar serial frame structures in the case of axially functionally graded materials / A. Obradović, S. Šalinić, A. Tomović // Theoretical and Applied Mechanics. – 2020. – Vol. 47. – Iss. 2.– P. 221–239.
4. Ratazzi A.R. Free Vibrations of Beam System Structures with Elastic Boundary Conditions and an Internal Elastic Hinge / A.R. Ratazzi, D.V. Bambill, C.A. Rossit // Chinese Journal of Engineering. – 2013. – Vol. 3. – P. 1–10. – DOI: 10.1155/2013/624658.
5. Umar U.S. Vibration Analysis of a Jib Crane using Frame Structures Approach. Applications of Modelling and Simulation / U.S. Umar, M.M. Jamil, M.T. Hamisu, A. Sa'ad // Chinese Journal of Engineering. – 2020. – Vol. 4. – P. 71–80.
6. Albarracín C.M. Vibrations of elastically restrained frames / C.M. Albarracín, R.O. Grossi // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 285. – P. 467–476.
7. Ouisse M. Vibration sensitive behaviour of a connecting angle. Case of coupled beams and plates / M. Ouisse, J.L. Guyader // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 267, iss. 4. – P. 809–850.
8. Bauer S.M. Asymptotic methods in mechanics of solids / S.M. Bauer, S.B. Filippov, A.L. Smirnov, P.E. Tovstik, R. Vaillancourt. – Basel: Birkhäuser, 2015. – 325 p.

S.M. Bauer, N.P. Dorofeev, G.A. Nesterchuk, A.L. Smirnov

Free vibrations of coupled rods.

The natural vibrations of a mechanical structure composed of thin elastic rods coupled at an angle are considered. The governing equations of small vibrations, as well as the boundary and coupling conditions, are formulated in dimensionless variables. Dimensionless natural frequencies are found as the roots of the frequency equation. Comparison with natural frequencies found using the finite element method (COMSOL) revealed good agreement. For zero and right connection angles, the natural frequencies agree well with known results. For small values of the connection angle and the thickness parameter, asymptotic formulas for natural frequencies are obtained.

Keywords: axial and transverse vibrations of rods, coupled thin rods, structure of a spectrum.

Статья поступила в редакцию 30.10.2025;
доработана 14.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-82-92

EDN:KBMGKZ



©2025. О.В. Явруян¹

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И ГЕОМЕТРИИ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Проведено исследование оптимизационной задачи о максимизации первой собственной частоты для простейших элементов конструкций – балки и пластинки. В качестве управляющих функций выступают механические упругие свойства и геометрические характеристики, которые представляют собой функции одной переменной. Построены соотношения Релея, получены условия оптимальности. Исследованы модельные задачи об изгибных колебаниях неоднородных упругих балки круглого поперечного сечения и круглой пластинки. Определены оптимальные распределения площади поперечного сечения (толщины пластинки) и модуля Юнга в классе полиномов с учетом их свойств положительности, ограничений на среднее распределение, а также с учетом ограничений сверху и снизу на значения соответствующих функций. Оптимизационные задачи решены с привлечением генетических алгоритмов и проекционного метода Галеркина. Приведены результаты расчетов и сравнительный анализ с однородным случаем.

Ключевые слова: балка, круглая пластинка, неоднородность, оптимизация геометрии и свойств, первая собственная частота, метод Галеркина, генетический алгоритм.

Введение. Задачи оптимального проектирования элементов конструкций являются предметом исследования уже не один десяток лет. Определение оптимальных параметров простейших элементов (балок, пластин) позволяет на этапе проектирования повысить эксплуатационные способности объекта при сохранении/уменьшении веса конструкции. Правильный подбор и оптимизация свойств элементов конструкции (например, прочности, жесткости/податливости, устойчивости) обеспечивают надежность и продолжительный срок эксплуатации изделий, что особенно важно для конструкций ответственного назначения.

На первых этапах решения оптимизационных задач в качестве управляющих параметров выступали геометрические характеристики объектов исследования (толщина, площадь поперечного сечения и др.) [1–6]. В дальнейшем, с появлением новых современных материалов и технологий создания композитных и

¹Явруян Оксана Вячеславовна – доктор физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости инст-та математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону; вед. науч. сотр. отдела дифференц. уравнений Южного математического инст-та – филиала ВНЦ РАН, Владикавказ, e-mail: yavrulyan@mail.ru.

Yavruyan Oksana Vyacheslavovna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I.I. Vorovich, Department of Theory of Elasticity; Leading Researcher, Southern Mathematical Institute, a Branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Department of Differential Equations.

функционально-градиентных материалов приобретает актуальность задача оптимального проектирования механических свойств объектов [7–8]. Например, оптимизация механических свойств балок и пластин с целью максимизации первой собственной частоты, повышения устойчивости при максимизации внешней силы, увеличение прочностных характеристик при уменьшении массы объекта, что особенно важно в авиастроении, приборостроении и биоинженерии.

Современные технологии аддитивного производства открыли широкие возможности топологической оптимизации. Этот класс оптимизационных задач занимает по праву особое место в классе задач оптимизации свойств материалов. Топологическая оптимизация предполагает оптимальное распределение массы с целью улучшения прочностных механических свойств (жесткость, устойчивость) [9–13]. При этом стоит отметить, что аналитические методы исследования в задачах топологической оптимизации уступают место численным расчетам с использованием конечно-элементных пакетов и эвристических алгоритмов для определения оптимальных параметров. Связано это, в первую очередь, со сложной геометрией объекта, которая получается в результате топологической оптимизации.

Однако в некоторых случаях удается построить аналитическое оптимальное решение на основе условий оптимальности, полученных на базе вариационных принципов. Так, в работах [14–17] рассмотрены задачи оптимизации первой собственной частоты при управлении механическими упругими, вязкоупругими и термоупругими свойствами простейших элементов конструкций.

Особый интерес представляют задачи оптимизации пористых стержней и пластин, которые имеют непосредственное применение в биомеханике при изготовлении и моделировании медицинских протезов и заместительных биоэлементов. Основные модели пороупругости – это модель Био с заполненными порами, модель Ковина с пустыми порами. Возможные постановки оптимизационных задач для пороупругих материалов варьируются от оптимизации пористости, до подбора оптимальных геометрических параметров элементов конструкций. Так, в работе [18] осуществлена многокритериальная оптимизация распределения углеродных нанотрубок по толщине в функционально-градиентных пористых балках. В работах [19–20] рассмотрены различные постановки оптимизационных задач для пороупругих балок в рамках модели Тимошенко, рассмотрены спектральная оптимизационная задача [15] в случае, когда пористость меняется по толщине балки, а также многокритериальная оптимизационная задача, связанная с максимизацией критической нагрузки при потере устойчивости и одновременной минимизацией массы пористой балки в случае, когда пористость меняется в двух направлениях [18].

Стандарт также отмечает, что для простейших элементов конструкций характер неоднородности должен иметь достаточно простой закон изменения по координатам, обеспечивающий эффективное управление технологическими процессами при изготовлении соответствующих элементов конструкций. Это приводит к новым формулировкам задач оптимального проектирования свойств материалов

на конечномерных множествах простой структуры, например, среди полиномиальных, экспоненциальных, кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций.

В рамках представленной работы проведено исследование спектральной оптимизационной задачи о максимизации первой собственной частоты неоднородной функционально-градиентной по длине балки с переменной площадью поперечного сечения, а также для неоднородной пластинки с переменными механическими свойствами и толщиной. Проведена одновременная оптимизация по двум управляющим функциям – переменному радиусу (толщине) и переменному модулю Юнга.

1. Постановка спектральной оптимизационной задачи для произвольного упругого неоднородного тела. Спектральная оптимизационная задача состоит в оптимизации спектральных характеристик упругого тела, находящегося в состоянии установившихся вынужденных или свободных колебаний. В рамках данного исследования рассмотрены свободные колебания упругого неоднородного тела, занимающего объем V с границей S . Уравнения колебаний, определяющие соотношения и граничные условия имеют вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}; \quad (2)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0, \quad (3)$$

где C_{ijkl} , n_j – компоненты тензора упругих модулей и компоненты вектора внешней нормали к поверхности. Ограничимся рассмотрением случая изотропного тела, допускающего описание механических свойств двумя характеристиками, например, модулем Юнга $E(x)$ и коэффициентом Пуассона ν . В данном исследовании будем полагать $\nu = const$.

Спектральная оптимизационная задача состоит в максимизации первой резонансной частоты. В качестве управляющих функций выступают геометрия области и механические характеристики среды. На управляющие функции $f_i(x)$, $i = 1..n$ наложены дополнительные условия в виде ограничения сверху и снизу (4), либо ограничения на среднее значение вида (5)

$$f_{i \min} < f_i(x) < f_{i \max}; \quad (4)$$

$$\int_V f_i dV = f_{0i}, \quad i = 1..n. \quad (5)$$

Составим соотношение Релея для нахождения первой собственной частоты для произвольного упругого тела. Для этого умножим каждое из уравнений (1) на соответствующую функцию u_i и проинтегрируем по области V

$$k^2 = \frac{\int_V \sigma_{mj,j} u_m dV}{\int_V \rho u_m^2 dV} = \frac{\int_V C_{mjrl} u_{r,l} u_{m,j} dV}{\int_V \rho u_m^2 dV} \rightarrow \min_{f_i}. \quad (6)$$

Для решения оптимизационной задачи построим общий функционал, учитывающий дополнительное условие вида (5), согласно методу произвольных множителей Лагранжа (λ_i):

$$J[f_1, \dots, f_n] = \frac{\int_V C_{mjrl} u_{r,l} u_{m,j} dV}{\int_V \rho u_m^2 dV} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int_V f_i(x) dx - f_{0i} \right). \quad (7)$$

Оптимальное решение определяется из основного вариационного принципа и достигается на функциях, удовлетворяющих условию

$$\delta J[f_i] = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим модельные задачи для неоднородных элементов – балки переменного поперечного сечения и круглой пластинки переменной толщины. Основное внимание будет уделено поиску решения в классе полиномов, поскольку при изготовлении элементов конструкции из функционально-градиентных материалов (ФГМ) полиномиальное распределение представляется наиболее возможным.

Стоит также отметить, что ряд модельных задач в случае неоднородных балок и пластин с постоянными геометрическими характеристиками были рассмотрены ранее в работах [14, 20], и в зависимости от способов закрепления имеют аналитическое решение. Однако для получения аналитического решения приходится накладывать определенные ограничения на поведение управляющих функций на конце стержня, либо на краю круглой пластиинки, в частности, обращение их в ноль, что, вообще говоря, является не совсем физичным. В данном исследовании рассматривается более обобщенная и практически реализуемая постановка соответствующих оптимизационных задач для нескольких управляющих функций, разыскиваемых в классе полиномов $f_i = \sum_{j=0}^m C_j x^j$. При этом ограничения на соответствующие функции накладываются только в виде (4) и (5).

Для решения оптимизационных задач наиболее универсальным подходом является подход, основанный на применении эвристических алгоритмов. В частности, в данном исследовании применен генетический алгоритм (ГА) для определения оптимальных коэффициентов полиномиальных разложений C_j управляющих функций. Область поиска соответствующих параметров в ГА определяется условиями (4) и (5). В качестве фитнес функции задается функция, которая на входе принимает коэффициенты C_j и возвращает значение спектрального параметра, определяемого на базе проекционного метода Галеркина.

2. Модельная задача об изгибных колебаниях упругого стержня с переменными модулем Юнга и площадью поперечного сечения. Рассмотрим свободные изгибные колебания в рамках модели Бернулли-Эйлера неоднородной балки длины l с переменной площадью поперечного сечения, определяемого переменным радиусом $r(x)$. Образованная краевая задача для консольной балки (**Задача 1**) имеет вид

$$(Eh^2 w'')'' - k^2 h w = 0, \quad x \in [0, 1];$$

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad (9)$$

$$(Eh^2w'')'(1) = (Eh^2w'')(1) = 0.$$

Здесь $k^2 = A\rho\omega^2/h_0E_0$ и $h = r^2$ – соответственно спектральный параметр и функция, определяемая квадратом радиуса поперечного сечения балки.

Оптимизационная задача состоит в определении оптимальных функций $E(x)$, $h(x)$, при которых соответствующий спектральный параметр принимает максимальное значение.

Для управляющих функций сформулированы дополнительные условия на их средние распределения:

$$\int_0^1 E(x)dx = E_0, \quad \int_0^1 h(x)dx = h_0. \quad (10)$$

Получено соотношение Релея для первой собственной частоты и общий функционал

$$k^2 = \frac{\int_0^1 Eh^2w''^2dx}{\int_0^1 hw^2dx} \rightarrow \max_{E,h}; \quad (11)$$

$$J[E, h, w] = \frac{\int_0^1 Eh^2w''^2dx}{\int_0^1 hw^2dx} - \lambda_1 \left(\int_0^1 E(x)dx - E_0 \right) - \lambda_2 \left(\int_0^1 h(x)dx - h_0 \right), \quad (12)$$

где λ_1, λ_2 – постоянные множители Лагранжа.

Из вариационного принципа, проварьировав функционал J по E, h, w , получим следующие условия оптимальности:

$$h^2w''^2 = a^2, \quad a = \text{const}; \quad (13)$$

$$2hEw''^2 - k^2w^2 = b^2, \quad b = \text{const}; \quad (14)$$

$$(Eh^2w'')'' - k^2hw = 0, \quad (15)$$

где $a^2 = \lambda_1 \int_0^1 hw^2dx$, $b^2 = \lambda_2 \int_0^1 hw^2dx$. Путем несложных математических действий можно получить соотношение вида $\frac{a^2}{b^2} = \frac{h_0}{E_0}$.

К полученным условиям оптимальности следует добавить дополнительные условия вида (10) и граничные условия (8) или (9).

Рассмотрим частные случаи оптимизационной задачи (8)–(15).

Случай 1. Консольная балка постоянного поперечного сечения $h(x)$. В этом случае из условия (13) и граничных условий в нуле определяется первая собственная форма колебаний с точностью до произвольной константы [15, 17]. При этом возможно получить аналитическое решение задачи из условий оптимальности (15), добавив к ним дополнительные условия на свободном конце стержня вида $E(1) = 0$, $E'(1) = 0$. Тогда

$$w_* = x^2, \quad E_* = 20E_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right), \quad k_*^2 = 20. \quad (16)$$

В случае однородной балки постоянного поперечного сечения спектральная характеристика $k_*^2 = 12.36$.

Случай 2. Рассмотрим случай, когда функция, характеризующая площадь поперечного сечения меняется по линейному закону. С учетом дополнительных условий найдено $h_*(x) = 2h_0(1 - x)$. Далее, из дифференциального уравнения (13) и граничных условий в нуле (9) найдем функцию $w_*(x) = -\frac{a}{2h_0}((1 - x)\ln(1 - x) + x)$. Подставив в (15) найдем функцию $E_*(x) = k^2(1 - x)E_1(x, h_0)$, функция $E_1(x)$ не приводится в силу громоздкости. Далее, из условия (10) найдем k_*^2 .

Например, в случае $h_0 = 0.1$, $E_0 = 1$, $k_*^2 = 21$ выигрыш по сравнению со случаем 1 однородной балки постоянного поперечного сечения (16) составляет 5%. Вид оптимальной функции распределения модуля Юнга приведен на рисунке 1.

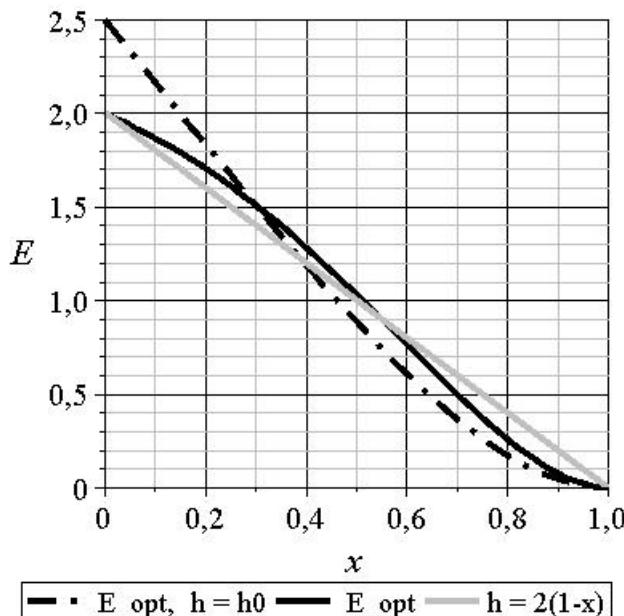


Рис.1. Оптимальное распределение E в случае балки постоянной площади поперечного сечения (штрихпунктир); E и $\frac{h}{h_0}$ в случае линейного закона изменения h (сплошные линии)

Случай 3. Случай распределения функций $E(x), h(x)$ по квадратичному закону исследован на основе численных алгоритмов с применением ГА. Так, например, при

$$h_0 = 0.1, E_0 = 1, E_{\min} = 0.5, E_{\max} = 2, h_{\min} = 0.05, h_{\max} = 0.5, \quad (17)$$

получено оптимальное значение спектрального параметра $k_*^2 = 36.415$ и оптимальные распределения модуля Юнга и толщины (рис. 2):

$$E_* = -1.756x^2 + 1.803x + 0.684, \quad h_* = 0.174x^2 - 0.32x + 0.202.$$

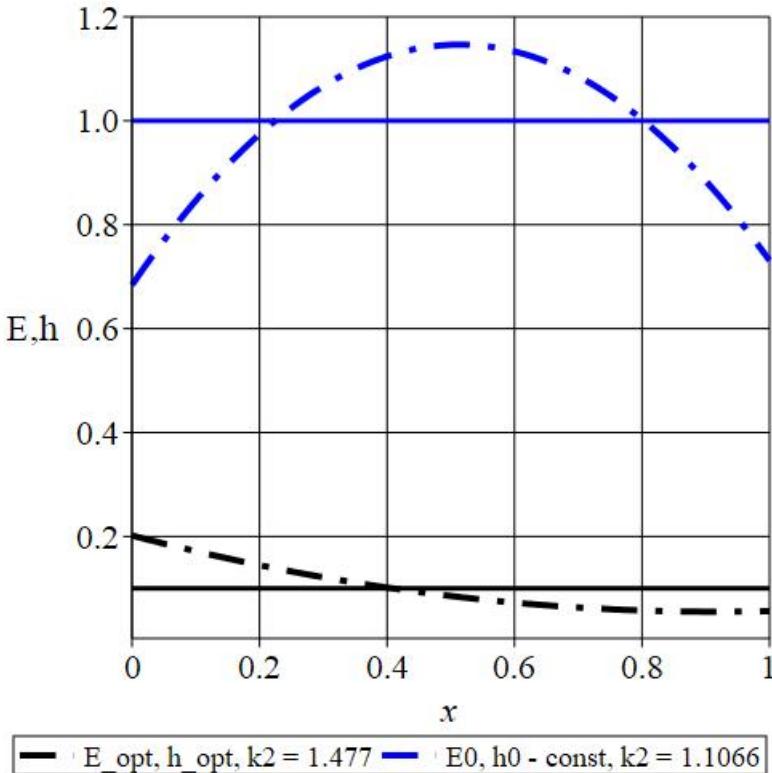


Рис.2. Оптимальное распределение E (синяя штрихпунктирная) и h (черная штрихпунктирная) в классе полиномов второй степени; сплошными линиями показаны случаи постоянных распределений

3. Модельная задача о собственных колебаниях круглой пластинки с переменным модулем Юнга и переменной толщиной. Рассмотрим модельную задачу о собственных изгибных колебаниях упругой неоднородной круглой пластинки (**Задача 2**) с переменным модулем Юнга $E(r)$ и переменной толщиной $h(r)$, которые изменяются по радиальной координате $r \in [0, R]$.

В рамках гипотез Кирхгофа-Лява [20] краевая задача имеет вид [14], [20]

$$\left(r \left[D \left(w'' + \frac{w'}{r} \right)' + D' \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) \right]' \right)' = \rho \omega^2 h r w; \quad (18)$$

$$D(r) = \frac{E(r) h^3}{12(1-\nu^2)},$$

где ω , ρ , ν , D – круговая частота, плотность, коэффициент Пуассона (постоянный) и цилиндрическая жесткость соответственно.

Проведем обезразмеривание задачи, введя следующие безразмерные переменные и функции

$$r = \tilde{r}R, \quad w = \tilde{w}R, \quad h = h_0 R \tilde{h}(\tilde{r}), \quad E = \tilde{E}(\tilde{r}) E_0,$$

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2 R^2 A}{E_0}, \quad A = \frac{12(1-\nu^2)}{h_0^2},$$

где h_0 , E_0 – характерные значения соответствующих функций, например, их значения при $r = R$. Знак волны в дальнейших выкладках будем опускать.

Рассмотрим случай жесткого закрепления края пластиинки:

$$w'(1) = w(1) = 0, \quad (19)$$

$$w'(0) = 0, \quad Q_r(0) = 0,$$

$$\text{где } Q_r = D \left(w'' + \frac{w'}{r} \right)' + D' \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right), \quad M_{rr} = -D \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right).$$

Соотношение Релея для первой собственной частоты в случае упругой пластиинки имеет вид

$$k^2 = \frac{\int_0^1 Eh^3 \left(w''^2 + \frac{2\nu}{r} w' w'' + \frac{w'^2}{r^2} \right) dr}{\int_0^1 hw^2 r dr}. \quad (20)$$

Оптимизационная задача состоит в определении оптимальных функций $E(r)$, $h(r)$, доставляющих максимум первой собственной частоты, определяемой выражением (20) с учетом дополнительных условий вида (4) и (5):

$$\int_0^1 r E(r) dr = 1, \quad \int_0^1 r h(r) dr = 1.$$

Из вариационного принципа получим условия оптимальности в виде

$$h^3 \left(w''^2 + \frac{2\nu}{r} w' w'' + \frac{w'^2}{r^2} \right) = a^2, \quad a = \text{const}; \quad (21)$$

$$3h^2 E \left(w''^2 + \frac{2\nu}{r} w' w'' + \frac{w'^2}{r^2} \right) - k^2 w^2 = b^2, \quad b = \text{const}; \quad (22)$$

$$\left(r \left[D \left(w'' + \frac{w'}{r} \right)' + D' \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) \right] \right)' - k^2 h r w = 0. \quad (23)$$

В случае Задачи 2 аналитическое решение получить не представляется возможным. Решение задачи об определении собственных частот неоднородной пластиинки может быть получено численно на базе проекционного метода Галеркина. В качестве координатных функций выбраны удовлетворяющие граничным условиям функции, имеющие вид

$$\varphi_k(r) = (1 - r^2)^2 r^{2(k-1)}.$$

При этом решение представляется в виде линейной комбинации

$$w = \sum_{k=1}^n B_k \varphi_k(r).$$

Далее составляется интегральная невязка и из условия равенства нулю определителя системы относительно B_k определяются собственные частоты, в частности, первая собственная частота.

Оптимальная задача решена в классе четных функций – полиномов четвертой степени и сведена к определению полиномиальных коэффициентов из генетических алгоритмов. При этом в основе фитнес функции лежит описанная выше схема определения первой собственной частоты.

На рисунке 3 приведены результаты расчетов для случая $R = 1$, $\nu = 0.3$, $E_{min} = 0.5$, $E_{max} = 4$, $h_{min} = 0.5$, $h_{max} = 4$. При этом получено оптимальное значение спектрального параметра $k_*^2 = 37.251$. В случае же постоянных E_0 , h_0 получаем $k_*^2 = 28.894$, и, таким образом, выигрыш составляет порядка 28%.

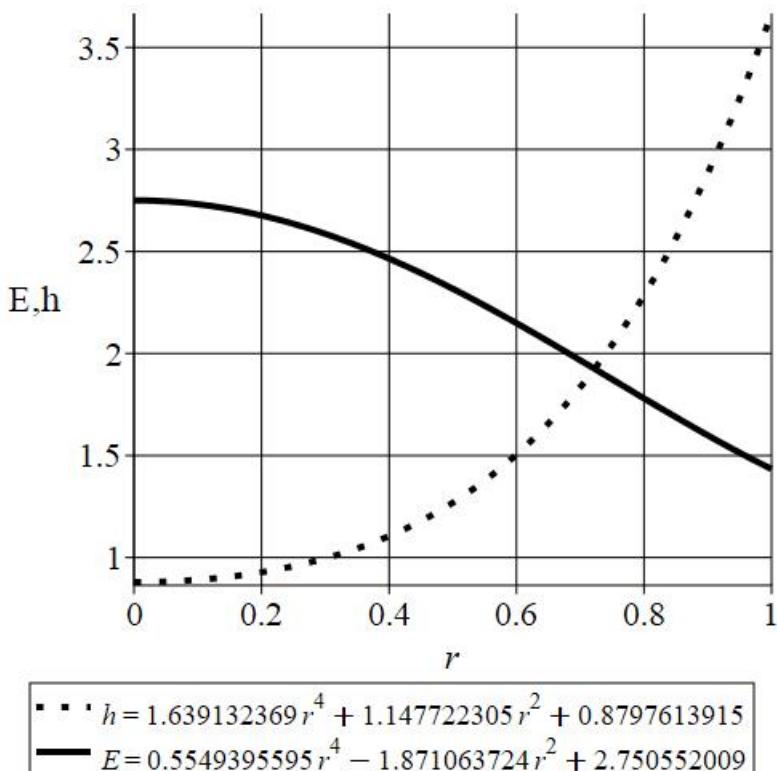


Рис. 3. Оптимальное распределение E и h для круглой пластиинки

Заключение. Проведено исследование многокритериальной оптимизационной задачи для первой собственной частоты круглой неоднородной пластины и балки с переменными модулем Юнга и площадью поперечного сечения. Рассмотрены модельные задачи, получены условия оптимальности. Рассмотрена универсальная схема решения оптимизационной задачи поиска оптимальных распределений управляющих функций в классе полиномов на базе генетического алгоритма. Сравнительный анализ результатов со случаями постоянных

значений управляющих функций и результатами, полученными ранее в других работах, подтверждают оптимальность полученных решений.

Информация о финансовой поддержке: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

1. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
2. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций / Н. Ольхофф – М.: Наука, 1981. – 280 с.
3. Niordson I.F. On the optimal design of a vibrating beam / I.F. Niordson // Quarterly of Applied Mathematics. – 1965. – Vol. 23. – P. 47–53.
4. Bratus' A.S. The optimum shape of a bending beam / A.S. Bratus', V.P. Posvyanskii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2000. – Vol. 64, № 6. – P. 993–1004. – DOI: 10.1016/S0021-8928(00)00131-3.
5. Gupta V.K. Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams / V.K. Gupta, P.N. Murthy // Journal of Sound and Vibration. – 1978. – Vol. 59, № 4. – P. 521–531.
6. Olhoff N. Optimum design of band-gap beam structures / N. Olhoff, B. Niu, G. Cheng // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49, № 22. – P. 3158–3169.
7. Гринев В.Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. / В.Б. Гринев, А.П. Филипов. – К.: Наукова думка, 1975. – 290 с.
8. Саркисян В.С. Оптимизация первой собственной частоты колебания прямоугольной пластиинки со слабой неоднородностью / В.С. Саркисян, Г.М. Джулакян // Механика. Межвузовский сборник научных трудов. – Ереван: Изд-во ЕрГУ, 1984. – Вып. 3. – С. 120–125.
9. Jiang X. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures / X. Jiang, W. Zhang, C. Liu, Z. Du, X. Guo // Appl. Math. Model. – 2023. – Vol. 113. – P. 613–639. – DOI: 10.1016/j.apm.2022.09.028.
10. Zhou Y. Topology optimization with wall thickness and piecewise developability constraints for foldable shape-changing structures / Y. Zhou, T. Nomura, E.M. Dede, K. Saitou // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2022. – Vol. 65, № 8. – P. 118. – DOI: 10.1007/s00158-022-03219-8.A
11. Kamiya A. Microstructural shape optimization method for natural vibration design of laminated porous shell structures / A. Kamiya, M. Shimoda, M. Al Ali // Composite Structures. – 2025. – Vol. 367, 119184. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.119184.
12. Belardi V.G. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization / V.G. Belardi, S. Trupiano, P. Fanelli, F. Vivio // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2024. – Vol. 103, 105189. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2023.105189.
13. Левин В.А. Топологическая оптимизация элементов конструкций с учетом структурной неоднородности материала с использованием градиентного метода / В.А. Левин, К.М. Зингерман, А.В. Вершинин, П.А. Васильев // Чебышевский сборник. – 2022. – Vol. 23, вып 4. – С. 308–326. – DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326.
14. Vatulyan A.O. On an optimization problem for a prestressed plate with variable stiffness / A.O. Vatulyan, R.D. Nedin // Problems of Strength and Plasticity. – 2024. – № 86. – P. 202–214. – DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214.
15. Ватульян А.О. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций / А.О. Ватульян, О.В. Явруян // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, вып 4. – С. 552–566. – DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566. – EDN: PNYSJH.
16. Ватульян А.О. Некоторые аналитические решения в задачах оптимизации переменного коэффициента теплопроводности / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Владикавк. мат. журн. – 2024. – Т. 26, вып 3. – С. 33–46. – DOI: 10.46698/v9056-4395-2233-f.
17. Ватульян А.О. О максимуме первой резонансной частоты для неоднородных упругих тел

- / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2024. – № 4. – С. 180–192. – DOI: 10.31857/S1026351924040121.
- 18. Cho J.R. Optimal Tailoring of CNT Distribution in Functionally Graded Porous CNTRC Beams / J.R. Cho, H.J. Kim // Polymers. – 2023. – № 15. – 349. – DOI: 10.3390/polym15020349.
 - 19. Jamshidi M. Optimal material tailoring of functionally graded porous beams for buckling and free vibration behaviors / M. Jamshidi, J. Arghavani // Thin-Walled Structures. – 2017. – Vol. 120. – P. 81–90.
 - 20. Jamshidi M. Post-buckling optimization of two-dimensional functionally graded porous beams / M. Jamshidi, J. Arghavani, Gh. Maboudi // Int. J. Mech. Mater Des. – 2019. – № 15. – P. 801–815. – DOI: 10.1007/s10999-019-09443-3.
 - 21. Тимошенко С.П. Пластиинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

O.V. Yavruyan

Optimization of mechanical properties and geometry of simple structural elements.

The paper studies the optimization problem of maximizing the first natural frequency for the simplest structural elements, such as beams and plates. The control functions are the mechanical elastic properties and geometric characteristics, which are functions of a single variable. The paper constructs the Rayleigh relations and derives the optimality conditions. It also explores model problems related to the bending vibrations of inhomogeneous elastic beams with circular cross-sections and circular plates. The optimal distributions of the cross-sectional area (plate thickness) and the Young's modulus in the class of polynomials are determined, taking into account their positivity properties, constraints on the average distribution, as well as upper and lower bounds on the values of the corresponding functions. The optimization problems are solved using genetic algorithms and the Galerkin projection method. The results of calculations and a comparative analysis with the homogeneous case are presented.

Keywords: beam, circular plate, heterogeneity, geometry and properties optimization, first eigenfrequency, Galerkin method, genetic algorithm.

Статья поступила в редакцию 30.10.2025;
доработана 17.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-93-102

EDN:HDTXNU



©2025. Д.С. Карасев¹, С.В. Сторожев², В.И. Сторожев³

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛАХ С МНОГОФАКТОРНОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Представлена разработка аналитической методики построения базисных частных решений для системы уравнений распространения обобщенных поверхностных продольно-сдвиговых связанных электроупругих волн в полубесконечных функционально-градиентных пьезокерамических телах с описываемой двойными экспоненциальными функциями многофакторной приповерхностной неоднородностью, в результате применения которой решения исследуемых волновых уравнений получены в форме степенных рядов с коэффициентами, определяемыми из систем рекуррентных алгебраических соотношений.

Ключевые слова: функционально-градиентное пьезокерамическое полупространство, двойной экспоненциальный закон неоднородности, продольно-сдвиговые электроупругие поверхностные волны, интегрирование системы волновых уравнений, базисные решения амплитудных уравнений, представления в степенных рядах.

Актуальность и цель исследования. Анализ математических моделей дисперсионных, кинематических и энергетических свойств обобщенных поверхностных электроупругих волн в пьезоактивном полупространстве из новых модификаций неоднородных пористых, многокомпонентных и функционально-градиентных пьезоэлектрических материалов является современной актуальной научной проблемой как с точки зрения дополнения базы фундаментальных зна-

¹ Карасев Дмитрий Сергеевич – мл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: vektor8899@ya.ru.

Karasev Dmitry Sergeevich – Junior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

² Сторожев Сергей Валерьевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³ Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., гл. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

ний в механике сопряженных полей, так и ввиду востребованности инновационными высокотехнологичными приложениями, в том числе разработками в области проектирования компонентов акустоэлектронной техники, сенсорных устройств и датчиков измерительных приборов [1–5]. При наличии ряда альтернативных подходов к этой проблеме, включающих конечно-элементные и сеточные методы анализа соответствующих краевых задач динамической электроупругости, эффективными инструментами ее исследования остаются численно-аналитические методы, основывающиеся на алгоритмах точного аналитического интегрирования систем дифференциальных уравнений волновой динамики пьезоактивных сред соответствующих типов и использования элементов множества получаемых базисных частных решений при построении дисперсионных соотношений для волн анализируемых типов. Так, для моделей распространения локализованных обобщенных поверхностных электроупругих волн сдвигового и продольно-сдвигового типа в функционально-градиентном трансверсально-изотропном пьезокерамическом полупространстве с однофакторной двойной экспоненциальной неоднородностью алгоритм аналитического интегрирования системы уравнений стационарной динамической электроупругости предложен в работах [6, 7]. Варианты алгоритмов интегрирования уравнений стационарной динамики для модели распространения сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с индивидуальным законом экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики материала и модели распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн в слое из функционально-градиентной пьезокерамики с экспоненциальной неоднородностью общего вида представлены в работах [8, 9]. В контексте изложенного, целью настоящей работы является решение актуальной задачи разработки аналитической методики построения базисных частных решений для системы уравнений распространения обобщенных поверхностных продольно-сдвиговых связанных электроупругих волн в полубесконечных функционально-градиентных пьезокерамических телах с описываемой двойными экспоненциальными функциями многофакторной приповерхностной неоднородностью.

1. Постановка и алгоритм решения задачи. Рассматривается модель распространения связанных электроупругих обобщенных поверхностных волн продольно-сдвигового типа вдоль граничной поверхности пьезокерамического волновода в форме полупространства, занимающего область $V = \{x_3 \in [0, \infty), (x_1, x_2) \in R^2\}$ в нормированных прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$. Пьезокерамический линейно-поляризованный функционально-градиентный материал полупространства относится к классу 6ttt гексагональной системы, имеет ось поляризации Ox_3 , обладает одноосной многофакторной приповерхностной неоднородностью и характеризуется переменными вдоль Ox_3 параметрами упругости $c_{ij}(x_3)$, плотности $\rho(x_3)$, пьезоэлектрическими $e_{ij}(x_3)$ и диэлектрическими $\varepsilon_{ij}(x_3)$ характеристиками вида

$$c_{ij} = c_{ij0} \exp(\lambda_{cij} \exp(-\beta_{cij} x_3)), \quad \rho = \rho_0 \exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_3)), \quad (1)$$

$$e_{ij} = e_{ij0} \exp(\lambda_{eij} \exp(-\beta_{eij} x_3)),$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij0} \exp(\lambda_{\varepsilon ij} \exp(-\beta_{\varepsilon ij} x_3)) \quad (\beta_{cij}, \beta_\rho, \beta_{eij}, \beta_{\varepsilon ij} \geq 0).$$

В случае задания без ограничения общности в качестве направления распространения исследуемых волн координатного направления Ox_1 и при введении в данном случае для комплексных функций динамических перемещений $u_j(x_1, x_3, t)$ и потенциала квазистатического электрического поля $\varphi(x_1, x_3, t)$ в рассматриваемых волнах представлений вида

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_{10}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_3, t) = u_{30}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)),$$

$$\varphi(x_1, x_3, t) = \varphi_0(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)),$$

с последующей подстановкой их в систему уравнений волнового деформирования пьезокерамики класса 6mm

$$c_{11}(x_3) \partial_1^2 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{44}(x_3) \partial_3 u_1(x_1, x_3, t)) + \\ + c_{13}(x_3) \partial_1 \partial_3 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{44}(x_3) \partial_1 u_3(x_1, x_3, t)) + \\ + e_{31}(x_3) \partial_1 \partial_3 \varphi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{15}(x_3) \partial_1 \varphi(x_1, x_3, t)) - \rho(x) \partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0,$$

$$c_{44}(x_3) \partial_1 \partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{13}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3, t)) + \\ + c_{44}(x_3) \partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{33}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3, t)) + \\ + e_{15}(x_3) \partial_1^2 \varphi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3) \partial_3 \varphi(x_1, x_3, t)) - \rho(x) \partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0,$$

$$e_{15}(x_3) \partial_1 \partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{31}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3, t)) + \\ + e_{15}(x_3) \partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3, t)) + \\ - \varepsilon_{11}(x_3) \partial_1^2 \varphi(x_1, x_3, t) - \partial_3(\varepsilon_{33}(x_3) \partial_3 \varphi(x_1, x_3, t)) = 0, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial_t = \partial/\partial t,$$

рассматриваемая задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих $u_{10}(x_3)$, $u_{30}(x_3)$, $\varphi_0(x_3)$ в представлениях (2), имеющей вид

$$c_{440} \exp(\lambda_{c44} \exp(-\beta_{c44} x_3)) u''_{10}(x_3) - c_{110} k^2 \exp(\lambda_{c11} \exp(-\beta_{c11} x_3)) u_{10}(x_3) + \quad (4)$$

$$+ (c_{130} \exp(\lambda_{c13} \exp(-\beta_{c13} x_3)) + c_{440} \exp(\lambda_{c44} \exp(-\beta_{c44} x_3))) iku'_{30}(x_3) + \\ + (e_{150} \exp(\lambda_{e15} \exp(-\beta_{e15} x_3)) + e_{310} \exp(\lambda_{e31} \exp(-\beta_{e31} x_3))) ik\varphi'_0(x_3) + \\ + \rho_0 \omega^2 \exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_3)) u_{10}(x_3) - \\ - c_{440} \lambda_{c44} \beta_{c44} \exp(-\beta_{c44} x_3) \exp(\lambda_{c44} \exp(-\beta_{c44} x_3)) (u'_{10}(x_3) + iku_{30}(x_3)) - \\ - e_{150} \lambda_{e15} \beta_{e15} \exp(-\beta_{e15} x_3) ik \exp(\lambda_{e15} \exp(-\beta_{e15} x_3)) \varphi_0(x_3) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (c_{130} \exp(\lambda_{c13} \exp(-\beta_{c13}x_3)) + c_{440} \exp(\lambda_{c44} \exp(-\beta_{c44}x_3))) iku'_{10}(x_3) + \\
& + c_{330} \exp(\lambda_{c33} \exp(-\beta_{c33}x_3)) u''_{30}(x_3) - c_{440} \exp(\lambda_{c44} \exp(-\beta_{c44}x_3)) k^2 u_{30}(x_3) - \\
& - e_{150} \exp(\lambda_{e15} \exp(-\beta_{e15}x_3)) k^2 \varphi_0(x_3) + e_{330} \exp(\lambda_{e33} \exp(-\beta_{e33}x_3)) \varphi''_0(x_3) + \\
& + \rho_0 \omega^2 \exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_3)) u_{30}(x_3) - \\
& - c_{130} \lambda_{c13} \beta_{c13} \exp(-\beta_{c13}x_3) ik \exp(\lambda_{c13} \exp(-\beta_{c13}x_3)) u_{10}(x_3) - \\
& - c_{330} \lambda_{c33} \beta_{c33} \exp(-\beta_{c33}x_3) \exp(\lambda_{c33} \exp(-\beta_{c33}x_3)) u'_{30}(x_3) - \\
& - e_{330} \lambda_{e33} \beta_{e330} \exp(-\beta_{e33}x_3) \exp(\lambda_{e33} \exp(-\beta_{e33}x_3)) \varphi'_0(x_3) = 0, \\
& (e_{150} \exp(\lambda_{e15} \exp(-\beta_{e15}x_3)) + e_{310} \exp(\lambda_{e31} \exp(-\beta_{e31}x_3))) iku'_{10}(x_3) + \\
& + e_{330} \exp(\lambda_{e33} \exp(-\beta_{e33}x_3)) u''_{30}(x_3) - e_{150} \exp(\lambda_{e15} \exp(-\beta_{e15}x_3)) k^2 u_{30}(x_3) + \\
& + \varepsilon_{110} \exp(\lambda_{\varepsilon11} \exp(-\beta_{\varepsilon11}x_3)) k^2 \varphi_0(x_3) - \varepsilon_{330} \exp(\lambda_{\varepsilon33} \exp(-\beta_{\varepsilon33}x_3)) \varphi''_0(x_3) - \\
& - e_{310} \lambda_{e31} \beta_{e31} \exp(-\beta_{e31}x_3) ik \exp(\lambda_{e31} \exp(-\beta_{e31}x_3)) u_{10}(x_3) - \\
& - e_{330} \lambda_{e33} \beta_{e33} \exp(-\beta_{e33}x_3) \exp(\lambda_{e33} \exp(-\beta_{e33}x_3)) u'_{30}(x_3) + \\
& + \varepsilon_{330} \lambda_{\varepsilon33} \beta_{\varepsilon33} \exp(-\beta_{\varepsilon33}x_3) \exp(\lambda_{\varepsilon33} \exp(-\beta_{\varepsilon33}x_3)) \varphi'_0(x_3) = 0.
\end{aligned}$$

2. Алгоритм аналитического интегрирования системы уравнений для амплитудных составляющих. Для входящих в уравнения (4) функций вводятся следующие представления в форме степенных рядов

$$\begin{aligned}
& u_{10}(x_3) = \quad (5) \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n, u'_{10}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n, u''_{10}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x_3^n; \\
& u_{30}(x_3) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n, u'_{30}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x_3^n, u''_{30}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) b_{n+2} x_3^n; \\
& \varphi_0(x_3) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_3^n, \varphi'_0(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} x_3^n, \varphi''_0(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) d_{n+2} x_3^n; \\
& \exp(-\beta_{cij} x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{cij})^m}{m!} x_3^m, \dots, \exp(-\beta_{\varepsilon ij} x_3) = \sum_{nv=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{\varepsilon ij})^m}{m!} x_3^m; \quad (6) \\
& \exp(\lambda_{cij} \exp(-\beta_{cij} x_3)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{cij} \exp(-\beta_{cij} x_3))^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{cij}^m}{m!} \exp(-m\beta_{cij} x_3) = \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda_{cij}^m}{m!} \frac{(m\beta_{cij})^q}{q!} x_3^q = \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qcij} x_3^q, \quad \Delta_{qcij} = (-1)^q \frac{\beta_{cij}^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_{cij}^m}{m!}; \dots;
\end{aligned}$$

$$\exp(\lambda_\rho \exp(-\beta_\rho x_3)) = \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_3^q, \quad \Delta_{q\rho} = (-1)^q \frac{\beta_\rho^q}{q!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^q \lambda_\rho^m}{m!};$$

$$\exp(-\beta_{cij} x_3) \exp(\lambda_{cij} \exp(-\beta_{cij} x_3)) = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qcij} x_3^q, \quad \Omega_{qcij} = \sum_{m=0}^q \frac{(-\beta_{cij})^m}{m!} \Delta_{q-m, cij}; \dots;$$

$$\exp(-\beta_{\varepsilon ij} x_3) \exp(\lambda_{\varepsilon ij} \exp(-\beta_{\varepsilon ij} x_3)) = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{q\varepsilon ij} x_3^q, \quad \Omega_{q\varepsilon ij} = \sum_{m=0}^q \frac{(-\beta_{\varepsilon ij})^m}{m!} \Delta_{q-m, \varepsilon ij}.$$

При подстановке соотношений (5)–(6) в систему уравнений (4) она принимает вид

$$\begin{aligned} & c_{440} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x_3^n - c_{110} k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc11} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n + \\ & + c_{130} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc13} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x_3^n + c_{440} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x_3^n + \\ & + e_{150} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc15} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} x_3^n + e_{310} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc31} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} x_3^n + \\ & + \rho_0 \omega^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n - c_{440} \lambda_{c44} \beta_{c44} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n - \\ & - c_{440} \lambda_{c44} \beta_{c44} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n - e_{150} \lambda_{e15} \beta_{e15} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qe15} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_3^n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_{130} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc13} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n + c_{440} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n + \\ & + c_{330} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc33} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) b_{n+2} x_3^n - c_{440} k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qc44} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n - \\ & - e_{150} k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe15} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_3^n + e_{330} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe33} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) d_{n+2} x_3^n + \\ & + \rho_0 \omega^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\rho} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_3^n - c_{130} \lambda_{c13} \beta_{c13} ik \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc13} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n - \\ & - c_{330} \lambda_{c33} \beta_{c33} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qc33} x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x_3^n - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qe33}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)d_{n+1}x_3^n = 0, \\
& e_{150}ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe15}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x_3^n + e_{310}ik \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe31}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x_3^n + \\
& + e_{330} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe33}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x_3^n - e_{150}k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{qe15}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} b_nx_3^n + \\
& + \varepsilon_{110}k^2 \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\varepsilon11}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} d_nx_3^n - \varepsilon_{330} \sum_{q=0}^{\infty} \Delta_{q\varepsilon33}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)d_{n+2}x_3^n - \\
& - e_{310}\lambda_{c31}\beta_{c31}ik \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qe31}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} a_nx_3^n - e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{qe33}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x_3^n + \\
& + \varepsilon_{330}\lambda_{\varepsilon33}\beta_{\varepsilon33} \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_{q\varepsilon33}x_3^q \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)d_{n+1}x_3^n = 0,
\end{aligned}$$

и после преобразований может быть записана в форме

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p^{(1)}x_3^p = 0, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p^{(2)}x_3^p = 0, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p^{(3)}x_3^p = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
& \Phi_p^{(1)} = \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)c_{440}\Delta_{p-n, c44}a_{n+2} - \\
& - (n+1)c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}\Omega_{p-n, c44}a_{n+1} + (\rho_0\omega^2\Delta_{p-n, \rho} - k^2c_{110}\Delta_{p-n, c11})a_n + \\
& + ik(c_{130}\Delta_{p-n, c13} + c_{440}\Delta_{p-n, c44})(n+1)b_{n+1} - c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n, c44}b_n + \\
& + ik(e_{150}\Delta_{p-n, e15} + e_{310}\Delta_{p-n, e31})(n+1)d_{n+1} - e_{150}\lambda_{e15}\beta_{e15}ik\Omega_{p-n, e15}d_n),
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_p^{(2)} = \sum_{n=0}^p (ik(c_{130}\Delta_{p-n, c13} + c_{440}\Delta_{p-n, c44})(n+1)a_{n+1} - \\
& - c_{130}\lambda_{c13}\beta_{c13}ik\Omega_{p-n, c13}a_n + (n+1)(n+2)c_{330}\Delta_{p-n, c33}b_{n+2} - \\
& - c_{330}\lambda_{c33}\beta_{c33}\Omega_{p-n, c33}(n+1)b_{n+1} + \\
& + (\rho_0\omega^2\Delta_{p-n, \rho} - k^2c_{440}\Delta_{p-n, c44})b_n + (n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n, e33}d_{n+2} - \\
& - e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n, e33}(n+1)d_{n+1} - e_{150}k^2\Delta_{p-n, e15}d_n,
\end{aligned}$$

Продольно-сдвиговые электроупругие волны в полу бесконечных телах с неоднородностью

$$\begin{aligned}\Phi_p^{(3)} = & \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n, e33}a_{n+2} + \\ & + ik(e_{310}\Delta_{p-n, e31} + e_{150}\Delta_{p-n, e15})(n+1)a_{n+1} - \\ & - e_{310}\lambda_{e31}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n, e31}a_n - e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n, e33}(n+1)b_{n+1} - \\ & - k^2e_{150}\Delta_{p-n, e15}b_n - (n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n, e33}d_{n+2} + \\ & + e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n, e33}(n+1)d_{n+1} + \varepsilon_{110}k^2\Delta_{p-n, e11}d_n).\end{aligned}$$

В результате приравнивания нулю являющихся коэффициентами степенных рядов величин $\Phi_p^{(1)}$, $\Phi_p^{(2)}$ и $\Phi_p^{(3)}$ в представлениях (8) с варьированием $p = \overline{0, \infty}$, для определения коэффициентов a_n , b_n , d_n ($n = \overline{0, \infty}$) формируется система рекуррентных соотношений,

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)c_{440}\Delta_{p-n, c44}a_{n+2} = & \\ = & (n+1)c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}\Omega_{p-n, c44}a_{n+1} - (\rho_0\omega^2\Delta_{p-n, \rho} - k^2c_{110}\Delta_{p-n, c11})a_n - \\ & - ik(c_{130}\Delta_{p-n, c13} + c_{440}\Delta_{p-n, c44})(n+1)b_{n+1} + c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n, c44}b_n - \\ & - ik(e_{150}\Delta_{p-n, e15} + e_{310}\Delta_{p-n, e31})(n+1)d_{n+1} + e_{150}\lambda_{e15}\beta_{e15}ik\Omega_{p-n, e15}d_n, \\ (n+1)(n+2)c_{330}\Delta_{p-n, c33}b_{n+2} + (n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n, e33}d_{n+2} = & \\ = & -ik(c_{130}\Delta_{p-n, c13} + c_{440}\Delta_{p-n, c44})(n+1)a_{n+1} + c_{130}\lambda_{c13}\beta_{c13}ik\Omega_{p-n, c13}a_n + \\ & + c_{330}\lambda_{c33}\beta_{c33}\Omega_{p-n, c33}(n+1)b_{n+1} - (\rho_0\omega^2\Delta_{p-n, \rho} - k^2c_{440}\Delta_{p-n, c44})b_n + \\ & + e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n, e33}(n+1)d_{n+1} + e_{150}k^2\Delta_{p-n, e15}d_n, \\ (n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n, e33}a_{n+2} - (n+1)(n+2)e_{330}\Delta_{p-n, e33}d_{n+2} = & \\ = & -ik(e_{310}\Delta_{p-n, e31} + e_{150}\Delta_{p-n, e15})(n+1)a_{n+1} + e_{310}\lambda_{e31}\beta_{c44}ik\Omega_{p-n, e31}a_n + \\ & + e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n, e33}(n+1)b_{n+1} + k^2e_{150}\Delta_{p-n, e15}b_n - \\ & - e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n, e33}(n+1)d_{n+1} - \varepsilon_{110}k^2\Delta_{p-n, e11}d_n,\end{aligned}$$

позволяющая, в итоге, получить шесть базисных частных решений системы дифференциальных уравнений (4) с аналитическими представлениями в виде степенных рядов.

При $p = 0$ формулы (9) принимают вид

$$\begin{aligned}2c_{440}\Delta_{p-n, c44}a_2 = & c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}\Omega_{0, c44}a_1 - (\rho_0\omega^2\Delta_{0, \rho} - k^2c_{110}\Delta_{0, c11})a_0 - \\ & - ik(c_{130}\Delta_{0, c13} + c_{440}\Delta_{0, c44})b_1 + c_{440}\lambda_{c44}\beta_{c44}ik\Omega_{0, c44}b_0 -\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 & -ik(e_{150}\Delta_{0, e15} + e_{310}\Delta_{0, e31})d_1 + e_{150}\lambda_{e15}\beta_{e15}ik\Omega_{0, e15}d_0, \\
 & 2c_{330}\Delta_{0, c33}b_2 + 2e_{330}\Delta_{0, e33}d_2 = -ik(c_{130}\Delta_{0, c13} + c_{440}\Delta_{0, c44})a_1 + \\
 & + c_{130}\lambda_{c13}\beta_{c13}ik\Omega_{0, c13}a_0 + c_{330}\lambda_{c33}\beta_{c33}\Omega_{0, c33}b_1 - \\
 & -(\rho_0\omega^2\Delta_{0, \rho} - k^2c_{440}\Delta_{0, c44})b_0 + e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{p-n, e33}(n+1)d_{n+1} + e_{150}k^2\Delta_{0, e15}d_0, \\
 & 2e_{330}\Delta_{0, e33}a_2 - 2e_{330}\Delta_{0, e33}d_2 = -ik(e_{310}\Delta_{0, e31} + e_{150}\Delta_{0, e15})(n+1)a_1 + \\
 & + e_{310}\lambda_{e31}\beta_{c44}ik\Omega_{0, e31}a_0 + e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{0, e33}b_1 + k^2e_{150}\Delta_{0, e15}b_0 - \\
 & - e_{330}\lambda_{e33}\beta_{e33}\Omega_{0, e33}d_1 - \varepsilon_{110}k^2\Delta_{0, e11}d_0,
 \end{aligned}$$

и позволяют выразить коэффициенты a_2, b_2, d_2 через произвольные величины $a_1, b_1, d_1, a_0, b_0, d_0$. Для формирования шести базисных решений $u_{10j}(x_3, \omega, k)$, $u_{30j}(x_3, \omega, k)$, $\varphi_{0j}(x_3, \omega, k)$ ($j = \overline{1, 6}$) системы (8) предлагается задание совокупностей $\{a_1, b_1, d_1, a_0, b_0, d_0\}$ в виде $\{0, 0, 0, 0, 0, 1\}$, $\{0, 0, 0, 0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 0, 1, 0, 0\}$, $\{0, 0, 1, 0, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0, 0, 0, 0\}$, $\{1, 0, 0, 0, 0, 0\}$, на основе которого определяются шесть последовательностей значений $\{a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, d_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = \overline{1, 6}$) и записываются аналитические представления шести базисных решений системы уравнений (4) в форме степенных рядов

$$u_{10j}(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} x_3^n, \quad (11)$$

$$u_{30j}(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} x_3^n, \quad \varphi_{0j}(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(j)} x_3^n \quad (j = \overline{1, 6}).$$

Этапами дальнейшего использования построенных базисных решений для расчетного анализа дисперсионных спектров, кинематических, силовых и энергетических свойств обобщенных поверхностных электроупругих волн рэлеевского типа является суммирование их редуцированных представлений на задаваемом уровне точности и формирование трех их комбинаций, удовлетворяющих условиям убывания интенсивности характеристик рассматриваемых волн в глубине полупространства.

Заключение. В результате представленных в работе исследований согласно сформулированным целям разработан численно-аналитический алгоритм построения базисных частных решений для систем амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение обобщенных продольно-сдвиговых поверхностных электроупругих волн рэлеевского типа вдоль произвольного направления в граничной плоскости полупространства функционально-градиентной пьезокерамики класса 6mm с перпендикулярной граничной плоскости осью поляризации и

Продольно-сдвиговые электроупругие волны в полубесконечных телах с неоднородностью

произвольной многофакторной локализованной приповерхностной неоднородностью, описываемой отдельными разнотипными зависимостями в виде двойных экспоненциальных функций для каждой из физико-механических характеристик рассматриваемого материала.

Информация о финансовой поддержке. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 27.02.2025 № 075-02-2025-1608).

1. *Setter N. Piezoelectric material and devices / N. Setter.* – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
2. *Heywang W. Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing.* – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
3. *Uchino K. Advanced Piezoelectric Materials / K. Uchino.* – Cambridge: Woodhead Publishing, 2011. – 696 p.
4. Акустоэлектронные устройства обработки и генерации сигналов. Принципы работы, расчета и проектирования / О.Л. Балышева [и др.]; под ред. Ю.В. Гуляева. – М.: Радиотехника, 2012. – 571 с.
5. *Tanaka S. Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // Proceedings 2014 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS) (Taipei, Taiwan).* – 2014. – Р. 1–4. – DOI 10.1109/FCS.2014.6859994.
6. Карапев Д.С. Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карапев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 48–55. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN: SPYOCB.
7. Карапев Д.С. Интегрирование уравнений распространения локализованных электроупругих волн реleeевского типа в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карапев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 36–43. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-3-36-43. – EDN: IVOJVW.
8. Карапев Д.С. Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с индивидуальным законом экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики материала / Д.С. Карапев, С.В. Сторожев, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 3 (88). – С. 35–43. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-3-35-43. – EDN: VGCFAS.
9. Сторожев В.И. Интегрирование системы уравнений модели распространения продольно-сдвиговых электроупругих волн в слое из функционально-градиентной пьезокерамики с экспоненциальной неоднородностью общего вида / В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 4 (89). – С. 64–73. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-4-64-73. – EDN: IOLPYA.

D.S. Karasev, S.V. Storozhev, V.I. Storozhev

Analytical method for constructing basic partial solutions for the system of equations of propagation of longitudinal-shear electroelastic waves in semi-infinite bodies with multifactor near-surface heterogeneity.

This paper presents the development of an analytical technique for constructing basic partial solutions for a system of equations describing the propagation of generalized surface longitudinal-shear coupled electroelastic waves in semi-infinite functionally graded piezoceramic bodies with

Д.С. Карапев, С.В. Сторожев, В.И. Сторожев

multifactorial near-surface inhomogeneity described by double exponential functions. As a result of its application, solutions to the wave equations under study are obtained in the form of power series with coefficients determined from systems of recurrence algebraic relations.

Keywords: *functionally graded piezoceramic half-space, double exponential law of inhomogeneity, longitudinal-shear electroelastic surface waves, integration of a system of wave equations, basic solutions to amplitude equations, power series representations.*

*Статья поступила в редакцию 31.10.2025;
доработана 17.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-103-120

EDN:MBQYNV



©2025. А.И. Дзундза¹, В.А. Моисеенко², И.А. Моисеенко³,
Р.Н. Нескородев⁴

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПРОТЯЖЕННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ С МНОГОФАКТОРНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

В статье рассматривается задача о распространении осесимметричных упругих нормальных волн в протяженных функционально-градиентных изотропных цилиндрах концентрического кольцевого сечения. Построены базисные наборы аналитических частных решений для случаев волн крутильного и продольно-сдвигового типов. Изучены различные аспекты влияния радиальной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих волн.

Ключевые слова: функционально-градиентный материал, многофакторная неоднородность, полый цилиндрический волновод, изотропия, нормальные волны, аналитические базисные

¹Дзундза Алла Ивановна – д-р пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

Dzundza Alla Ivanovna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Моисеенко Виктор Алексеевич – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА – филиал НИУ МГСУ, Макеевка, e-mail: v.a.moiseyenko@donnasa.ru.

Moiseyenko Viktor Alekseevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture – branch of the National Research Moscow State University of Civil Engineering, Makeyevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Моисеенко Игорь Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

⁴Нескородев Роман Николаевич – д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nrromn72@mail.ru.

Neskorodev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

частные решения, дисперсионный спектр, фазовая скорость, групповая скорость.

Введение и цели исследования. Одним из подходов, обеспечившим построение базисных наборов аналитических частных решений дифференциальных уравнений волновой динамики в рамках пространственной модели динамического деформирования полых протяженных цилиндров из инновационных функционально-градиентных материалов, является задание специального вида функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной кольцевой координате. Так для единого экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности материала волновода построены в аналитическом виде базисные наборы частных решений уравнений модели для случаев изотропного [1], трансверсально-изотропного [2] и ортотропного [3] материалов. Использованный в данном подходе однофакторный функциональный закон неоднородности существенно сужает область применения полученных решений.

С целью устранения указанного недостатка в данном исследовании на базе предложенных многофакторных моделей функциональной радиальной неоднородности изотропного материала, свободных от ограничений на независимый вид функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода, построены базисные наборы аналитических частных решений уравнений математической модели для двух типов осесимметричных нормальных упругих волн, распространяющихся в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения.

1. Постановка задачи. Рассматривается изотропный цилиндрический волновод, имеющий в поперечном сечении форму концентрического кругового кольца с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами. В нормированной параметром $R_* = (R_1 + R_2)/2$ безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ волновод занимает область

$$V = \{r \in [1 - h, 1 + h], \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad z \in (-\infty, \infty)\},$$

где $h = (R_2 - R_1)/(R_1 + R_2)$. Материал волновода считается функционально-неоднородным в радиальных направлениях

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \quad \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r).$$

Нормировочные параметры $C_* = const$ и $\rho_* = const$ имеют размерность соответственно упругих модулей Ламе и плотности. Полагается, что функциональные законы

$$\tilde{\lambda}(r) > 0, \quad \tilde{\mu}(r) > 0, \quad \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [1 - h, 1 + h]) \quad (1)$$

являются произвольными в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик и относятся к классу $C^2(1 - h, 1 + h)$.

В рамках пространственной линейной математической модели волновой динамики независимому рассмотрению подлежат распространяющиеся вдоль оси

Oz с круговой частотой ω и нормированным параметром R_* продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) два типа нормальных упругих осесимметричных волн – крутильного и продольно-сдвигового типов. С целью построения базисных наборов частных решений уравнений математической модели вводится замена переменных $r = \eta(x) = hx + 1$, где $x \in [-1, 1]$ – обобщенная кольцевая координата [4]. Соответственно далее используется система координат $Ox\theta z$. В новой системе координат соотношения (1) получают вид

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(x) > 0, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(x) > 0, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x) > 0 \quad (x \in [-1, 1]). \quad (2)$$

В рамках рассматриваемых типов волновых движений допускается применение метода разделения переменных. Уравнения математических моделей для соответствующих типов волн в матрично-векторном виде получают следующий вид.

Математическая модель для случая волн *крутильного* типа:

$$\begin{aligned} u_\theta^{(TW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x), \\ \Sigma^{(TW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(TW)} \tilde{\Sigma}^{(TW)}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma^{(TW)}(x, z, t) &= \left[\sigma_{\theta z}^{(TW)}(x, z, t), \sigma_{r\theta}^{(TW)}(x, z, t) \right]^T; \\ \tilde{\Sigma}^{(TW)}(x) &= \left[\tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(x) \right]^T; \end{aligned}$$

$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(x)$, $\tilde{\sigma}_s^{(TW)}(x)$ ($s = \theta z, r\theta$) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процесса; $\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}$ – квадратная диагональная матрица комплексной нормировки с элементами $[\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}]_{1,1} = i$, $[\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}]_{2,2} = 1$;

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x) = \tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x) \cdot \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x); \quad (4)$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 2×1 вида

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x) = \left[k\tilde{\mu}(x) \quad \tilde{\mu}(x) \left(h^{-1}d_x - \eta(x)^{-1} \right) \right]^T.$$

Из уравнений движения получено обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\tilde{D}^{(TW)}(x) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x) = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(TW)}(x) &= d_x^2 + \tilde{f}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}^{(2)}(x), \\ \hat{f}^{(1)}(x) &= \tilde{\mu}'(x)/\tilde{\mu}(x) + h\eta(x)^{-1}, \\ \tilde{f}^{(2)}(x) &= h^2 \left(\Omega^2 \rho(x)/\mu(x) - k^2 - \eta(x)^{-2} \right) - h\eta(x)^{-1} \mu'(x)/\mu(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ – безразмерная приведенная частота.

Границные условия для случая свободного волновода имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(\pm 1) = 0 \quad (7)$$

и для случая жестко закрепленного волновода – вид

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(\pm 1) = 0. \quad (8)$$

Математическая модель для случая волн *продольно-сдвигового* типа:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x), \\ \boldsymbol{\Sigma}^{(LSW)}(x, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(LSW)}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\mathbf{U}^{(LSW)}(x, z, t) = \left[u_r^{(LSW)}(x, z, t), u_z^{(LSW)}(x, z, t) \right]^T;$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) = \left[\tilde{u}_r^{(LSW)}(x), \tilde{u}_z^{(LSW)}(x) \right]^T;$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(LSW)}(x, z, t) = \left[\sigma_{rr}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{\theta\theta}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{zz}^{(LSW)}(x, z, t), \sigma_{rz}^{(LSW)}(x, z, t) \right]^T;$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(LSW)}(x) = \left[\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(x) \right];$$

$\tilde{u}_s^{(LSW)}(x)$ ($s = r, z$), $\tilde{\sigma}_s^{(LSW)}(x)$ ($s = rr, \theta\theta, zz, rz$) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процесса; $\mathbf{P}_U^{(LSW)}$ и $\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)}$ – квадратные диагональные матрицы комплексной нормировки с элементами

$$\left[\mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{1,1} = 1, \quad \left[\mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{2,2} = i,$$

$$\left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{j,j} = 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{4,4} = i;$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(LSW)}(x) = \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x); \quad (10)$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор вида

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x) = \begin{bmatrix} h^{-1} (\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)) dx + \eta(x)^{-1} \tilde{\lambda}(x) & -k \tilde{\lambda}(x) \\ h^{-1} \tilde{\lambda}(x) dx + \eta(x)^{-1} (\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)) & -k \tilde{\lambda}(x) \\ \tilde{\lambda}(x) (h^{-1} dx + \eta(x)^{-1}) & -k (\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)) \\ k \tilde{\mu}(x) & h^{-1} \tilde{\mu}(x) dx \end{bmatrix}.$$

Из уравнений движения получена система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) = \mathbf{O}, \quad (11)$$

где $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(x)$ – матричный дифференциальный оператор вида

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(x) = \begin{bmatrix} d_x^2 + \tilde{f}_{11}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{11}^{(2)}(x) & \tilde{f}_{12}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{12}^{(2)}(x) \\ \tilde{f}_{21}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{21}^{(2)}(x) & d_x^2 + \tilde{f}_{22}^{(1)}(x) d_x + \tilde{f}_{22}^{(2)}(x) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\tilde{f}_{11}^{(1)}(x) = h \eta(x)^{-1} + \frac{\tilde{\lambda}'(x) + 2\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{11}^{(2)}(x) = -h^2 \eta(x)^{-2} + \frac{h^2 (\Omega^2 \tilde{\rho}(x) - k^2 \tilde{\mu}(x)) + h \eta(x)^{-1} \tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{12}^{(1)}(x) = -h k \frac{\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{12}^{(2)}(x) = -h k \frac{\tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{21}^{(1)}(x) = h k \frac{\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{21}^{(2)}(x) = h k \frac{h \eta(x)^{-1} (\tilde{\lambda}(x) + \tilde{\mu}(x)) + \tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)},$$

$$\tilde{f}_{22}^{(1)}(x) = h \eta(x)^{-1} + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{22}^{(2)}(x) = h^2 \frac{\Omega^2 \tilde{\rho}(x) - k^2 (\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x))}{\tilde{\mu}(x)};$$

О – нулевой вектор-столбец размерности 2.

Границные условия для случая свободного волновода имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(\pm 1) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(\pm 1) = 0 \quad (13)$$

и для случая жестко закрепленного волновода – вид

$$\tilde{u}_r^{(LSW)}(\pm 1) = 0, \quad \tilde{u}_z^{(LSW)}(\pm 1) = 0. \quad (14)$$

2. Модели радиальной неоднородности. Вводятся в рассмотрение декартова система координат Oxy и комплексная переменная $\xi = x + iy$. Формально полагается, что оси Ox систем координат $Ox\theta z$ и Oxy совпадают. Вводятся произвольные функции $\psi_j(\xi)$ ($j = 1, 3$), аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$). Для представленных математических моделей (3)–(8) и (9)–(14) законы радиальной неоднородности (2) через функции $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) допускают представление в рамках двух моделей неоднородности.

Аналитическая модель неоднородности применима в случае, когда функции $\tilde{\lambda}(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$ допускают аналитическое продолжение в аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функции. Для математических моделей (3–8) и (9–14) соответственно получаются соотношения:

$$\psi_1(\xi) = \hat{\mu}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\rho}(\xi); \quad (15)$$

$$\psi_1(\xi) = \hat{\lambda}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\mu}(\xi), \quad \psi_3(\xi) = \hat{\rho}(\xi). \quad (16)$$

Тогда дифференциальные операторы $\tilde{D}^{(TW)}(x)$ и $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(x)$ допускают аналитическое продолжение в дифференциальные операторы $\hat{D}^{(TW)}(\xi)$ и $\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi)$ с аналитическими в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функциональными коэффициентами соответственно $\tilde{f}^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1, 2}$) и $\tilde{f}_m^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1, 2}; m = 11, 12, 21, 22$) при выполнении достаточного условия несильной радиальной неоднородности, которое для математических моделей (3)–(8) и (9)–(14) соответственно записывается так:

$$\delta > 1, \quad \delta = \left| s_*^{(1)} \right|; \quad (17)$$

$$\delta > 1, \quad \delta = \min \left(\left| s_*^{(1)} \right|, \left| s_*^{(2)} \right| \right). \quad (18)$$

Здесь $s_*^{(1)}$ и $s_*^{(2)}$ – соответственно наименьшие по модулю нули функций $\hat{\mu}(\xi)$ и $\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)$.

Численная модель неоднородности предполагает специального вида полиномиальную аппроксимацию функциональных законов $\tilde{\lambda}(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$. Для математической модели (3)–(8) вводятся представления

$$\psi_1(x) \approx \ln(\tilde{\mu}(x)), \quad \psi_2(x) \approx \tilde{\rho}(x)/\tilde{\mu}(x) \quad (x \in [-1, 1]), \quad (19)$$

а для математической модели (9)–(14) вводятся два альтернативных представления следующего вида:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\approx \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x)+2\tilde{\mu}(x)}, \quad \psi_2(x) \approx \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\lambda}(x)+2\tilde{\mu}(x)}, \quad \psi_3(x) \approx \ln(\tilde{\lambda}(x)+2\tilde{\mu}(x)) \\ &(x \in [-1, 1]); \end{aligned} \quad (20\text{-A})$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\approx \tilde{\lambda}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_2(x) \approx \tilde{\rho}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_3(x) \approx \ln(\tilde{\mu}(x)) \\ &(x \in [-1, 1]). \end{aligned} \quad (20\text{-B})$$

Здесь

$$\psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (21)$$

Порядок N полиномов в соотношениях (21) определяется из условий

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \tilde{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}_*(x) \right| < \varepsilon, \quad \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{\mu}(x) - \tilde{\mu}_*(x)| < \varepsilon, \quad \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{\rho}(x) - \tilde{\rho}_*(x)| < \varepsilon,$$

где ε – погрешность задания исходных упруго-механических характеристик $\tilde{\lambda}(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$; $\tilde{\lambda}_*(x)$, $\tilde{\mu}_*(x)$ и $\tilde{\rho}_*(x)$ – упруго-механические характеристики материала волновода для которых собственно и будут строиться базисные наборы частных решений. Соответственно соотношениям (19) записываются представления

$$\tilde{\mu}_*(x) = e^{\psi_1(x)}, \quad \tilde{\rho}_*(x) = \psi_2(x) e^{\psi_1(x)} \quad (x \in [-1, 1]), \quad (22)$$

а для альтернативных соотношений (20-А) и (20-Б) записываются соответствующие представления вида

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_*(x) &= (1 - 2\psi_1(x)) e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\mu}_*(x) = \psi_1(x) e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\rho}_*(x) = \psi_2(x) e^{\psi_3(x)} \\ (x \in [-1, 1]) ; \end{aligned} \quad (23\text{-A})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_*(x) &= \psi_1(x) e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\mu}_*(x) = e^{\psi_3(x)}, \quad \tilde{\rho}_*(x) = \psi_2(x) e^{\psi_3(x)} \\ (x \in [-1, 1]) . \end{aligned} \quad (23\text{-B})$$

Для математической модели (9)–(14) соответственно представлениям (23-А) и (23-Б) получены аналогичные соотношениям (18) достаточные условия несильной радиальной неоднородности альтернативного вида

$$\delta > 1, \quad \delta = |s_*|, \quad (24)$$

где s_* – наименьший по модулю нуль функции $\psi_1(\xi)$ (20-А), либо $\psi_1(\xi) + 2$ (20-Б). Для математической модели (3)–(8) дополнительных условий не требуется.

3. Базисные частные решения. В рамках представленных моделей неоднородности при выполнении сформулированных выше соответствующих достаточных условий несильной радиальной неоднородности дифференциальные уравнения (5) и (11) принимают такой вид:

$$\hat{D}^{(TW)}(\xi) \hat{u}_\theta^{(TW)}(\xi) = 0 \quad (|\xi| < \delta); \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta). \quad (26)$$

Известно, что уравнения (25) и (26) имеют аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частные решения. С целью построения указанных решений используются разложения в окрестности точки $\xi = 0$ аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функций $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) вида

$$\psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (|\xi| < \delta). \quad (27)$$

Здесь $\left\{ a_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = \overline{1, 3}$) – определяемые соотношениями (15) или (16) в случае аналитической модели неоднородности, либо соотношениями (19), (21) или (20-А), (20-Б), (21) в случае численной модели ($a_n^{(j)} = 0$, $j = \overline{1, 3}$; $n = \overline{N+1, \infty}$) наборы коэффициентов.

Случай крутильных волн. Базисный набор частных решений уравнения (25) включает два линейно независимых аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частных решения, представленных в окрестности точки $\xi = 0$ разложениями вида

$$\hat{u}_\theta^{(TW, \text{particular}, q)}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(q)} \xi^p \quad (q = \overline{1, 2}), \quad (|\xi| < \delta), \quad (28)$$

где $\left\{d_p^{(q)}\right\}_{p=0}^{\infty}$ ($q = \overline{1, 2}$) – подлежащие определению наборы коэффициентов.

В результате подстановки разложений (27), (28) в дифференциальный оператор $\hat{D}^{(TW)}(\xi)$ дифференциальное уравнение (25) преобразуется в однородное функциональное уравнение $F(\xi) = 0$ ($|\xi| < \delta$) относительно аналитической в области $|\xi| < \delta$ функции $F(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \vartheta_p^{(q)} \xi^p$. Указанное функциональное уравнение порождает совокупность однородных алгебраических уравнений $\vartheta_p^{(q)} = 0$ ($p = \overline{0, \infty}$, $q = \overline{1, 2}$), из которых при $p = 0$, и $p = 1$ для двух частных решений (28) определяются начальные условия вида

$$\left\{d_0^{(1)} = 1, d_1^{(1)} = 0\right\}, \quad \left\{d_0^{(2)} = 0, d_1^{(2)} = 1\right\}, \quad (29)$$

а при $p \geq 2$ с учетом формально дополняющих разложения (28) определений $d_m^{(q)} = 0$ ($q = \overline{1, 2}; m = \overline{-2, -1}$) получаются явные рекуррентные соотношения для определения искомых коэффициентов $d_p^{(q)}$ ($q = \overline{1, 2}$). В случае аналитической модели неоднородности (15) рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} d_p^{(q)} = & \frac{1}{p(p-1)} \left(-h(p-1)(2p-3)d_{p-1}^{(q)} + h^2(k^2-p^2+4p-3)d_{p-2}^{(q)} + \right. \\ & + 2k^2h^3d_{p-3}^{(q)} + k^2h^4d_{p-4}^{(q)} - \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4 \Omega^2 b_{p-4-j}^{(1)} d_j^{(q)} \right) - \\ & - \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^2 \left(2h \Omega^2 b_{p-3-j}^{(1)} + (j-1) b_{p-3-j}^{(2)} \right) d_j^{(q)} \right) - \\ & \left. - \sum_{j=0}^{p-2} \left(h \left(h \Omega^2 b_{p-2-j}^{(1)} + (2j-1) b_{p-2-j}^{(2)} \right) d_j^{(q)} \right) - \sum_{j=0}^{p-1} \left(j b_{p-1-j}^{(2)} d_j^{(q)} \right) \right) \\ & (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\chi_1(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_2(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi)}.$$

Для численной модели неоднородности (19), (21) (22) рекуррентные соотноше-

ния записываются так:

$$\begin{aligned}
 d_p^{(q)} = & \frac{1}{p(p-1)} \left(-h(p-1)(2p-3)d_{p-1}^{(q)} + h^2(k^2-p^2+4p-3)d_{p-2}^{(q)} + \right. \\
 & + 2k^2h^3d_{p-3}^{(q)} + k^2h^4d_{p-4}^{(q)} - \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4\Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} d_j^{(q)} \right) - \\
 & - \sum_{j=0}^{p-3} \left(2h^3\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} d_j^{(q)} \right) - \sum_{j=0}^{p-2} \left(h^2 \left(\Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} + (j-1)(p-j-2)a_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(q)} \right) - \\
 & \left. - \sum_{j=0}^{p-1} \left(\left(j(p-j)a_{p-j}^{(1)} + h(2j-1)(p-j-1)a_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(q)} \right) \right) \\
 & (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 2}). \tag{31}
 \end{aligned}$$

Частные решения (28) позволяют определить базисное матричное решение уравнения (25) размерности 1×2 в таком виде

$$\hat{\mathbf{U}}^{(TW, \text{basic})}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_\theta^{(TW, \text{particular}, 1)}(\xi) & \hat{u}_\theta^{(TW, \text{particular}, 2)}(\xi) \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Случай волн продольно-сдвигового типа. Базисный набор аналитических в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) частных решений уравнения (26) включает четыре векторных линейно независимых частных решения

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) \\ \hat{u}_z^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) \end{bmatrix} \quad (q = \overline{1, 4}). \tag{33}$$

Здесь

$$\hat{u}_s^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(s, q)} \xi^p \quad (s = r, z; q = \overline{1, 4}), \quad (|\xi| < \delta), \tag{34}$$

$\left\{ d_p^{(s, q)} \right\}_{p=0}^{\infty}$ ($s = r, z; q = \overline{1, 4}$) – подлежащие определению наборы коэффициентов.

По аналогии со случаем крутильных волн, после подстановки разложений (27), (34) в дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi)$ дифференциальное уравнение (26) преобразуется в четыре независимые системы из двух однородных функциональных уравнений $F_s^{(q)}(\xi) = 0$ ($s = r, z; q = \overline{1, 4}$) ($|\xi| < \delta$) относительно аналитической в области $|\xi| < \delta$ функции $F_s^{(q)}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \vartheta_p^{(s, q)} \xi^p$, из которых при $p = 0$, и $p = 1$ для четырех частных решений (33), (34) определяются на-

чальные условия вида

$$\begin{aligned} & \left\{ d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_1^{(r,1)} = 0, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \quad d_1^{(z,1)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_1^{(r,2)} = 1, \quad d_0^{(z,2)} = 0, \quad d_1^{(z,2)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,3)} = 0, \quad d_1^{(r,3)} = 0, \quad d_0^{(z,3)} = 1, \quad d_1^{(z,3)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,4)} = 0, \quad d_1^{(r,4)} = 0, \quad d_0^{(z,4)} = 0, \quad d_1^{(z,4)} = 1 \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

а при $p \geq 2$ получаются явные рекуррентные соотношения для определения ис-комых коэффициентов $d_p^{(s,q)}$ ($s = r, z$; $q = \overline{1, 4}$). В случае аналитической модели неоднородности (16) рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} d_p^{(r,q)} &= \frac{1}{p(p-1)} \left(-2h(p-1)(p-2)d_{p-1}^{(r,q)} - h^2(p-2)(p-3)d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\ &+ \sum_{j=0}^{p-4} \left(-h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(3)} - k^2 b_{p-4-j}^{(2)} \right) d_j^{(r,q)} - kh^3 b_{p-4-j}^{(7)} d_j^{(z,q)} \right) + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-3} \left(-h^2 \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(3)} - k^2 b_{p-3-j}^{(2)} \right) + (j+1)b_{p-3-j}^{(7)} + 2jb_{p-3-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\ &\quad \left. - kh^2 \left(hjb_{p-3-j}^{(1)} + hjb_{p-3-j}^{(2)} + 2b_{p-3-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j=0}^{p-2} \left(- \left(h^2 \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(3)} + (-k^2 + 2j - 2) b_{p-2-j}^{(2)} + (j-1) b_{p-2-j}^{(1)} \right) + \right. \right. \\ &+ h \left((2j+1)b_{p-2-j}^{(7)} + 4jb_{p-2-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} - hk \left(2hj \left(b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} \left. \right) + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-1} \left(-j \left(h \left(b_{p-1-j}^{(1)} + 2b_{p-1-j}^{(2)} \right) + b_{p-1-j}^{(7)} + 2b_{p-1-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + khj \left(b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_p^{(z,q)} &= \frac{1}{p(p-1)} \left(-2h(p-1)(p-2)d_{p-1}^{(z,q)} - h^2(p-2)(p-3)d_{p-2}^{(z,q)} + \right. \\ &+ \sum_{j=0}^{p-4} \left(-kh^3 b_{p-4-j}^{(9)} d_j^{(r,q)} - h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(6)} - k^2 \left(b_{p-4-j}^{(4)} + 2b_{p-4-j}^{(5)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-3} \left(-kh^2 \left(h(j+1) \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) + 2b_{p-3-j}^{(9)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\ &\quad \left. - h^2 \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(6)} - k^2 \left(b_{p-3-j}^{(4)} + 2b_{p-3-j}^{(5)} \right) \right) + jb_{p-3-j}^{(9)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-hk \left(h(2j+1) \left(b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) + b_{p-2-j}^{(9)} \right) d_j^{(r, q)} - \right. \\
 & - h \left(h\Omega^2 b_{p-2-j}^{(6)} - h \left(k^2 b_{p-2-j}^{(4)} + (2k^2 - j) b_{p-2-j}^{(5)} \right) + 2jb_{p-2-j}^{(9)} \right) d_j^{(z, q)} \Big) + \\
 & \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left(-jhk \left(b_{p-1-j}^{(4)} + b_{p-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(r, q)} - j \left(hb_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(9)} \right) d_j^{(z, q)} \right) \right) \\
 & \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 4}) .
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \chi_j(\xi) &= \frac{\psi_j(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \chi_{j+3}(\xi) = \frac{\psi_j(\xi)}{\psi_2(\xi)} \quad (j = \overline{1, 3}), \\
 \chi_{j+6}(\xi) &= \frac{\psi'_j(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \chi_9(\xi) = \frac{\psi'_2(\xi)}{\psi_2(\xi)}, \\
 \chi_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 9}), \quad (|\xi| < \delta).
 \end{aligned}$$

Для численной модели неоднородности (20-А), (21), (23-А) с учетом формально дополняющих разложения (34) определений $d_{-1}^{(s, q)} = 0$ ($s = r, z$; $q = \overline{1, 4}$), рекуррентные соотношения записываются так:

$$\begin{aligned}
 d_p^{(r, q)} &= \frac{1}{p(p-1)} \left(-h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(r, q)} - h^2(p-1)(p-3) d_{p-2}^{(r, q)} + \right. \\
 & + hk(p-1) d_{p-1}^{(z, q)} + kh^2 \left(2(p-2) d_{p-2}^{(z, q)} + h(p-3) d_{p-3}^{(z, q)} \right) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-4} \left(-h^4 \left(\Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} - k^2 a_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(r, q)} - 2kh^3 g_{p-4-j}^{(1)} d_j^{(z, q)} \right) + \quad (37) \\
 & + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-2h^2 \left(-g_{p-3-j}^{(1)} + h \left(\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} - k^2 a_{p-3-j}^{(1)} \right) \right) d_j^{(r, q)} - kh^2 \left(4g_{p-3-j}^{(1)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + h \left((j-2p+6) a_{p-3-j}^{(1)} - (j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} \right) \right) d_j^{(z, q)} \right) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left(\left(-h^2 \left(\Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - (k^2 + 2p - 2j - 4) a_{p-2-j}^{(1)} + (j+1)(p-j-2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2hg_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(r, q)} + 2kh \left(-g_{p-2-j}^{(1)} + h(j-2p+4) a_{p-2-j}^{(1)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + h(p-j-2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z, q)} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\left(-j(p-j) a_{p-j}^{(3)} + h(-p+j+1) \left((2j+1) a_{p-1-j}^{(3)} - 2a_{p-1-j}^{(1)} \right) \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\
& \quad \left. + hk \left((j-2p+2) a_{p-1-j}^{(1)} + (p-j-1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\
d_p^{(z,q)} & = \frac{1}{p(p-1)} \left(hk(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2 k (2p-3) d_{p-2}^{(r,q)} - h^3 k (p-2) d_{p-3}^{(r,q)} - \right. \\
& \quad \left. - h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(z,q)} - h^2(p-2)^2 d_{p-2}^{(z,q)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(-kh^3 b_{p-4-j}^{(3)} d_j^{(r,q)} - h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(2)} - k^2 b_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-kh^2 \left(h(p-j-3) a_{p-3-j}^{(3)} + h(j+1) b_{p-3-j}^{(1)} + 2b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - h^2 \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(2)} - k^2 b_{p-3-j}^{(1)} \right) + jb_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-2} \left(\left(-hk \left(h(2j+1) b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(3)} \right) + 2kh^2(-p+j+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(h^2 j (-p+j+2) a_{p-2-j}^{(3)} - h \left(h \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(2)} - k^2 b_{p-2-j}^{(1)} \right) + 2b_{p-2-j}^{(3)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\left(kh(-p+j+1) a_{p-1-j}^{(3)} - khjb_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-j(p-j) a_{p-j}^{(3)} - jb_{p-1-j}^{(3)} + 2hj(-p+j+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) \\
& \quad \left(p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 4} \right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi) & = \psi_1(\xi) \psi'_3(\xi), \quad \chi_1(\xi) = \frac{1}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_2(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_3(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \\
\phi_1(\xi) & = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(1)} \xi^n, \quad \chi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (|\xi| < \delta).
\end{aligned}$$

Для модели неоднородности (20-Б), (21), (23-Б) рекуррентные соотношения имеют схожий вид.

Набор частных решений (33), (34) позволяет определить базисное матричное решение уравнения (26) размерности 2×4 такого вида

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{basic})}(\xi) = [\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, 1)}(\xi) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, 4)}(\xi)]. \quad (38)$$

4. Общие решения. С использованием базисных решений (32) и (38) определяются общие решения уравнений (5) и (11) соответственно

$$\tilde{u}_\theta^{(TW, \text{general})}(x) = \left[\hat{\mathbf{U}}^{(TW, \text{basic})}(x) \mathbf{A} \right]_{1,1}, \quad (39)$$

где \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 2;

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{general})}(x) = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{basic})}(x) \mathbf{A}, \quad (40)$$

где \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 4.

В случае крутильных волн рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной ξ матричного оператора $\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(x)$. Для рассмотренных моделей неоднородности с учетом представлений (15) и (22) соответственно получаются матричные операторы

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} k\psi_1(\xi) & \psi_1(\xi) \left(h^{-1}d_\xi - \eta(\xi)^{-1} \right) \end{bmatrix}^T, \\ \hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} ke^{\psi_1(\xi)} & e^{\psi_1(\xi)} \left(h^{-1}d_\xi - \eta(\xi)^{-1} \right) \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$\tilde{\Sigma}^{(TW, \text{general})}(x) = \left(\left(\hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(TW, \text{basic})}(\xi) \right) \mathbf{A} \right) \Big|_{\xi=x}. \quad (41)$$

Аналогично, в случае волн продольно-сдвигового типа рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной ξ матричного оператора $\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(x)$. Для рассмотренных моделей неоднородности с учетом представлений (16), (23-А) и (23-Б) соответственно получаются матричные операторы

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} h^{-1}(\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi))d_\xi + \eta(\xi)^{-1}\psi_1(\xi) & -k\psi_1(\xi) \\ h^{-1}\psi_1(\xi)d_x + \eta(\xi)^{-1}(\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)) & -k\psi_1(\xi) \\ \psi_1(\xi)(h^{-1}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}) & -k(\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi)) \\ k\psi_2(\xi) & h^{-1}\psi_2(\xi)d_\xi \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} h^{-1}e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)} & -k(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)} \\ h^{-1}(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}e^{\psi_3(\xi)} & -k(1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)} \\ (1 - 2\psi_1(\xi))e^{\psi_3(\xi)}(h^{-1}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}) & -ke^{\psi_3(\xi)} \\ k\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} & h^{-1}\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)}d_\xi \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) &= \begin{bmatrix} h^{-1}(\psi_1(\xi) + 2)e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} & -k\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} \\ h^{-1}\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}(\psi_1(\xi) + 2)e^{\psi_3(\xi)} & -k\psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)} \\ \psi_1(\xi)e^{\psi_3(\xi)}(h^{-1}d_\xi + \eta(\xi)^{-1}) & -k(\psi_1(\xi) + 2)e^{\psi_3(\xi)} \\ ke^{\psi_3(\xi)} & h^{-1}e^{\psi_3(\xi)}d_\xi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$\tilde{\Sigma}^{(LSW, general)}(x) = \left(\left(\hat{M}^{(LSW)}(\xi) \cdot \hat{U}^{(LSW, basic)}(\xi) \right) \mathbf{A} \right) \Big|_{\xi=x}. \quad (42)$$

5. Дисперсионные соотношения. Граничные условия (7), (8) и (13), (14) с использованием соотношений (39), (41) и (40), (42) соответственно определяют дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа k и приведенной частоты Ω следующего вида

$$\Phi_{\Sigma}^{(TW)}(k, \Omega) = \det \left(\begin{bmatrix} \left[\left[\hat{M}^{(TW)}(\xi) \right]_{1,1} \cdot \hat{U}^{(TW, basic)}(\xi) \right] \\ \left[\left[\hat{M}^{(TW)}(\xi) \right]_{1,1} \cdot \hat{U}^{(TW, basic)}(\xi) \right] \end{bmatrix} \Big|_{\xi=-1} \right) = 0, \quad (43)$$

$$\Phi_U^{(TW)}(k, \Omega) = \det \left(\begin{bmatrix} \hat{U}^{(TW, basic)}(-1) \\ \hat{U}^{(TW, basic)}(1) \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (44)$$

и

$$\Phi_{\Sigma}^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left(\begin{bmatrix} \left(\left[\hat{M}^{(LSW)}(\xi) \right]_{[1,4],[1,2]} \cdot \hat{U}^{(LSW, basic)}(\xi) \right) \\ \left(\left[\hat{M}^{(LSW)}(\xi) \right]_{[1,4],[1,2]} \cdot \hat{U}^{(LSW, basic)}(\xi) \right) \end{bmatrix} \Big|_{\xi=-1} \right) = 0, \quad (45)$$

$$\Phi_U^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left(\begin{bmatrix} \hat{U}^{(LSW, basic)}(-1) \\ \hat{U}^{(LSW, basic)}(1) \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (46)$$

6. Численный эксперимент. Анализ дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих волн продольно-сдвигового типа в свободном протяженном полом цилиндре ($h = 0.3$) проводился для случаев однородного материала

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}, \quad (47)$$

а также неоднородных материалов, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик которых были заданы так:

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}(1 + 0.2x^3), \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (48\text{-A})$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}(1 + 0.2x^3), \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (48\text{-Б})$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}(1 + 0.2x^3). \quad (48\text{-В})$$

Здесь использовались физико-механические характеристики алюминия

$$\tilde{\lambda}^{(Al)} = 5.91, \quad \tilde{\mu}^{(Al)} = 2.61, \quad \tilde{\rho}^{(Al)} = 2.7, \quad C_* = 10^{10} \text{ H/m}^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг/m}^3.$$

Выбор функциональных законов в соотношениях (48-А)–(48-В) был обусловлен задачей исследовать влияние на характеристики исследуемого волнового

Нормальные волны в полых изотропных цилиндрах с многофакторной неоднородностью

процесса фактора неоднородности по каждой физико-механической характеристике изотропного материала отдельно. Далее волновод, задаваемый физико-механическими характеристиками (47), будет называться однородным, а характеристиками (48-А)–(48-В) – соответственно неоднородным волноводом А, Б, В.

Для неоднородных волноводов А–В были исследованы достаточные условия несильной радиальной неоднородности (18), (24) и погрешность аппроксимации в случае численной модели неоднородности. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Материал	Модели неоднородности		
	Аналитическая (16)	Численная (20-А), (21), (23-А) (N=4)	Численная (20-Б), (21), (23-Б) (N=4)
Однор.	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$
А	$\varepsilon = 0, \delta \approx 2.11$	$\varepsilon \approx 0.004, \delta \approx 1.98$	$\varepsilon = 0, \delta \approx 2.11$
Б	$\varepsilon = 0, \delta \approx 1.71$	$\varepsilon \approx 0.002, \delta \approx 1.95$	$\varepsilon \approx 0.007, \delta \approx 1.86$
В	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$	$\varepsilon = 0, \delta = \infty$

На основе представленной в таблице 1 информации, а также тестовой оценки временных затрат, для проведения численного эксперимента были выбраны случаи: однородный волновод – аналитическая модель; неоднородный волновод А – численная модель (20-Б), (21), (23-Б), ($N = 4$); неоднородный волновод Б – численная модель (20-А), (21), (23-А), ($N = 4$); неоднородный волновод В – аналитическая модель.

В области изменения параметров $k \in [0, 30]$ и $\Omega \in [0, 30]$ для однородного волновода и неоднородных волноводов А–В были построены фрагменты спектров бегущих волн продольно-сдвигового типа. Указанные спектры представлены соответственно на рисунках 1–3.

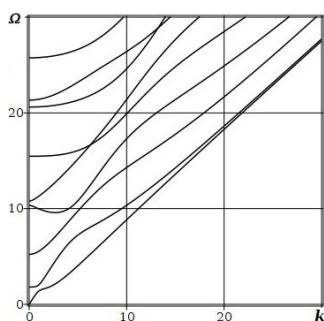


Рис. 1. Спектр однородного волновода

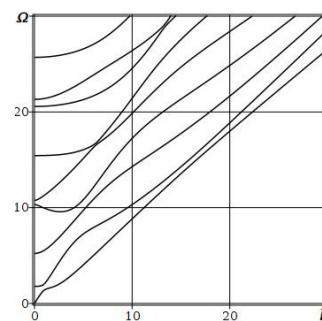


Рис. 2. Спектр неоднородного волновода Б

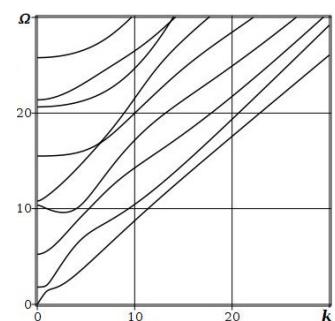


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода В

Сравнение представленных фрагментов спектра позволяет сделать следующие выводы. Неоднородность только по упругому модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 2) и плот-

ности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 3) приводит к качественной перестройке спектральной картины для низших мод. При этом неоднородность только по упругому модулю $\tilde{\lambda}(x)$ не выявила видимых изменения спектра по сравнению с однородным волноводом. Следует также отметить характерную локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам спектра для неоднородных волноводов только по упругому модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 2) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 3).

С целью анализа количественных различий полученных фрагментов спектров использовалась функция сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left(\Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (48)$$

На рисунках 4–6 представлены результаты сопоставительного анализа поведения низших пяти мод фрагментов спектров однородного и неоднородного волноводов А–В. Номера сопоставляемых мод спектров приведены в нижней части рисунков.

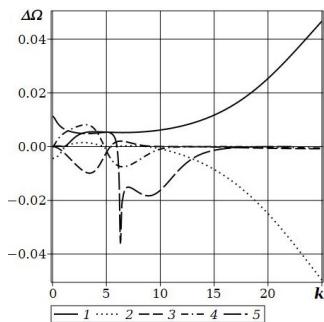


Рис. 4. Сопоставление парных мод спектров неоднородного А и однородного волноводов

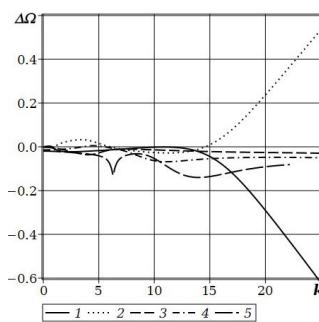


Рис. 5. Сопоставление парных мод спектров неоднородного Б и однородного волноводов

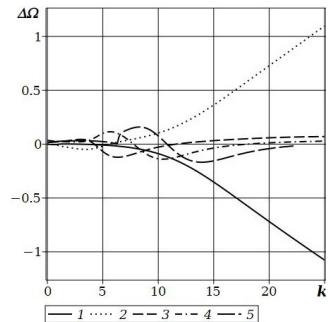


Рис. 6. Сопоставление парных мод спектров неоднородного В и однородного волноводов

Прежде всего следует отметить, что количественные значения функции $\Delta\Omega(k)$ при сопоставлении спектров однородного и неоднородного по модулю $\tilde{\lambda}(x)$ волновода (рис. 4) в абсолютных значениях оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении однородного и неоднородных только по модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 5) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 6) волноводов. Наблюдается также ярко выраженная тенденция смещения в коротковолновой высокочастотной области первой моды в область более низких частот для неоднородных только по модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 5) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 6) волноводов по сравнению с однородным волноводом, а также тенденция смещения второй моды в область более высоких частот для указанных неоднородных волноводов по сравнению с однородным волноводом. При этом отмеченные тенденции поведения первых двух мод проявляются с точностью до наоборот для неоднородного

только по модулю $\tilde{\lambda}(x)$ волновода (рис. 4).

Для представленных на рисунках 1–3 фрагментов спектров построены графики фазовых (рис. 7–9) и для пяти низших мод – групповых (рис. 10–12) скоростей. Приведенные на графиках фазовая c_p и групповая c_g скорости нормированы величиной $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$.

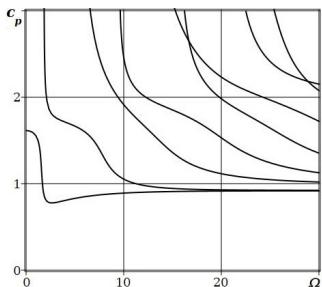


Рис. 7. Фазовые скорости волн в однородном волноводе

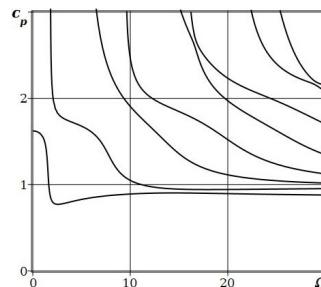


Рис. 8. Фазовые скорости волн в неоднородном Б волноводе

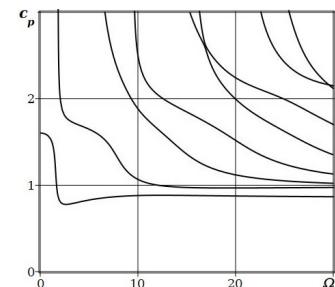


Рис. 9. Фазовые скорости волн в неоднородном В волноводе

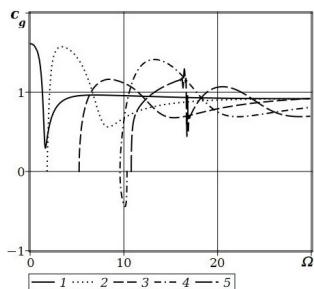


Рис. 10. Групповые скорости волн в однородном волноводе

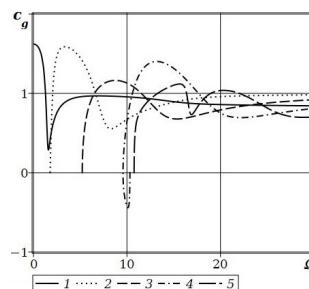


Рис. 11. Групповые скорости волн в неоднородном Б волноводе

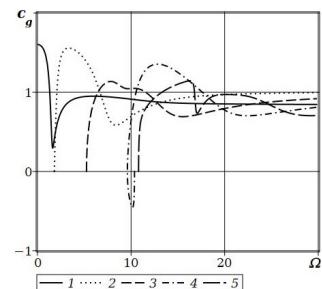


Рис. 12. Групповые скорости волн в неоднородном В волноводе

Представленные графики фазовых скоростей (рис. 7–9) иллюстрируют ранее отмеченную тенденцию локализации асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам спектра для неоднородных волноводов только по упругому модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 2) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 3). На графиках групповых скоростей (рис. 10–12) ярко выражен эффект обратной волны для четвертой моды спектров всех исследованных волноводов.

Заключение. Результатом представленных в статье исследований являются построенные на основе введенных моделей функциональной многофакторной радиальной неоднородности изотропного материала полого цилиндрического волновода аналитические базисные частные решения для двух случаев осесимметричных волновых процессов крутильного и продольно-сдвигового типов, а также полученные в процессе проведения численного эксперимента выводы

о влиянии неоднородности на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих нормальных волн продольно-сдвигового типа.

Исследования проводились в ФГБОУВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Моисеенко И.А.* Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 31–53.
2. *Моисеенко И.А.* Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134–146.
3. *Моисеенко И.А.* Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 27–41.
4. *Шульга Н.А.* Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 9. – С. 14–18.

A.I. Dzundza, V.A. Moiseenko, I.A. Moiseenko, R.N. Neskorodev

Axisymmetric normal waves in extended hollow cylinders with a multifactorial functional radial inhomogeneity of an isotropic material.

The article considers the problem of propagation of axisymmetric elastic normal waves in extended functionally-gradient isotropic cylinders of a concentric ring section. The basic sets of analytical partial solutions for the cases of torsional and longitudinal-shear types of waves are constructed. Various aspects of the influence of the radial inhomogeneity of the waveguide material on the topology of dispersion spectra, phase and group velocities of traveling waves are studied.

Keywords: *functional-gradient material, multifactor heterogeneity, hollow cylindrical waveguide, isotropy, normal waves, analytical basis partial solutions, dispersion spectrum, phase velocity, group velocity.*

*Статья поступила в редакцию 05.11.2025;
доработана 18.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-121-132

EDN:MPPMRI



©2025. Е.С. Глушанков

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В КОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В работе представлено решение задачи определения термоапряженного состояния конечной многосвязной пластинки из анизотропного материала, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, при действии сосредоточенных источников тепла. Решение задачи основано на использовании конформных отображений, комплексных потенциалов и метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также распределения источников тепла на термоапряженное состояние пластинки.

Ключевые слова: многосвязная анизотропная пластинка, конвективный теплообмен, сосредоточенные источники тепла, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В современной науке и технике в качестве элементов различных конструкций широко используются тонкие пластинки, изготовленные из анизотропных материалов. Эти пластинки могут содержать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. Под действием тепловых или силовых полей в пластинках около концентраторов могут возникать значительные напряжения, что следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. На данный момент решено множество различных задач о влиянии тепловых полей на термоапряженное состояние изотропных и анизотропных упругих тел [1–5], в т.ч. находящихся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой [6–9], при действии сосредоточенных источников тепла [10].

В данной статье представлено решение задачи об определении термоапряженного состояния конечной многосвязной пластинки из анизотропного материала при действии в ее внутренних точках сосредоточенных источников тепла, когда на контурах отверстий имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Решение задачи построено с использованием конформных отображений, функций обобщенной комплексной переменной, метода наименьших квадратов.

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

С помощью проведенных численных исследований для пластинок в виде кругового диска и концентрического кольца установлены закономерности влияния геометрических характеристик пластиинки, свойств материала пластиинки, характеристик конвективного теплообмена и расположения сосредоточенных источников тепла на термоанпряженное состояние пластиинки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим конечную многосвязную пластиинку из анизотропного материала, занимающую область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$) (рис. 1). Будем полагать, что внешний контур L_0 полностью лежит внутри формального эллиптического контура L_0^+ . Центры эллиптических контуров L_0^+ и L_l ($l = \overline{1, L}$) расположены в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ ($l = \overline{0, L}$), полуоси этих контуров равны a_l и b_l , углы поворота – φ_l . На контурах пластиинки имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами h_l с внешними средами, температуры которых равны \mathfrak{T}_l . Контуры не подкреплены либо жестко подкреплены. Во внутренних точках пластиинки $O_r^0(x_{0r}^0, y_{0r}^0)$ ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные источники тепла интенсивности q_r^0 .

Будем считать, что задача дана в несвязанной постановке. Тогда решение задачи термоупругости сводится к последовательному решению сперва задачи теплопроводности, а затем – собственно задачи термоупругости. Для решения указанных задач будем использовать теорию функций комплексной переменной.

В этом случае решение задачи теплопроводности сводится к определения комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$ из граничных условий этой задачи. После определения функции $F_3(z_3)$ значения основных характеристик температурного поля (относительной температуры T , плотностей потока тепла q_x, q_y) в точках пластиинки можно определять по формулам [4, 5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa(\mu_3, -1) F'_3(z_3), \quad (2)$$

где $\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$; μ_3 – корень характеристического уравнения теплопроводности [4, 5, 9]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (3)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластиинки.

Решение задачи термоупругости сводится к определению комплексных потенциалов термоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из граничных условий этой задачи.

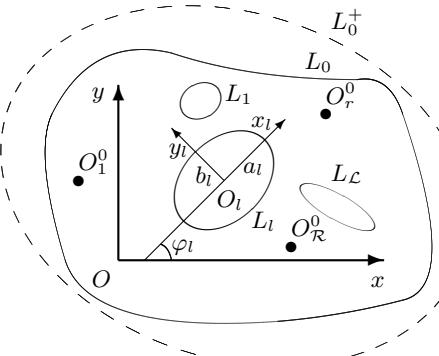


Рис. 1

После определения функций $\Phi_k(z_k)$ значения основных характеристик термо-напряженного состояния (напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, перемещений u, v) в точках пластиинки можно определять по формулам [4,5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k), \quad (4)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k). \quad (5)$$

Здесь μ_k ($k = \overline{1, 2}$) – корни характеристического уравнения теории упругости [4,5,9]

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22};$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3};$$

$$q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3};$$

$$r_3 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4a}(\mu_3)};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2;$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3;$$

a_{ij} – коэффициенты деформации материала пластиинки; α_i – коэффициенты линейного теплового расширения материала пластиинки; δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Построение комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) определены в многосвязных областях S_3 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [4,5,9]

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

Для конечной области эти функции принимают вид [4,5,9]

$$F_3(z_3) = N_3(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3); \quad (9)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} a_{kl n} \varphi_{kl n}(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$N_3(z_3) = \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} D_{3r}^0 w_{3r}^0(z_3);$$

$D_{3r}^0 = -q_r^0/4\pi\kappa$; $w_{3r}^0(z_3) = \ln(z_3 - z_{3r}^0)$; $z_{3r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_3 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) точкам O_r^0 ; D_{3l} – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$; z_{3l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{3ln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности;

$$\varphi_{30n}(z_k) = (z_k - z_{3l}) / R_{3l}; \quad \varphi_{3ln}(z_k) = \zeta_{3l}^{-n} (l = \overline{1, n});$$

ζ_{3l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) w_{kr}^0(z_k);$$

$A_{kl}, B_{kl}, A_{kr}^0, B_{kr}^0$ – постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kl} = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i A_{3l},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kl} = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i B_{3l},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kr}^0 = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i A_{3r}^0,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kr}^0 = -2 \operatorname{Re} (1, \mu_3, p_3, q_3) i B_{3r}^0;$$

$A_{3l} = r_3 D_{3l}$; $B_{3l} = r_3 (c_{3l1} R_{3l} - D_{3l} z_{3l})$; $A_{3r}^0 = r_3 D_{3r}^0$; $B_{3r}^0 = -r_3 D_{3r}^0 z_{3r}^0$; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $w_{kr}^0(z_k) = \ln(z_k - z_{kr}^0)$; $z_{3r}^0 = x_{0r}^0 + \mu_3 y_{0r}^0$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) точкам O_r^0 ; a_{klm} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоупругости;

$$\varphi_{k0n}(z_k) = (z_k - z_{kl}) / R_{kl}; \quad \varphi_{klm}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n} (l = \overline{1, n});$$

ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5, 9]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе Oxy координат –

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловой параметр уравнения эллипса.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 3}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4, 5, 9]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_3(z_3)$ должна удовлетворять граничному условию [9]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_3(\tau_3) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_3) F'_3(\tau_3)) = h_l \mathfrak{T}_l, \quad (12)$$

где τ_3 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (7); $\delta_{3,s}(\tau_3) = d\tau_3/ds$, s – дуга контура отверстия.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоупругости [4, 5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (d_{kl1}, d_{kl2}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi'_k(\tau_k) &= \left(\frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau) \right) - \\ &- 2 \operatorname{Re} (d_{3l1}, d_{3l2}) \delta_{3,s}(\tau_3) r_3 F_3(\tau_3), \end{aligned} \quad (13)$$

где τ_k ($k = \overline{1, 2}$) – точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (8); τ – аффикс граничной точки; $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$. Для неподкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (u_l(\tau), v_l(\tau));$$

c_{lj} – неизвестные постоянные интегрирования; $u_l(\tau), v_l(\tau)$ – заданные на границе значения перемещений.

3. Решение задачи для бесконечной многосвязной пластинки. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные c_3, D_{3l}, c_{3ln} , a_{kln} , входящие в функции (9) и (10), можно определять из граничных условий

(12) и (13) с помощью метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выбираем систему точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых следует минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (9) в граничное условие (12) для определения неизвестных постоянных c_3 , D_{3l} , c_{3ln} получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_i c_3 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_i w_{3l}(\tau_{3im}) + i\kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) w'_{3l}(\tau_{3im})) D_{3l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} (h_i \varphi_{3ln}(\tau_{3im}) + i\kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) \varphi'_{3ln}(\tau_{3im})) c_{3ln} = \\ & = h_i \mathfrak{T}_l - 2 \operatorname{Re} (h_i N_3(\tau_{3im}) + i\kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) N'_3(\tau_{3im})) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\tau_{3im} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$. После решения системы (14) с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные c_3 , D_{3l} , c_{3ln} , а, следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (9), будут известны. По известной функции (9) можно в любой точке пластиинки определять значения основных характеристик температурного поля по формулам (1), (2) [4, 5, 9].

Задача термоупругости. При подстановке функций (9) и (10) в граничные условия (13) для определения неизвестных постоянных a_{klm} получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\operatorname{sgn} l}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{klm}(\tau_{kim}) a_{klm} = \\ & = \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{3ip} \delta_{3,s}(\tau_{3im}) r_3 F_3(\tau_{3im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$, τ_{im} – аффикс точки M_{im} . После решения системы (15) с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные a_{klm} , а, следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (10), будут известны. По известным функциям (10) можно в любой точке пластиинки определять значения основных характеристик термонапряженного состояния по формулам (4), (5) [4, 5, 9].

4. Численные исследования. Были проведены численные исследования для пластиинок из следующих материалов:

– стеклотекстолит КАСТ–В изотропный модифицированный (материал М1) [3, 9]:

$$a_{11} = 74,92a_0, \quad a_{22} = 74,92a_0, \quad a_{12} = -8,99a_0, \quad a_{66} = 167,79a_0,$$

$$\alpha_1 = 3,0\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,0\alpha_0, \quad k_{11} = 144,00k_0, \quad k_{22} = 144,00k_0.$$

— стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [3] модифицированный (материал М2) [9]:

$$a_{11} = 272,17a_0, \quad a_{22} = 1019,37a_0, \quad a_{12} = -76,15a_0, \quad a_{66} = 2548,42a_0, \\ \alpha_1 = 0,7\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,8\alpha_0, \quad k_{11} = 2,79k_0, \quad k_{22} = 1,21k_0.$$

Здесь

$$a_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad \alpha_0 = 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \quad k_0 = 10^{-2} \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}.$$

При проведении расчетов количество членов в представляющих функции (9), (10) рядах и количество «коллокационных» точек M_{im} на контурах L_i увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого в решаемых задачах для случая материала М1, являющегося изотропным, необходимо было в рядах Лорана сохранять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 700 до 1000 «коллокационных» точек, а для случая материала М2, обладающего сильной анизотропией, необходимо было в рядах сохранять от 70 до 150 членов, на каждом из контуров брать от 700 до 1500 «коллокационных» точек.

В таблице 1 для кругового диска из материала М1 радиуса r_0 ($a_0 = b_0 = r_0$), в которой на расстоянии d от центра действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 , измеряемой в $\text{Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$ (рис. 2), когда через контур диска действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температуры $\mathfrak{T}_0 = 0 \text{ К}$ с коэффициентом теплообмена $h_0 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в некоторых точках контура диска на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от hr_0 для некоторых значений d/r_0 .

В таблице 2 для аналогичных случаев приведены значения напряжений σ_s/q_1^0 для пластинки из материала М2, а в таблице 3 — для пластины из материала М2 с поворотом осей анизотропии на угол $\pi/2$ рад. (обозначим через М2*).

В таблице 4 для концентрического кольца из материала М2* с внешним радиусом r_0 и внутренним радиусом r_1 ($a_0 = b_0 = r_0, a_1 = b_1 = r_1$), в котором на расстоянии d ($r_1 < d < r_0$) от центра кольца действует один сосредоточенный источник тепла интенсивности q_1^0 (рис. 3), когда через контуры кольца действует конвективный теплообмен с внешней средой относительной температурой $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_1 = 0 \text{ К}$ с коэффициентом теплообмена $h_0 = h_1 = h$, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q_1^0 в некоторых точках внутреннего и внешнего контуров кольца для некоторых значений hr_0 , когда $r_1/r_0 = 0,5$.

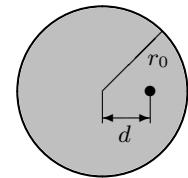


Рис. 2

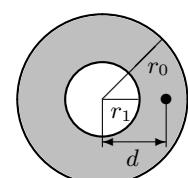


Рис. 3

Таблица 1. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска (материал M1)

θ , рад.	Значение d/r_0				
	0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8
0	0, 022	0, 032	0, 043	0, 057	0, 072
$\pi/6$	0, 022	0, 029	0, 033	0, 028	0, 011
$\pi/3$	0, 022	0, 024	0, 021	0, 012	0, 003
$\pi/2$	0, 022	0, 020	0, 013	0, 007	0, 002
$2\pi/3$	0, 022	0, 016	0, 010	0, 005	0, 001
$5\pi/6$	0, 022	0, 015	0, 008	0, 004	0, 001
π	0, 022	0, 014	0, 008	0, 004	0, 001

Таблица 2. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска (материал M2)

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0				
		0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8
0, 01	0	0, 114	0, 157	0, 201	0, 239	0, 261
	$\pi/6$	0, 100	0, 128	0, 135	0, 103	0, 023
	$\pi/3$	0, 097	0, 106	0, 082	0, 036	-0, 003
	$\pi/2$	0, 101	0, 084	0, 048	0, 013	-0, 008
	$2\pi/3$	0, 097	0, 067	0, 033	0, 004	-0, 013
	$5\pi/6$	0, 100	0, 065	0, 031	0, 002	-0, 018
	π	0, 114	0, 072	0, 034	0, 002	-0, 021
0, 1	0	0, 123	0, 168	0, 215	0, 262	0, 298
	$\pi/6$	0, 108	0, 137	0, 147	0, 118	0, 042
	$\pi/3$	0, 104	0, 114	0, 091	0, 046	0, 009
	$\pi/2$	0, 108	0, 092	0, 056	0, 022	0, 002
	$2\pi/3$	0, 104	0, 075	0, 041	0, 014	-0, 002
	$5\pi/6$	0, 108	0, 074	0, 040	0, 012	-0, 005
	π	0, 123	0, 081	0, 044	0, 014	-0, 006
1	0	0, 127	0, 174	0, 224	0, 276	0, 327
	$\pi/6$	0, 112	0, 141	0, 152	0, 124	0, 048
	$\pi/3$	0, 107	0, 117	0, 095	0, 050	0, 012
	$\pi/2$	0, 110	0, 094	0, 058	0, 025	0, 005
	$2\pi/3$	0, 107	0, 078	0, 044	0, 017	0, 001
	$5\pi/6$	0, 112	0, 077	0, 044	0, 017	0, 001
	π	0, 127	0, 085	0, 048	0, 019	0, 001
10	0	0, 128	0, 175	0, 225	0, 278	0, 333
	$\pi/6$	0, 113	0, 142	0, 153	0, 125	0, 049
	$\pi/3$	0, 107	0, 117	0, 095	0, 050	0, 012
	$\pi/2$	0, 111	0, 094	0, 059	0, 025	0, 005
	$2\pi/3$	0, 107	0, 078	0, 044	0, 017	0, 002
	$5\pi/6$	0, 113	0, 078	0, 044	0, 017	0, 001
	π	0, 128	0, 085	0, 049	0, 019	0, 002
∞	0	0, 128	0, 175	0, 225	0, 279	0, 334
	$\pi/6$	0, 113	0, 142	0, 153	0, 125	0, 049
	$\pi/3$	0, 107	0, 117	0, 095	0, 050	0, 012
	$\pi/2$	0, 111	0, 094	0, 059	0, 025	0, 005
	$2\pi/3$	0, 107	0, 078	0, 044	0, 017	0, 002
	$5\pi/6$	0, 113	0, 078	0, 044	0, 017	0, 001
	π	0, 128	0, 085	0, 049	0, 020	0, 002

Действие сосредоточенных источников тепла

Таблица 3. Значения σ_s/q_1^0 в точках контура диска (материал M2*)

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0				
		0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8
0, 01	0	0, 101	0, 150	0, 223	0, 338	0, 539
	$\pi/6$	0, 097	0, 134	0, 172	0, 190	0, 136
	$\pi/3$	0, 100	0, 122	0, 121	0, 085	0, 046
	$\pi/2$	0, 114	0, 099	0, 069	0, 043	0, 026
	$2\pi/3$	0, 100	0, 073	0, 049	0, 031	0, 020
	$5\pi/6$	0, 097	0, 067	0, 044	0, 028	0, 018
	π	0, 101	0, 067	0, 043	0, 027	0, 017
0, 1	0	0, 108	0, 158	0, 230	0, 339	0, 517
	$\pi/6$	0, 104	0, 143	0, 180	0, 190	0, 119
	$\pi/3$	0, 108	0, 131	0, 126	0, 083	0, 034
	$\pi/2$	0, 123	0, 106	0, 072	0, 040	0, 018
	$2\pi/3$	0, 108	0, 078	0, 050	0, 028	0, 013
	$5\pi/6$	0, 104	0, 071	0, 045	0, 025	0, 011
	π	0, 108	0, 071	0, 044	0, 025	0, 011
1	0	0, 110	0, 162	0, 234	0, 340	0, 504
	$\pi/6$	0, 107	0, 147	0, 183	0, 190	0, 110
	$\pi/3$	0, 112	0, 135	0, 129	0, 082	0, 029
	$\pi/2$	0, 127	0, 109	0, 073	0, 038	0, 014
	$2\pi/3$	0, 112	0, 080	0, 050	0, 027	0, 010
	$5\pi/6$	0, 107	0, 072	0, 045	0, 024	0, 009
	π	0, 110	0, 072	0, 044	0, 023	0, 009
10	0	0, 111	0, 162	0, 235	0, 340	0, 501
	$\pi/6$	0, 107	0, 147	0, 184	0, 190	0, 109
	$\pi/3$	0, 113	0, 136	0, 129	0, 082	0, 029
	$\pi/2$	0, 128	0, 110	0, 073	0, 038	0, 014
	$2\pi/3$	0, 113	0, 080	0, 050	0, 026	0, 010
	$5\pi/6$	0, 107	0, 073	0, 045	0, 024	0, 009
	π	0, 111	0, 072	0, 044	0, 023	0, 009
∞	0	0, 111	0, 162	0, 235	0, 340	0, 501
	$\pi/6$	0, 107	0, 147	0, 184	0, 190	0, 109
	$\pi/3$	0, 113	0, 136	0, 130	0, 082	0, 029
	$\pi/2$	0, 128	0, 110	0, 073	0, 038	0, 014
	$2\pi/3$	0, 113	0, 081	0, 050	0, 026	0, 010
	$5\pi/6$	0, 107	0, 073	0, 045	0, 024	0, 009
	π	0, 111	0, 072	0, 044	0, 023	0, 009

Выводы. Из представленных данных видно, что в результате действия сосредоточенных источников тепла в пластинке могут возникать значительные концентрации напряжений. При этом, чем ближе источник тепла к контуру пластиинки, тем более высокими оказываются значения напряжений около этого контура. В то же время, на значения напряжений в пластинке также влияют свойства ее материала и характеристики конвективного теплообмена с внешней средой.

Таблица 4. Значения σ_s/q_1^0 в точках контуров кольца (материал M2*)

hr_0	θ , рад.	Значение d/r_0							
		0, 6	0, 7	0, 8	0, 9	0, 6	0, 7	0, 8	0, 9
		Внутренний контур				Внешний контур			
0, 01	0	0, 545	0, 404	0, 243	0, 100	0, 203	0, 320	0, 472	0, 676
	$\pi/6$	-0, 219	-0, 162	-0, 106	-0, 063	0, 116	0, 118	0, 097	0, 060
	$\pi/3$	-0, 125	-0, 096	-0, 063	-0, 038	0, 083	0, 062	0, 041	0, 026
	$\pi/2$	-0, 047	-0, 032	-0, 016	-0, 005	0, 036	0, 027	0, 016	0, 009
	$2\pi/3$	0, 033	0, 031	0, 028	0, 025	-0, 017	-0, 016	-0, 015	-0, 013
	$5\pi/6$	0, 083	0, 071	0, 056	0, 044	-0, 040	-0, 035	-0, 028	-0, 022
	π	0, 189	0, 158	0, 121	0, 091	-0, 039	-0, 033	-0, 026	-0, 021
0, 1	0	0, 653	0, 489	0, 305	0, 139	0, 152	0, 279	0, 432	0, 619
	$\pi/6$	-0, 123	-0, 092	-0, 052	-0, 018	0, 069	0, 080	0, 062	0, 025
	$\pi/3$	-0, 067	-0, 053	-0, 029	-0, 010	0, 046	0, 035	0, 019	0, 006
	$\pi/2$	-0, 031	-0, 024	-0, 012	-0, 003	0, 021	0, 016	0, 009	0, 003
	$2\pi/3$	0, 010	0, 009	0, 006	0, 004	-0, 006	-0, 005	-0, 004	-0, 003
	$5\pi/6$	0, 036	0, 030	0, 019	0, 009	-0, 017	-0, 014	-0, 009	-0, 004
	π	0, 089	0, 073	0, 045	0, 020	-0, 017	-0, 014	-0, 009	-0, 004
10	0	0, 680	0, 510	0, 310	0, 123	0, 119	0, 259	0, 412	0, 578
	$\pi/6$	-0, 065	-0, 059	-0, 035	-0, 012	0, 043	0, 063	0, 050	0, 016
	$\pi/3$	-0, 036	-0, 035	-0, 020	-0, 006	0, 024	0, 022	0, 012	0, 003
	$\pi/2$	-0, 017	-0, 016	-0, 009	-0, 002	0, 011	0, 010	0, 006	0, 002
	$2\pi/3$	0, 005	0, 005	0, 004	0, 002	-0, 003	-0, 003	-0, 002	-0, 001
	$5\pi/6$	0, 020	0, 019	0, 012	0, 004	-0, 009	-0, 009	-0, 006	-0, 002
	π	0, 048	0, 047	0, 029	0, 010	-0, 009	-0, 009	-0, 006	-0, 002

Следует отметить, что когда коэффициент теплообмена $hr_i < 0, 01$, то контур пластиинки следует считать теплоизолированным (состояние 1), а когда $hr_i > 100$, то можно полагать, что на контуре пластиинки задана температура, равная температуре внешней среды (состояние 2).

Установлено, что наименьшая концентрация напряжений в окрестности контура диска имеет место для случая, когда источник тепла находится в центре диска. При перемещении источника тепла к краю диска значения напряжений резко возрастают в области сближения, а в противоположной области наблюдается резкое снижение значений напряжений.

Численными исследованиями установлено, что значения напряжений в диске из изотропного материала М1 не зависят от значения коэффициента теплообмена, тогда как в дисках из анизотропных материалов М2 и М2* зависимость от значения коэффициента теплообмена является существенной. В пластиинках из материалов М2 и М2* концентрация напряжений увеличивается с ростом значения hr_0 . Когда источник тепла близок к центру диска, то рост максимальных значений напряжений при переходе от состояния 1 к состоянию 2 составлял около 10%. При приближении источника тепла к краю диска рост максимальных значений напряжений становился более значительным в случае диска из мате-

риала М2 или же сменялся понижением значений напряжений в случае диска из материала М2*.

Концентрация напряжений в пластинках из материалов М2 и М2* значительно выше, чем в пластинке из материала М1. Это связано с тем, что значения коэффициентов теплопроводности у материалов М2 и М2* меньше, чем у материала М1. При этом, в диске из материала М2* наблюдаемая концентрация напряжений была выше, чем у материала М2. Это связано с тем, что перемещение источника тепла в диске из материала М2* осуществлялось в направлении, в котором у этого материала ниже значение коэффициента теплопроводности и выше значение коэффициента теплового расширения.

Добавление отверстий в пластинке приводит к существенному росту напряжений во всей пластинке. При этом, наибольшая концентрация напряжений возникает около контура, являющегося самым близким к источнику тепла. Из других данных следует, что уменьшение расстояния между контурами пластинки приводит к заметному росту концентрации напряжений в зоне между этими контурами и менее существенным изменениям вне этой зоны, причем чем меньше значения hr_i , тем более резким является рост концентрации напряжений.

Исследования проводились в ФГБОУВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Мотовиловец И.А.* Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров // К.; Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
4. *Калоеров С.А.* Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
5. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
6. *Parihar K.S.* Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
7. *Gaikwad K.R.* Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
8. *Бондаренко Н.С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае произвольного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2018. – № 1–2 (62–63). – С. 35–44.
9. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 39–47. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-39-47. – EDN: FLTAHT.
10. *Глушанков Е.С.* Действие сосредоточенных источников тепла в конечной многосвязной анизотропной пластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2025. – № 2 (91). – С. 52–63. – DOI: 10.24412/0136-4545-2025-2-52-63. – EDN: PJVLFE.

11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

E.S. Glushankov

The concentrated heat sources' action in a finite multiply connected anisotropic plate under the convective heat transfer condition.

In the paper, a solution is presented for the problem of evaluation of thermo-stress state of finite multiply connected anisotropic plate being under convective heat transfer condition, acted with concentrated heat sources. Through the numerical studies, the effects of plates's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the distribution of heat sources on the thermo-stress state of the plate were investigated.

Keywords: *multiply connected anisotropic plate, convective heat transfer, concentrated heat sources, thermal stresses, complex potentials.*

*Статья поступила в редакцию 06.11.2025;
доработана 19.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-133-149

EDN:OXEWBB



©2025. М.А. Полянский¹

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

Решена задача электроупругости для пьезополуплоскости с внутренними эллиптическими отверстиями и прямолинейными разрезами-трещинами. Задача решена с использованием комплексных потенциалов плоской задачи электроупругости. Функции, голоморфные вне эллипсов и разрезов-трещин, представлены рядами Лорана, функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, методом интегралов типа Коши выражены через функции, получаемые от функций, голоморфных вне отверстий и разрезов, при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе. Затем определение неизвестных коэффициентов рядов из граничных условий на контурах отверстий и разрезов обобщенным методом наименьших квадратов приведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с отверстиями и трещинами с установлением закономерностей изменения электроупругого состояния полуплоскости в зависимости от ее материалов, геометрических характеристик отверстий и трещин.

Ключевые слова: электроупругая пластинка, полуплоскость, отверстия, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши, обобщенный метод наименьших квадратов.

Введение. Пьезопластинки, содержащие отверстия и разрезы (трещины), являются распространенными конструкционными элементами современных научно-технических устройств [1–4]. Около отверстий и трещин в таких пластинках под действием различных механических сил и электрических полей могут возникать высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Наиболее достоверные результаты по определению электроупругого состояния (ЭУС) пластин с отверстиями и трещинами получаются при решении соответствующих задач методами, использующими комплексные потенциалы [5]. К настоящему времени с использованием последних функций решены широкие классы задач для конечных и бесконечных пластин с произвольными отверстиями и трещинами [5]. Для случая многосвязной полуплоскости наиболее достоверные результаты получаются, если к граничным условиям на прямолинейной границе применить метод интегралов типа Коши, что позволяет удовлетворять этим условиям точно. При приближенном

¹Полянский Максим Алексеевич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: m4xpolyan@yandex.ru

Polianetskii Maxim Alekseevich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

же удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин наиболее точные результаты дает использование обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК) [6–8].

В данной работе с использованием комплексных потенциалов, метода интегралов типа Коши при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе и ОМНК при удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин дано решение задачи электроупругости для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым отверстием, с прямолинейным разрезом.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим занимающую нижнюю полуплоскость с эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, L}$) и полуосами a_l, b_l (рис. 1) пьезопластиинку, отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы L^+ и осью Ox , параллельной прямолинейной границе. Будем считать, что прямолинейная граница не загружена механическими и электрическими воздействиями, контуры отверстий L_l загружены самоуравновешенными внешними усилиями и электрическими индукциями, на бесконечности заданы напряжения σ_x^∞ и проекция вектора электрической индукции D_x^∞ (или напряженности E_x^∞), остальные напряжения, индукции (напряженности) и угол жесткого поворота полуплоскости, как целой, равны нулю, т. е. $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$ (или $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$).

Отнесем эллипсы L_l к локальным системам координат $O_l x_l y_l$ с началами в их центрах и направлениями осей Ox_l вдоль полуосей эллипсов a_l , так что в системе $O_l x_l y_l$ параметрическое уравнение эллипса L_l будет таким:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

Если задачу по определению ЭУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электроупругости [5], то она сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

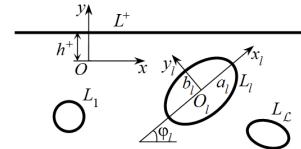


Рис. 1.

где μ_k – корни характеристического уравнения 6-го порядка

$$l_{4s}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}^2(\mu) = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$ – полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}; \end{aligned} \quad (5)$$

s_{ki} – коэффициенты деформации материала пластинки, измеренные при постоянных индукциях электрического поля; g_{ki} – пьезоэлектрические коэффициенты деформации и напряженности электрического поля, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ki} – коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных значениях напряжений.

Границные условия на контуре L_l (механические и электрические) для определения комплексных потенциалов имеют вид [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} \Phi_k(t_k) = f_{il}(t), \quad (6)$$

в котором в случае механических граничных условий (при $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (1, -\mu_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= \mp \int_0^s (Y_{nl}, X_{nl}) ds + (c_{1l}, c_{2l}), \end{aligned} \quad (7)$$

если на границе заданы усилия Y_{nl} , X_{nl} , и

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (p_k, q_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= (u_l^* + \omega_{3l}y + c_{1l}, v_l^* - \omega_{3l}x + c_{2l}), \end{aligned} \quad (8)$$

когда на границе заданы перемещения u_l^* , v_l^* ; в случае электрических граничных условий (при $i = 3$)

$$\begin{aligned} g_{3kl} &= -\nu_k, \\ f_{3l}(t) &= \mp \int_0^s D_{nl} ds + c_{3l}, \end{aligned} \quad (9)$$

если на границе задан вектор индукции поля D_{nl} ,

$$\begin{aligned} g_{3kl} &= r_k, \\ f_{3l}(t) &= \varphi_l^*(t) + c_{3l}, \end{aligned} \quad (10)$$

когда на границе задан потенциал поля $\varphi_l^*(t)$;

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k,$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) \nu_k, \quad (11)$$

$$r_k = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k;$$

$$\nu_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix};$$

c_{il} – постоянные, произвольные на одном из контуров отверстий; ω_{3l} – угол поворота контура отверстия как целого в случае жесткого его подкрепления.

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , ограниченных прямолинейными границами L_k^+ и контурами отверстий L_{kl} , соответствующих исходным прямолинейной границе L^+ и контурам отверстий L_l , и имеют вид [5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^L \Phi_{kl}(z_k), \quad (13)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 6-го порядка

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k) \Gamma_k = (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, 0, D_x^\infty), \quad (14)$$

если на бесконечности заданы векторы индукций поля, или из системы уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Gamma_k = (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, -E_x^\infty, 0), \quad (15)$$

когда на бесконечности заданы векторы напряженностей поля; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с прямолинейными границами L_k^+ , соответствующих прямолинейной границе L^+ при аффинных преобразованиях (3); $\Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} областей S_k , соответствующих эллипсам L_l области S при аффинных преобразованиях (3). Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} , используя формулы [9]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (16)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2 R_{kl}}.$$

После этих конформных отображений функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, L}$), голоморфные вне отверстий с контурами L_{kl} , в областях переменных ζ_{kl} будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$, включая бесконечно удаленную точку, и здесь их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , т. е.

$\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$. Окончательно для комплексных потенциалов (13) имеем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (17)$$

где

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n(z_k)} \quad (l = \overline{1, L});$$

a_{kln} – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах пластиинки.

Для свободной от внешних усилий и электрических воздействий прямолинейной границы (для этого случая коэффициенты перед комплексными потенциалами в граничных условиях обозначим индексом нуль вверху, в отличие от пьезоэлектрических коэффициентов деформации g_{1k}), в граничных условиях имеем

$$g_{1k} = g_{1k}^0 = 1, \quad g_{2k} = g_{2k}^0 = -\mu_k, \quad g_{3k} = g_{3k}^0 = -\nu_k,$$

$$(f_1^+(t), f_2^+(t), f_3^+(t)) = \int_0^s (Y_n^+, X_n^+, D_n^+) ds + (c_1^+, c_2^+, c_3^+). \quad (18)$$

Тогда граничные условия (6) на прямолинейной границе L^+ можно записать в виде системы 3 линейных уравнений

$$g_{1k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{1k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{1k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) = - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{1k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)},$$

$$g_{2k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{2k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{2k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) = - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{2k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}, \quad (19)$$

$$g_{3k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{3k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{3k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) = - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{3k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}$$

с определителем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{1k}^0 & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ g_{2k}^0 & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \\ g_{3k}^0 & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 g_{ik}^0 M_{ik}, \quad (20)$$

в котором M_{ik} – алгебраические дополнения элементов первого столбца g_{ik}^0 .

Решая систему (19), найдем

$$\Phi_k(t_k) = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_{kk} = \begin{vmatrix} f_1^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{1k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ f_2^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{2k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \\ f_3^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{g_{3k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix}$$

или

$$\Phi_k(t_k) = -\frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{q=1}^3 \overline{g_{ik+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} M_{ik}.$$

Окончательно граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде

$$\Phi_k(t_k) = \sum_{i=1}^3 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} f_i^+(t) - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} \quad (k = \overline{1,3}), \quad (21)$$

где

$$\overline{r_{kk+q-1}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\overline{g_{ik+q-1}^0}}{\Delta_k} M_{ik}. \quad (22)$$

Для точек прямолинейной границы L^+ имеем

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = h^+, \quad z = x + iy = t + ih^+, \\ z_k &= t_k = x + \mu_k y = t + \mu_k h^+, \\ \overline{t_k} &= t + \overline{\mu_k} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ = t_k + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+, \\ \overline{t_{k+q-1}} &= t + \overline{\mu_{k+1}} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ = \\ &= t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \quad (q = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив функции (13) в граничные условия (21) на прямолинейной границе L^+ , получим

$$\Phi_{k0}(t_k) + \sum_{l=1}^L \Phi_{kl}(z_k) = - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} \left[\Phi_{k+q-1,0}(t_k) + \sum_{l=1}^L \overline{\Phi_{k+q-1l}}(\overline{t_{k+q-1}}) \right]. \quad (24)$$

На прямолинейной границе для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} &= \overline{\Phi_{k+q-1,0}}(t_{k+q-1}) = \overline{\Phi_{k+q-1,0}}(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+) , \\ \overline{\Phi_{k+q-1l}(t_{k+q-1})} &= \overline{\Phi_{k+q-1l}}(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+) = \\ &= \Phi_{k+q-1l}^+(t_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{k+q-1ln}}}{[\zeta_{k+q-1l}^+(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+)]^n}. \end{aligned} \quad (25)$$

Кроме того, при переходе в конформных отображениях (16) к сопряженным величинам и замене граничных значений по формулам (23) для граничных значений переменных находим

$$\overline{z_{k+q-1}} = t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+ = \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left(\zeta_{k+q-1l}^+ + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta_{k+q-1l}^+} \right) \quad (q = \overline{1,3}). \quad (26)$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения t_k переменными z_k областей S_k , приходим к конформным отображениям

$$z_k = -(\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+ + \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left(\zeta_{k+q-1l}^+ + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta_{k+q-1l}^+} \right) \quad (q = \overline{1,3}), \quad (27)$$

где переменная $\bar{\zeta}$ для лучшего восприятия заменена на ζ^+ , что подчеркивает ее происхождение от условий на границе L^+ .

Можно показать, что равенства (27) представляет собой конформные отображения внешности единичных кругов $|\zeta_{k+q-1l}^+| \geq 1$ на внешности контуров L_{k+q-1l}^+ верхней (относительно границы L_k^+) полуплоскости S_k^+ переменной z_k . Например, в случае ортотропной полуплоскости, когда комплексные параметры являются чисто мнимыми ($\mu_k = i\beta_k$), это будут эллипсы L_{k+q-1l}^+ симметричные эллипсам L_{k+q-1l} полуплоскостей S_k , где заданы исходные комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$. Следовательно, функции $\Phi_{k+q-1l}^+(z_k)$ являются функциями, голоморфными вне контуров L_{k+q-1l}^+ верхних полуплоскостей S_k^+ (а следовательно, они голоморфны в нижних полуплоскостях S_k) и для них имеют место разложение в ряды Лорана вида

$$\Phi_{k+q-1l}^+(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{k+q-1ln}} \varphi_{k+q-1ln}^+(z_k), \quad (28)$$

где

$$\varphi_{k+q-1ln}^+(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{k+q-1l}^+)^n},$$

ζ_{k+q-1l}^+ – переменные, определяемые из конформных отображений (27).

Исходя из указанных свойств входящих в условия (24) функций, умножив обе части этих условий на ядро Коши $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-z_k}$ и вычислив интегралы типа Коши от них по бесконечной прямой L_k^+ , получим

$$\Phi_{k0}(z_k) = - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1l}} (t_k + (\mu_{k+q-1} - \mu_k) h^+).$$

Подставив это значение функции $\Phi_{k0}(z_k)$ в (13), для комплексных потенциалов получим

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\Phi_{kl}(z_k) - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1l}} (z_k + (\mu_{k+q-1} - \mu_k) h^+) \right],$$

а затем на основе разложений (28) будем иметь выражения

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} a_{k+q-1ln} \psi_{k+q-1ln}(z_k) \right], \quad (29)$$

в которых

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \psi_{k+q-1ln}(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{k+q-1l}^+)^n}. \quad (30)$$

Функции (29) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе и содержат неизвестные коэффициенты рядов Лорана a_{kln} . Для определения этих коэффициентов используем граничные условия (6) на контурах отверстий, предварительно продифференцировав их, чтобы исключить входящие в их правые части неизвестные аддитивные постоянные. Имеем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{il}(t)}{ds}, \quad (31)$$

где

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \sum_{q=1}^3 \overline{r_{kk+q-1}} \psi'_{k+q-1ln}(z_k) \overline{a_{k+q-1ln}} \right]; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \psi'^{+}_{k+q-1ln}(z_k) &= -\frac{n}{(\zeta_{k+q-1l}^+)^{n-1} \overline{R_{k+q-1l}} \left((\zeta_{k+q-1l}^+)^2 - \overline{m_{k+q-1l}} \right)} \quad (q=1,3). \end{aligned} \quad (33)$$

Функции (32) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе L^+ . Граничные же условия на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) будем

использовать для определения неизвестных постоянных a_{kln} ($k = \overline{1, 3}; l = \overline{1, L}$, $n = 1, 2, \dots$). Этим граничным условиям (31) на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [6–8]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p области S систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, L}$, $m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (32). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{q=1}^3 \bar{r}_{kk+q-1} \psi'_{k+q-1ln}(t_{kpm}) \bar{a}_{k+q-1ln} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 3}; p = \overline{1, L}; m = \overline{1, M_p}). \quad (34)$$

Систему (34) будем решать с использованием сингулярных разложений [10, 11]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $\Phi_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (напряжения, компоненты векторов индукций и напряженностей, перемещения и потенциалы поля), а в случае трещин и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). В частности, для основных напряжений и компонент векторов индукций и напряженностей имеют место формулы [5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (35)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k) \quad (36)$$

По основным напряжениям и компонентам векторов индукций можно найти также напряжения и компоненты векторов индукции и напряженностей на любых площадках с нормалью n и касательной s , используя формулы [5, 12, 13]

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)); \end{aligned} \quad (37)$$

$$D_n = D_x \cos^2(nx) + D_y \cos^2(ny). \quad (38)$$

При необходимости можно вычислить и деформации [12, 13]

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \varepsilon_x \cos^2(nx) + \varepsilon_y \cos^2(ny) + \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_x \cos^2(ny) + \varepsilon_y \cos^2(nx) - \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \gamma_{ns} &= 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos(nx) \cos(ny) + \gamma_{xy} (\cos^2(nx) - \sin^2(ny)). \end{aligned} \quad (39)$$

Что же касается КИН, они также находятся по известным функциям с использованием формул [14]

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl}, \\ k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl}, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$M_{kl} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kl n}. \quad (41)$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний – к его левому концу.

Как частные случаи из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следуют решения задачи теории упругости (ТУ). Это решение получается из приведенного решения, если в нем принять равными нулю g_{ki} , ν_{ki} . Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электроупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ki} = \lambda_g g_{ki}, \quad \nu'_{ki} = \lambda_g \nu_{ki}, \quad (42)$$

где λ_g , λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом нужно принять для задач ЭУ $\lambda_g = 1$, а для задач ТУ $\lambda_g \leq 10^{-3}$.

2. Описание результатов численных исследований для полуплоскости с отверстиями и трещинами. Проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния пьезополуплоскости из следующих материалов: композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [15, 16]; композит, упругие и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$ (М2) [17]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT - 4$ (М3) [17]. Исследования были проведены для случая растяжения полуплоскости усилиями $\sigma_x^\infty = p$. Считалось, что контуры отверстий (берега трещин) не подкреплены, на них механические и электрические воздействия отсутствуют. Количество членов в рядах (33) для каждого отверстия L_p и количество точек M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (34), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 100 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 1000 «коллокационных точек».

Решение задачи электроупругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами

В таблице 1 и таблице 2 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полуплоскости с круговым отверстием или жестким включением радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/a_1 , где c – длина перемычки между контуром отверстия и прямолинейной границей. При этом характерными были точки $A (0, -a_1)$, $B (a_1, 0)$, $C (0, a_1)$, $D (0, a_1 + c/2)$, $E (0, a_1 + c)$, $L (a_1, a_1 + c)$, $M (2a_1, a_1 + c)$.

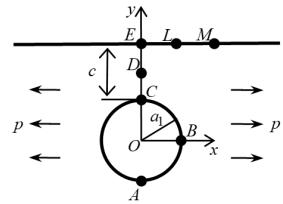


Рис. 2.

Таблица 1.

Значения напряжений в некоторых точках полуплоскости с неподкрепленным круговым отверстием в зависимости от c/a_1

Материал	Точка	Величина	c/a_1							
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01	∞	0,01
			ЭУ						ТУ	
M1	A	σ_x	3,103	3,215	3,319	3,450	3,750	4,002	3,018	3,885
	B	σ_y	-0,960	-1,083	-1,160	-1,165	-0,823	-0,339	-1,027	-0,353
	C	σ_x	3,103	3,362	3,826	4,743	9,428	29,134	3,018	28,411
	D	σ_x	1,000	1,242	1,567	2,102	4,563	14,506	1,000	14,165
	E	σ_x	1,000	0,811	0,648	0,489	0,213	0,050	1,000	0,070
	L	σ_x	1,000	1,056	1,475	2,197	2,662	1,138	1,000	1,092
	M	σ_x	1,000	1,268	1,513	1,473	0,825	0,241	1,000	0,230
M2	A	σ_x	3,270	3,379	3,481	3,613	3,929	4,190	2,778	3,551
	B	σ_y	-1,273	-1,475	-1,600	-1,630	-1,175	-0,491	-1,228	-0,386
	C	σ_x	3,270	3,548	4,040	4,978	9,672	29,203	2,778	26,363
	D	σ_x	1,000	1,260	1,583	2,100	4,533	14,431	1,000	13,189
	E	σ_x	1,000	0,770	0,638	0,528	0,212	-0,050	1,000	0,116
	L	σ_x	1,000	1,123	1,567	2,269	2,769	1,192	1,000	0,962
	M	σ_x	1,000	1,293	1,460	1,409	0,810	0,254	1,000	0,207
M3	A	σ_x	2,573	2,683	2,777	2,886	3,115	3,299	2,377	3,013
	B	σ_y	-0,885	-0,957	-0,988	-0,955	-0,641	-0,273	-1,205	-0,332
	C	σ_x	2,573	2,830	3,267	4,120	8,455	25,991	2,377	23,703
	D	σ_x	1,000	1,219	1,555	2,110	4,352	13,087	1,000	11,949
	E	σ_x	1,000	0,845	0,658	0,455	0,328	0,207	1,000	0,210
	L	σ_x	1,000	1,012	1,453	2,119	2,265	0,895	1,000	0,774
	M	σ_x	1,000	1,267	1,509	1,373	0,681	0,165	1,000	0,155

На рисунке 3 для некоторых значений c/a_1 в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, для материала M2 изображены графики распределения по контуру отверстия нормальных напряжений σ_s/p на площадках, перпендикулярных контуру, а на рисунке 4 для некоторых значений c/a_1 даны графики распределения σ_x/p вдоль прямоли-

нейной границы, причем сплошные и штриховые линии рисунков относятся к решению задачи электроупругости и теории упругости соответственно.

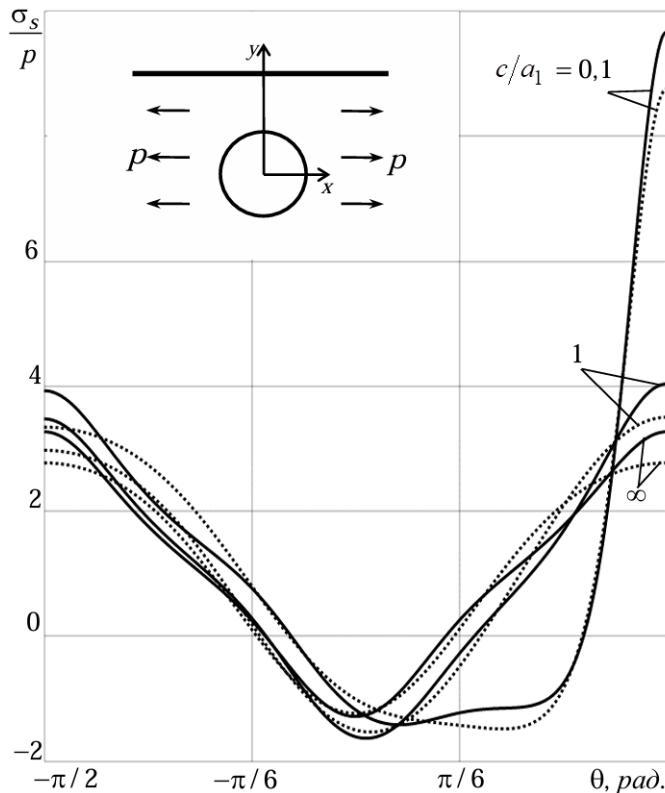


Рис. 3. Графики распределения напряжений σ_s/p около контура кругового отверстия в полу平面 для некоторых значений c/a_1 .

Сплошные линии относятся к задаче ЭУ, штриховые – к задаче ТУ

Таблица 2.

Значения напряжений в некоторых точках полу平面 с жестко подкрепленным круговым отверстием в зависимости от c/a_1 для М2

Точ-ка	Вели-чина	c/a_1							
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01	∞	0,01
		ЭУ						ТУ	
A	σ_x	0,000	0,004	0,003	-0,001	-0,008	-0,009	0,003	-0,009
B	σ_y	0,559	0,550	0,544	0,539	0,536	0,535	0,673	0,611
C	σ_x	0,000	0,021	0,046	0,055	0,007	0,000	0,003	0,000
D	σ_x	1,000	0,885	0,748	0,542	0,055	0,000	1,000	0,000
E	σ_x	1,000	1,056	0,948	0,636	0,055	0,000	1,000	0,000
L	σ_x	1,000	0,941	0,821	0,748	0,760	0,778	1,000	0,744
M	σ_x	1,000	0,889	0,858	0,893	0,983	1,008	1,000	1,026

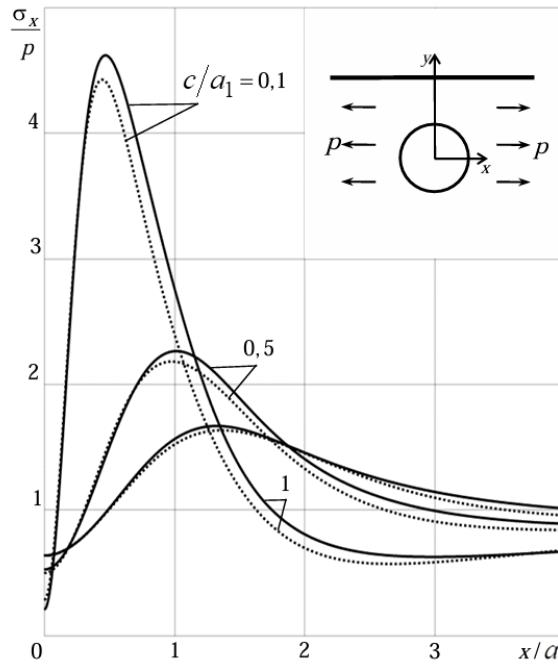


Рис. 4. Графики распределения σ_x/p по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений c/a_1 .

Сплошные линии относятся к задаче ЭУ, штриховые – к задаче ТУ.

Как следует из таблицы 1, таблицы 2, рисунка 3, рисунка 4, с приближением отверстия к прямолинейной границе полуплоскости происходит резкое увеличение значений напряжений около контура отверстия и в зоне между отверстием и прямолинейной границей, за исключением весьма малой окрестности точки перемычки на прямолинейной границе, где эти напряжения и их изменения невелики. Значения напряжений в указанных точках особенно велики в полуплоскости из материала М2. В точках высокой концентрации напряжений велика и доля пьезо свойств на значения напряжений.

В таблице 3 для растяжения полуплоскости из наиболее пьезоактивного материала М2 с вертикальной трещиной длины

$2l_1$ усилиями $\sigma_x^\infty = p$ (рис. 5) с точностью до множителя p приведены значения КИН k_1 (в этом случае $k_2 = 0$) для концов трещины A , C и напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/l_1 , где c – длина перемычки между трещиной и границей полуплоскости. При этом характерными точками были $D(0, l_1 + c/2)$, $E(0, l_1 + c)$, $L(l_1, l_1 + c)$, $M(2l_1, l_1 + c)$.

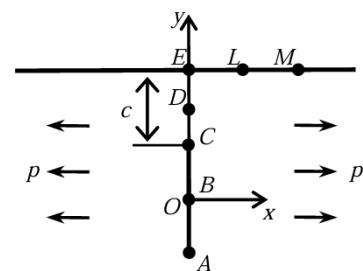


Рис. 5

Таблица 3.

Значения КИН и напряжений в некоторых точках полуплоскости из М2 с вертикальной трещиной или жестким включением в зависимости от c/l_1

Точ-ка	Вели-чина	c/l_1								
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01	∞	0,01	
ЭУ										
Трещина										
<i>A</i>	k_1^-	1,000	1,019	1,043	1,079	1,180	1,291	1,000	1,333	
<i>B</i>	σ_y	-1,273	-1,306	-1,346	-1,396	-1,391	-1,136	-1,228	-1,027	
<i>C</i>	k_1^+	1,000	1,027	1,073	1,169	1,681	3,480	1,000	3,650	
<i>D</i>	σ_x	1,000	1,202	1,478	2,014	5,516	33,484	1,000	31,845	
<i>E</i>	σ_x	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,964	1,000	0,972	
<i>L</i>	σ_x	1,000	1,173	1,431	1,594	1,287	0,781	1,000	0,694	
<i>M</i>	σ_x	1,000	1,147	1,169	1,084	0,788	0,550	1,000	0,497	
Жесткое линейное включение										
<i>A</i>	k_1^-	0,061	0,060	0,059	0,057	0,054	0,053	0,066	0,057	
<i>B</i>	σ_y	0,424	0,424	0,423	0,423	0,422	0,422	0,401	0,402	
<i>C</i>	k_1^+	0,061	0,059	0,057	0,052	0,037	0,021	0,066	0,023	
<i>D</i>	σ_x	1,000	1,014	1,036	1,088	1,416	2,591	1,000	2,543	
<i>E</i>	σ_x	1,000	1,058	1,142	1,293	1,949	3,692	1,000	3,219	
<i>L</i>	σ_x	1,000	1,008	0,972	0,943	0,939	0,943	1,000	0,945	
<i>M</i>	σ_x	1,000	0,984	0,975	0,977	0,985	0,987	1,000	0,988	

Как следует из данных таблицы 3, при приближении вертикальной трещины к границе полуплоскости значения напряжений в точках перемычки и КИН для ближайшей к границе полуплоскости резко растут. При этом незначительно растут также КИН для удаленного конца трещины и напряжения в точках вблизи перемычки.

В таблице 4 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полуплоскости с круговым отверстием с контуром L_1 и радиусом a_1 ($b_1 = a_1$) на расстоянии $h = 2a_1$ от прямолинейной границы и разрезом с контуром L_2 длины a_1 (эллипсом, у которого $a_2 = a_1/2$, $b_2 = 0$) в перемычке на расстояниях c_1 и c_2 от контура отверстия и границы полуплоскости соответственно (рис. 6) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости и КИН для концов трещины в зависимости от отношения c_1/a_1 . При этом $c_2 = 2a_1 - a_1 - c_1$ и характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $G(0, a_1 + c_1)$, $H(0, 2a_1 + c_1)$, $E(0, 3a_1)$, $L(a_1, 3a_1)$, $M(2a_1, 3a_1)$.

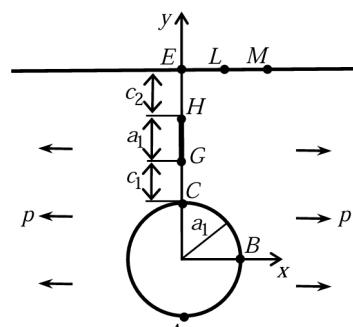


Рис. 6

Значения, соответствующие $c_1/a_1 = 0$, относятся к полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной длины a_1 из контура отверстия.

Таблица 4.
Значения некоторых величин в точках полуплоскости

Точ-ка	Вели-чина	c/a_1							
		0	0,1	0,3	0,5	0,9	0,99	0	0,99
		ЭУ						ТУ	
Трещина + жестко подкрепленное отверстие									
A	σ_x	0,002	0,008	0,011	0,013	0,022	0,030	0,006	0,028
B	σ_y	0,569	0,563	0,563	0,560	0,553	0,550	0,676	0,686
C	σ_x	-	0,500	0,237	0,159	0,137	0,180	-	0,159
G	k_1^-	-	0,341	0,511	0,587	0,708	0,793	-	0,824
H	k_1^+	0,542	0,581	0,631	0,675	0,927	1,809	0,513	1,966
E	σ_x	1,043	1,036	1,028	1,022	0,999	0,948	1,066	1,006
L	σ_x	1,015	1,037	1,063	1,070	0,829	0,545	1,028	0,501
M	σ_x	0,904	0,907	0,899	0,875	0,750	0,660	0,858	0,645
Линейное включение + отверстие									
A	σ_x	3,376	3,378	3,379	3,379	3,379	3,379	2,883	2,884
B	σ_y	-1,482	-1,480	-1,477	-1,477	-1,479	-1,479	-1,398	-1,402
C	σ_x	-	3,545	3,705	3,630	3,578	3,571	-	3,060
G	k_1^-	-	0,007	0,029	0,026	0,029	0,029	-	0,032
H	k_1^+	0,016	0,019	0,030	0,032	0,027	0,015	0,019	0,016
E	σ_x	0,773	0,781	0,823	0,866	1,304	2,536	0,808	2,248
L	σ_x	1,124	1,121	1,109	1,106	1,108	1,111	1,078	1,071
M	σ_x	1,293	1,293	1,291	1,291	1,294	1,294	1,285	1,288

Выводы. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов плоской задачи электроупругости решена задача об ЭУС пьезополуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами при произвольном их количестве, конфигурации и взаиморасположении. При этом граничные условия на прямолинейной границе удовлетворяются точно методом интегралов типа Коши, и вся задача сводится к получаемой из граничных условий на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований распределения напряжений в полуплоскости с круговым отверстием или трещиной с установлением закономерностей влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, их взаиморасположения, а также упругих и пьезосвойств материалов на значения напряжений и их концентрацию.

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностр. лит., 1949. – 717 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток. – 2011. – 232 с.
6. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
10. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
11. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
12. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
13. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
14. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
15. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
16. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
17. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

M.A. Polianskii

Solution to the problem of electroelasticity for a half-plane with holes and cracks.

The electroelasticity problem for a piezohalfplane with internal elliptical holes and rectilinear cuts-fractures is solved. The problem is solved using complex potentials of the flat electroelasticity problem. Functions that are holomorphic outside the ellipses and cuts-fractures are represented by Laurent series, and functions that are holomorphic in the lower halfplanes are expressed using Cauchy-type integrals through functions obtained from functions that are holomorphic outside the holes and cuts, while satisfying the boundary conditions on the rectilinear boundary. Then, the determination of the unknown coefficients of the series from the boundary conditions on the contours of the holes and cuts by the generalized least squares method is reduced to solving an overdetermined

system of linear algebraic equations. The results of numerical studies for a half-plane with holes and cracks are described, and the patterns of changes in the electroelastic state of the half-plane are established, depending on its materials and the geometric characteristics of the holes and cracks.

Keywords: *electroelastic plate, half-plane, holes, complex potentials, Cauchy-type integrals, least squares method.*

*Статья поступила в редакцию 07.11.2025;
доработана 19.11.2025;
рекомендована к печати 26.11.2025.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ
ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.83:622.847

doi:10.24412/0136-4545-2025-3-150-158

EDN:OZPRB



©2025. В.А. Дрибан¹, Н.А. Дуброва², В.Р. Сажнев³, М.В. Колесник⁴,
А.В. Антипенко⁵

ГЕОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРИТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ЗОНЫ
ПОДРАБОТАННОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

В настоящей работе предложена оригинальная модель развития процесса провалообразования над старыми горными выработками. Основная идея заключается в учете влияния сезонных гидрометеорологические явлений, приводящих к увлажнению верхнего слоя породного

¹Дрибан Виктор Александрович – доктор техн. наук, и. о. директора РАНИМИ, Донецк, e-mail: viktor-driban@yandex.ru.

Driban Victor Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Acting Director, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

²Дуброва Наталья Александровна – канд. техн. наук, зав. отд. проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНИМИ, Донецк, e-mail: dubrovan@mail.ru.

Dubrova Natalya Alexandrovna – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

³Сажнев Вячеслав Петрович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНИМИ, Донецк, e-mail: vyacheslav.p.sazhnev@yandex.ru.

Sazhnev Vyacheslav Petrovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

⁴Колесник Михаил Валерьевич – мл. науч. сотр. отд. проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНИМИ, Донецк, e-mail: misha_kolesnik@mail.ru.

Kolesnik Mikhail Valerevich – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

⁵Антипенко Антон Викторович – науч. сотр. отд. проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНИМИ, Донецк, e-mail: ministrxp@mail.ru.

Antypenko Anton Victorovich – Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

массива и циклическому изменению физико-механических свойств и напряженно-деформированного состояния вмещающих массив горных пород. В первую очередь, речь идет об изменении бокового распора под влиянием сезонного обводнения-осушения и возникновении эффекта малоцикловой усталости вмещающих массив горных пород, что провоцирует образование и рост трещин в кровле старых горных выработок неглубокого заложения. Построена модель влияния малоцикловой усталости на рост трещин и развитие процесса провалообразования. Установлены временные параметры появления критических деформаций (провалов) земной поверхности.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, малоцикловые нагрузки, обводнение, боковой распор, провал, горные выработки мелкого заложения.

Введение. Интенсивная и продолжительная добывчая деятельность приводит к подработанности обширных площадей на малых глубинах, что делает территории опасными по образованию провалов на земной поверхности и создает угрозу безопасной эксплуатации зданий, сооружений и объектов социальной и промышленной инфраструктуры. Территория Донбасса наиболее показательна с точки зрения интенсивности провалообразования, что обусловлено многократной долгосрочной подработкой и особенностью горно-геологических и горнотехнических условий ведения горных работ. Так, за более чем столетний период ведения добывчых работ, в регионе работало около 2 500 шахт, в результате деятельности которых осталось порядка 13 тысяч старых горных выработок, имеющих выход на земную поверхность. Особенно это касается Центрального района Донбасса, где в условиях практически полного отсутствия наносов (мощность 0–2 м), крутого залегания горных пород (до 70°) и малого межпластового расстояния (от 30 м), на заре развития отрасли добыча велась кустарными методами с использованием множественных шурfov и шахт неглубокого заложения, информация о местоположении которых, в большинстве случаев, безвозвратно утеряна.

Поэтому для обеспечения безопасной жизнедеятельности техногенно загруженных подработанных территорий требуется надежный прогноз развития возможных опасных деформаций земной поверхности и провалообразования [1–4]. От достоверной оценки вероятности и времени возникновения провала зависит своевременность принятия технических мер по минимизации вреда, наносимого объектам расположенной на поверхности инфраструктуры, как социального, так и промышленного назначения [5–7].

Сложность изучения развития процесса провалообразования над старыми горными выработками неглубокого заложения, особенно в зоне выветривания карбона Донбасса, обусловлена рядом объективных факторов, таких, как невозможность проведения прямых натурных исследований опасных объектов, отсутствие горнотехнической и горно-геологической документации о старых горных работах, слабая изученность физико-механических свойств горных пород в зоне выветривания. Имеющиеся данные, как правило, ограничены информацией о глубине горных выработок, времени ведения добывчых работ и времени проявления критических деформаций.

Так как процесс провалообразования неизбежно связан с обрушением горных

пород в полость выработки, которому предшествует их разрушение, сопровождающееся трещинообразованием в породах кровли, в данной работе предложена новая модель развития трещины в кровле старой горной выработки в зоне выветрелых пород.

1. Теория, материалы и методы исследования. На данный момент отсутствует рабочая теория развития процесса провалообразования, которая бы позволяла прогнозировать пространственные и временные параметры реализации критических деформаций земной поверхности от старых горных выработок. Очевидно, что процесс провалообразования зарождается в несущем породном слое непосредственной кровли выработки при его разрушении и развивается снизу-вверх от слоя к слою до земной поверхности в виде условного свода обрушения. Среди факторов, способствующих или препятствующих процессу провалообразования, отмечены такие, как наличие или отсутствие крепи выработки, обводнения пород, трещиноватости пород, прочных и водонепроницаемых слоев в породной толще над выработкой, эффекта саморасклинивания обрушающихся пород, эффекта самоподбучивания обрушенных пород, перепуска обрушенных пород, динамических явлений, техногенного воздействия.

Фактор влияния трещиноватости на устойчивость пород кровли старых горных выработок неглубокого заложения представляется авторам настоящей статьи одним из основных. Наличие трещин в породах кровли старых горных выработок не вызывает сомнений, как с логической, так и с практической точек зрения, из-за технологических особенностей проведения горных выработок и техногенного воздействия в процессе их эксплуатации. Поэтому было решено уделить основное внимание исследованию процесса развития трещин, приняв за исходную позицию факт их наличия в породах непосредственной кровли выработки.

Авторами предлагается концепция закономерной связи процесса развития трещин в породах кровли старой горной выработки неглубокого заложения с малоцикловым процессом сезонного обводнения-осушения горных пород из-за влияния подземных и паводковых вод. Данный процесс приводит к многократному циклическому изменению их физико-механических свойств и, как следствие, коэффициента бокового распора. Подчеркнем, что указанные факторы являются единственными, подверженными изменению с течением времени, способными оказывать ощутимое влияние на изменение напряженно-деформированного состояния массива.

Процесс сезонного обводнения-осушения горных пород приводит к такому явлению, как малоцикловая усталость горных пород, при котором разрушение происходит при сравнительно малом числе циклов. При переменных нагрузках уже после небольшого числа циклов в горных породах начинается развитие трещин, приводящее к разрушению вмещающего массива. Экспериментально установлено, что прочность породы при динамической пульсирующей нагрузке снижается на 40–50 % [9].

Как было отмечено ранее [8], влияние грунтовых и паводковых вод на гео-

механическое состояние горного массива в зоне выветривания карбона является весьма существенным. Ежегодные циклы обводнения и осушения массива могут циклически повторяться из года в год, постепенно снижая прочностные свойства пород до критических значений, при которых происходит их разрушение. Наличие естественной и техногенной трещиноватости в породах зоны выветривания карбона существенно влияет на проникновение воды в них за счет молекулярного притяжения воды, сил ее поверхностного натяжения и эффекта капиллярности, способного поднимать воду по капиллярным трещинам на величину 1,5 м и более даже без глобального затопления породного массива. При этом известно, что однократное обводнение породного массива из песчано-глинистых пород Донбасса приводит к снижению предела их прочности на одноосное сжатие до 70 % [10].

Итак, напряженное состояние описывается тремя компонентами: вертикальные σ_z и горизонтальные (боковые) σ_x , σ_y напряжения связаны между собой уравнением

$$\sigma_x = \sigma_y = \lambda\sigma_z, \quad (1)$$

где λ – коэффициент бокового распора, который в упругой постановке задачи рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad (2)$$

в которой ν – коэффициент Пуассона.

Сезонные обводнения и осушения массива, повторяясь из года в год, приводят к циклическому изменению физико-механических свойств горных пород и, соответственно, бокового распора. Исходя формулы (2), если значение коэффициента Пуассона для сухих пород составляет 0,25, то коэффициент бокового распора равен 0,33. При увлажнении горных пород значение коэффициента Пуассона достигает значений близких к 0,5, тогда значение коэффициента бокового распора стремится к единице. Соответственно, диапазон изменения горизонтальных напряжений составляет $0,67\gamma H$. Образно это можно представить как игру на гармошке (последовательное сжатие – растяжение массива в горизонтальном направлении).

Итак, сезонная смена состояний обводнение–осушение приводит к циклическому изменению НДС массива горных пород и возникновению эффекта малоцикловой усталости материала, что провоцирует образование и рост трещин в кровле старых горных выработок неглубокого заложения.

Анализ около сотни случаев провалообразования показал [8], что более 30 % провалов реализовались от горных выработок, пройденных в наносах (глубина до 20 м), около 20 % – в диапазоне глубин 21–40 м, и приблизительно по 7 % – в диапазонах глубин 41–60 м и 61–80 м. Отмечены единичные случаи провалов для глубин 81–100 м, 141–160 м и свыше 200 м. Также установлено, что период времени от окончания горных работ до проявления провалов, в 33 % случаев составлял от 61 до 80 лет, в 14 % случаев менее 20 лет. Отмечены случаи, когда выработкиостояли 81–100 и более лет до проявления их влияния на земной

поверхности. Таким образом, если принять, что сезонные паводковые обводнения случаются с периодичностью два раза в год, то необходимое количество циклов моделирования варьируется в диапазоне от 40 до 200 циклов.

Для моделирования влияния малоцикловой усталости на развитие процесса провалообразования и рост трещин в кровле горной выработки в качестве наиболее подходящего использован программный комплекс конечно-элементного моделирования ANSYS. Выбор данного метода моделирования обоснован следующими факторами: расчётные схемы моделируемых объектов имеют черты реального объекта, не требуется их упрощение до стандартных решений сопротивления материалов и строительной механики, возможна детализация для уточнения в наиболее важных местах; высокое качество визуализации и наглядность процесса моделирования; не требуется высокой математической подготовки для проведения численного моделирования, достаточно инженерного образования, руководств и инструкций программного продукта.

Применительно к нашей задаче для моделирования поведения трещиноватых горных пород при их обводнении наиболее подходят упругопластические модели, использующие критерии прочности Кулона-Мора или Друкера-Прагера. Данные модели реализованы в программном продукте ANSYS и успешно применяются многими исследователями для изучения напряженно-деформированного состояния горного массива, поэтому считаем вполне обоснованным выбор конечно-элементного комплекса ANSYS Workbench [11–16].

В соответствии с задачами исследования выполнено цикловое моделирование изменения напряжённо-деформированного состояния горного массива с последовательным чередованием свойств для сухой и увлажненной горной породы.

В качестве исходных данных для модели задаются следующие физико-механические показатели: модуль упругости (Юнга); коэффициент Пуассона; модули сдвига для главных плоскостей; удельное сцепление; угол внутреннего трения; плотность. Значения данных показателей для песчано-глинистых горных пород в зоне выветривания карбона выбраны из известных представительных источников [10], [11], [13] и приведены в таблице 1.

Разработанная модель обладает рядом преимуществ: работа со сравнительно небольшим объемом исходных данных; поддержка применения «примитивов» в виде площадей и объемов, а также булевские операции (пересечение, вычитание и т. д.) при конструировании модели; относительная простота модификации геометрии модели. В качестве системы координат выбрана глобальная система. При генерации конечно-элементного разбиения применялось аддитивное разбиение с использованием тетраэдров и параллелепипедов, что позволяет эффективно разбивать объемы, имитирующие породный массив. Границные условия моделирования: залегание пород и земной поверхности горизонтальное; модель весомая за счет задания объемного веса горных пород; нижняя плоскость модели закрепляется от вертикальных перемещений, боковые грани от перемещений в соответствующих направлениях; задаётся гравитационная нагрузка (ускорение свободного падения $9,81 \text{ м/с}^2$); дополнительные нагрузки прилагаются к

боковым граням растягивающее давление $\lambda\gamma H$ ($\lambda=0,65$ – диапазон изменения значений бокового распора между сухими и влажными породами, табл. 1).

Таблица 1. Значения основных физико-механических свойств моделируемых пород

Свойство	Значение	
	сухая порода	влажная порода
Объемный вес, кг/м ³	2020	2020
Модуль упругости (Юнга), ГПа	2,5	1,9
Коэффициент Пуассона	0,2	0,47
Коэффициент бокового распора	0,25	0,9

Такая схема моделирования имеет минимум допущений и достаточно полно отражает моделируемый процесс. Перед запуском модели на расчёт производилось уменьшение ширины матрицы жесткости путем упорядочивания конечных элементов. Таким образом, построена «псевдоплоская» модель массива горных пород размером 40 м на 80 м с горной выработкой, расположенной на глубине 70 м сечением 2,0 м на 2,5 м и единичной трещиной в кровле горной выработки высотой 30 см и раскрытием 1 см. Геометрия модели и схематизация граничных условий приведены на рисунке 1.

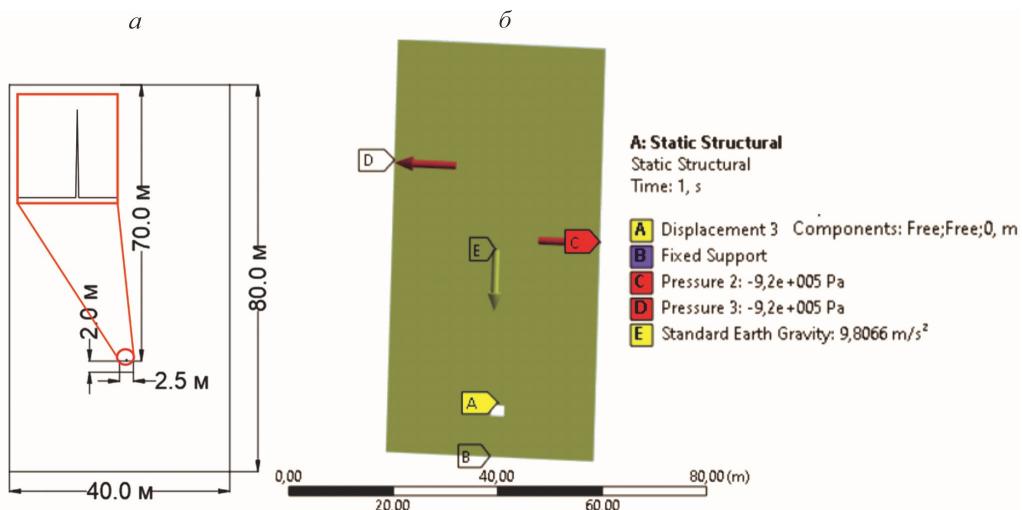


Рис. 1. Геометрия модели (а) и схематизация граничных условий (б)

Моделирование влияния циклового изменения бокового распора на развитие трещины выполнено до 200 циклов. Общий вид модели на конечном этапе моделирования с визуализацией развившейся трещины представлен на рисунке 2а, при этом отмечено, что развитие трещины происходит галсами (рис. 2б).

Анализ результатов моделирования показал, что за каждый последующий 25-цикловый шаг моделирования трещина с исходной длиной в 0,3 м увеличивается приблизительно на 10 м, что соответствует скорости роста трещины по-

рядка 1 м в год. В таблице 2 приведен значения размеров трещины на каждом из шагов моделирования.

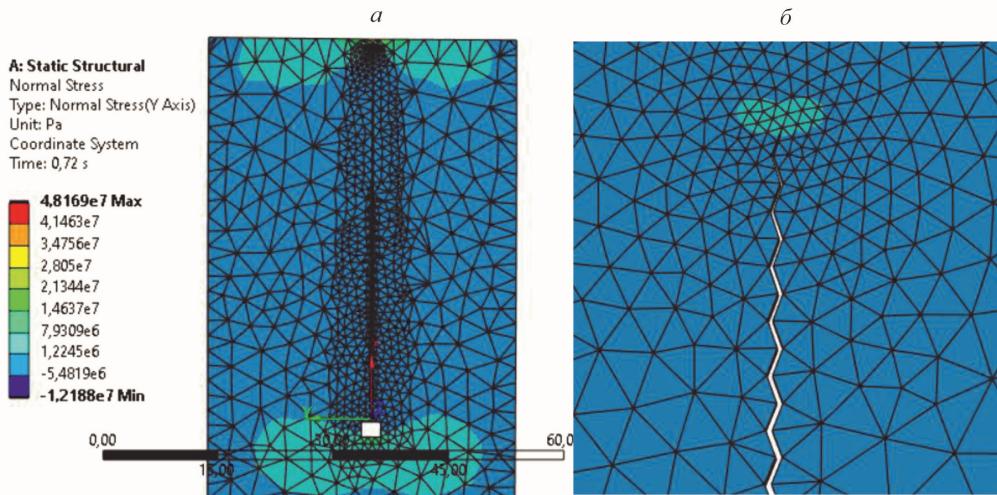


Рис. 2. Модель развития трещины в кровле горной выработки: *a* – общий вид модели; *б* – развитие трещины галсами

После моделирования 50, 100 и 150 циклов воздействия растягивающих деформаций размеры трещины увеличились с 0,3 м до 19,68 м, 41,17 м и 62,53 м соответственно. На 165 цикле моделирования произошел разрыв сплошности модельной среды и выход трещины на поверхность, что соответствует времени провалообразования в 82,5 года. График прироста длины трещины при воздействии цикловых нагрузок приведен на рисунке 3.

Таблица 2. Изменение размеров трещины в процессе моделирования

Количество циклов моделирования, шт.	Размер трещины, м
0	0,3
25	10,24
50	19,68
75	31,17
100	41,17
125	52,16
150	62,53
165	69,73
175	Разрушение верхней грани модели и выход трещины на поверхность
200	

Для оценки влияния изменения физико-механических свойств горных пород на развитие трещины в кровле горной выработки проведено имитационное моделирование со знакопеременным пошаговым изменением удельного веса горных пород и модуля Юнга на 20–30 %. Результаты моделирования позволили сде-

лать вывод о высокой устойчивости модели к изменению физико-механических свойств горных пород.

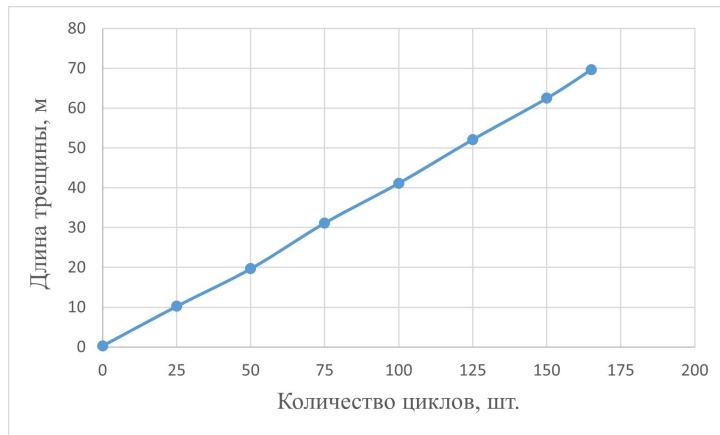


Рис. 3. График изменения длины трещины при воздействии цикловых нагрузок

Выводы. Предложенный подход к моделированию процесса развития провалообразования над горными выработками в зоне выветрелых пород показал свою работоспособность. Полученные на основе численного моделирования результаты впервые позволяют оценить временные параметры появления критических деформаций земной поверхности, что позволит принять своевременные технические меры для предотвращения негативных последствий ведения горных работ на малых глубинах и повысить точность прогноза времени провалообразования.

Исследования выполнены в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках научной темы FRSR-2024-0001 «Изучение геомеханических и геофильтрационных процессов в подработанных обводненных массивах».

1. Тюленева Т.А. Совершенствование технологии ликвидации провалов над горными выработками / Т.А. Тюленева // Техника и технология горного дела. – 2021. – № 1. – С. 4–26.
2. Полозов Ю.А. Ликвидация последствий техногенной катастрофы в районе провала земной поверхности на калийном руднике / Ю.А. Полозов, Е.Е. Бизянов, А.Ю. Лазебник // Сборник научных трудов Донбасского государственного технического института. – 2021. – № 23 (66). – С. 5–12.
3. Tajdus K. Analysis of mining-induced delayed surface subsidence / K. Tajdus, A. Sroka, R. Misa, S. Hager, J. Rusek, M. Dudek, F. Wollnik // Minerals. – 2021. – 11. – 1187. – DOI: 10.3390/min11111187.
4. Contrucci I. Management of post-mining large-scale ground failures: blast swarms field experiment for calibration of permanent microseismic early-warning systems / I. Contrucci, E. Klein, P. Bigarré, A. Lizeur, A. Lomax, M. Bennani // Pure and Applied Geophysics. – 2010. – № 167 (1–2). – Р. 43–62.
5. Трофимов В.А. Вычислительный подход к оценке разрушения подработанного выработкой массива / В.А. Трофимов, И.Е. Шиповский // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2022. – Т. 9, № 1. – С. 50–59.
6. Дрибан В.А. Применение методов искусственного интеллекта для оценки рисков поврежде-

- ния земной поверхности от влияния горных выработок неглубокого заложения / В.А. Дрибан, А.В. Антипенко, В.П. Сажнев, А.И. Яркова // Проблемы горного дела: сб. науч. тр. 4-го форума студентов, аспирантов и молодых ученых-горняков. – 2024. – С. 258–264.
- 7. Тонофа А.В. О решении проблемы провалов земной поверхности при закрытии угольных шахт / А.В. Тонофа, А.А. Канавец, И.В. Филатова // Инновационные перспективы Донбасса: материалы 8-й Международной научно-практической конференции. – Донецк, 2022. – С. 143–147.
 - 8. Дрибан В.А. О механизмах провалообразования над старыми горными выработками / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва, В.П. Сажнев, А.В. Антипенко, М.В. Колесник // Труды РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41). Т. 2. – С. 104–123.
 - 9. Кольчицкая Т.Н. Поведение глинистых пород при циклических нагрузках / Т.Н. Кольчицкая, Н.Н. Михайлов // Геология нефти и газа. – 2000. – № 2. – С. 52–55.
 - 10. Гавриленко Ю.Н. Прочность горных пород в зоне выветривания карбона / Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермаков, А.Н. Феофанов // Науч. тр. ДонНТУ. Серия: Горно-геологическая. – 2002. – № 45 – С. 152–155.
 - 11. Cerfontaine B. Cyclic and Fatigue Behaviour of Rock Materials / B. Cerfontaine, F. Collin // Interpretation and Research Perspectives. – 2018. – Vol. 51. – P. 391–414.
 - 12. Wang Z.Q. Low cycle fatigue damage model and sensitivity analysis of fatigue crack initiation by finite element approach / Z.Q. Wang, X.G. Huang, D.H. Zhang // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2020. – Vol. 53. – P. 81–91.
 - 13. Contrucci I. Aseismic Mining Subsidence in an Abandoned Mine: Influence Factors and Consequences for Post-Mining Risk Management / I. Contrucci, C. Balland, J. Kinscher, M. Bennani, P. Bigarré // Pure and Applied Geophysics. – 2019. – T. 176. – C. 801–825.
 - 14. Yang J.H. 2D numerical analysis of rock damage induced by dynamic in-situ stress redistribution and blast loading in underground blasting excavation / J.H. Yang, C. Yao, Q. Jiang, W. Lu, S.H. Jiang // Tunnelling and Underground Space Technology. – 2017. – Vol. 70. – P. 221–232.
 - 15. Fatoba O. Uniaxial cyclic elasto-plastic deformation and fatigue failure of API-5L X65 steel under various loading conditions / O. Fatoba, R. Akid // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2018. – Vol. 94. – P. 147–159. – DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.01.015.

V.A. Driban, N.A. Dubrova, V.P. Sazhnev, M.V. Kolesnik, A.V. Antypenko

Mechanism of sinkhole development above mine workings in the weathered rocks zone.

An unconventional model of the sinkhole formation process development over old mine workings is suggested in this paper. The core concept is to take into account the influence of seasonal hydrometeorological phenomena resulting into the upper layer of the rock mass been wetted and causing a cyclic change in the physical and mechanical properties and in the stress-strain state of the strata enclosing the rock mass. In the first line, the change in the horizontal stress under the influence of seasonal flooding-drying, and the emergence of a low-cycle fatigue effect in the strata enclosing the rock mass triggering cracks formation and propagation in the roof of old shallow mine workings are considered. A model of the low-cycle fatigue effect on cracks propagation and the sinkhole formation process development has been elaborated. Time parameters of the critical deformations (sinkholes) emergence on the soil surface have been established.

Keywords: stress-strain state, low-cycle stresses, flooding, horizontal stress, sinkhole, shallow mine workings.

*Статья поступила в редакцию 02.10.2025;
доработана 17.11.2025;
рекомендована к печати 24.11.2025.*