

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Журнал ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

№ 3 (96)

2026

И. О. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватulyян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.В. Георгиевский**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р техн. наук, проф. **Н.Н. Грищенко**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.А. Илюхин**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносеви**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Мазнев**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Муцанов**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Р.Н. Нескородев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Н. Соловьев**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **С.Н. Царенко**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**.

ACTING EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**
DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**
EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of phys. and math., prof. **D.V. Georgievskiy**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of tech., prof. **N.N. Grishchenkov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**, Dr. of phys. and math., prof. **A.A. Ilyukhin**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Maznev**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of phys. and math., docent **R.N. Neskoro**dev, Dr. of phys. and math., prof. **A.N. Soloviev**, Dr. of tech., docent **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., docent **S.N. Tsarenko**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>, <http://dongu-jtam.ru/>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки). Квартиль К2 с 23.05.2025. Журнал включен в актуальную версию Единого государственного перечня научных изданий («Белый список» научных журналов) – 4 уровень.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 230-11/2025 от 17 ноября 2025 г.).

Издание зарегистрировано Федеральной службой
по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций:
свидетельство о регистрации: ЭЛ № ФС 77-91881 от 03.07.2026 г.

© ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», 2026

№ 3 (96) / 2026

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Механика твердого тела

- Тимошенко Д.В., Илюхин А.А.* Построение определяющих уравнений анизотропной моментной теории упругих стержней 5

Механика деформируемого твердого тела

- Авдюшина Е.В.* Исследование напряженного состояния анизотропной полуплоскости с криволинейными отверстиями и выемами обобщенным методом наименьших квадратов 16
- Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.* Исследование влияния теплообмена на термоупругое состояние трансверсально-изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене 26
- Глухов А.А., Пачева М.Н., Фоменко М.В.* Анализ процесса распространения сдвиговых интерфейсных волн у границы контакта трансверсально-изотропных функционально-градиентных полупространств..... 40
- Калоеров С.А., Гапотченко Я.И., Толстых В.К.* Решение задачи об антиплоской деформации полупространства с отверстиями и трещинами... 48
- Калоеров С.А., Ермаков О.Э., Вовк Л.П.* Решение задачи об изгибе кусочно-однородной многосвязной пьезополуплоскости..... 62
- Мкртчян К.Ш.* Исследование поперечных колебаний упругой шарнирно-опертой балки Тимошенко под действием движущихся нагрузок..... 80

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Грищенков Н.Н., Голубев Ф.М., Сажнев В.П., Рахманова Т.И., Бардакова Е.А., Капинус Э.Ю.* Методические критерии первоочередной диагностики многоэтажных зданий в сложных горно-геологических условиях Донецко-Макеевского угленосного района 90

Ходырев Е.Д., Трофимов В.В., Гордиенко М.В. Оценка фильтрационных свойств выработанного пространства отработанных угольных пластов...

103

№ 3 (96) / 2026

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

- Timoshenko D.V., Ilyukhin A.A.* Formulation of constitutive equations for the anisotropic couple-stress theory of elastic rods..... 5

Solid Mechanics

- Avdyushina E.V.* Study of the stress state of an anisotropic half-plane with curvilinear openings and cutouts using the generalized least squares method.. 16
- Bondarenko N.S., Goltsev A.S.* Investigation of the influence of heat exchange on the thermoelastic state of a transversally-isotropic plate with a heat-insulated cut under one-sided heat exchange..... 26
- Glukhov A.A., Pacheva M.N., Fomenko M.V.* Analysis of the propagation of shear interfacial waves at the interface between transversely isotropic functionally graded half-spaces..... 40
- Kaloerov S.A., Gapotchenko Y.I., Tolstykh V.K.* Solution of the antiplane strain problem for a half-space with holes and cracks..... 48
- Kaloerov S.A., Ermakov O.E., Vovk L.P.* Solving the problem of bending a piecewise homogeneous multiconnected piezoelectric half-plane..... 62
- Mkrtchyan K.Sh.* Study of forced transverse vibrations of an elastic pivot-supported Timoshenko beam under moving load..... 80

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerodynamics and Thermal Physics

- Grishchenkov N.N., Golubev Ph.M., Sazhnev V.P., Rakhmanova T.I., Bardakova E.A., Kapinus E.Y.* Methodological criteria for priority diagnostics of multi-story buildings in complex mining and geological conditions of the Donetsk-Makeevsky coal-bearing region 90

<i>Khodyrev E.D., Trofymov V.V., Gordienko M.V.</i> Assessment of the filtration properties of the mined-out space of worked-out coal seams	103
---	-----

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-5-15

EDN:WXZGNL



©2026. Д.В. Тимошенко, А.А. Илюхин

ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ
АНИЗОТРОПНОЙ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ
СТЕРЖНЕЙ

Получены одномерные уравнения равновесия и определяющие соотношения для упругих стержней с учетом микрополярных свойств (модели Коссера) и общей анизотропии материала. Переход от трехмерной задачи теории упругости к одномерной модели осуществлен на основе метода асимптотического интегрирования по малому параметру, отражающему отношение размера поперечного сечения к длине стержня. Исследование выполнено в общей системе координат, связанной с естественным подвижным трехгранником оси стержня, геометрия которой описывается компонентами вектора Дарбу. Связь между макроскопическим поведением стержня и микроструктурой материала обеспечена за счет физического отождествления глобального базиса оси стержня и локальных реперов Коссера в недеформированном состоянии.

Ключевые слова: моментная сплошная среда, упругий стержень, асимптотические методы.

Введение. Задачи построения уточненных одномерных моделей деформации упругих тел типа стержней занимают важное место в механике деформируемого твердого тела в связи с потребностями как теоретических исследований, так и решения практических задач.

В классических моделях, основанных на гипотезах Бернулли–Эйлера или Кирхгофа, кинематика и статика стержня описываются в рамках безмоментного континуума [1]. Однако для адекватного описания материалов с выраженной внутренней структурой, полимерных композитов и нанообъектов все чаще привлекаются модели микрополярных сред (сред Коссера) [2–8].

Тимошенко Дмитрий Владимирович – канд. физ.-мат. наук, доц. ЮФУ, Ростов-на-Дону; ст. науч. сотр. ИПММ, Донецк, e-mail: dmitrytim@yandex.ru., ORCID: 0009-0004-0444-2807.

Timoshenko Dmitry Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don; Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

Илюхин Александр Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, главн. науч. сотр. ИПММ, Донецк, e-mail: aleilyukhin@yandex.ru., ORCID: 0009-0004-8024-2209.

Ilyukhin Aleksandr Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

Учет моментных взаимодействий в микрополярных стержнях позволяет описывать масштабные эффекты, которые становятся существенными, когда характерный внутренний масштаб материала сопоставим с геометрическим размером сечения [9–12].

Данная работа посвящена выводу одномерных уравнений равновесия и определяющих соотношений для микрополярного стержня, обладающего общей анизотропией упругих свойств. Рассматриваемая задача осложнена тем, что для анизотропного материала общего вида в рамках микрополярной модели все компоненты деформаций (растяжение, сдвиг, изгиб и кручение) оказываются связанными [12–15]. Показано, что учет общей анизотропии в микрополярной постановке приводит к появлению дополнительных членов связанности в уравнениях типа Кирхгофа, описывающих такие эффекты, как изгиб при осевом растяжении и самопроизвольное кручение, что имеет существенное значение для прецизионного анализа элементов конструкций из композитных материалов.

Вывод основных уравнений трехмерной задачи. В качестве базиса упругого стержня будем рассматривать естественный трехгранник оси стержня $\mathfrak{e}_i$, где $\mathfrak{e}_1$ направлен по касательной к оси стержня, а $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ – соответствуют единичным векторам главных осей инерции его поперечного сечения. По традиции назовем этот базис главными осями изгиба и кручения. Через ω_i обозначим компоненты вектора Дарбу оси стержня в недеформированном состоянии. Будем считать, что латинские индексы принимают значения от 1 до 3, греческие от 2 до 3, по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 3, а по греческим от 2 до 3.

Оператор Гамильтона в главных осях изгиба и кручения имеет вид [15]:

$$\nabla = \vec{\mathfrak{e}}_1 \frac{1}{\sqrt{g}} (\tilde{\nabla}_1 + e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\beta \nabla_\alpha) + \vec{\mathfrak{e}}_\alpha \nabla_\alpha, \quad (1)$$

где $\tilde{\nabla}_1 = \frac{\partial}{\partial s}$, $\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial E_\alpha}$.

Будем считать, что тело деформировано распределенной торцевой нагрузкой. Тогда с учетом представления (1) уравнения равновесия тела при отсутствии массовых сил имеют вид [15–17]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\tilde{\nabla}_1 \sigma_{1j} - e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \sigma_{1j} + \omega_s (e_{1si} \sigma_{ij} + e_{jsm} \sigma_{1m})) + \nabla_\alpha \sigma_{\alpha j} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\tilde{\nabla}_1 \mu_{1j} - e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \mu_{1j} + \omega_s (e_{1si} \mu_{ij} + e_{jsm} \mu_{1m})) + \nabla_\alpha \mu_{\alpha j} + e_{jnm} \sigma_{nm} = 0, \quad (2)$$

где μ_{ij}, σ_{ij} – компоненты несимметричных тензоров моментных и силовых напряжений, e_{ijk} – компоненты тензора Леви-Чивита в рассматриваемом базисе.

Граничные условия на боковой поверхности тела представимы в виде [15, 18]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sigma_{1j} \omega_1 e_{1\alpha\beta} n_\alpha x_\beta + n_\alpha \sigma_{\alpha j} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \mu_{1j} \omega_1 e_{1\alpha\beta} n_\alpha x_\beta + n_\alpha \mu_{\alpha j} = 0, \quad (3)$$

в котором n_i — компоненты нормали к боковой поверхности.

Тензоры деформации $\hat{\gamma}$ и кривизны $\hat{\kappa}$ в главных осях в диадном представлении имеют вид [15, 18]:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{\mathfrak{E}}_1 \otimes \vec{\mathfrak{E}}_i \{ \tilde{\nabla}_1 u_i + e_{isp} \omega_s u_p - e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\alpha \nabla_\beta u_i \} + \vec{\mathfrak{E}}_\alpha \otimes \vec{\mathfrak{E}}_i \nabla_\alpha u_i + e_{mij} \theta_j \vec{\mathfrak{E}}_i \otimes \vec{\mathfrak{E}}_m, \\ \hat{\kappa} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{\mathfrak{E}}_1 \otimes \vec{\mathfrak{E}}_i \{ \tilde{\nabla}_1 \theta_i + e_{isp} \omega_s \theta_p - e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \theta_i \} + \vec{\mathfrak{E}}_\alpha \otimes \vec{\mathfrak{E}}_i \nabla_\alpha \theta_i, \quad (4)\end{aligned}$$

где θ_i - компоненты вектора поворота окрестности точки.

При этом, поскольку рассматривается сплошная среда, частицы которой обладают дополнительными вращательными степенями свободы, наряду с базисом главных осей изгиба и кручения, введен так называемый базис Коссера.

В рамках теории стержней базис Коссера и базис главных осей изгиба и кручения стержня практически отождествляются, но есть важное уточнение: на макроуровне (деформация стержня) используется базис главных осей изгиба и кручения; на микроуровне (деформация среды) — базис Коссера.

Тензоры деформации и кривизны (4) записаны с учетом базиса Коссера, поскольку θ_i — представляют собой поворот локального репера Коссера.

В рассматриваемой в дальнейшем модели происходит «склейка» этих понятий: принимается, что в недеформированном состоянии базис Коссера в каждой точке сечения ориентирован так же, как и глобальный базис стержня. Это дает возможность использовать одни и те же компоненты вектора Дарбу для описания геометрии и в кинематических соотношениях для тензоров деформации и кривизны [19, 20].

В качестве исходного базиса Коссера принимается естественный трехгранник векторов, связанный с осью стержня в недеформированном состоянии. При деформации локальные реперы Коссера претерпевают поворот, состоящий из макроскопического поворота сечения Ω_i и малых высокоосциллирующих добавок w_i , обусловленных анизотропией и микроструктурой материала.

Относительно свойств материала предполагаем, что тело является однородным, криволинейно-анизотропным и связь между силовыми и геометрическими компонентами представима в виде [20, 21]

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \gamma_{kl} + B_{ijkl} \kappa_{kl}, \quad \mu_{ij} = B_{klij} \gamma_{kl} + D_{ijkl} \kappa_{kl}. \quad (5)$$

Для того чтобы все слагаемые в уравнениях имели один порядок, введем безразмерные силовые σ'_{ij} и моментные μ'_{ij} напряжения

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \sigma'_{ij}, \quad \mu_{ij} = h \sigma_0 \mu'_{ij},$$

в которых σ_0 — характерное (масштабное) значение силового напряжения, h — характерный линейный размер (толщина или радиус сечения). При этом

$$\frac{\lambda}{\sqrt{g}} (\tilde{\nabla}_1 \sigma_{1j} - e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \sigma_{1j} + \omega_s (e_{1si} \sigma_{ij} + e_{jsm} \sigma_{1m})) + \nabla_\alpha \sigma_{\alpha j} = 0. \quad (6)$$

Аналогичные предположения примем для моментных напряжений. Только в этом случае добавляется слагаемое $e_{jnm}\sigma_{nm}$, которое масштабируется как $\sigma_0\sigma'_{nm}$. И после деления на σ_0 и учета того, что $\mu \approx h\sigma_0$ уравнение равновесия моментных напряжений имеет вид

$$\frac{\lambda}{\sqrt{g}}(\tilde{\nabla}_1\mu_{1j} - e_{1\alpha\beta}\omega_1x_\alpha\nabla_\beta\mu_{1j} + \omega_s(e_{1si}\mu_{ij} + e_{jsm}\mu_{1m})) + \nabla_\alpha\mu_{\alpha j} + e_{jnm}\sigma_{nm} = 0. \quad (7)$$

Граничные условия на боковой поверхности в безразмерном виде для силовых и моментных напряжений будут такими [15]:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{g}}\sigma_{1j}\omega_1e_{1\alpha\beta}n_\alpha x_\beta + n_\alpha\sigma_{\alpha j} = 0, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{g}}\mu_{1j}\omega_1e_{1\alpha\beta}n_\alpha x_\beta + n_\alpha\mu_{\alpha j} = 0. \quad (8)$$

Для получения нулевого и первого приближений подставим асимптотические разложения напряжений в полученные ранее безразмерные уравнения равновесия.

Напряжения представим в виде рядов (индексы ij опущены для краткости)

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \varepsilon\sigma^{(1)} + \varepsilon^2\sigma^{(2)} + \dots, \quad \mu = \mu^{(0)} + \varepsilon\mu^{(1)} + \varepsilon^2\mu^{(2)} + \dots \quad (9)$$

Для удобства обозначим сложный оператор при малом параметре как $\widehat{L}_1$:

$$\widehat{L}_1(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{g}}(\tilde{\nabla}_1\sigma_{1j} - e_{1\alpha\beta}\omega_1x_\alpha\nabla_\beta\sigma_{1j} + \omega_s(e_{1si}\sigma_{ij} + e_{jsm}\sigma_{1m})). \quad (10)$$

Тогда безразмерные уравнения равновесия примут вид

$$\varepsilon\widehat{L}_1(\sigma_{ij}) + \nabla_\alpha\sigma_{\alpha j} = 0, \quad \varepsilon\widehat{L}_1(\mu_{ij}) + \nabla_\alpha\mu_{\alpha j} + e_{jnm}\sigma_{nm} = 0, \quad (11)$$

а граничные условия на боковой поверхности ($\widehat{L}_2$ – оператор при малом параметре) будут такими:

$$\varepsilon\widehat{L}_2(\sigma_{1j}) + n_\alpha\sigma_{\alpha j} = 0, \quad \varepsilon\widehat{L}_2(\mu_{1j}) + n_\alpha\mu_{\alpha j} = 0. \quad (12)$$

Нулевое приближение (порядок ε^0). Собирая члены, не содержащие ε , получим уравнения

$$\nabla_\alpha\sigma_{\alpha j}^{(0)} = 0, \quad \nabla_\alpha\mu_{\alpha j}^{(0)} + e_{jnm}\sigma_{nm}^{(0)} = 0, \quad (13)$$

и граничные условия на боковой поверхности

$$n_\alpha\sigma_{\alpha j}^{(0)} = 0, \quad n_\alpha\mu_{\alpha j}^{(0)} = 0. \quad (14)$$

Компоненты $\sigma_{\alpha j}^{(0)}$ удовлетворяют однородным уравнениям плоской задачи и нулевым граничным условиям (на боковой поверхности $\sigma_{\alpha j}^{(0)} = 0$). Учет этого

в уравнении для моментных напряжений совместно с нулевыми граничными условиями для $\mu_{\alpha j}^{(0)}$ приводит к соотношению $\mu_{\alpha j}^{(0)} = 0$.

Компоненты $\sigma_{11}^{(0)}$ и $\mu_{11}^{(0)}$ (нормальное напряжение и крутящий момент) в нулевом приближении остаются неопределенными функциями дуговой координаты, которые можно найти из условий разрешимости последующих приближений.

Первое приближение (порядок ε^1). Комбинируя члены при ε^1 и учитывая, что $\sigma_{\alpha j}^{(0)} = 0$, получим уравнения для силовых напряжений

$$\widehat{L}_1 \left(\sigma_{ij}^{(0)} \right) + \nabla_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(1)} = 0, \quad (15)$$

в которых в силу того, что $\sigma_{\alpha j}^{(0)} = 0$, в $\widehat{L}_1$ остаются только члены с индексом 1:

$$\widehat{L}_1 \left(\sigma_{ij} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\tilde{\nabla}_1 \sigma_{1j}^{(0)} - e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \sigma_{1j}^{(0)} + \omega_s e_{js1} \sigma_{11}^{(0)}) + \nabla_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(1)} = 0, \quad (16)$$

и уравнения для моментных напряжений имеют вид

$$\widehat{L}_1 \left(\mu_{ij}^{(0)} \right) + \nabla_\alpha \mu_{\alpha j}^{(1)} + e_{jnm} \sigma_{nm}^{(1)} = 0, \quad (17)$$

или в более подробной записи с учетом вхождения $\sigma_{nm}^{(1)}$ в уравнение

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1 \left(\mu_{ij} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\tilde{\nabla}_1 \mu_{1j}^{(0)} - e_{1\alpha\beta} \omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \mu_{1j}^{(0)} + \omega_s e_{js1} \mu_{11}^{(0)}) + \nabla_\alpha \mu_{\alpha j}^{(1)} + \\ + e_{j\alpha m} \sigma_{\alpha m}^{(1)} + e_{j1m} \sigma_{1m}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом граничные условия будут такими:

$$n_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(1)} + \widehat{L}_2 \left(\sigma_{1j}^{(0)} \right) = 0, \quad n_\alpha \mu_{\alpha j}^{(1)} + \widehat{L}_2 \left(\mu_{1j}^{(0)} \right) = 0. \quad (19)$$

Первое приближение $\sigma_{\alpha j}^{(1)}$ описывает распределение касательных напряжений в сечении, вызванное изменением продольных сил $\sigma_{11}^{(0)}$ вдоль оси стержня (производная $\tilde{\nabla}_1$). Первое приближение $\mu_{\alpha j}^{(1)}$ определяется не только изменением моментов $\mu_{11}^{(0)}$, но и наличием несимметричных силовых напряжений $\sigma_{mn}^{(1)}$, что характерно для микрополярных сред.

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений в частных производных по переменным в поперечном сечении. Продольная координата входит в них как параметр. Нулевое приближение – это фактически состояние чистого растяжения/сжатия или чистого изгиба/кручения. Первое приближение учитывает кривизну оси (ω_s) и изменение напряженного состояния вдоль стержня.

Построение одномерной модели. Для перехода от трехмерных уравнений микрополярной теории упругости к одномерной модели введем макроскопические кинематические переменные. Будем считать, что перемещения и повороты точек оси стержня определяются функциями $U_i(s)$ и $\Omega_i(s)$, зависящими

только от дуговой координаты. С целью описания кинематики деформирования искривленной оси в базисе главных осей изгиба и кручения введем векторы макродеформаций: вектор растяжения-сдвига $T_i(s)$ и вектор изгиба-кручения $K_i(s)$, которые порождаются действующими на стержень концевыми нагрузками. Компонента $T_1(s)$ характеризует осевое удлинение стержня, а $T_2(s)$, $T_3(s)$ — деформации поперечного сдвига. Компонента $K_1(s)$ определяет деформацию кручения, в то время как $K_2(s)$, $K_3(s)$ соответствуют изменениям главных кривизн оси при изгибе. Данные функции являются «медленными» переменными задачи, через которые в дальнейшем будут выражены локальные функции деформации сечения w_i и ψ_i

Получим замыкающие соотношения (физических уравнений) через решение локальных задач на сечении, которыми определяется, как трехмерные напряжения распределяются по сечению, чтобы затем проинтегрировать их и получить связь «усилия–деформации».

На основе структуры тензоров деформации и кривизны, асимптотических разложений с целью связи между базисом главных осей изгиба и кручения с базисом Коссера представим перемещения u_i и повороты θ_i как сумму жесткого перемещения сечения и функций депланации (искажения формы сечения):

$$\begin{aligned} u_i(s, x_\alpha) &= U_i(s) + e_{i\beta\gamma} \Omega_\beta(s) x_\gamma + \lambda w_i(s, x_2, x_3), \\ \theta_i(s, x_\alpha) &= \Omega_\beta(s) + \lambda \psi_i(s, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (20)$$

При этом w_i и ψ_i — неизвестные функции деформации.

Подставив эти выражения в приведенные выше трехмерные уравнения равновесия первого приближения, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно координат сечения

$$\nabla_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(1)} = -\widehat{L}_1 \left(\sigma_{ij}^{(0)} \right), \quad \nabla_\alpha \mu_{\alpha j}^{(1)} + e_{jnm} \sigma_{\alpha m}^{(1)} = -\widehat{L}_1 \left(\mu_{ij}^{(0)} \right). \quad (21)$$

С учетом уравнений закона Гука (5) эти уравнения превращаются в неоднородные уравнения относительно w_i и ψ_i с решениями в виде

$$\begin{aligned} w_i &= \phi_{ip}(x_2, x_3) T_p(s) + \chi_{ip}(x_2, x_3) K_p(s), \\ \psi_i &= \eta_{ip}(x_2, x_3) T_p(s) + \zeta_{ip}(x_2, x_3) K_p(s), \end{aligned} \quad (22)$$

где ϕ , χ , η , ζ — функции влияния, зависящие только от геометрии сечения и констант анизотропии.

Подставим найденные деформации в уравнения закона Гука. Для примера рассмотрим силовое напряжение

$$\sigma_{1j} = A_{1jkl} \gamma_{kl} + B_{1jkl} \kappa_{kl}. \quad (23)$$

Подставляя $\widehat{\gamma}$ и $\widehat{\kappa}$ через деформации w_i и ψ_i , получаем

$$\gamma_{1j} = T_j + e_{j1k} \psi_k + \dots,$$

$$\sigma_{1j} = [A_{1j1p} + A_{1j\alpha k} \nabla \phi_{kp} + \dots] T_p + [B_{1j1p} + A_{1j\alpha k} \nabla \chi_{kp} + \dots] K_p. \quad (24)$$

Таким образом, получили локальное распределение напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}(x_2, x_3) &= a_{jp}(x_2, x_3) T_p + b_{jp}(x_2, x_3) K_p, \\ \mu_{1j}(x_2, x_3) &= c_{jp}(x_2, x_3) T_p + d_{jp}(x_2, x_3) K_p, \end{aligned} \quad (25)$$

где $T_i(s)$ и $K_i(s)$ – компоненты одномерных векторов деформации растяжения-сдвига и изгиба-кручения оси стержня соответственно. Они описывают, как деформируется «осевая линия» стержня как целое, прежде чем учитываются искажения самого сечения.

Таким образом, соотношение (22) отражает ключевой момент разделения переменных в асимптотическом анализе: $T_i(s)$ и $K_i(s)$ – это «медленные» функции, они зависят только от продольной координаты s и определяют общее напряженное состояние стержня; $\phi_{ip}(x_2, x_3)$, $\chi_{ip}(x_2, x_3)$ – это «быстрые» функции влияния, они показывают, как конкретная точка сечения (x_2, x_3) «откликается» на макродеформацию (растяжение или изгиб).

Для построения замкнутой модели нужно связать макродеформации $T_i(s)$ и $K_i(s)$ с перемещениями и поворотами стержня как целого $U_i(s)$ и $\Omega_i(s)$.

Переход к одномерным соотношениям. Подставив локальные напряжения в выражения интегральных усилий Q_i и моментов M_i , получаем выражения

$$Q_j = \iint_S \sigma_{1j} dS = \iint_S (a_{jp} T_p + b_{jp} K_p) dS,$$

из которых на основе (25) найдем коэффициенты жесткости

$$A_{jp}^* = \iint_S a_{jp} dS, \quad B_{jp}^* = \iint_S b_{jp} dS, \quad (26)$$

и выражения для

$$M_j = \iint_S (\mu_{1j} + e_{j\alpha m} x_\alpha \sigma_{1m}) dS.$$

Учитывая выражения для σ_{ij} , μ_{ij} и группируя слагаемые при деформациях, найдем

$$M_j = \underbrace{\iint_S (c_{jp} + e_{j\alpha m} x_\alpha a_{mp}) dS}_{D_{jp}^*} \cdot T_p + \underbrace{\iint_S (d_{jp} + e_{j\alpha m} x_\alpha b_{mp}) dS}_{C_{jp}^*} \cdot K_p. \quad (27)$$

Вычислив интегралы, получаем уравнения одномерной теории равновесия стержня

$$\frac{dQ_j}{ds} + e_{jsi} \omega_s Q_i + q_j = 0; \quad (28)$$

$$\frac{dM_j}{ds} + e_{jsi} \omega_s M_i + e_{j1m} Q_m + m_j = 0, \quad (29)$$

в которых q_i – внешняя распределенная нагрузка. При этом слагаемое $e_{j1m}Q_m$ описывает вклад перерезывающих сил в изменение момента (плечо силы), m_i – внешние распределенные моменты.

Полученную систему уравнений нужно дополнить замыкающими соотношениями, связывающими основные геометрические, силовые и моментные характеристики деформируемого стержня:

$$Q_j = A_{jp}^* T_p + B_{jp}^* K_p, \quad M_j = D_{jp}^* T_p + C_{jp}^* K_p. \quad (30)$$

Коэффициенты в соотношениях (30) имеют следующий смысл: матрица A_{jp}^* описывает жесткость на растяжение-сжатие и сдвиг; в случае анизотропии растяжение (Q_1) может быть вызвано сдвиговыми деформациями $T_{2,3}$; матрица C_{jp}^* описывает изгибно-крутильную жесткость и учитывает как классический момент инерции, так и микрополярные модули; матрицы B_{jp}^* и D_{jp}^* описывают «перекрестные» эффекты, демонстрируют взаимосвязь растяжения и кручения, изгиба и сдвига.

В полученных соотношениях выделим слагаемые, содержащие компоненты вектора Дарбу, для наглядного сравнения с классическими соотношениями Эйлера-Бернулли. Такое разделение позволяет четко разграничить вклады геометрии (вектор Дарбу), макродвижения (производные) и поворота сечения как независимой переменной микрополярной среды. Получаем:

– уравнения для сил

$$Q_j = \underbrace{A_{jp}^* \frac{dU_p}{ds} + B_{jp}^* \frac{d\Omega_p}{ds}}_{\text{Деформационная часть}} + \underbrace{\omega_n (A_{jp}^* e_{pnm} U_m)}_{\text{Геометрия (Дарбу)}} + \underbrace{\Omega_m (B_{jp}^* e_{pnm} \omega_n - A_{jp}^* e_{p1m})}_{\text{Вклад поворота сечения}}, \quad (31)$$

– уравнения для моментов

$$M_j = \underbrace{D_{jp}^* \frac{dU_p}{ds} + C_{jp}^* \frac{d\Omega_p}{ds}}_{\text{Деформационная часть}} + \underbrace{\omega_n (D_{jp}^* e_{pnm} U_m)}_{\text{Геометрия (Дарбу)}} + \underbrace{\Omega_m (C_{jp}^* e_{pnm} \omega_n - D_{jp}^* e_{p1m})}_{\text{Вклад поворота сечения}}. \quad (32)$$

Выводы. На основе анализа полученных одномерных уравнений деформации стержня в рамках неклассической модели механики сплошной среды выявлены новые механические эффекты, которые не учитываются в традиционной симметричной теории упругости изотропных тел.

Описан эффект связанности деформаций: в отличие от классической теории, где растяжение, изгиб и кручение кинематически независимы, общая анизотропия приводит к полной взаимосвязи всех типов нагрузок. Физически это проявляется в возникновении кручения при осевом растяжении, искривлении стержня в перпендикулярной плоскости при чистом одноплоскостном изгибе, а также в появлении осевой деформации при сдвиге.

Установлено, что учет микрополярной природы среды существенно влияет на жесткость тонких стержней. При уменьшении поперечных размеров (радиуса) стержня его реальная изгибная жесткость оказывается значительно выше

значений, прогнозируемых классической теорией, за счет превалирующего вклада микроструктурной поправки.

Выявлено, что микроструктура материала оказывает дополнительное внутреннее сопротивление вращению стержня вокруг своей оси, не зависящее от геометрического момента инерции сечения. Из-за несимметричности тензора напряжений нарушается закон парности касательных напряжений, что усложняет их распределение и смещает положение центра изгиба.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБНУ ИПММ (тема № FREM-2026-0005).

Список литературы

1. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин. – К.: Наук. думка, 1979. – 216 с.
2. *Аэро Э.Л.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // ФТТ. – 1960. – Т. 2, № 7. – С. 1399–1409.
3. *Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметрической упругости / Е.В. Кувшинский, Э.Л. Аэро // ФТТ. – 1969. – Т. 5, № 9. – С. 2591–2598.
4. *Cosserat E.* Theorie des corps deformables / E. Cosserat, F. Cosserat. – Paris: A. Hermann et fils, 1909. – 226 p. (Appendix, p. 953–1173 of Chwolson's Traite de Physique. 2nd ed., Paris).
5. *Koiter W.T.* Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt. I–II / W.T. Koiter // Proc. Koninkl. Netherland. Akad. Wetensch. – 1964. – V. B67, № 1. – P. 17–44.
6. *Новацкий В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
7. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости / В.А. Пальмов // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 401–408.
8. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity / W. Nowacki. – Oxford, N.Y., Toronto et al: Pergamon-Press. – 1986. – 383 p.
9. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress / R.A. Toupin // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1964. – V. 17, № 2. – P. 85–112.
10. *Eringen A.C.* Nonlocal polar field theories / A.C. Eringen // Continuum Physics. – 1976. – V. 4. – P. 205–268.
11. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids / A.C. Eringen. – Berlin, Heidelberg, N.Y. et al: Springer-Verlag. – 1999. – 325 p.
12. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. II. Fluent Media / A.C. Eringen. – Berlin, Heidelberg, N.Y. et al: Springer-Verlag, 2001. – 342 p.
13. *Иванова Е.А.* Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур / Е.А. Иванова, А.М. Кривцов, Н.Ф. Морозов, А.Д. Фирсова // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 6. – С. 764–768.
14. *Китайгородский А.И.* Невалентные взаимодействия атомов в органических кристаллах и молекулах / А.И. Китайгородский // УФН. – 1979. – Т. 127, вып. 3. – С. 391–419.
15. *Илюхин А.А.* К моментной теории упругих стержней / А.А. Илюхин, Н.Н. Щепин // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2001. – Спецвыпуск. – С. 92–94.
16. *Никабадзе М.У.* К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости / М.У. Никабадзе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 2014. № 1. – С. 30–39.
17. *Остросаблин Н.И.* Классы симметрии тензоров анизотропии и обобщение подхода Кельвина / Н.И. Остросаблин // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 3. – С. 108–129.
18. *Остросаблин Н.И.* Общее решение двумерной системы статических уравнений Ламе линейной теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости / Н.И. Остросаблин // Сиб. журн. индустриальной математики. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 61–71.
19. *Никабадзе М.У.* О связи тензоров напряжений и моментных напряжений в микроконтину-

- альной теории упругости / М.У. Никабадзе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 2011. – № 6. – С. 59–62.
20. Аннин Б.Д. Анизотропия упругих свойств материалов / Б.Д. Аннин, Н.И. Остросаблин // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 131–151.
21. Аннин Б.Д. Определяющие уравнения моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стесненным вращением. / Б.Д. Аннин, Н.И. Остросаблин, Р.И. Угрюмов // Сиб. журн. индустриальной математики. – 2023. – Т. 26, № 1. – С. 5–19.

D.V. Timoshenko, A.A. Ilyukhin

Formulation of constitutive equations for the anisotropic couple-stress theory of elastic rods.

One-dimensional equilibrium equations and constitutive relations for elastic rods are obtained by taking into account micropolar properties (the Cosserat model) and the general anisotropy of the material. The transition from the three-dimensional elasticity problem to a one-dimensional model is performed based on the method of asymptotic integration with respect to a small parameter representing the ratio of the cross-sectional size to the rod length. The analysis is carried out in a general coordinate system associated with the natural moving trihedron of the rod axis, whose geometry is described by the components of the Darboux vector. The relationship between the macroscopic behavior of the rod and the material microstructure is established through the physical identification of the global basis of the rod axis with the local Cosserat frames in the undeformed state.

Keywords: *Cosserat continuum, elastic rod, asymptotic methods.*

References

1. Ilyukhin, A.A. (1979). *Spatial problems of the nonlinear theory of elastic rods*. Kiev: Naukova Dumka. 216 p. (In Russian).
2. Aero, E.L., & Kuvshinskii, E.V. (1960). [Fundamental equations of the theory of elasticity of media with rotational interaction of particles]. *Fizika Tverdogo Tela = Solid State Physics*, 2(7), 1399–1409. (In Russian).
3. Kuvshinskii, E.V., & Aero, E.L. (1969). [Continuum Theory of Asymmetric Elasticity]. *Fizika Tverdogo Tela = Solid State Physics*, 5(9), 2591–2598. (In Russian).
4. Cosserat, E., & Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et Fils. 226 p.
5. Koiter, W.T. (1964). Couple-stresses in the theory of elasticity. Parts I–II. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series B*, 67(1), 17–44.
6. Nowacki, W. (1975). *Theory of Elasticity*. Moscow: Mir. 872 p. (In Russian).
7. Palmov, V.A. (1964). [Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 28(3), 401–408. (In Russian).
8. Nowacki, W. (1986). *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, N.Y., Toronto et al: Pergamon Press. 383 p.
9. Toupin, R.A. (1964). Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(2), 85–112.
10. Eringen, A.C. (1976). Nonlocal polar field theories. In A. C. Eringen (Ed.), *Continuum Physics* (Vol. 4, pp. 205–268).
11. Eringen, A.C. (1999). *Microcontinuum Field Theories. Vol. I: Foundations and Solids*. Berlin, Heidelberg, N.Y. et al: Springer-Verlag. 325 p.
12. Eringen, A.C. (2001). *Microcontinuum Field Theories. Vol. II: Fluent Media*. Berlin, Heidelberg, N.Y. et al: Springer-Verlag. 342 p.
13. Ivanova, E.A., Krivtsov, A.M., Morozov, N.F., & Firsova, A.D. (2003). Inclusion of the moment interaction in the calculation of the flexural rigidity of nanostructures. *Doklady Physics*, 48(8), 455–458.

14. Kitaigorodskii, A.I. (1979). [Nonvalent interactions of atoms in organic crystals and molecules]. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk = Physics Uspekhi*, 22(3), 183–198. (In Russian).
15. Ilyukhin, A.A., & Shchepin, N.N. (2001). K momentnoi teorii uprugikh sterzhnei [On the couple-stress theory of elastic rods]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki*, Special Issue, 92–94. (In Russian).
16. Nikabadze, M.U. (2014). [Construction of eigen tensor columns in the micropolar linear theory of elasticity]. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 69(1), 18–25. (In Russian).
17. Ostrosablin, N.I. (2017). [Symmetry classes of anisotropy tensors and a generalization of Kelvin’s approach]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 58(3), 471–489. (In Russian).
18. Ostrosablin, N.I. (2018). [General solution of the two-dimensional system of static Lamé equations of linear elasticity with a nonsymmetric elasticity-modulus matrix]. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 12(1), 104–113. (In Russian).
19. Nikabadze, M.U. (2011). [On the relationship between stress and couple-stress tensors in the microcontinuum theory of elasticity]. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 66(6), 153–156. (In Russian).
20. Annin, B.D., & Ostrosablin, N.I. (2008). [Anisotropy of the elastic properties of materials]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 49(6), 948–964. (In Russian).
21. Annin, B.D., Ostrosablin, N.I., & Ugryumov, R.I. (2023). [Constitutive equations of the couple-stress linear theory of elasticity and the two-dimensional problem of pure shear with constrained rotation]. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 17(1), 1–13. (In Russian).

Поступила в редакцию / Original submitted 03.07.2026.

Доработана / Revision submitted 20.07.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-16-25

EDN:XFVEAJ



©2026. Е.В. Авдюшина

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ
ОТВЕРСТИЯМИ И ВЫЕМАМИ ОБОБЩЕННЫМ
МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

Решена задача по определению напряженного состояния анизотропной полуплоскости с произвольными криволинейными отверстиями. Решение построено с использованием комплексных потенциалов, конформных отображений и разложений голоморфных функций в ряды Лорана. Выполнение граничных условий на контурах отверстий и на отрезке прямолинейной границы с наибольшим влиянием отверстий на напряженное состояние осуществлено обобщенным методом наименьших квадратов. В результате задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Численные исследования проведены для полуплоскости с одним криволинейным отверстием, которое в частных случаях выходит на прямолинейную границу, образуя криволинейный выем. Исследованы влияния формы и месторасположения отверстия, а также «степени анизотропии» на значения напряжений и их концентрацию около отверстия.

Ключевые слова: полуплоскость, комплексные потенциалы, криволинейные отверстия, выемы, концентрация напряжений, обобщенный метод наименьших квадратов..

Введение. Элементами многих современных конструкций служат анизотропные пластинки с отверстиями, около которых при эксплуатации конструкций возникают высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций.

И в этом направлении наиболее точные данные о напряженном состоянии многосвязной анизотропной пластинки можно получить, используя для исследований метод комплексных потенциалов. Эти функции были введены С.Г. Лехницким [1] и использованы им для решения различных задач в случае односвязных областей. При их использовании в случае полуплоскости с отверстиями

Авдюшина Елена Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: elena.v.a.2023@mail.ru, ORCID: 0009-0004-4038-9388.

Avdyushina Elena Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

нужно удовлетворять граничным условиям не только на контурах отверстий, но и на прямолинейной границе. Точное удовлетворение условиям на этой границе обеспечивает использование метода интегралов типа Коши. Таким подходом в работах [2–4] решен ряд задач для многосвязной полуплоскости с различными отверстиями и трещинами. При этом удовлетворение граничным условиям на внутренних контурах отверстий и трещин осуществлялось методом рядов [2], дискретным методом наименьших квадратов [3], обобщенным методом наименьших квадратов [4].

В данной статье для удовлетворения граничным условиям на всех границах многосвязной полуплоскости использован обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [5], который позволил рассматривать любые расположения отверстий и трещин, в том числе выходящие на прямолинейную границу полуплоскости.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим анизотропную полуплоскость с произвольно расположенными отверстиями и трещинами. Контур отверстия и трещины могут пересекаться между собой, пересекать прямолинейную границу, образуя на ней выемки различной конфигурации. Для решения задачи теории упругости будем рассматривать многосвязную полуплоскость, занимающую область S с прямолинейной границей L^+ и контурами эллиптических отверстий L_l с полуосями a_l , b_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), которые могут вырождаться в прямолинейные разрезы, пересекать прямолинейную границу (рис. 1). Будем считать, что прямолинейная граница свободна от внешних усилий, контуры отверстий загружены самоуравновешенными внешними усилиями, на бесконечности полуплоскость находится под действием растягивающих усилий $\sigma_x^\infty = p$.

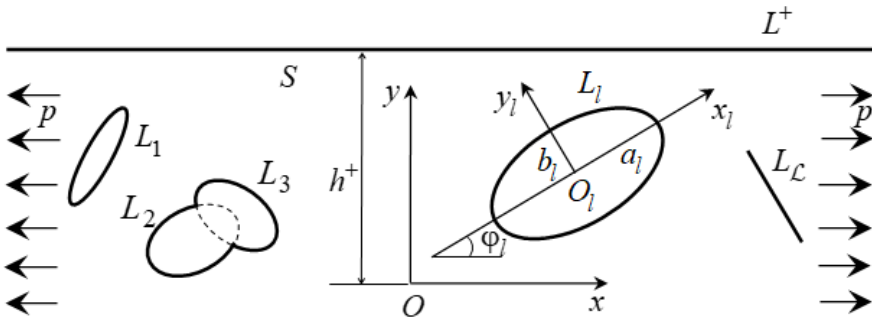


Рис. 1.

Отнесем полуплоскость к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке на расстоянии h^+ от границы L^+ , ось Ox направим параллельно прямолинейной границе. Для каждого из эллипсов L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) введем локальную систему координат $O_l x_l y_l$ с началом в центре эллипса и направлением оси Ox_l вдоль полуоси a_l . Тогда параметрические уравнения эллипсов L_l в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ — параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} — координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l — угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

При использовании комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела искомая задача сводится к определению функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) из граничных условий на контурах отверстий и на прямолинейной границе. Функции $\Phi_k(z_k)$ зависят от обобщенных комплексных переменных [1]

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k — корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \quad (4)$$

a_{ij} — коэффициенты деформаций материала полуплоскости.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в нижних полуплоскостях S_k , получаемых из рассматриваемой полуплоскости S аффинными преобразованиями (3) и ограниченных контурами L_k^+ и L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), соответствующими контурам L^+ и L_l при этих преобразованиях. В общем случае они имеют вид [6]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} + \varphi'^+_{kln}(z_k) b_{kln}], \quad (5)$$

где Γ_k — постоянные, определяемые решением системы

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = (0, 0, \sigma_x^\infty, \frac{a_{16}}{2a_{22}} \sigma_x^\infty); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \varphi'^+_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\overline{R_{kl}} (\zeta_{kl}^+)^{n-1} ((\zeta_{kl}^+)^2 - \overline{m_{kl}})}; \end{aligned} \quad (7)$$

ζ_{kl} — переменные, определяемые из конформных отображений [7]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (8)$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} областей S_k ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$\begin{aligned} R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}; \end{aligned} \quad (9)$$

ζ_{kl}^+ – переменные, определяемые из конформных отображений внешностей единичных окружностей $|\zeta_{kl}^+| \geq 1$ на внешности воображаемых контуров L_{kl}^+ верхней полуплоскости по формулам [6]

$$\bar{z}_k = t_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k) h^+ = \bar{z}_{kl} + \bar{R}_{kl} \left(\zeta_{kl}^+ + \frac{\bar{m}_{kl}}{\zeta_{kl}^+} \right); \quad (10)$$

a_{kln}, b_{kln} – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий на прямолинейной границе и на контурах отверстий. Эти условия в дифференциальной форме имеют вид

$$2Re \sum_{k=1}^2 g_{ik} \delta_{ks} \Phi'_k(t_k) = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, \quad i = \overline{1, 2}), \quad (11)$$

где

$$g_{1k} = 1, \quad g_{2k} = -\mu_k;$$

$\delta_{ks} = 1$ на прямолинейной границе, $\delta_{ks} = dz_k/ds$ на контурах отверстий.

Используя обобщенный метод наименьших квадратов [5, 8, 9], удовлетворим граничным условиям (11). Для этого на отрезке прямолинейной границе L^+ , где влияние отверстий и разрезов на напряженное состояние полуплоскости значительное, и на каждом из контуров L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_m(x_m, y_m)$, в которых удовлетворим граничным условиям. Подставив функции (5) в граничные условия (11), для определения неизвестных постоянных a_{kln} и b_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik} \delta_{ks} \left[\varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} + \varphi'^+_{kln}(t_{kpm}) b_{kln} \right] = \\ = -2Re \sum_{k=1}^2 g_{ik} \delta_{ks} \Gamma_k \quad (i = 1, 2; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}}). \end{aligned} \quad (12)$$

После решения системы (12) методом сингулярных разложений [10, 11], комплексные потенциалы $\Phi'_k(z_k)$ станут известными, что позволит вычислять в любой точке полуплоскости основные напряжения [1]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2Re \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (13)$$

и напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny))\end{aligned}\quad (14)$$

на произвольных площадках с нормалью n и касательной s .

Описание результатов численных исследований. Были проведены многочисленные исследования по распределению напряжений в рассматриваемой полуплоскости. При проведении численных исследований количество $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ на контурах $L_p(p = \overline{1, \mathcal{L}})$ и на прямолинейной границе L^+ , для которых составлялись уравнения системы (12), и количество членов в бесконечных рядах (5) увеличивались до тех пор, пока граничные условия на этих контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. Как показали исследования, для того, чтобы напряжения на площадках, касательных к контурам отверстий были не более 10^{-3} (вместо 0 по условию), необходимо было в рядах (5) оставлять от 25 до 45 членов и на каждом из контуров отверстий выбирать от 150 до 350 «коллокационных точек». На «коллокационном отрезке» прямолинейной границы L^+ выбиралось от 250 до 600 равномерно распределенных точек».

Исследования проводились для полуплоскости из изотропного материала алюминий (материал М1) с техническими постоянными [12]

$$E_1 = 71000 \text{ МПа}, \quad E_2 = 71000,5 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 28400 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0,25$$

и сильно анизотропного материала углепластик HMS/DX209 с жесткими волокнами вдоль оси Ox (материал М3) с постоянными [13]

$$E_1 = 188800 \text{ МПа}, \quad E_2 = 6000 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 2700 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0,3.$$

Для изотропного материала М1 постоянная E_2 принята незначительно отличной от E_1 , чтобы изотропную пластинку рассматривать как анизотропную и использовать приведенное выше решение. В противном случае при $E_2 = E_1$ корни μ_k характеристического уравнения (4) будут равными (комплексной величине i) и основные соотношения для комплексных потенциалов изменят свою форму записи. При таком подходе получаемые значения напряжений отличаются от истинных менее сотых долей процента.

В табл. 1 для полуплоскости со сводчатым отверстием (рис. 2, a) в зависимости от c^+/a_1 , где a_1 – радиус контура крышки свода L_1 , c^+ – расстояние от крышки до границы полуплоскости, приведены значения напряжений в точках контура крышки для некоторых значений угла θ , отчитываемого от основания против часовой стрелки, и в некоторых характерных точках полуплоскости.

Таблица 1.

Значения напряжений в некоторых точках полуплоскости со сводчатым отверстием

$\frac{c^+}{a_1}$	σ_s/p около L_1 при значениях θ						$\frac{\sigma_y}{p}$ в F	σ_x/p , в точках				
	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$		G	O	K	M	P
	Материал М1											
1,0	-1,183	-0,391	0,920	2,602	4,158	4,82	-0,956	1,987	0,620	1,06	1,743	1,993
0,5	-1,587	-1,026	0,115	2,192	4,839	6,20	-0,906	2,048	0,474	1,84	2,812	2,498
0,1	-0,932	-1,739	-1,983	-1,221	4,631	13,44	-0,644	2,186	0,241	6,52	3,743	1,999
-0,1	-1.642	-0,010	-0,133	0,332	—	—	-0,510	2,336	—	0,15	-0,048	0,043
-0,3	-1,952	0,227	4,219	—	—	—	-0,353	2,192	—	—	-0,087	0,274
-0,5	-2,070	14,314	—	—	—	—	-1,291	1,522	—	—	-1,286	0,913
	Материал М3											
1,0	-0,179	-0,097	0,076	0,484	2,275	14,00	-0,179	3,535	0,654	0,89	1,338	1,651
0,5	-0,216	-0,183	-0,033	0,382	2,433	16,25	-0,184	3,651	0,456	1,23	2,288	2,671
0,1	-0,270	-0,383	-0,457	-0,445	2,013	29,28	-0,165	3,927	0,450	7,21	7,278	5,483
-0,1	0,148	-0,626	-1,463	-8,716	—	—	-0,159	4,403	—	49,38	9,857	4,453
-0,3	0,731	-0,196	-1,937	—	—	—	-0.109	4,516	—	—	0,012	-0,045
-0,5	0,218	-0,127	—	—	—	—	-0,282	1,607	—	—	-1,659	-1,141

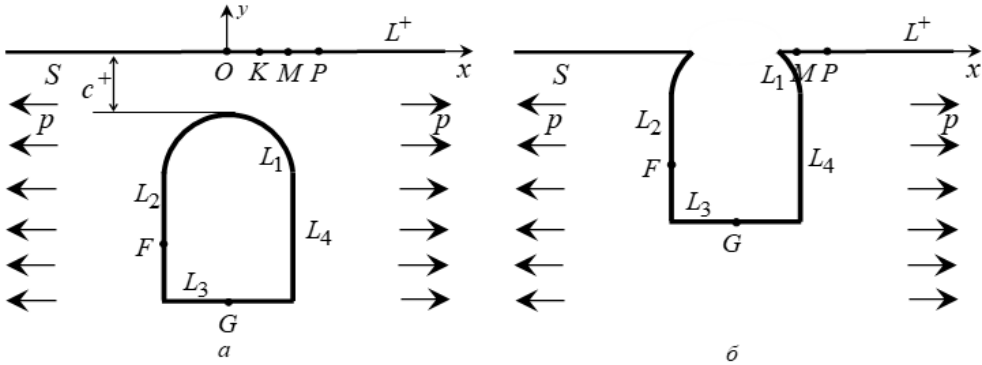


Рис. 2.

При этом контур свода представлялся как комбинация частей контуров эллипсов при

$$\mathcal{L} = 4;$$

$$L_1 : a_1, b_1 = a_1, x_{01} = 0, y_{01} = -c^+ - a_1, \varphi_1 = 0;$$

$$L_2 : a_2 = a_1, b_2 = 10^{-4}a_1, x_{02} = -a_1, y_{02} = -c^+ - 2a_1, \varphi_2 = \pi/2;$$

$$L_3 : a_3 = a_1, b_3 = 10^{-4}a_1, x_{03} = 0, y_{03} = -c^+ - 3a_1, \varphi_3 = \pi;$$

$$L_4 : a_4 = a_1, b_4 = 10^{-4}a_1, x_{04} = a_1, y_{04} = -c^+ - a_1, \varphi_4 = 3\pi/2. \quad (15)$$

Прямолинейные участки боковых сторон и основания свода аппроксимировались внешними берегами разрезов, представленных эллипсами L_2, L_3, L_4 , у

которых $b_l/a_l = 10^{-3}$. Полудлины разрезов L_2, L_3, L_4 принимались равными радиусу крышки a_1 . Характерными принимались точки $G(0; -c^+ - 3a_1)$, $F(-a_1; -c^+ - 2a_1)$, $O(0; 0)$, $K(a_1/2; 0)$, $M(a_1; 0)$, $P(3a_1/2; 0)$. При этом значения c^+/a_1 , равные -0,1 и -0,9, соответствуют случаям выхода части контура свода за прямолинейную границу, т.е. случаю выема на границе полуплоскости.

Из табл. 1 следует, что при сближении сводчатого отверстия с прямолинейной границей происходит резкий рост растягивающих напряжений в окрестности вершины свода (при $\theta = \pi/2$), в центре основания свода (в точке G) и в точках прямолинейной границы полуплоскости. Эта закономерность наблюдается и после выхода отверстия на прямолинейную границу пока выем глубокий. С уменьшением глубины выема указанные напряжения уменьшаются вплоть до смены зон растяжения зонами сжатия. При этом указанные изменения напряжений более значительны для полуплоскости из сильно анизотропного материала МЗ, чем для материала М1.

В табл. 2 и табл. 3 для полуплоскости с равносторонним треугольным отверстием (рис. 3, а) в зависимости от c^+/a_1 , где a_1 – полудлина сторон треугольника, c^+ – расстояние от вершины треугольника до границы полуплоскости, приведены значения напряжений σ_s/p в точках левой боковой стороны L_1 треугольника для некоторых значений угла θ (конформного отображения (10) для этой стороны), отчитываемого от центра стороны против часовой стрелки, и в некоторых характерных точках полуплоскости. В качестве характерных точек принимались середина наклонной стороны треугольника (точка F) и точки $G(0; -c^+ - a_1\sqrt{3}/2)$, $O(0; 0)$, $K(a_1/2; 0)$, $M(a_1; 0)$, $P(3a_1/2; 0)$.

Таблица 2. Значения напряжений σ_s/p в некоторых точках боковой стороны L_1 треугольника для некоторых значений угла θ в конформном отображении для различных значений c^+/a_1

$\frac{c^+}{a_1}$	θ , рад.								
	$\frac{\pi}{90}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{178\pi}{180}$
Материал М1									
1,0	21,705	2,205	0,756	0,166	-0,189	-0,438	-0,999	-1,235	-1,576
0,5	26,677	2,337	0,606	-0,108	-0,480	-0,686	-1,085	-1,289	-1,605
0,1	26,019	1,842	-1,155	-1,571	-1,367	-1,147	-1,045	-1,195	-1,459
-0,1	—	—	-19,641	-7,106	-2,669	-1,536	-0,959	-1,079	-1,321
-0,3	—	—	—	—	-8,349	-3,049	-1,291	-1,263	-1,367
-0,5	—	—	—	—	—	-5,934	-1,308	-1,327	-1,546
Материал МЗ									
1,0	2,058	0,226	0,039	-0,038	-0,084	-0,118	-0,202	-0,237	-0,285
0,5	2,179	0,219	0,009	-0,075	-0,119	-0,148	-0,217	-0,249	-0,296
0,1	2,780	0,052	-0,254	-0,284	-0,257	-0,229	-0,227	-0,250	-0,288
-0,1	—	—	15,812	-1,397	-0,767	-0,503	-0,323	-0,337	-0,380
-0,3	—	—	—	—	-0,017	-0,025	-0,091	-0,120	1,298
-0,5	—	—	—	—	—	-0,045	-0,082	-0,112	-0,140

Из табл. 2 и табл. 3 видно, что при приближении треугольного отверстия к прямолинейной границе значительные изменения значений напряжений наблюдаются вблизи верхней вершины треугольника и в точках прямолинейной границы полуплоскости при незначительных изменениях этих величин в остальных зонах. Опять выход отверстия к границе полуплоскости сопровождается резкими изменениями значений напряжений около отверстия, причем с уменьшением глубины выема указанные напряжения уменьшаются вплоть до смены зон растяжения зонами сжатия. Опять на значения напряжений и их изменения более значительны для полуплоскости из сильно анизотропного материала М3, чем для материала М1.

Таблица 3. Значения напряжений в некоторых точках полуплоскости с треугольным отверстием для различных значений c^+/a_1

$\frac{c^+}{a_1}$	Точки											
	F	G	O	K	M	P	F	G	O	K	M	P
	Материал М1						Материал М3					
1,0	-0,632	1,666	0,654	1,091	1,496	1,504	-0,146	2,821	0,762	1,005	1,276	1,386
0,5	-0,820	1,701	0,310	1,845	1,945	1,573	-0,170	2,899	0,516	1,424	1,851	1,898
0,1	-1,014	1,776	-1,595	3,175	1,802	1,136	-0,216	3,081	-0,847	4,785	3,913	2,980
-0,1	-1,102	1,688	—	4,804	2,092	1,208	-0,386	3,031	—	12,152	6,216	4,054
-0,3	-1,842	1,705	—	10,695	2,355	2,325	-0,039	3,324	—	0,181	0,037	-0,171
-0,5	-2,381	1,569	—	7,988	2,360	1,216	-0,031	3,150	—	-0,076	-0,064	-0,208

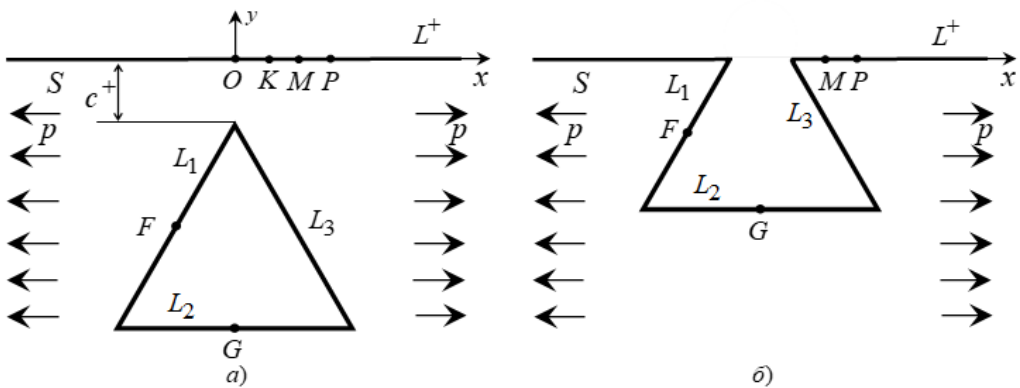


Рис. 3.

Закключение. Таким образом, решена задача об определении напряженного состояния полуплоскости с криволинейными отверстиями. Численные исследования проведены для полуплоскости со сводчатой или треугольной отверстиями. Исследованы влияние форм и месторасположения отверстий на концентрацию напряжений около отверстий и в зоне перемычки между отверстиями и прямо-

линейной границей. Рассмотрены случаи выхода отверстий на прямолинейную границу с образованием выемов. Изучено влияние глубины выемов, а также анизотропии материала полуплоскости на значения напряжений и их концентрацию.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. *Калоеров С.А.* Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
3. *Калоеров С.А.* Концентрация напряжений в анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 63–72.
4. *Калоеров С.А.* Исследование напряженного состояния многосвязной анизотропной полуплоскости обобщенным методом наименьших квадратов / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, О.Э. Ермаков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2021. – № 1 (74). – С. 16–30.
5. *Калоеров С.А.* Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
6. *Калоеров С.А.* Общие решения задач для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2018. – № 2. – С. 22–35.
7. *Калоеров С.А.* Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
8. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
9. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер К. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
10. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1322–1342. Doi:10.1137/050639193.
11. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1343–1362. Doi:10.1137/05063920X.
12. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
13. *Композиционные материалы: Справочник* / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

E.V. Avdyushina

Study of the stress state of an anisotropic half-plane with curvilinear openings and cutouts using the generalized least squares method.

The problem of determining the stress state of an anisotropic half-plane with arbitrary curved holes is solved. The solution is constructed using complex potentials, conformal mappings, and Laurent series expansions of holomorphic functions. Boundary conditions on the contours of the holes and on the segment of the rectilinear boundary with the greatest influence of the holes on the stress state

are satisfied using the generalized least squares method. As a result, the problem is reduced to an overdetermined system of linear algebraic equations solved using the singular value decomposition method. Numerical studies are conducted for a half-plane with a single curved hole, which in special cases extends onto the rectilinear boundary, forming a curved notch. The influence of the shape and location of the hole, as well as the "degree of anisotropy," on the stress values and their concentration near the hole are investigated.

Keywords: half-plane, complex potentials, curved holes, notches, stress concentration, generalized least squares method.

References

1. Lekhnitskii, S.G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow: Nauka. 416 p. (In Russian).
2. Kaloerov, S.A. (1966). [Stress state of an anisotropic half-plane with a finite number of elliptic holes.] *Soviet Applied Mechanics*. 2 (10), 75–82.
3. Kaloerov, S.A., & Avdyushina, E.V. (1998) Stress concentration in an anisotropic half-plane with holes and cracks. *J. of Math. Scien.* 90 (1), 1840–1845.
4. Kaloerov S.A., Avdyushina E.V., & Ermakov O.E. (2021) Study of the stress state of a multi-coupled anisotropic semi-plane by the generalized least squares method *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = J. Theoret. Appl. Mech.* 1 (74), 16–30.
5. Kaloerov, S.A. & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*, 48(3), 319–331.
6. Kaloerov S.A. (2018) The general solutions for the problems for multiply connected anisotropic semiinfinite plate and strip *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 2, 22–35. (In Russian)
7. Kaloerov, S.A. & Goryanskaya, E.S. (1997) The two-dimensional stressed state of a multiconnected anisotropic body with cavities and cracks *Journal of Mathematical Sciences*, 84 (6), 1497–1504.
8. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian)
9. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
10. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29(4), 1322–1342, DOI: 10.1137/050639193.
11. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29(4), 1343–1362, DOI: 10.1137/05063920X.
12. Savyn G.N. (1968) *Stress Distribution Around Holes*. Kyev: Naukova dumka, 888 p.
13. Vasiliev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. et al. (1990) *Composite Materials: Reference Book*. Moscow: Mechanical Engineering Publishing House, 512 p.

Поступила в редакцию / Original submitted 10.08.2026.

Доработана / Revision submitted 29.08.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-26-39

EDN:ZUTQBB



©2026. Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛООБМЕНА НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТЕПЛООБМЕНЕ

На базе обобщенной теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации исследовано термоупругое состояние трансверсально-изотропной пластины с теплоизолированным разрезом. Рассмотрено действие однородного теплового потока основного температурного поля на линии разреза при верхнем одностороннем теплообмене с внешней средой. Проведены численные исследования влияния интенсивности теплообмена и параметра сдвиговой податливости трансверсально-изотропного материала на коэффициенты интенсивности напряжений.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная пластина, $\{1,0\}$ -аппроксимация, полиномы Лежандра, однородный тепловой поток, критерий Био, параметр сдвиговой податливости, коэффициенты интенсивности напряжений.

Введение. В настоящее время широкое распространение получили уточненные теории пластин, учитывающие явления, связанные с поперечными сдвигами и обжатием. Использование таких теорий актуально для пластин из композитных материалов, которые широко используются в авиа-, авто-, судо- и ракетостроении.

В рамках уточненных теорий трехмерные задачи теории упругости и термоупругости сводятся к двумерным задачам. При этом в ряде случаев используется разложение заданных и искомых функций по системе ортогональных полиномов, в качестве которых часто применяются полиномы Лежандра, Чебышева, Гегенбауэра и др. Так, в статье [1] с помощью полиномов Лежандра и Чебышева первого рода выполнено построение решения неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка для тонких изотропных пластин, в публикации

Бондаренко Наталья Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: n.bondarenko123@mail.ru, ORCID: 0000-0001-5254-5545.

Bondarenko Natalya Sergeevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

Гольцев Аркадий Сергеевич – докт. физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: asgoltsev@mail.ru, ORCID: 0009-0007-7340-6270.

Goltsev Arkady Sergeevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

[2] предложен эффективный численно-аналитический метод, основанный на построении функции влияния для оболочки в осесимметричной постановке с последующим её разложением в ряд Фурье по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. В работе [3] рассмотрены современные подходы к определению напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкой пластины из начально-изотропного материала в связанной постановке под действием термомеханической нагрузки. В статье [4] на основе дополнительных граничных условий и дополнительной искомой функции, определяемых на границах, получено решение краевой задачи теплопроводности для пластины. В работах [5, 6] рассмотрена математическая модель и конечноразностная схема процесса нагрева пластины, бесконечной по двум пространственным переменным.

В настоящей работе с использованием полиномов Лежандра проводится анализ влияния параметра теплообмена и параметра сдвиговой податливости на коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в трансверсально-изотропной пластине с теплоизолированным разрезом. Данная работа продолжает исследования, начатые в статье [7], в которой решена аналогичная задача для изотропной пластины с теплоизолированным разрезом.

Постановка задачи. Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщины $2h$, содержащую теплоизолированный разрез L . Пластина находится в тепловом контакте по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры, причем характер теплообмена является верхним односторонним: $Bi^+ = Bi$, $Bi^- = 0$, где $Bi^\pm$ – параметры теплообмена (критерии Био) на лицевых плоскостях пластины.

Отнесём пластину к безразмерной системе координат x_1, x_2, x_3 , определённой с точностью до полутолщины пластины h , причем x_1, x_2 – координаты точки в срединной плоскости (плоскости изотропии), x_3 – толщинная координата.

В рамках обобщенной теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации имеют место следующие разложения в ряды Фурье по полиномам Лежандра $P_k = P_k(x_3)$ от толщинной координаты для следующих компонентов [8]:

температуры

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2)P_0(x_3) + T_1(x_1, x_2)P_1(x_3),$$

компонент вектора перемещений

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)P_0(x_3) + \gamma_1(x_1, x_2)P_1(x_3),$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2)P_0(x_3) + \gamma_2(x_1, x_2)P_1(x_3),$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w_0(x_1, x_2)P_0(x_3),$$

компонент тензора напряжений

$$\sigma_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}N_k(x_1, x_2)P_0(x_3) + \frac{3}{2}M_k(x_1, x_2)P_1(x_3) \quad (k = 1, 2),$$

$$\begin{aligned}\tau_{12}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}S(x_1, x_2)P_0(x_3) + \frac{3}{2}H(x_1, x_2)P_1(x_3), \\ \tau_{k3}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}Q_{k0}(x_1, x_2)\{P_0(x_3) - P_2(x_3)\} \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

При этом $T_0 = T_0(x_1, x_2)$ – аналог средней температуры; $T_1 = T_1(x_1, x_2)$ – аналог температурного момента; $u = u(x_1, x_2)$, $v = v(x_1, x_2)$, $w_0 = w_0(x_1, x_2)$ – обобщенные перемещения пластины, являющиеся аналогами перемещений точек срединной поверхности, $\gamma_1 = \gamma_1(x_1, x_2)$, $\gamma_2 = \gamma_2(x_1, x_2)$ – аналоги углов поворота нормали; $N_k = N_k(x_1, x_2)$, $M_k = M_k(x_1, x_2)$, $Q_{k0} = Q_{k0}(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$), $S = S(x_1, x_2)$, $H = H(x_1, x_2)$ – обобщенные усилия и моменты, из которых N_1 , N_2 , S – аналоги мембранных усилий, M_1 , M_2 , H – изгибающих и крутящего моментов, Q_{10} , Q_{20} – перерезывающих сил.

Уравнения теплопроводности рассматриваемой задачи примем без учета трансверсальных тепловых свойств, поскольку толщина пластины, где эти свойства могут проявляться, намного меньше двух других её размеров. Тогда система уравнений термоупругости для трансверсально-изотропных пластин на базе обобщенной теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации включает в себя [8, 9] первое приближение трехмерного уравнения теплопроводности, записанное для случая верхнего одностороннего теплообмена

$$\lambda^* \Delta T_k + A_{k0}T_0 + A_{k1}T_1 = 0 \quad (k = 0, 1),\tag{2}$$

уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned}N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\}, \\ N_2 &= B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\}, \\ S &= \frac{1 - \nu}{2}B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \quad M_1 = D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}, \\ M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}, \quad H = \frac{1 - \nu}{2}D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), \\ Q_{k0} &= \Lambda_0 \left(\gamma_k + \frac{\partial w_0}{\partial x_k} \right) \quad (k = 1, 2),\end{aligned}\tag{3}$$

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_{20} = 0, \quad \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} = 0, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2Bi}{Bi+4} & -\frac{5Bi}{3(Bi+4)} \\ -\frac{5Bi}{Bi+4} & -\frac{10(2Bi+3)}{3(Bi+4)} \end{pmatrix},$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda'} = 1, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1 - \nu^2}, \quad \Lambda_0 = \frac{5}{3E/G'};$$

λ, λ' – коэффициенты теплопроводности в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; α, E, ν – температурный коэффициент линейного расширения, модуль Юнга и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии соответственно; G' – модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных к плоскости изотропии. При этом мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (3), (4) определены с точностью до значения Eh , моменты – с точностью до Eh^2 .

Компоненты термоупругого состояния пластины с разрезом G^* представим в виде суммы [10]

$$G^* = G^o + G, \quad (5)$$

где G^o – компоненты термоупругого состояния в сплошной пластине (основного термоупругого состояния, которое будем считать известным); G – компоненты возмущенного термоупругого состояния, вызванного наличием разреза. Причем величины G^o и G в формуле (5) определяются из системы дифференциальных уравнений (2)–(4).

При отсутствии контакта между берегами теплоизолированного разреза L с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$ и касательной $\vec{t}$ имеют место такие граничные условия для компонент возмущенного термоупругого состояния G [11]:

для температуры

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = 0, 1), \quad (6)$$

для обобщенных внутренних силовых факторов

$$N_n|_L = -N_n^o|_L, \quad S_{nt}|_L = -S_{nt}^o|_L,$$

$$M_n|_L = -M_n^o|_L, \quad H_{nt}|_L = -H_{nt}^o|_L, \quad Q_{n0}|_L = -Q_{n0}^o|_L, \quad (7)$$

$$N_n = n_1^2 N_1 + 2n_1 n_2 S + n_2^2 N_2, \quad S_{nt} = n_1 n_2 (N_1 - N_2) + (n_2^2 - n_1^2) S,$$

$$M_n = n_1^2 M_1 + 2n_1 n_2 H + n_2^2 M_2, \quad H_{nt} = n_1 n_2 (M_1 - M_2) + (n_2^2 - n_1^2) H,$$

$$Q_{n0} = n_1 Q_{10} + n_2 Q_{20}.$$

где $N_n, S_{nt}, M_n, H_{nt}, Q_{n0}$ – усилия и моменты на элементе длины разреза.

Первые два граничных условия (7) задаются для компонент безмоментного термоупругого состояния, последние три – для компонент состояния термоупругого изгиба пластины. При этом принято, что теплоизолированный разрез L удален на значительное расстояние от линии внешней границы пластины. Поэтому пластина считается бесконечной, компоненты возмущенного термоупругого состояния – равными нулю на внешнем контуре.

Решение задачи. Задачи теплопроводности (2) и термоупругости (3), (4) будем решать с использованием двумерного интегрального преобразования Фурье [12]. При этом

для прямого преобразования

$$F[G(x_1, x_2)] = \tilde{G}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1, x_2) \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\} dx_1 dx_2, \quad (8)$$

для обратного преобразования

$$F^{-1}[\tilde{G}(\xi_1, \xi_2)] = G(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\xi_1, \xi_2) \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}) \right\} d\xi_1 d\xi_2, \quad (9)$$

где $\tilde{G}(\xi_1, \xi_2)$ – трансформанта функции $G(x_1, x_2)$; $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант; $\vec{x} = (x_1, x_2)$ – координаты текущей точки в пространстве оригиналов; $(\vec{\xi}, \vec{x}) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$.

Компоненты возмущенного термоупругого состояния $G = G(x_1, x_2)$, вызванного наличием разреза, претерпевают скачки своих значений на линии L , поэтому трансформанты их частных производных будем находить по формуле [10]

$$F \left[\frac{\partial G}{\partial x_k} \right] = (-i\xi_k) \tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_k [G] \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}') \right\} dL \quad (k = 1, 2),$$

в которой $[G] = G^+ - G^-$ – скачок функции G при переходе через линию разреза L , причем $G^\pm$ – это граничные значения функции G в соответствии с выбранным направлением нормали $\vec{n}$; $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$ – координаты точки на линии разреза L ; $(\vec{\xi}, \vec{x}') = \xi_1 x'_1 + \xi_2 x'_2$.

Тогда трансформанта двумерного оператора Лапласа примет вид

$$F[\Delta G] = -p^2 \tilde{G} - \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{n}) [G] - \left[\frac{\partial G}{\partial n} \right] \right\} \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}') \right\} dL,$$

в котором $p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$; $(\vec{\xi}, \vec{n}) = \xi_1 n_1 + \xi_2 n_2$.

По аналогии с [13] интегральные представления трансформант компонент возмущённой температуры $\tilde{T}_k$ выберем в виде

$$\tilde{T}_k = \frac{1}{2\pi} \int_L \left(\tilde{B}_{k0}[T_0] + \tilde{B}_{k1}[T_1] \right) \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}') \right\} dL \quad (k = 0, 1),$$

где

$$\tilde{B}_{km} = \frac{\lambda^* M_{mk}(\lambda^* p^2)}{\Delta_2(\lambda^* p^2)} i(\vec{\xi}, \vec{n}) \quad (k, m = 0, 1);$$

$M_{mk}(\mu)$ – алгебраическое дополнение элемента m -ой строки и k -го столбца матрицы $\mathbf{A} - \mu \mathbf{E}$; $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов в системе уравнений (2); $\mathbf{E}$ – единичная матрица второго порядка; μ – переменная в характеристическом уравнении для матрицы $\mathbf{A}$; $\Delta_2(\mu)$ – характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$:

$$\Delta_2(\mu) = \det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{E}) = (\mu + \rho_0^2)(\mu + \rho_1^2);$$

ρ_0^2, ρ_1^2 – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, взятые со знаком «-».

При обращении трансформант компонент возмущенного термоупругого состояния согласно формуле (9) применена методика, основанная на использовании специальной G -функции $G_{n,\mu}(z)$, которая выражается через функцию Макдональда $K_\mu(z)$ [14]:

$$G_{n,\mu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu-n} K_{n+\mu}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(\mu+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k} \\ (n > 0, \operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} z > 0),$$

где $\Gamma(\mu)$ – гамма-функция.

Рассмотрим теперь прямолинейный теплоизолированный разрез длины $2l$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (10)$$

В этом случае интегральные представления внутренних силовых факторов для безмоментного термоупругого состояния ($P_1^0 = N_1$, $P_2^0 = N_2$, $P_3^0 = S$) имеют вид

$$P_k^0(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^4 K_{km}^0(x_1 - ls, x_2) \psi_m^0(s) ds \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (11)$$

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}, \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}, \quad \psi_3^0 = [T_0], \quad \psi_4^0 = [T_1],$$

где s – координата точки на линии разреза (10).

Интегральные представления внутренних силовых факторов для состояния термоупругого изгиба ($P_1^1 = M_1$, $P_2^1 = M_2$, $P_3^1 = H$, $P_4^1 = Q_{10}$, $P_5^1 = Q_{20}$) определяются следующими формулами:

$$P_k^1(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^{\kappa} K_{km}^1(x_1 - ls, x_2) \psi_m^1(s) ds \quad (k = \overline{1, 5}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\psi_1^1 &= \frac{d[\gamma_1]}{ds}, & \psi_2^1 &= \frac{d[\gamma_2]}{ds}, & \psi_3^1 &= \frac{d[w_0]}{ds}, & \psi_4^1 &= [\gamma_1], & \psi_5^1 &= [\gamma_2], \\ \psi_6^1 &= [T_0], & \psi_7^1 &= [T_1],\end{aligned}$$

где $\kappa = 7$ для обобщенных изгибающих и крутящего моментов, $\kappa = 5$ для обобщенных перерезывающих сил. В интегральных представлениях (11), (12) функции $\psi_3^0 = \psi_6^1$, $\psi_4^0 = \psi_7^1$ находятся как решение задачи теплопроводности (2), (6).

Ядра в интегральных представлениях (11), (12) представляют собой линейные комбинации специальных G -функций, например:

для безмоментного термоупругого состояния

$$K_{24}^0(x_1 - ls, x_2) = \frac{\alpha x_2}{4} \left\{ g_{101}^0(r) + \left(3 - 4 \frac{x_2^2}{r^2} \right) g_{211}^0(r) \right\},$$

для состояния термоупругого изгиба

$$\begin{aligned}K_{11}^1(x_1 - ls, x_2) &= -\frac{x_2}{3r^2} \left(3 - 2 \frac{x_2^2}{r^2} \right) + \\ &+ \frac{\Lambda_0 x_2}{4} \left\{ G_{1,0}(ar) + \left(3 - 4 \frac{x_2^2}{r^2} \right) G_{2,1}(ar) \right\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}g_{jkm}^0(r) &= C_{0m0} G_{j,k} \left(\frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda^*}} r \right) + C_{0m1} G_{j,k} \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda^*}} r \right), \\ C_{0mj} &= \frac{1}{\lambda^*} \left\{ \frac{\mu M_{m0}(\mu)}{2\mu + \rho_0^2 + \rho_1^2} \right\} \Big|_{\mu = -\rho_j^2} \quad (m, j = 0, 1), \\ r &= \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}, \quad a = \sqrt{3\Lambda_0(1 + \nu)}.\end{aligned}$$

С учетом интегральных представлений (11), (12) и граничных условий (7) построены следующие системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ), из которых определяются искомые функции $\psi_m^j(s)$:

для безмоментного термоупругого состояния

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k^0(s) ds}{s - \zeta} = F_k^0(\zeta) \quad (k = 1, 2), \quad (13)$$

для состояния термоупругого изгиба

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_{22}^1(\zeta - s) \psi_2^1(s) ds = F_2^1(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1,3} \int_{-1}^1 E_{km}^1(\zeta - s) \psi_m^1(s) ds = F_k^1(\zeta) \quad (k = 1, 3), \quad (14)$$

где $E_{km}^1(\zeta - s)$ – разностные ядра, представляющие собой линейные комбинации специальной G -функции и её первообразной $IG_{n,\mu}(z)$, например:

$$E_{11}^1(\zeta - s) = \frac{3}{2} \Lambda_0 l^2 (\zeta - s) G_{2,0}(al|\zeta - s|) + \\ + \frac{3\Lambda_0 \text{sign}(\zeta - s)}{4a} \{5IG_{0,0}(al|\zeta - s|) - IG_{2,2}(al|\zeta - s|)\}.$$

Правые части СИУ (13), (14) представляют собой линейные комбинации компонент основного термоупругого состояния в сплошной пластине (функции G°) на линии разреза (10) и интегралов от скачков компонент температуры $[T_k]$, разностные ядра в которых зависят от специальных G -функций, например:

$$F_1^0(\zeta) = -2S^\circ|_{x_2=0} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0} \int_{-1}^1 D_m^0(\zeta - s) [T_m] ds, \\ D_m^0(\zeta - s) = -\frac{\alpha \delta_{m0}}{\zeta - s} + \frac{\alpha l^2 (\zeta - s)}{2} g_{20m}^0(l|\zeta - s|),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Из условий непрерывности обобщенных перемещений на концах линии разреза (10) следуют дополнительные ограничения на искомые функции:

$$\int_{-1}^1 \psi_k^j(s) ds = 0, \quad (15)$$

где $k = 1, 2$ для $j = 0$ и $k = \overline{1, 3}$ для $j = 1$.

После численного решения систем СИУ (13), (14) при ограничениях (15) внутренние силовые факторы определяются из интегральных представлений (11), (12).

Выражения КИН для поперечного и продольного сдвига получим путем сравнения коэффициентов при особенности $r^{-1/2}$ в ненулевых компонентах тензора напряжений (1) с известными асимптотическими представлениями напряжений [15]. С учетом свойств полиномов Лежандра $P_k = P_k(x_3)$ найдем максимальные по модулю значения КИН для поперечного ($K_{II}^{\max}$) и продольного ($K_{III}^{\max}$) сдвига:

$$K_{II}^{\max} = \frac{\sqrt{\pi h l E}}{4} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{m=0}^1 |\psi_1^m(s)| \sqrt{1 - s^2} \right\},$$

$$K_{\text{III}}^{\text{max}} = \frac{3\sqrt{\pi h l E \Lambda_0}}{8} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1 - s^2} \right\}. \quad (16)$$

Описание численных исследований. Были проведены численные исследования для оценки влияния интенсивности теплообмена с внешней средой и трансверсальных механических характеристик материала, а именно параметра сдвиговой податливости E/G' , на коэффициенты интенсивности температурных напряжений для поперечного и продольного сдвига (16). Рассматривался разрез средней длины ($l = 3$) в трансверсально-изотропной пластине, находящейся в условиях верхнего одностороннего теплообмена с окружающей средой ($Bi^+ = Bi$, $Bi^- = 0$). Интенсивность теплообмена варьировалась в широком диапазоне параметра теплообмена Bi , от $\lg Bi = -3$ до $\lg Bi = 1$. Коэффициент Пуассона принимался равным $\nu = 0,3$.

Для анализа поведения температурных КИН, обусловленных лишь возмущённым температурным полем, предполагалось отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния. Такая ситуация реализуется, в частности, при наличии основного температурного поля, изменяющегося по линейному закону [16], и отсутствии внутренних силовых факторов, обусловленных силовыми компонентами основного состояния.

Расчёты проведены для случая распространения однородного теплового потока перпендикулярно линии разреза, т. е. действия следующего градиента средней температуры основного температурного поля на линии разреза:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_0 = \text{const} \neq 0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0.$$

Результаты численных исследований представлены на рис. 1 и рис. 2 в виде графиков зависимостей максимальных относительных значений КИН от величины теплообмена при различных значениях параметра сдвиговой податливости E/G' .

На рис. 1 изображены графики максимальных относительных значений КИН для поперечного сдвига $K_{\text{II}}^{\text{max}}$, а на рис. 2 – графики максимальных относительных значений КИН для продольного сдвига $K_{\text{III}}^{\text{max}}$. Значения КИН даны с точностью до величины $K^* = \alpha q_0 E \sqrt{l h} / 4$, которая соответствует значению КИН в изотропной пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности q_0 перпендикулярно линии разреза [17]. Кривым 1 – 5 на рисунках соответствуют следующие значения параметра сдвиговой податливости E/G' : 2,6; 4; 8; 14; 100 соответственно.

Из полученных графиков следует, что увеличение интенсивности одностороннего теплообмена приводит к уменьшению КИН для поперечного сдвига и увеличению КИН для продольного сдвига. Это обусловлено тем, что с увеличением разности температур на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины средняя температура T_0 убывает, а температурный момент T_1 , характеризующий величину изменения температуры по толщине пластины, возрастает.

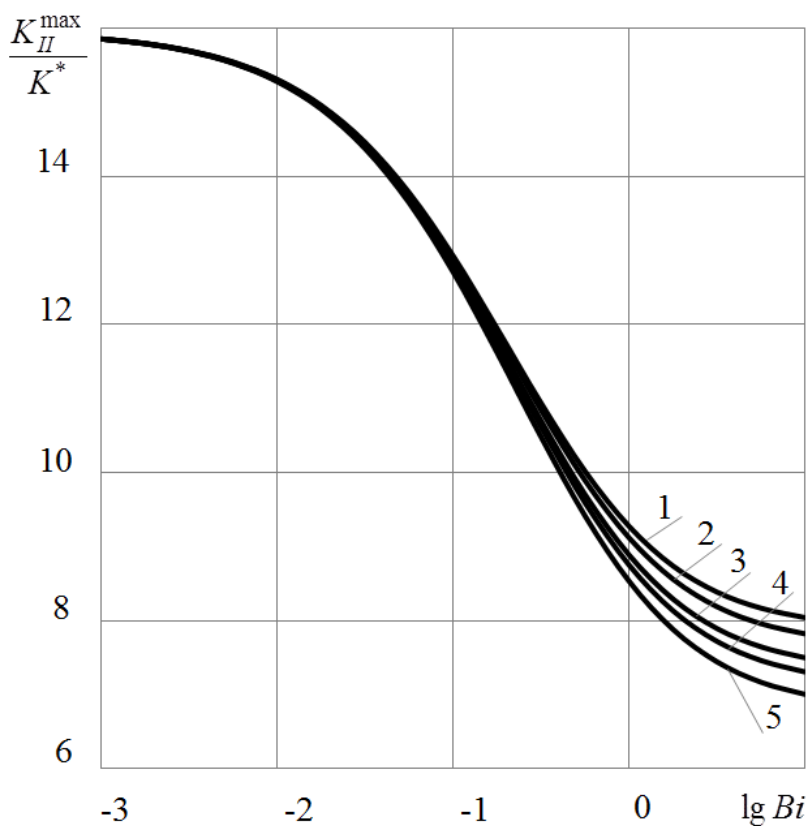


Рис. 1. Графики изменения КИН для поперечного сдвига

Поэтому изменяются и скачки этих величин на линии разреза, от которых зависят соответствующие температурные КИН.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что анизотропные свойства трансверсально-изотропных пластин проявляются не только для внутренних силовых факторов, характеризующих состояние изгиба, но и для силовых факторов, характеризующих плоское напряженное состояние (рис. 1). В последнем случае это наблюдается только при сильном одностороннем теплообмене ($\lg Bi \geq 0$).

Характер одностороннего теплообмена приводит к тому, что термоупругие изгибающие моменты и, как следствие, КИН для продольного сдвига существенно зависят от механических свойств материала пластины в поперечном направлении. Этот эффект наблюдается в широком диапазоне величины теплообмена с окружающей средой (рис. 2).

Кривые 1 на рис. 1 и рис. 2 соответствуют значениям параметра сдвиговой податливости 0 и 2,6. Первое значение относится к случаю пластины с бесконечной сдвиговой жесткостью (классическая теория Киргофа). Второе значение отвечает характеристикам изотропной пластины по теории типа Тимошен-

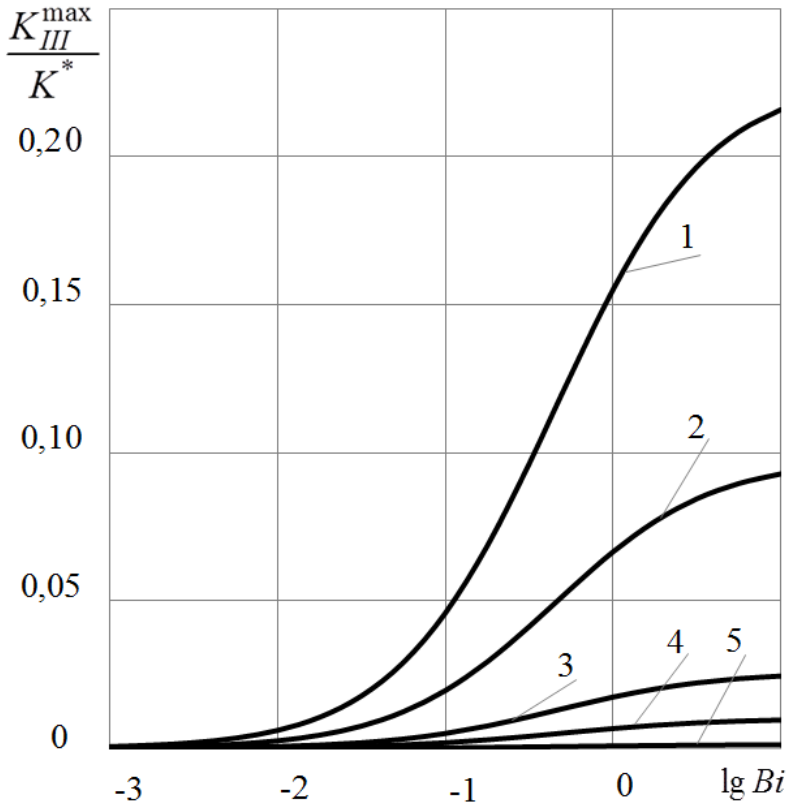


Рис. 2. Графики изменения КИН для продольного сдвига

ко ($\{1,0\}$ -аппроксимация). Поэтому можно заключить, что классическая теория изотропных пластин дает сопоставимые по точности результаты с теорией типа Тимошенко при термоупругом изгибе изотропных пластин.

Из рис. 2 следует, что с увеличением податливости материала на сдвиг значения КИН для продольного сдвига уменьшаются и стремятся к нулю. Такой характер поведения соответствует физической картине процесса, поскольку увеличение параметра сдвиговой податливости связано с уменьшением модуля сдвига в плоскостях, перпендикулярных к плоскости изотропии (G'). Уменьшаются и касательные напряжения в этих плоскостях. При $E/G' \rightarrow \infty$ касательные напряжения исчезают и КИН для продольного сдвига равен нулю. Необходимо заметить, что максимальные относительные значения КИН для продольного сдвига K_{III}^{max} на два порядка меньше чем аналогичные значения для поперечного сдвига K_{II}^{max} . Однако следует учитывать, что если КИН для поперечного сдвига уменьшаются, то КИН для продольного сдвига увеличиваются с увеличением интенсивности теплообмена с окружающей средой.

Выводы. Решена задача термоупругости для трансверсально-изотропных пластин с теплоизолированным разрезом, на линии которого действует одно-

родный тепловой поток. Рассмотрен случай верхнего одностороннего теплообмена с внешней средой. Используются уравнения обобщенной теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. Задача решена методом двумерного интегрального преобразования Фурье. Получены интегральные представления компонент возмущенного термоупругого состояния. С использованием граничных условий на линии разреза задача сведена к системам СИУ, которые решены прямым численным методом. Исследована зависимость температурных КИН от интенсивности теплообмена и параметра сдвиговой податливости трансверсально-изотропного материала. Показано, что с увеличением интенсивности теплообмена КИН для поперечного сдвига уменьшаются, а КИН для продольного сдвига увеличиваются, что является обоснованием необходимости проведения прочностных расчетов в случае одностороннего теплообмена.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. *Гермидер О.В.* О решении краевой задачи для неоднородного уравнения эллиптического типа с использованием многочленов Лежандра и Чебышева / О.В. Гермидер, В.Н. Попов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. – 2025. – № 95. – С. 5–18. – DOI: 10.17223/19988621/95/1. – EDN: KVCIKT.
2. *Kireenkov A.A.* Contact problem for a spherical shell supported on two flat surfaces / A.A. Kireenkov, G.V. Fedotenkov // Int. J. Comput. Civil and Structural Engineering. – 2024. – Vol. 20, No. 3. – P. 24–34. – DOI: 10.22337/2587-9618-2024-20-3-24-34. – EDN: FPNKBT.
3. *Теличко В.Г.* Решение связанной термомеханической задачи в современных САЕ-комплексах и ее верификация / В.Г. Теличко, Д.С. Чигинский, И.А. Чигинская // Строительная механика и конструкции. – 2024. – № 2 (41). – С. 34–48.
4. *Трубицын К.В.* Получение аналитических решений краевых задач на основе дополнительных граничных условий / К.В. Трубицын, Е.В. Котова, Т.Е. Гаврилова и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. – 2024. – № 2. – С. 85–93. – EDN: НООНPD.
5. *Ханхасаев В.Н.* Моделирование распределения температуры при нагреве пластины с применением смешанного уравнения теплопроводности / В.Н. Ханхасаев, С.А. Баиров // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2024. – № 1. – С. 37–45. – DOI: 10.18101/2304-5728-2024-1-37-45. – EDN: IECYEU.
6. *Khankhasaev V.N.* The numerical solution of the nonlinear hyperbolic-parabolic heat equation / V.N. Khankhasaev, S.A. Bairov // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2024. – Vol. 32, No. 1. – P. 112–121. – DOI: 10.22363/2658-4670-2024-32-1-112-121. – EDN: BSGQHY.
7. *Бондаренко Н.С.* Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 42–52.
8. *Bondarenko N.S.* Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N.S. Bondarenko, A.S. Gol'tsev // J. Math. Scien. – 2011. – Vol. 174, No. 3. – P. 400–414.
9. *Пелех Б.Л.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
10. *Шевченко В.П.* Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами : учебное пособие /

- В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
11. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1984. – 280 с.
 12. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М.: Из-во иностранной литературы, 1955. – 668 с.
 13. Бондаренко Н.С. Влияние теплообмена на возмущенное температурное поле в анизотропной пластине с теплоизолированным разрезом / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць; Дніпропетр. нац ун-т. – 2012. – Вип. 19. – С. 20–26.
 14. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
 15. Партон В.З. Механика упругопластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. литературы, 1985. – 504 с.
 16. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1970. – 308 с.
 17. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.

N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev

Investigation of the influence of heat exchange on the thermoelastic state of a transversally-isotropic plate with a heat-insulated cut under one-sided heat exchange.

Based on the generalized theory in the variant of $\{1,0\}$ -approximation, the thermoelastic state of a transversally-isotropic plate with a heat-insulated cut is investigated. The action of a uniform heat flow of the main temperature field on the cut line under upper one-sided heat exchange with the external environment is considered. Numerical investigations of the influence of heat exchange intensity and shear compliance parameter of transversally-isotropic material on stress intensity factors are carried out.

Keywords: transversally-isotropic, $\{1,0\}$ -approximation, Legendre polynomials, uniform heat flow, Biot criterion, shear compliance parameter, stress intensity factors.

References

1. Germider, O.V., & Popov, V.N. (2025). [Solution of a boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation using Legendre and Chebyshev polynomials]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika = Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 95, 5–18. DOI: 10.17223/19988621/95/1. EDN: KVCIKT. (In Russian).
2. Kireenkov, A.A., & Fedotenkov, G.V. (2024). Contact problem for a spherical shell supported on two flat surfaces. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 20(3), 24–34. DOI: 10.22337/2587-9618-2024-20-3-24-34. EDN: FPNKBT.
3. Telichko, V.G., Chiginskii, D.S., & Chiginskaya, I.A. (2024). [Solution of a coupled thermo-mechanical problem in modern CAE systems and its verification]. *Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii = Structural Mechanics and Structures*, 2(41), 34–48. (In Russian).
4. Trubitsyn, K.V., Kotova, E.V., Gavrilova, T.E., et al. (2024). [Obtaining analytical solutions of boundary value problems using additional boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Fizika. Matematika = Voronezh State University Bulletin. Series: Physics. Mathematics*, 2, 85–93. EDN: HOOHPD. (In Russian).
5. Khankhasaev, V.N., & Bairov, S.A. (2024). Modeling the temperature distribution during heating of a plate using a mixed heat conduction equation. *Vestnik Buryatskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika, Informatika = Buryat State University Bulletin. Mathematics and Informatics*, 1, 37–45. DOI: 10.18101/2304-5728-2024-1-37-45. EDN: IECY EY. (In Russian).
6. Khankhasaev, V.N., & Bairov, S.A. (2024). The numerical solution of the nonlinear hyperbolic-

- parabolic heat equation. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 32(1), 112–121. DOI: 10.22363/2658-4670-2024-32-1-112-121. EDN: BSGQHY.
7. Bondarenko, N.S., & Gol'tsev, A.S. (2014). [Investigation of the influence of the environment on the thermoelastic state of an isotropic plate with a thermally insulated crack under unilateral heat exchange]. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika = Theoretical and Applied Mechanics*, 9(55), 42–52. (In Russian).
 8. Bondarenko, N.S., & Gol'tsev, A.S. (2011). Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using Legendre polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 174(3), 400–414.
 9. Pelekh, B.L., & Laz'ko, V.A. (1982). *Layered Anisotropic Plates and Shells with Stress Concentrators*. Kiev: Naukova Dumka. 296 p. (In Russian).
 10. Shevchenko, V.P., & Gol'tsev, A.S. (1988). *Problems of Thermoelasticity of Thin Shells with Cuts: A Textbook*. Kiev: UMK VO. 84 p. (In Russian).
 11. Kit, G.S., & Krivtsun, M.G. (1984). *Plane Thermoelasticity Problems for Bodies with Cracks*. Kiev: Naukova Dumka. 280 p. (In Russian).
 12. Sneddon, I.N. (1955). *Fourier Transforms*. Moscow: Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury. 668 p. (In Russian).
 13. Bondarenko, N.S., & Gol'tsev, A.S. (2012). [Influence of heat exchange on the perturbed temperature field in an anisotropic plate with a thermally insulated crack]. *Problemy Obchislyval'noi Mekhaniky i Mitsnosti Konstruktsii = Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures*, 19, 20–26. (In Russian).
 14. Khizhnyak, V.K., & Shevchenko, V.P. (1980). *Mixed Problems of the Theory of Plates and Shells: A Textbook*. Donetsk: Donetsk State University. 128 p. (In Russian).
 15. Parton, V.Z., & Morozov, E.M. (1985). *Mechanics of Elastic-Plastic Fracture*. Moscow: Nauka. 504 p. (In Russian).
 16. Kovalenko, A.D. (1970). *Fundamentals of Thermoelasticity*. Kiev: Naukova Dumka. 308 p. (In Russian).
 17. Panasyuk, V.V., Savruk, M.P., & Datsyshyn, A.P. (1976). *Stress Distribution Near Cracks in Plates and Shells*. Kiev: Naukova Dumka. 444 p. (In Russian).

Поступила в редакцию / Original submitted 30.06.2026.

Доработана / Revision submitted 23.07.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

УДК 453.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-40-47

EDN:ZULDAG



©2026. А.А. Глухов, М.Н. Пачева, М.В. Фоменко

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГОВЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ ВОЛН У ГРАНИЦЫ КОНТАКТА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Представлены результаты исследований по получению и численному анализу аналитической формы дисперсионного соотношения, описывающего распространение локализованных сдвиговых интерфейсных волн в волноводе из идеально контактирующих трансверсально-изотропных функционально-градиентных неоднородных по толщине полупространств. Для описания поперечной неоднородности полупространств использовалась двойная экспоненциальная функция. В результате численных исследований данной модели установлен факт существования локализованных сдвиговых интерфейсных волн и определены граничные значения параметров неоднородности полупространств, при которых возможно наблюдать данный тип волн в рассматриваемой волноводной структуре. Для частных случаев неоднородности рассчитаны дисперсионные спектры локализованных сдвиговых интерфейсных волн.

Ключевые слова: волновое деформирование, непрерывно неоднородная функционально-градиентная среда, сдвиговые интерфейсные волны, двойная экспоненциальная приповерхностная неоднородность, моды дисперсионного спектра.

Введение. Анализ процессов волнового деформирования упругих сред и элементов конструкций является многоплановым, актуальным направлением исследований в механике деформируемого твердого тела. Исследования в этой области [1–3] представляют теоретический фундаментально-научный интерес и поддерживают развитие широкого ряда современных наукоемких высокотех-

Глухов Антон Александрович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИЧ ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com, ORCID: 0009-0002-5536-4410.

Glukhov Anton Alexandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Research Department.

Пачева Марина Николаевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: pacheva.m.n@mail.ru, ORCID: 0009-0004-4919-8297.

Pacheva Marina Nikolaevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Фоменко Максим Владимирович – канд. физ.-мат. наук, уч. секретарь научно-исследовательской части, ст. науч. сотр. ДонГУ, Донецк, e-mail: maxim_fom@mail.ru, ORCID: 0009-0003-9649-1827.

Fomenko Maksim Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Scientific Secretary of the Research Department.

нологичных научно-производственных отраслей и критических технологий. В частности, вопрос разработки численно-аналитических методов анализа поверхностных и интерфейсных волн деформации сохраняет высокую степень актуальности ввиду высокой востребованности результатов этих исследований приложениями в областях акустоэлектроники, ультраакустической диагностики и сейсмоакустики [4].

В последние годы класс задач по изучению волн Рэлея, Лява, Стоунли и Гуляева-Блюстейна существенно расширился в связи с использованием новых моделей динамического деформирования, учетом усложненных свойств материалов, заданием различных модификаций краевых условий и форм удерживающих поверхностей волноводов, учетом эффектов электрорупругости, магнитоупругости, термоупругости и их сочетаний [2]. В частности, актуальными для дальнейших исследований оказались модели волнового деформирования непрерывно неоднородных функционально-градиентных сред [5, 6]. При этом одним из эффективных способов описания приграничных свойств неоднородных композитных материалов остается использование двойного экспоненциального закона [7, 8].

Для полубесконечных однородных упругих тел при задании на их поверхностях различных краевых условий чисто сдвиговые локализованные упругие волны не существуют. Однако, если материалы полупространств являются электроупругими, возможно появление сдвиговых электроупругих волн Гуляева-Блюстейна. В монографии [3] без детализированных исследований отмечено, что возникновение сдвиговых поверхностных волн возможно у свободной границы неоднородного по параметру плотности полубесконечного тела.

Представляемое исследование посвящено решению вопроса о существовании сдвиговых интерфейсных волн у границы контакта разнотипных неоднородных полупространств из композитных материалов, физико-механические свойства которых изменяются по толщине согласно двойному экспоненциальному закону. Получено дисперсионное соотношение для исследуемой модели волнового деформирования, а также в результате численных исследований определены граничные значения параметров неоднородности полупространств, при которых возможно наблюдать данный тип волн в рассматриваемом волноводе. Получен ряд дисперсионных спектров интерфейсных сдвиговых волн для различных вариантов задания параметров неоднородности.

Постановка задачи. Рассмотрим волноводную структуру образованную двумя идеально контактирующими разнородными приповерхностно-неоднородными трансверсально-изотропными полупространствами Ω_+ и Ω_- (рис.1):

$$\begin{aligned}\Omega_+ &= \{(x_1, x_2) \in R^2, \quad 0 \leq x_3 < \infty\}, \\ \Omega_- &= \{(x_1, x_2) \in R^2, \quad -\infty < x_3 \leq 0\}.\end{aligned}$$

Физико-механические характеристики материалов волновода описываются со-

отношениями:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}^+ &= c_{ij0}^+ \cdot \varphi_+(\lambda_+, \beta_+, x_3) \quad (ij = 44, 66), \quad \rho^+ = \rho_0^+ \cdot \varphi_+(\lambda_+, \beta_+, x_3), \\
 \varphi_+(\lambda_+, \beta_+, x_3) &= \exp(\lambda_+ \exp(-\beta_+ x_3)), \quad \beta_+ > 0; \\
 c_{ij}^- &= c_{ij0}^- \cdot \varphi_-(\lambda_-, \beta_-, x_3) \quad (ij = 44, 66), \quad \rho^- = \rho_0^- \cdot \varphi_-(\lambda_-, \beta_-, x_3), \\
 \varphi_-(\lambda_-, \beta_-, x_3) &= \exp(\lambda_- \exp(-\beta_- x_3)), \quad \beta_- < 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь c_{ij0}^+ , c_{ij0}^- , ρ_0^+ , ρ_0^- – отнесенные к нормирующим параметрам c_* и ρ_* безразмерные опорные значения модулей упругости и плотности; λ , β – действительные значения параметров неоднородности.

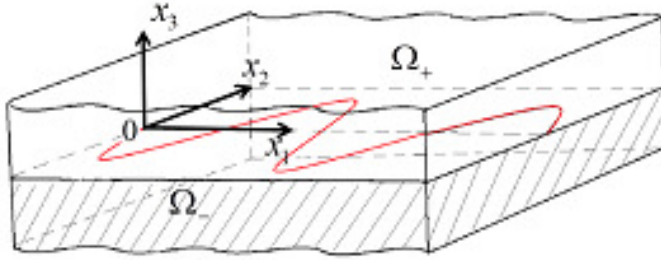


Рис. 1.

В связи с тем, что в рассматриваемой модели в качестве направления распространения исследуемых волн с волновым числом k и циклической частотой ω без ограничения общности рассматривается координатное направление Ox_1 , комплексные функции волновых перемещений в верхнем полупространстве $u_j^+(x_1, x_3, t)$ и нижнем полупространстве $u_j^-(x_1, x_3, t)$ представим соответственно в форме

$$\begin{aligned}
 u_2^+(x_1, x_3, t) &= u_{20}^+(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad u_1^+(x_1, x_3, t) \equiv u_3^+(x_1, x_3, t) \equiv 0; \\
 u_2^-(x_1, x_3, t) &= u_{20}^-(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad u_1^-(x_1, x_3, t) \equiv u_3^-(x_1, x_3, t) \equiv 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Амплитудные функции поперечной координаты $u_{20}^+(x_3)$ и $u_{20}^-(x_3)$ в представлениях (2) в рамках рассматриваемой модели найдем как базисные решения обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$-k^2 c_{660} u_{20}(x_3) - c_{440} \lambda \beta e^{-\beta x_3} u_{20}'(x_3) + c_{440} u_{20}''(x_3) + \rho_0 \omega^2 u_{20}(x_3) = 0. \tag{3}$$

Условие идеального механического контакта предполагает равенство соответствующих волновых перемещений и динамических напряжений на границе $x_3 = 0$:

$$u_{20}^+(0) = u_{20}^-(0), \quad \sigma_{230}^+(0) = \sigma_{230}^-(0). \tag{4}$$

Получение основного дисперсионного соотношения. Преобразуем амплитудное уравнение (4) к унифицированному виду

$$f'' - \alpha^2 f = \gamma e^{-\beta x_3} f', \quad f = u_{20}(x_3), \quad (5)$$

где

$$\alpha^2 = (c_{660}k^2 - \Omega_S^2)/c_{440}, \quad \gamma = \lambda\beta,$$

и применим алгоритм последовательных приближений [7], описываемый соотношениями

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p + \dots, \\ f_0'' - \alpha^2 f_0 = 0, \quad f_2'' - \alpha^2 f_2 = \gamma e^{-\beta x_3} f_1', \quad \dots, \quad f_n'' - \alpha^2 f_n = \gamma e^{-\beta x_3} f_{n-1}'. \quad (6)$$

На начальном шаге реализации этого алгоритма запишем представление

$$f_0 = c_+ A_0 e^{\alpha x_3} + c_- A_0 e^{-\alpha x_3}, \quad A_0 = 1,$$

с произвольными коэффициентами c_+ , c_- , а затем строим два базисных частных решения (5), отвечающих выбору $f_0 = A_0 e^{\alpha x_3}$ и $f_0 = A_0 e^{-\alpha x_3}$. В конечном итоге для амплитудных функций волновых перемещений и динамических напряжений на граничных поверхностях в контактирующих полупространствах получим

$$u_{20}^+ = e^{\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_+^n \left[\prod_{p=1}^n (\alpha_+ - (p-1)\beta_+) ((\alpha_+ - p\beta_+)^2 + \alpha_+^2)^{-1} \right] e^{(\alpha_+ - n\beta_+)x_3},$$

$$\alpha_{\pm}^2 = (\tilde{\omega}_{\pm}^2 - c_{660}^{\pm} k^2)/c_{440}^{\pm} \quad \text{Re} \alpha_{\pm} > 0, \quad \tilde{\omega}_{\pm}^2 = \rho_0^{\pm} \omega^2 h_*^2 / c_*, \quad \gamma_{\pm} = \lambda_{\pm} \beta_{\pm} \quad (7)$$

$$\sigma_{230}^{\pm}(x_3) = c_{440}^{\pm} \exp(\lambda_{\pm} \exp(-\beta_{\pm} x_3)) (u_{20}^{\pm}(x_3))', \quad (8)$$

где

$$(u_{20}^{\pm}(x_3))' = \mp \alpha_{\pm} e^{\mp \alpha_{\pm} x_3} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \mp \alpha_{\pm} \gamma_{\pm}^n \left[\prod_{p=1}^n (\mp \alpha_{\pm} - p\beta_{\pm}) ((\mp \alpha_{\pm} - p\beta_{\pm})^2 + \alpha_{\pm}^2)^{-1} \right] e^{(\mp \alpha_{\pm} - n\beta_{\pm})x_3}. \quad (9)$$

Тогда следующее из условий идеального механического сопряжения полупространств V_+ и V_- дисперсионное соотношение для интерфейсных волн сдвига вдоль поверхности их контакта можно записать в виде

$$(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_+^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha_+ - (p-1)\beta_+) ((-\alpha_+ - p\beta_+)^2 + \alpha_+^2)^{-1} \right]) \cdot \\ \cdot c_{440}^- \exp \lambda_- (\alpha_- + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_- \gamma_-^n \left[\prod_{p=1}^n (\alpha_- - p\beta_-) ((\alpha_- - p\beta_-)^2 + \alpha_-^2)^{-1} \right]) -$$

$$-(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{-}^n [\prod_{p=1}^n (\alpha_{-} - (p-1)\beta_{-}) ((\alpha_{-} - p\beta_{-})^2 + \alpha_{-}^2)^{-1}]) \cdot c_{440}^{+} \exp \lambda_{+} (-\alpha_{+} + \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_{+} \gamma_{+}^n [\prod_{p=1}^n (-\alpha_{+} - p\beta_{+}) ((-\alpha_{+} - p\beta_{+})^2 + \alpha_{+}^2)^{-1}]) = 0. \quad (10)$$

Описание результатов численных исследований. Численные исследования проводились для волновода с безразмерными значениями модулей упругости и плотности

$$c_{440}^{+} = c_{440}^{-} = 4, \quad c_{660}^{+} = c_{660}^{-} = 2, \quad \rho_0^{+} = \rho_0^{-} = 4, \quad (11)$$

для частного случая, когда одно из полупространств однородное, а второе неоднородное. Неоднородность второго полупространства задавалась всеми возможными парами, указанных в таблице, варьируемых параметров λ и β .

Таблица

λ	0	2.00	4.00	8.00	10.00	12.0	15.0	18.0	20.0
β	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	1.5	2.0	4.0

Для каждого варианта задания неоднородности второго полупространства находились, если такие существуют, корни дисперсионного соотношения (10). Построена интерполирующая кривая, делящая плоскость всех возможных значений пары (λ, β) на две полуплоскости Φ^{+} и Φ^{-} отвечающие областям существования и отсутствия корней дисперсионного уравнения (10) соответственно (рис.2).

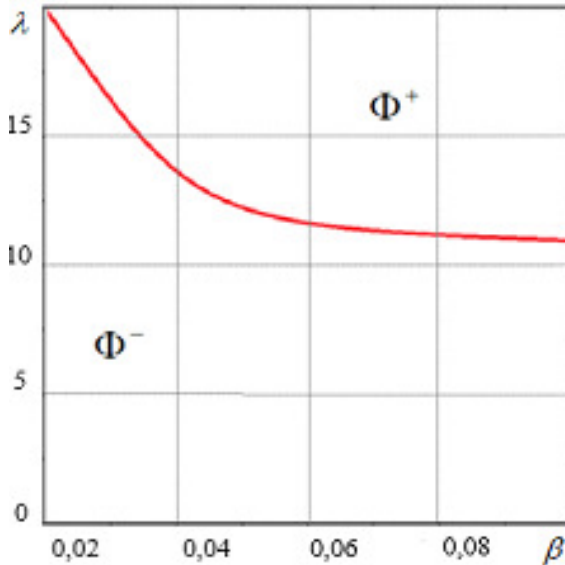


Рис. 2.

На рис. 3 и рис. 4 приведены дисперсионные спектры локализованных сдвиговых интерфейсных волн для частных случаев неоднородности с параметрами $\lambda = 10$, $\beta = 1$ и $\lambda = 20$, $\beta = 1$ соответственно. На данных графиках наблюдаем увеличение количества мод исследуемых волн в рассматриваемом диапазоне частот при существенном наращивании абсолютного значения параметра λ .

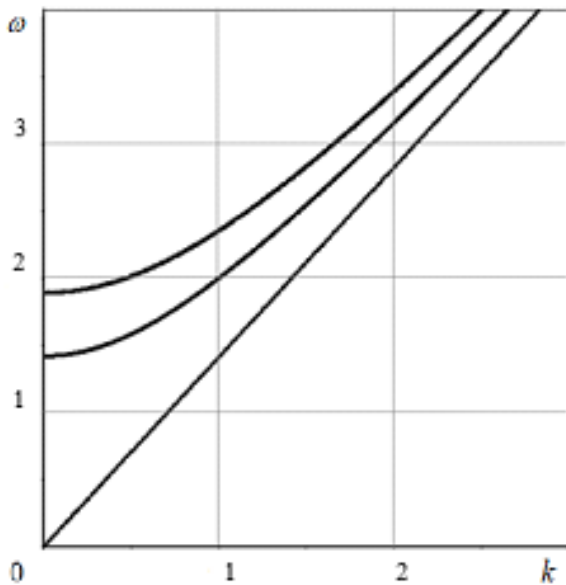


Рис. 3.

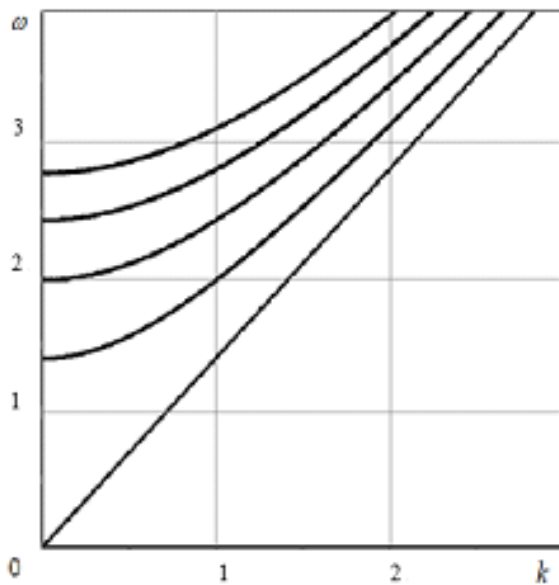


Рис. 4.

На основании выше описанных расчетов можно сделать вывод, что на существование корней дисперсионного уравнения (10) в большей мере влияет значение параметра β . В то время как параметр λ оказывает влияние на частоту запираания и кучность мод дисперсионного спектра исследуемых волн в случае их существования.

Заключение. Таким образом, разработана численно-аналитическая методика анализа эффектов существования локализованных интерфейсных сдвиговых волн вдоль границы контакта двух разнородных полупространств из трансверсально-изотропных функционально-градиентных материалов с приграничной двойной экспоненциальной неоднородностью. В результате численного анализа определены границы изменения параметров неоднородности, при которых вдоль поверхности контакта разнородных полупространств с данными свойствами возможно существование сдвиговых интерфейсных волн. Для частных случаев задания физико-механических параметров волноводов приведены фрагменты дисперсионных спектров упругих сдвиговых интерфейсных волн.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
2. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284с.
3. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 287 с.
4. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1966. – 168 с.
5. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 1 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 227–260. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06.
6. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 2 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 36–86. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.036_086.03
7. Болнокин В.Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2022. – № 3 (80). – С. 14–19. – DOI:10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN: BOBVC.
8. Карасев Д.С. Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 48–55. – EDN: SPYVC. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55.

A.A. Glukhov, M.N. Pacheva, M.V. Fomenko

Analysis of the propagation of shear interfacial waves at the interface between

transversely isotropic functionally graded half-spaces.

The results of investigations on the derivation and numerical analysis of the analytical form of the dispersion relation describing the propagation of localized shear interfacial waves in a waveguide composed of perfectly bonded transversely isotropic functionally graded half-spaces with thickness inhomogeneity are presented. A double exponential function was used to describe the transverse inhomogeneity of the half-spaces. Numerical studies of the proposed model revealed the existence of localized shear interfacial waves and allowed the determination of the limiting values of the inhomogeneity parameters of the half-spaces at which this type of wave can be observed in the considered waveguide structure. For particular cases of inhomogeneity, dispersion spectra of localized shear interfacial waves were calculated.

Keywords: wave deformation, continuously inhomogeneous functionally graded medium, shear interfacial waves, double exponential near-surface inhomogeneity, dispersion spectrum modes.

References

1. Kolsky, H. (1955). *Stress Waves in Solids*. Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury. 192 p. (In Russian; Russian translation of the English original).
2. Grinchenko, V.T., & Meleshko, V.V. (1981). *Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Solids*. Naukova Dumka. 284 p. (In Russian).
3. Viktorov, I.A. (1981). *Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications*. Nauka. 287 p. (In Russian).
4. Viktorov, I.A. (1966). *Physical Principles of the Engineering Applications of Rayleigh and Lamb Ultrasonic Waves*. Nauka. 168 p. (In Russian).
5. Zhavoronok, S.I. (2021). Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (a review). Part I. *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii = Mechanics of composite materials and structures*, 27(2), 227–260. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06 (In Russian)
6. Zhavoronok, S.I. (2022). Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (a review). Part II. *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii = Mechanics of composite materials and structures*, 28(1), 36–86. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.036_086.03 (In Russian)
7. Bolnokin, V.E., Glukhov, A.A., & Storozhev, V.I. (2022). [Analysis of a model of shear elastic wave propagation in a semi-infinite transversely isotropic functionally graded geomassif]. *Zhurnal Teoreticheskoi i Prikladnoi Mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 3, 14–19. DOI: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. EDN: BOBAVC. (In Russian).
8. Karasev, D.S., Storozhev, S.V., & Shaldyryan, V.A. (2023). [Integration of the equations governing propagation of localized shear electroelastic waves in functionally graded piezoceramics with double-exponential inhomogeneity]. *Zhurnal Teoreticheskoi i Prikladnoi Mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2, 48–55. DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. EDN: SPYOBC. (In Russian).

Поступила в редакцию / Original submitted 01.07.2026.

Доработана / Revision submitted 17.07.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-48-61

EDN:XUZVSE



©2026. С.А. Калоеров, Я.И. Гапотченко, В.К. Толстых

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

Приведено решение задачи об антиплоской деформации полупространства с произвольными цилиндрическими эллиптическими полостями и плоскими трещинами. С использованием комплексного потенциала антиплоской деформации, построенного на основе решения задачи для многосвязного полупространства методом интегралов типа Коши, разложения функций в ряды Лорана и удовлетворения граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов задача сведена к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для полупространства с круговой полостью, в том числе пересекающей плоскую поверхность, с круговой полостью и краевой плоской трещиной из нее в перемычке, в том числе выходящей на плоскую поверхность полупространства.

Ключевые слова: антиплоская деформация, комплексный потенциал, отверстия, трещины, обобщенный метод наименьших квадратов.

Введение. В различных областях современной науки и техники в качестве элементов конструкций используются тела с отверстиями и трещинами из анизотропных композиционных материалов [1–4]. Под действием различных внешних сил около таких отверстий и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Это актуально и в случаях, когда указанные тела находятся в состоянии

Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1339-6035.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Гапотченко Яков Игоревич – асп. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: yakov.gapotchenko@gmail.com, ORCID: 0009-0001-9958-029X.

Gapotchenko Yakov Igorevich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Толстых Виктор Константинович – докт. физ.-мат. наук, докт. техн. наук, зав. каф. компьютерных технологий физ.-техн. ф-та ДонГУ, Донецк, e-mail: mail@tolstykh.com, ORCID: 0000-0001-9055-1102.

Tolstykh Viktor Konstantinovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Physics and Technology, Chair of Computer Technology.

антиплоской деформации.

Для решения задач об определении напряженного состояния многосвязных тел при их антиплоской деформации часто используется комплексный потенциал. С использованием этой функции проведены различные исследования [5–8]. Но все эти исследования проведены для конечных или бесконечных тел.

В данной статье с использованием комплексного потенциала антиплоской деформации решена задача для полупространства с произвольными эллиптическими полостями и плоскими трещинами, в том числе с пересекающимися поверхностями и выходящими на плоскую поверхность полупространства. Описаны результаты численных исследований для полупространства с круговой полостью, с круговой полостью и краевой трещиной из нее. Рассмотрены случаи выхода этих структур на плоскую поверхность полупространства (выемов кругового и плоского).

Решение для многосвязного полупространства. Рассмотрим находящееся в состоянии антиплоской деформации полупространство с эллиптическими полостями так, что в поперечном его сечении получается нижняя полуплоскость с прямолинейной границей L^+ и эллиптическими отверстиями с контурами L_l и полуосями a_l, b_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Некоторые из эллипсов могут переходить в прямолинейные разрезы с полуосями $b_l = 0$.

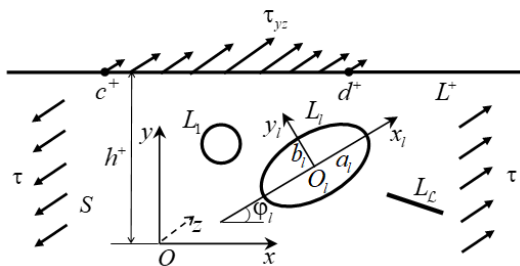


Рис. 1.

Выберем основную систему координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости и осью Ox , параллельной прямолинейной границе. Обозначим область, занимаемую многосвязной полуплоскостью через S , прямолинейную границу через L^+ , расстояние от начала координат до прямолинейной границы через h^+ .

На конечном отрезке $[c^+, d^+]$ границы L^+ действуют распределенные внешние усилия τ_{yz} , контуры отверстий L_l загружены распределенными внешними касательными усилиями τ_l с главными векторами $P_l(0, 0, Z_l)$ или жестко подкреплены, на бесконечности полупространство находится под действием касательных усилий $\tau_{xz}^\infty = \tau$ и в силу незагруженности прямолинейной границы $\tau_{yz}^\infty = 0$. Кроме того, во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) полупространства действуют сосредоточенные силы $P_r^0(0, 0, Z_r^0)$.

Отнесем эллипсы L_l к локальным системам координат $O_l x_l y_l$ с началами в их центрах и направлениями осей Ox_l вдоль полуосей a_l так, что в локальной и основной системах координат параметрические уравнения эллипса L_l будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, y_l = b_l \sin \theta; \quad (1)$$

$$\begin{aligned}x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l;\end{aligned}\tag{2}$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса L_l , изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l} , y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки. Некоторые из эллипсов могут быть прямолинейными разрезами. При наличии отверстий с криволинейными контурами эти контуры можно аппроксимировать совокупностями дуг эллипсов или берегов разрезов.

Если задачу об определении напряженно-деформированного состояния рассматриваемого полупространства решать методом комплексных потенциалов, то она сводится к нахождению функции $\Phi_3(z_3)$ обобщенной комплексной переменной [5–7]

$$z_3 = x + \mu_3 y,\tag{3}$$

где μ_3 – один из корней характеристического уравнения

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0\tag{4}$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций материала полупространства (второй корень этого уравнения в силу вещественности коэффициентов a_{ij} равен $\overline{\mu_3}$). При этом комплексный потенциал должен удовлетворять граничному условию

$$2 \operatorname{Re} \Phi_3(z_3) = \pm \int_0^s Z_{nl} ds + c_l\tag{5}$$

в случае задания на контуре L_l усилий Z_{nl} или условию

$$2 \operatorname{Re} p_3 \Phi_3(z_3) = w_l^*\tag{6}$$

при задании на границе перемещения w_l^* . При этом верхний знак перед интегралом берется для границы полуплоскости (при обходе заданной области по часовой стрелке), нижний знак – для контуров отверстий и трещин.

Исходя из общего представления комплексного потенциала антиплоской деформации [7], в рассматриваемом случае функция $\Phi_3(z_3)$ имеет вид [8]

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 z_3 + N_3(z_3) + \Phi_{30}^+(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{3l}(z_3),\tag{7}$$

в котором

$$N_3(z_3) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{3l} \ln(z_3 - z_{3l}) + \sum_{r=1}^R A_{3r}^0 \ln(z_3 - z_{3r}^0);\tag{8}$$

Γ_3 , A_{3l} , A_{3r}^0 – постоянные, определяемые решением систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} (\mu_3, -1) \Gamma_3 = \left(\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty \right);\tag{9}$$

$$2 \operatorname{Re} (1, \mu_3) i A_{3l} = \left(-1, \frac{a_{45}}{a_{55}} \right) \frac{Z_l}{2\pi}; \quad (10)$$

$$2 \operatorname{Re} (1, \mu_3) i A_{3r}^0 = \left(-1, \frac{a_{45}}{a_{55}} \right) \frac{Z_r^0}{2\pi}; \quad (11)$$

$\Phi_{30}^+(z_3)$ – функция, голоморфная в нижней полуплоскости S_3 , получаемой из заданной области S аффинным преобразованием (3); $\Phi_{3l}(z_3)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) – функции, голоморфные в многосвязной области S_3 с контурами L_{3l} , соответствующими контурам L_l при аффинном преобразовании (3). Для представления этих функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{3l}| \geq 1$ на внешности контуров L_{3l} , используя формулы [9]

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l} \left(\zeta_{3l} + \frac{m_{3l}}{\zeta_{3l}} \right), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} z_{3l} &= x_{0l} + \mu_3 y_{0l}, \\ R_{3l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{3l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2R_{3l}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда функции $\Phi_{3l}(z_3)$, голоморфные вне L_{3l} , будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{3l}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана вида

$$\Phi_{3l}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{3ln}}{\zeta_{3l}^n}. \quad (14)$$

Для точек прямолинейной границы L^+ имеем

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = h^+, \quad z = x + iy = t + ih^+, \\ z_3 &= t_3 = x + \mu_3 y = t + \mu_3 h^+, \\ \overline{z_3} &= \overline{t_3} = x + \overline{\mu_3} y = t + \overline{\mu_3} h^+ = t_3 + (\overline{\mu_3} - \mu_3) h^+. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив функции (7) в граничные условия (5) на прямолинейной границе L^+ , получим равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{30}^+(t_3) + \overline{\Phi_{30}^+}(t_3 + (\overline{\mu_3} - \mu_3)h^+) &= f_3^+(t) - N_3(t_3) - \overline{N_3^+}(t_3 + (\overline{\mu_3} - \mu_3)h^+) - \\ &- \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\Phi_{3l}(t_3) + \overline{\Phi_{3l}^+}(t_3 + (\overline{\mu_3} - \mu_3)h^+) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

в котором

$$f_3^+(t) = -\frac{1}{\mu_3 - \bar{\mu}_3} \int_{[c^+, d^+]} \tau_{yz} dt + c,$$

$$N_3^+(t_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{3l} \ln(t_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+ - \bar{z}_{3l}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^R A_{3r}^0 \ln(t_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+ - \bar{z}_{3r}^0).$$

Функции $\Phi_{30}^+(t_3)$, $N_3^+(t_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+)$, $\bar{\Phi}_{3l}^+(t_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+)$ являются граничными значениями соответствующих функций, голоморфных в нижней полуплоскости S_3 , поэтому интегралы типа Коши от них по прямой L_3^+ , соответствующей L^+ , восстанавливают эти функции в области S_3 . Функции $\bar{\Phi}_{30}^+(t_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+)$, $N_3(t_3)$, $\Phi_{3l}(t_3)$ являются граничными значениями соответствующих функций, голоморфных в верхней полуплоскости и имеющих особенности в нижней полуплоскости, поэтому интегралы типа Коши от них равны нулю. Учитывая это и вычисляя интегралы типа Коши от обеих частей равенства (16), найдем

$$\Phi_{30}^+(z_3) = f_3^+(z_3) - \bar{N}_3^+(z_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+) - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \bar{\Phi}_{3l}^+(z_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+), \quad (17)$$

где

$$f_3^+(z_3) = -\frac{1}{\mu_3 - \bar{\mu}_3} \int_{[c^+, d^+]} Z_n^+ dt + c; \quad (18)$$

$$N_3^+(z_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{3l} \ln(z_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+ - \bar{z}_{3l}) + \sum_{r=1}^R A_{3r}^0 \ln(z_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+ - \bar{z}_{3r}^0); \quad (19)$$

$$\bar{\Phi}_{3l}^+(z_3 + (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{3ln}}{(\zeta_{3l}^+)^n}; \quad (20)$$

$$z_3 = \bar{z}_{3l} - (\bar{\mu}_3 - \mu_3)h^+ + \bar{R}_{3l} \left(\zeta_{3l}^+ + \frac{\bar{m}_{3l}}{\zeta_{3l}^+} \right), \quad (21)$$

$$\bar{z}_{3l} = x_{0l} + \bar{\mu}_3 y_{0l},$$

$$\bar{R}_{3l} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \bar{\mu}_3 \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \bar{\mu}_3 \cos \varphi_l)}{2},$$

$$\bar{m}_{3l} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \bar{\mu}_3 \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \bar{\mu}_3 \cos \varphi_l)}{2\bar{R}_{3l}}.$$

При этом учтено, что

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^\infty = \tau, \quad \tau_{yz}^\infty = 0, \\ \Gamma_3 t_3 + \overline{\Gamma_3} \overline{t_3} = \Gamma_3 t_3 + \overline{\Gamma_3} t_3 + \overline{\Gamma_3} (\overline{\mu_3} - \mu_3) h^+ = \overline{\Gamma_3} (\overline{\mu_3} - \mu_3) h^+ \end{aligned} \quad (22)$$

и то, что интеграл типа Коши от выражения (22) по бесконечной прямой L_3^+ равен постоянной, которую можно не включать в восстанавливаемую функцию.

Окончательно, для комплексного потенциала (7) получим выражение

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_3) = \Gamma_3 z_3 + f_3^+(z_3) + N_3(z_3) - \overline{N_3^+}(z_3 + (\overline{\mu_3} - \mu_3) h^+) + \\ + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{3ln}}{\zeta_{3l}^n} - \frac{\overline{a_{3ln}}}{(\zeta_{3l}^+)^n} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

в котором неизвестными являются только коэффициенты a_{3ln} . Эти коэффициенты определим из граничных условий на контурах отверстий и трещин.

Комплексный потенциал (23) точно удовлетворяет граничным условиям на прямолинейной границе полуплоскости, а граничные условия на контурах отверстий и трещин используются для определения коэффициентов рядов a_{3ln} .

Но, если отверстия и трещины выходят на прямолинейную границу полуплоскости, то применять метод интегралов типа Коши по бесконечной прямой в том виде, в какой он использовался при получении выражения (23), невозможно. В этом случае и на этой границе можно использовать обобщенный метод наименьших квадратов. При таком подходе функцию $\Phi_{30}^+(z_3)$, голоморфную в нижней полуплоскости, на основе (23) можно выбрать в виде сумм рядов Лорана для воображаемых отверстий в верхней полуплоскости

$$\Phi_{30}^+(z_3) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{3ln}}{(\zeta_{3l}^+)^n}$$

с неизвестными коэффициентами b_{3ln} . Тогда для комплексного потенциала (7) будем иметь выражение

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 z_3 + f_3^+(z_3) + N_3(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{3ln}(z_3) a_{3ln} + \varphi_{3ln}^+(z_3) b_{3ln}), \quad (24)$$

в котором

$$\varphi_{3ln}(z_3) = \frac{1}{\zeta_{3l}^n}, \quad \varphi_{3ln}^+(z_3) = \frac{1}{(\zeta_{3l}^+)^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (25)$$

В таком случае неизвестные коэффициенты a_{3ln} и b_{3ln} нужно определять из граничных условий на контурах отверстий и на прямолинейной границе. Этим условиям будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов, используя дифференциальную форму граничных условий. Чтобы получить эту

форму, продифференцируем граничные условия (5), (6) с учетом выражений (24), (25) по дуге контура, получим

$$2 \operatorname{Re} \delta_{3,s} \Phi'_3(t_3) = \pm Z_n; \quad (26)$$

$$2 \operatorname{Re} p_3 \delta_{3,s} \Phi'_3(t_3) = 0, \quad (27)$$

где $\delta_{3,s} = \frac{dt_3}{ds}$,

$$\Phi'_3(z_3) = \Gamma_3 + f'^+_3(z_3) + N'_3(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi'_{3ln}(z_3) a_{3ln} + \varphi'^+_{3ln}(z_3) b_{3ln} \right) \quad (28)$$

$$N'_3(z_3) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{A_{3l}}{z_3 - z_{3l}} + \sum_{r=1}^R \frac{A_{3r}^0}{z_3 - z_{3r}^0}, \quad (29)$$

$$\varphi'_{3ln}(z_3) = -\frac{n}{R_{3l} \zeta_{3l}^{n-1} (\zeta_{3l}^2 - m_{3l})}, \quad \varphi'^+_{3ln}(z_3) = -\frac{n}{\overline{R_{3l}} (\zeta_{3l}^+)^{n-1} \left((\zeta_{3l}^+)^2 - \overline{m_{3l}} \right)};$$

a_{3ln} , b_{3ln} – неизвестные коэффициенты рядов Лорана, которые найдем из дифференциальных граничных условий (26) или (27) на прямолинейной границе и на контурах отверстий обобщенным методом наименьших квадратов [10–12]. Для этого на «коллокационном» отрезке прямолинейной границы L^+ , в качестве которого нужно брать отрезок, где значительно влияние отверстий на напряженное состояние около этой прямой, и на каждом из контуров L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_m(x_m, y_m)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Для определения неизвестных постоянных a_{3ln} , b_{3ln} получится следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{3m} \delta_{3,s} \left(\varphi'_{3ln}(t_{3m}) a_{3ln} + \varphi'^+_{3ln}(t_{3m}) b_{3ln} \right) = \\ = f(t_{3m}) - 2 \operatorname{Re} g_{3m} \delta_{3,s} \left(\Gamma_3 + f'^+_3(t_{3m}) + N'_3(t_{3m}) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где $g_3 = 1$, $f(t_{3m}) = -Z_{nm}$ в случае первой основной задачи, $g_{3m} = p_m$, $f(t_{3m}) = 0$ в случае второй основной задачи.

Систему (30) будем решать методом сингулярного разложения [13, 14]. После ее решения постоянные a_{3ln} , b_{3ln} , а следовательно, и комплексный потенциал (24) будут известными и в любой точке тела можно найти основные касательные напряжения

$$(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 2 \operatorname{Re} (\mu_3, -1) \Phi'_3(z_3), \quad (31)$$

а по ним и касательные напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{nz} &= \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny, \\ \tau_{sz} &= -\tau_{xz} \cos ny + \tau_{yz} \cos nx \end{aligned} \quad (32)$$

на произвольной площадке с нормалью n и касательной s . При этом, если некоторый эллипс L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) переходит в прямолинейный разрез (трещину) при $b_l = 0$, то для его концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) $k_{3l}^\pm$, используя формулу [15]

$$k_{3l}^\pm = -2 \operatorname{Re} (\mu_3 \cos ny + \cos nx) M_{3l} = -2 \operatorname{Re} (\mu_3 \sin \varphi_l + \cos \varphi_l) M_{3l}, \quad (33)$$

в которой

$$M_{3l} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{3l}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} n a_{3ln}, \quad (34)$$

причем знаки «+» и «-» у КИН в локальной системе координат относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

Описание результатов численных исследований. При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (24) для каждого отверстия L_l и точек M_m на этих контурах и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы, для которых составлялись уравнения (30), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах отверстий и на прямолинейной границе не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 20 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы брать от 100 до 800 «коллокационных точек». При этом в качестве «коллокационного отрезка» на прямолинейной границе брался отрезок длины 2–3 диаметра отверстия с центром в точке, где наиболее существенно влияние отверстий и трещин на значения отверстий около прямолинейной границы.

В табл. 1 для полупространства с круговой полостью радиуса a_1 (рис. 2), находящего на бесконечности под действием усилий $\tau_{xz}^\infty = \tau$, с точностью до множителя τ приведены значения касательных напряжений в некоторых характерных точках полупространства в зависимости от отношения c_1/a_1 , где c_1 – длина перемычки между контуром полости и границей полупространства. При этом характерными были точки $A(0; -a_1)$, $B(a_1; 0)$, $C(0; a_1)$, $D(0; a_1 + c_1/2)$, $E^+(0; a_1 + c_1)$, $L^+(a_1; a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1; a_1 + c_1)$. На рис. 4 для некоторых значений c_1/a_1 изображены графики распределения напряжений τ_{sz} по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, а на рис. 5 даны графики распределения τ_{xz} по отрезку прямолинейной границы L^+ .

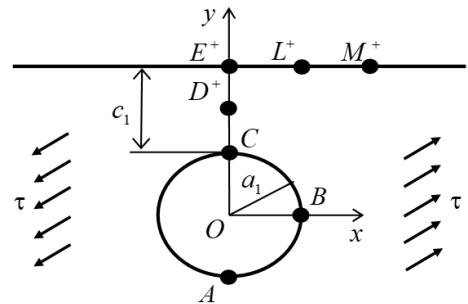


Рис. 2.

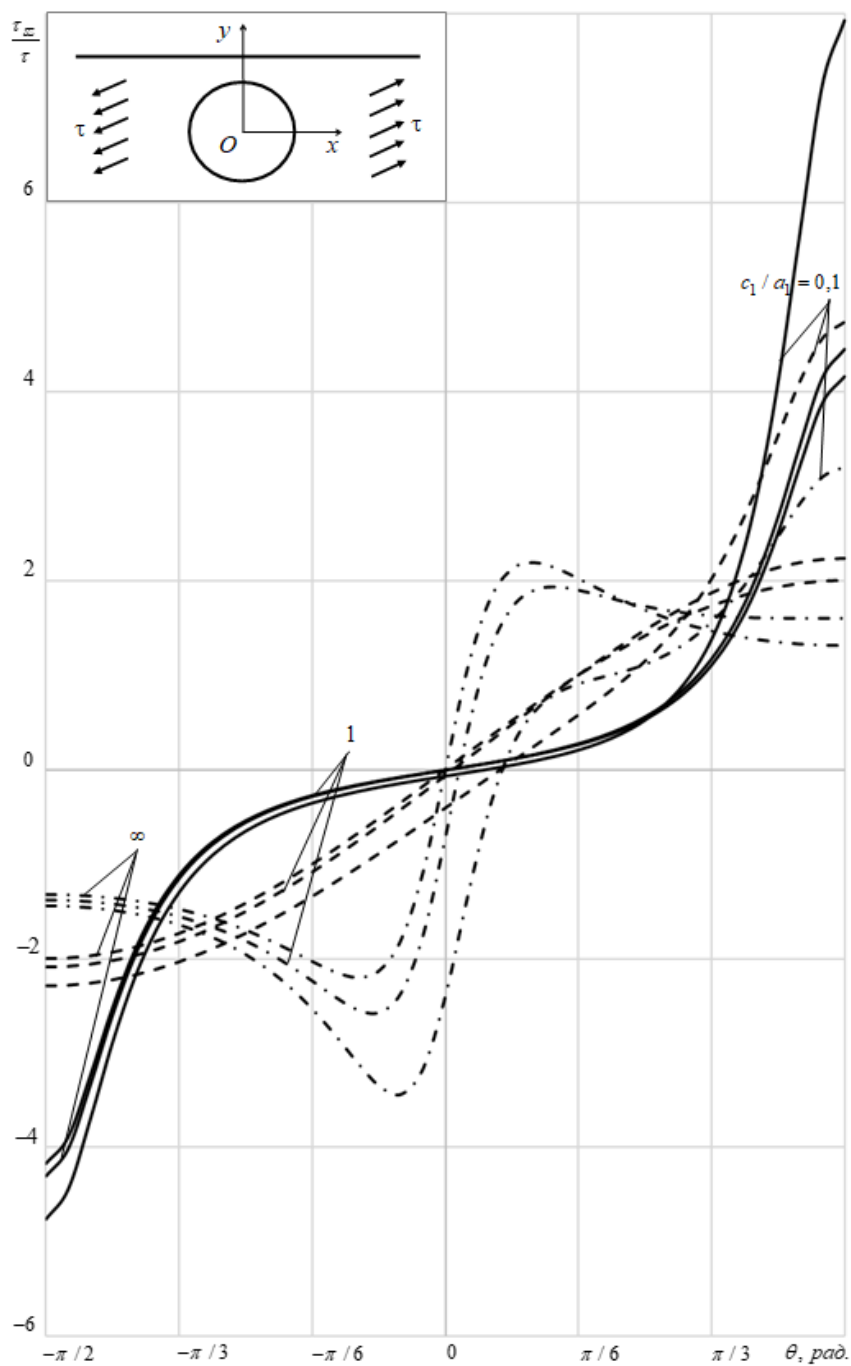


Рис. 3. Графики распределения τ_{sz} около контура круговой полости для различных c_1/a_1 при G_{xz}/G_{yz} , равных 10 (сплошные линии), 1 (пунктирные линии) и 0,1 (штрих-пунктирные линии)

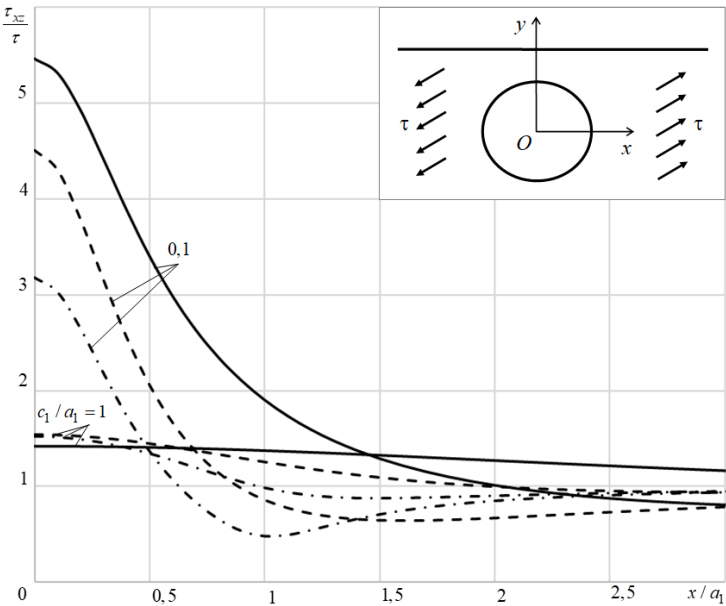


Рис. 4. Графики распределения τ_{xz} около прямолинейной границы для различных c_1/a_1 при G_{xz}/G_{yz} , равных 10 (сплошные линии), 1 (пунктирные линии) и 0,1 (штрих-пунктирные линии)

Таблица 1. Значения напряжений в некоторых точках полупространства с круговой полостью в зависимости от c_1/a_1

$\frac{G_{xz}}{G_{yz}}$	Точка	Напряжения	c_1/a_1									
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5	-1
10, 0	A	τ_{xz}	4,162	4,227	4,305	4,421	4,760	5,17	5,528	2,398	2,077	4,162
	B	τ_{yz}	0,000	0,002	0,006	0,018	0,067	0,14	0,203	0,033	0,009	—
	C	τ_{xz}	4,162	4,265	4,452	4,880	7,936	26,40	—	—	—	—
	D ⁺	τ_{xz}	1,000	1,247	1,573	2,195	5,903	25,45	—	—	—	—
	E ⁺	τ_{xz}	1,000	1,161	1,418	1,954	5,479	25,15	—	—	—	—
	L ⁺	τ_{xz}	1,000	1,155	1,373	1,701	1,906	1,00	0,044	0,008	0,001	—
	M ⁺	τ_{xz}	1,000	1,138	1,270	1,334	1,012	0,55	0,174	0,031	0,004	0,349
1, 0	A	τ_{xz}	2,000	2,042	2,086	2,144	2,283	2,40	2,463	2,426	2,250	2,000
	B	τ_{yz}	0,000	0,018	0,060	0,141	0,401	0,65	0,779	0,733	0,500	—
	C	τ_{xz}	2,000	2,082	2,240	2,594	4,734	14,22	—	—	—	—
	D ⁺	τ_{xz}	1,000	1,323	1,661	2,188	4,563	14,17	—	—	—	—
	D ⁺	τ_{xz}	1,000	1,323	1,661	2,188	4,563	14,17	—	—	—	—
	L ⁺	τ_{xz}	1,000	1,165	1,257	1,253	0,862	0,35	0,073	0,068	0,040	—
	M ⁺	τ_{xz}	1,000	1,061	0,997	0,886	0,673	0,54	0,468	0,486	0,585	0,750
0, 1	A	τ_{xz}	1,316	1,352	1,376	1,400	1,441	1,47	1,478	1,465	1,402	1,316
	B	τ_{yz}	0,000	0,306	0,718	1,261	2,400	3,16	3,485	3,294	2,310	—
	C	τ_{xz}	1,316	1,434	1,606	1,892	3,200	8,50	—	—	—	—
	D ⁺	τ_{xz}	1,001	1,330	1,547	1,857	3,188	8,50	—	—	—	—
	E ⁺	τ_{xz}	1,000	1,297	1,528	1,845	3,185	8,50	—	—	—	—
	L ⁺	τ_{xz}	1,000	1,058	0,989	0,853	0,482	0,22	0,106	0,102	0,073	—
	M ⁺	τ_{xz}	1,000	0,946	0,906	0,880	0,848	0,83	0,822	0,834	0,882	0,937

Как видно из табл. 1, рис. 3 и рис. 4, приближение круговой полости к плоской границе полупространства приводит к росту напряжений в зоне перемычки и в особенности вблизи плоской границы полупространства. Выход полости на плоскую границу приводит к резкому уменьшению значений напряжений как около поверхности полости, так и около плоской границы. Уменьшение глубины выема приводит к уменьшению этих напряжений.

В табл. 2 для полупространства с круговой полостью радиуса a_1 и краевой плоской трещиной длины a_1 (рис. 5), находящегося на бесконечности под действием усилий $\tau_{xz}^\infty = \tau$, с точностью до множителя τ приведены значения касательных напряжений в некоторых характерных точках полупространства в зависимости от отношения c_1/a_1 , где c_1 – длина перемычки между верхним концом трещины и границей полупространства. При этом характерными были точки $A(0; -a_1)$, $B(a_1; 0)$, $C(0; 2a_1)$, $D^+(0; 2a_1 + c_1/2)$, $E^+(0; 2a_1 + c_1)$, $L^+(a_1; 2a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1; 2a_1 + c_1)$, $N^+(3a_1; 2a_1 + c_1)$.

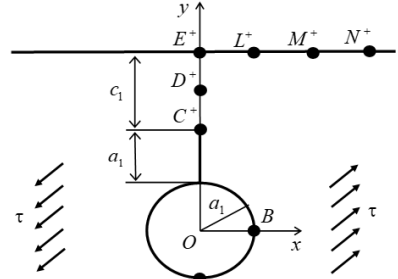


Рис. 5

Таблица 2. Значения напряжений в некоторых точках полупространства с круговой полостью и краевой трещиной в зависимости от c_1/a_1

$\frac{G_{xz}}{G_{yz}}$	То-чка	Вели-чина	c_1/a_1									
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5	-1
10,0	A	τ_{xz}	3,753	0,297	0,562	1,063	0,914	1,95	-1,841	-2,503	-3,705	5,515
	B	τ_{yz}	-0,019	0,053	0,069	0,112	0,109	0,16	-0,005	-0,009	-0,013	0,205
	C	k_3^+	0,794	0,013	0,031	0,094	0,154	0,15	—	—	—	—
	D ⁺	τ_{xz}	1,000	0,198	0,236	0,473	1,245	19,19	—	—	—	—
	E ⁺	τ_{xz}	1,000	0,351	0,333	0,564	1,382	24,14	—	—	—	—
	L ⁺	τ_{xz}	1,000	0,282	0,243	0,358	0,303	0,40	0,000	0,000	0,000	0,044
	M ⁺	τ_{xz}	1,000	0,239	0,197	0,275	0,204	0,27	0,000	0,000	0,001	0,174
	N ⁺	τ_{xz}	1,000	0,211	0,173	0,246	0,192	0,27	0,000	0,001	0,003	0,312
1,0	A	τ_{xz}	1,870	0,420	0,884	1,299	1,613	2,13	-4,285	-5,141	-5,582	2,467
	B	τ_{yz}	-0,082	0,599	0,834	0,940	0,975	1,06	-0,083	-0,145	-0,109	0,784
	C	k_3^+	0,728	0,009	0,028	0,056	0,032	0,03	—	—	—	—
	D ⁺	τ_{xz}	1,000	0,235	0,282	0,291	0,668	1,72	—	—	—	—
	E ⁺	τ_{xz}	1,000	0,452	0,413	0,334	0,879	2,88	—	—	—	—
	L ⁺	τ_{xz}	1,000	0,284	0,246	0,198	0,151	0,15	0,009	0,001	0,001	0,074
	M ⁺	τ_{xz}	1,000	0,271	0,296	0,304	0,315	0,34	0,034	0,019	0,025	0,466
	N ⁺	τ_{xz}	1,000	0,301	0,385	0,437	0,485	0,53	0,092	0,075	0,101	0,703
0,1	A	τ_{xz}	1,287	1,020	1,336	1,419	1,547	1,56	1,557	1,565	1,544	1,480
	B	τ_{yz}	-0,245	6,238	6,057	5,659	5,314	5,21	5,176	5,0587	4,438	3,505
	C	k_3^+	0,607	0,002	0,002	0,000	0,005	0,01	—	—	—	—
	D ⁺	τ_{xz}	1,000	0,058	0,022	0,009	0,003	0,00	—	—	—	—
	E ⁺	τ_{xz}	1,000	0,102	0,024	0,016	-0,032	-0,03	—	—	—	—
	L ⁺	τ_{xz}	1,000	0,177	0,156	0,147	0,142	0,14	0,140	0,138	0,127	0,107
	M ⁺	τ_{xz}	1,000	0,478	0,573	0,628	0,685	0,70	0,699	0,710	0,760	0,821
	N ⁺	τ_{xz}	1,000	0,675	0,774	0,817	0,858	0,87	0,867	0,874	0,900	0,928

Как видно из табл. 2, приближение круговой полости с краевой трещиной к плоской границе полупространства приводит к росту напряжений вблизи перемычки и в особенности вблизи плоской границы полупространства. При этом в остальных точках прямолинейной границы значения напряжений уменьшаются. Выход трещины на плоскую границу, как и в предыдущем случае, приводит к резкому уменьшению значений напряжений около границы. Уменьшение длины разреза между круговой полостью и плоской границей (глубины выема) приводит к резкому росту концентрации сжимающих напряжений около прямолинейной границы при $\frac{G_{xz}}{G_{yz}} \geq 1$ с незначительными изменениями при $\frac{G_{xz}}{G_{yz}} < 1$.

Заключение. Таким образом, в статье дано решение задачи об определении напряженного состояния анизотропного полупространства с эллиптическими полостями и плоскими трещинами при его антиплоской деформации. Решение получено с использованием комплексного потенциала и приведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Численно исследовано напряженное состояние полупространства с круговой полостью и полупространства с круговой полостью и краевой трещиной из нее в перемычке. Изучены влияние геометрических характеристик полости и трещины, а также материала полупространства на значения напряжений и КИН.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. Буров А.К. Стекловолоконистые анизотропные материалы и их техническое применение / А.К. Буров, Г.Д. Андреевская. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 71 с.
2. Нотон Б. Применение композиционных материалов в технике. / В кн.: Композиционные материалы. Т. 3. / Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. – М.: Машиностроение, 1978. – С. 260–307.
3. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 248 с.
4. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
5. Калоеров С.А. Антиплоская деформация многосвязных тел с трещинами / С.А. Калоеров // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1985. – Т. 38, вып. 6. – С. 11–20.
6. Калоеров С.А. Антиплоская деформация тела с трещиной и эллиптической полостью / С.А. Калоеров, Е.Ф. Косилова, В.А. Лапко // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 7. – С. 92–99
7. Горянская Е.С. Антиплоская деформация многосвязного анизотропного тела с продольными полостями и плоскими трещинами / Е.С. Горянская, С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 56–62
8. Калоеров С.А. Основные соотношения для комплексного потенциала антиплоской деформации тела и их использование при решении задач / С.А. Калоеров, Я.И. Гапотченко // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2025. – № 2(91). – С.35–51. – DOI:10.24412/0136-4545-2025-2-35-51.

9. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
10. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
11. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин – М.: Наука, 1977. – 304 с.
12. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
13. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
14. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X
15. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

S.A. Kaloerov, Y.I. Gapotchenko, V.K. Tolstykh

Solution of the antiplane strain problem for a half-space with holes and cracks.

A solution of the antiplane strain problem for a half-space with arbitrary cylindrical elliptical cavities and plane cracks is presented. Using the complex potential of antiplane strain, constructed on the basis of the solution of the problem for a multiply connected half-space by the method of Cauchy-type integrals, expansion of functions in Laurent series, and satisfaction of the boundary conditions by the generalized least squares method, the problem is reduced to solving an overdetermined system of linear algebraic equations by the singular value decomposition method. The results of numerical studies for a half-space with a circular cavity, including one intersecting the flat surface, and for a circular cavity with an edge plane crack emanating from it into the ligament, including a crack emerging onto the flat surface of the half-space, are described.

Keywords: *antiplane strain, complex potential, holes, cracks, generalized least squares method.*

References

1. Burov, A.K., & Andreevskaya, G.D. (1956). *Glass-fiber anisotropic materials and their technical application*. Moscow: Izd-vo AN SSSR. 71 p. (In Russian)
2. Noton, B. (1978). *Application of composite materials in engineering*. In: Broutman L. & Krock R. (eds.) *Composite materials*. Moscow: Mashinostroenie, Vol. 3., 260–307. (In Russian)
3. Ashkenazi, E.K., & Ganov, E.V. (1980). *Anisotropy of structural materials*. Leningrad: Mashinostroenie. 248 p. (In Russian)
4. Vasiliev, V.V., Protasov, V.D., & Bolotin, V.V. (1990). *Composite materials [Handbook]*. In: V.V. Vasil'ev & Yu.M. Tarnopolskii (eds.) Moscow: Mashinostroenie. – 512 p. (In Russian)
5. Kaloerov, S.A. (1985). Antiplane strain of multiconnected bodies with cracks. *Izv. AN ArmSSR. Mekhanika*. 38 (6), 11–20. (In Russian)
6. Kaloerov, S.A., Kosilova, E.F., Lapko, V.A. (1989). Antiplane strain of a body with a crack and an elliptical cavity. *Soviet Applied Mechanics*, 25(7), 711–717. (In Russian)
7. Goryanskaya, E.S., & Kaloerov, S.A. (1997). Antiplane strain of a multiconnected anisotropic body with longitudinal cavities and plane cracks. *J. Math. Sci.* 84 (6), 1505–1509. (In Russian)
8. Kaloerov, S.A., Gapotchenko, Y.I. (2025). Basic relations for the complex potential of antiplane strain of a body and their use in solving problems. *Zhurn. Teoret. i Prikladnoi Mekhaniki*, 2(91), 35–51. – DOI:10.24412/0136-4545-2025-2-35-51. (In Russian)
9. Kaloerov, S.A. & Goryanskaya, E.S. (1995). [Two-dimensional stress state of a multiply connected anisotropic body with cavities and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 25, 45–56. (In Russian)

10. Kaloerov, S.A. & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of a multiconnected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*. 48(3), 103–116. (In Russian)
11. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian).
12. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977). *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
13. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(4), 1322–1342. DOI: 10.1137/050639193.
14. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29 (4), 1343–1362. DOI: 10.1137/05063920X.
15. Kaloerov, S.A. (2007). Determining the intensity factors for stresses , electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media. *International Applied Mechanics*, 43(6), 631–637. (In Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 06.08.2026.

Доработана / Revision submitted 03.09.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-62-79

EDN:OVPIPO



©2026. С.А. Калоеров, О.Э. Ермаков, Л.П. Вовк

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПОЛУПЛОСКОСТИ

Приведено решение задачи о поперечном изгибе пьезоплиты в виде полуплоскости с включениями из других материалов. Для решения задачи использованы комплексные потенциалы теории изгиба тонких пьезоплит, разложения функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворение граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов, приводящим задачу к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым или линейным упругим включением, в том числе выходящими на прямолинейную границу. Исследованы закономерности изменения электромагнитоупругого состояния плиты в зависимости от геометрических характеристик включений, свойств их материалов. Изучено влияние на значения изгибающих моментов и закономерности их распределения жесткостей включений, их месторасположение, формы, пьезосвойства полуплоскости.

Ключевые слова: тонкая пьезоплита, полуплоскость, включения, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, изгибающие моменты, коэффициенты интенсивности моментов.

Введение. Тонкие пьезопластинки с упругими включениями из других материалов широко используются в качестве элементов конструкций [1–7]. Часто эти включения располагаются вблизи прямолинейных границ элементов, кото-

Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1339-6035.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Ермаков Олег Эдуардович – стажер-исследователь, асп. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: ermakov.donetsk@mail.ru, ORCID: 0009-0007-4854-4209.

Ermakov Oleg Eduardovich – intern researcher, Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Вовк Леонид Петрович – докт. техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5118-0206.

Vovk Leonid Petrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technology, Chair of Mathematical Modeling.

рые могут в этом случае рассматриваться как полуплоскости с включениями. Это нужно учитывать при проектировании указанных конструкций.

Известно, что наиболее достоверные результаты по определению электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) получаются при использовании комплексных потенциалов теории изгиба электромагнитоупругих плит [8, 9]. Использование этих функций особенно важно при решении задач в случае многосвязной полуплоскости, когда включения находятся вблизи прямолинейной границы. При этом известное использование в этом случае метода интегралов типа Коши, обеспечивая точное удовлетворение граничным условиям на прямолинейной границе, приводит к громоздким выражениям для комплексных потенциалов и усложняет вычислительный процесс по определению комплексных потенциалов.

В данной статье на основе выбора функций с частичным учетом результатов решения задачи методом интегралов типа Коши [10] и на основе удовлетворения граничным условиям по отрезку значительного влияния прямолинейной границы на напряженно-деформированное состояние многосвязной плиты с упругими включениями и по контурам включений обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Для полуплоскости с круговым или линейным упругим включением описаны результаты исследований.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим пьезоплиту, занимающую многосвязную нижнюю полуплоскость S с прямолинейной границей L^+ и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l (рис. 1). Эллипсы L_l могут переходить в прямолинейные разрезы (будем считать при $b_l = 0$), пересекать прямолинейную границу, пересекаться между собой, образуя контуры включений криволинейной конфигурации. В отверстия L_l вложены включения с областями $S^{(l)}$ из других материалов, находящиеся с полосой в условиях идеального электромагнитоупругого контакта. Будем считать, что прямолинейная граница не загружена, на бесконечности полуплоскость изгибается механическими моментами M_x^∞ и моментами индукций $M_{dx}^\infty, M_{bx}^\infty$; моменты $M_y^\infty, H_{xy}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{by}^\infty$ в силу незагруженности прямолинейной границы на бесконечности равны нулю.

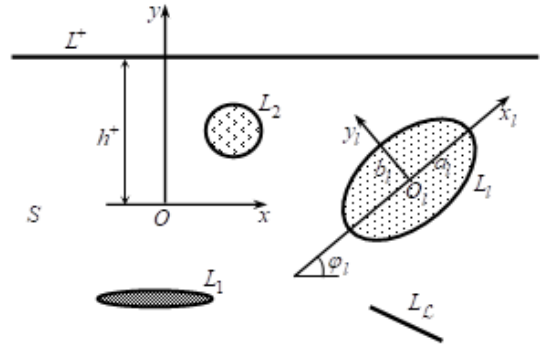


Рис. 1.

Отнесем плиту к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от границы L^+ и осью Ox , параллельной этой границе. Введем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l . Тогда уравнения

эллипсов L_l в локальных и основной системах координат будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l; \end{aligned} \quad (2)$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; φ_l – угол между положительными направлениями оси Ox и осей $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки.

Если задачу об определении ЭМУС рассматриваемой кусочно-однородной пьезополуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [8, 9], то это решение сводится к нахождению комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) для многосвязной полуплоскости с включениями и комплексных потенциалов $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ ($k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, \mathcal{L}}$) для включений из соответствующих граничных условий на прямолинейной границе полуплоскости и на контурах контактов полуплоскости и включений. При этом комплексные потенциалы $W'_k(z_k)$ являются функциями обобщенных комплексных переменных [8, 9]

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$ – полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}), \\ l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\ l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11}, \quad l_{2\nu}(\mu) = C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11}; \end{aligned}$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{pij} = c_{pij}D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$, $C_{\nu ij} = c_{\nu ij}D_0$, $C_{\chi ij} = c_{\chi ij}D_0$ – электромагнитные жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$; h – полутолщина плиты; b_{ij} , c_{gij} , c_{pij} , $c_{\beta ij}$, $c_{\nu ij}$, $c_{\chi ij}$ – элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях.

Аналогичным образом, комплексные потенциалы $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ ($k = \overline{1, 4}$) для каждого включения $S^{(l)}$ являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \quad (5)$$

где $\mu_k^{(l)}$ – корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения (4) заменой всех величин на аналогичные величины с индексом (l) сверху.

Функции $W_k'(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (3) и ограниченных прямолинейными границами L_k^+ и контурами L_{kl} , соответствующими при этих преобразованиях прямолинейной границе L^+ и контурам L_l . В общем случае они имеют вид [10]

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + W_{kl}'(z_k) + W_k^{'+}(z_k),$$

в котором Γ_k – известные постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \\ = (-M_x^\infty, 0, 0, -M_{dx}^\infty, 0, -M_{bx}^\infty, 0, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)\nu_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k)\rho_k, \\ q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)\nu_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k)\rho_k, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)\nu_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k)\rho_k, \\ d_{xk} &= C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (C_{\beta11} + C_{\beta12}\mu_k)\nu_k - (C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k)\rho_k, \\ d_{yk} &= C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (C_{\beta12} + C_{\beta22}\mu_k)\nu_k - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k)\rho_k, \\ b_{xk} &= C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (C_{\chi11} + C_{\chi12}\mu_k)\nu_k - (C_{\chi11} + C_{\chi12}\mu_k)\rho_k, \\ b_{yk} &= C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k)\nu_k - (C_{\chi12} + C_{\chi22}\mu_k)\rho_k; \end{aligned}$$

$W_{kl}'(z_k)$ – функции, голоморфные вне отверстий L_{kl} , $W_k^{'+}(z_k)$ – функции, голоморфные соответственно в нижних полуплоскостях с границами L_k^+ .

Используя конформные отображения [11]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\
 R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\
 m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} , функции $W'_{kl}(z_k)$ представим рядами Лорана

$$W'_{kl}(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}. \tag{9}$$

Функции $W_k^+(z_k)$, голоморфные в нижних полуплоскостях с границами L^+ , исходя из результатов решения задачи для полуплоскости методом интегралов типа Коши [10], выберем в виде

$$W_k^+(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{kln}}{(\zeta_{kl}^+)^n},$$

где ζ_{kl}^+ – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = -(\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k)h^+ + \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left(\zeta_{k+q-1l}^+ + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta_{k+q-1l}^+} \right) (q = \overline{1, 4}). \tag{10}$$

В связи с указанным, искомые комплексные потенциалы задачи имеют вид

$$W'_k(z_k) = a_{k00} + \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} + \frac{b_{kln}}{(\zeta_{kl}^+)^n} \right), \tag{11}$$

в котором a_{kln}, b_{kln} – неизвестные коэффициенты.

Функции $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ голоморфны в конечных областях $S_k^{(l)}$, получаемых из областей $S^{(l)}$ аффинными преобразованиями (5) и их можно представить рядами по полиномам Фабера для этих областей или, после перехода от полиномов Фабера к степенным рядам, рядами вида

$$W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n, \tag{12}$$

с неизвестными коэффициентами $a_{kn}^{(l)}$.

Коэффициенты $a_{kln}, b_{kln}, a_{kn}^{(l)}$ определим из граничных условий на прямолинейной границе и на контурах контактов плиты и включений.

На незагруженной и неподкрепленной прямолинейной границе L^+ комплексные потенциалы $W'_k(z_k)$ удовлетворяют условиям [9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik}^+ W'_k(z_k) = 0, \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (13)$$

в которых

$$g_{1k}^+ = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2k}^+ = q_k, \quad g_{3k}^+ = d_{yk}, \quad g_{4k}^+ = b_{yk}. \quad (14)$$

На контурах включений, где имеет место идеальный контакт плиты с включениями, граничные условия имеют вид [9, 12]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(g_{ikl} W'_k(z_k) - g_{ik}^{(l)} W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} g_{1kl} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2kl} = q_k, \quad g_{3kl} = 1, \quad g_{4kl} = \mu_k, \\ g_{5kl} &= d_{yk}, \quad g_{6kl} = b_{yk}, \quad g_{7kl} = \nu_k, \quad g_{8kl} = \rho_k, \\ g_{1k}^{(l)} &= \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, \quad g_{2k}^{(l)} = q_k^{(l)}, \quad g_{3k}^{(l)} = 1, \quad g_{4k}^{(l)} = \mu_k^{(l)}, \\ g_{5k}^{(l)} &= d_{yk}^{(l)}, \quad g_{6k}^{(l)} = b_{yk}^{(l)}, \quad g_{7k}^{(l)} = \nu_k^{(l)}, \quad g_{8k}^{(l)} = \rho_k^{(l)}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f_{1l} &= -c_l x + c_{1l}, \quad f_{2l} = c_l y + c_{2l}, \quad f_{3l} = f_{4l} = 0, \\ f_{jl} &= c_{jl}, \quad j = 5, 6, 7, 8; \end{aligned} \quad (17)$$

$p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk}, \nu_k, \rho_k$ – известные постоянные; c_l – вещественные постоянные, причем, все величины со значком (l) сверху относятся к включению $S^{(l)}$ и получаются по приведенным выше формулам для плиты заменой величин без значка на величины со значком (l) ; $\mu_k^{(l)}$ ($k = \overline{1, 4}$) – корни уравнения (4) для включения $S^{(l)}$.

Если некоторое включение $S^{(l)}$ выходит за прямолинейную границу, то на дуге выступа включения в граничных условиях останутся только функции $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ и они удовлетворяют условиям для случая незагруженного контура, т. е. условиям

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik}^{(l)} W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = 0, \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (18)$$

где

$$g_{1k}^{(l)} = \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, \quad g_{2k}^{(l)} = q_k^{(l)}, \quad g_{3k}^{(l)} = d_{yk}^{(l)}, \quad g_{4k}^{(l)} = b_{yk}^{(l)}.$$

Для многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, получаемые из условий (13), (15) (18) их дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik}^+ \delta_{k,s} W''_k(z_k) = 0 \quad (i = \overline{1,4}), \quad (19)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[g_{ikl} \delta_{k,s} W''_k(z_k) - g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} W''_k(z_k^{(l)}) \right] = \frac{df_{il}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1,8}); \quad (20)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik}^{(l)} W'_k(z_k^{(l)}) = 0, \quad (i = \overline{1,4}). \quad (21)$$

в которых

$$W''_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} + \varphi'^+_{kln}(z_k) b_{kln} \right], \quad (22)$$

$$W''_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'^{(l)}_{kn}(z_k^{(l)}) a_{kn}^{(l)};$$

$$\delta_{k,s} = \frac{dz_k}{ds}, \quad \delta_{k,s}^{(l)} = \frac{dz_k^{(l)}}{ds},$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})},$$

$$\varphi'^+_{kln}(z_k) = -\frac{n}{(\zeta_{kl}^+)^{n-1} R_{kl} ((\zeta_{kl}^+)^2 - m_{kl})},$$

$$\varphi'^{(l)}_{kn}(z_k^{(l)}) = n (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}).$$

Граничным условиям (19), (20) и (21) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [13, 14, 15]. Для этого выберем на отрезке прямойлинейной границы L^+ , где значительно влияние включений на напряженно-деформированное состояние полуплоскости, и на контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) включений систему точек $M_m(x_m, y_m)$ ($m = \overline{1, \overline{M}}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (22) в граничные условия (19), (20) и (21) в точках M_m , для определения неизвестных постоянных a_{kln} , b_{kln} получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} + \varphi'^+_{kln}(t_{kpm}) b_{kln} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1,4}; \quad m = \overline{1, \overline{M}}; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}}); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln} (t_{kpm}) a_{kln} + \varphi'^+_{kln} (t_{kpm}) b_{kln} \right] - \\
 & - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} \varphi'^{(l)}_{kn} \left(t_{km}^{(p)} \right) a_{kn}^{(l)} = \\
 & = \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 8}; \quad m = \overline{1, M}; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}});
 \end{aligned} \tag{24}$$

К этой системе при выходе включения за прямолинейную границу добавляются уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} \varphi'^{(l)}_{kn} \left(t_{km}^{(p)} \right) a_{kn}^{(l)} = 0 \quad (i = \overline{1, 4}; \quad m = \overline{1, M}; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}}). \tag{25}$$

Кроме уравнений (23), (24) и (25), для каждого включения должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \tag{26}$$

следующие из однозначности прогиба при полном обходе каждого из контуров L_p .

При проведении численных исследований системы (23), (24) и (25), дополненные уравнением (26), решались с использованием сингулярных разложений [16, 17]. После нахождения псевдорешений этих систем коэффициенты рядов a_{kln} , b_{kln} , а, следовательно, и функции $W'_k(z_k)$, $W'^{(l)}_k(z_k^{(l)})$ становятся известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках) в полуплоскости и включениях. В частности, для механических моментов и моментов индукций (векторов индукций) в полуплоскости имеют место формулы

$$\begin{aligned}
 (M_x, M_y, H_{xy}) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k), \\
 (M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) W''_k(z_k),
 \end{aligned} \tag{27}$$

а по ним находятся моменты на произвольных площадках с нормалью n и ка-

сательной s

$$\begin{aligned}
 M_n &= M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny, \\
 M_s &= M_x \cos^2 ny + M_y \cos^2 nx - 2H_{xy} \cos nx \cos ny, \\
 H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos nx \cos ny + H_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny). \\
 M_{dn} &= M_{dx} \cos^2 nx + M_{dy} \cos^2 ny, \\
 M_{bn} &= M_{bx} \cos^2 nx + M_{by} \cos^2 ny.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Аналогичные формулы имеют место для нахождения моментов во включениях.

При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в частности, на основе известных формул [18]

$$\begin{aligned}
 k_{1M}^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_k, \\
 k_{2M}^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_k,
 \end{aligned} \tag{29}$$

в которых

$$M_k = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}.$$

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются из приведенного решения, если в нем принять равными нулю соответственно пьезомагнитные модули деформации и напряженностей p_{ij} , коэффициенты магнитной и электромагнитной восприимчивостей ν_{ij} (в задаче ЭУ), пьезоэлектрические модули деформации и напряженностей g_{ij} коэффициенты электромагнитной восприимчивостей ν_{ij} (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными [19] $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$, $p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}$, $\nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij}$, где λ_g , λ_p , λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ТУ.

Описание результатов численных исследований. Численные исследования проводились для плиты-матрицы из композитного материала, упругие, электрические и пьезоэлектрические свойства которого соответствуют селениду кадмия CdSe, а пьезомагнитные и магнитные – BaTiO₃, принятого в других наших работах как материал М2 [10, 20]. При проведении расчетов упругие свойства материалов включения связывалось со свойствами материала бесконечной

плиты соотношениями $s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}$, где $\lambda_s^{(l)}$ – параметры, связывающие соответствующие постоянные материалов бесконечной плиты с областью S и включений с областями $S^{(l)}$. Ввиду того, что на значения моментов в бесконечной плите пьезосвойства включений влияют незначительно, при проведении расчетов эти свойства включений не учитывались, т.е. считалось, что $\lambda_g^{(l)} = \lambda_p^{(l)} = \lambda_{gp}^{(l)} = 0$. При решении систем уравнений (23)–(26) число членов в бесконечных рядах и количество точек M_m для включений и прямолинейной границы выбирались в количестве, достаточном для удовлетворения граничных условий в месте идеального контакта плиты и включения и на прямолинейной границе с высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}).

В табл. 1 для электромагнитоупругой полуплоскости с упругим круговым включением радиуса a_1 (рис. 2) и некоторых значений отношения c_1/a_1 , где c_1 – расстояние между контуром включения и границей полуплоскости, и параметров жесткости $\lambda_s^{(1)}$ включения, с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов M_θ около контура включения в зависимости от центрального угла θ , отчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, а в табл. 2 даны значения моментов M_x в некоторых характерных точках полуплоскости, в качестве которых принимались точки $D(0, a_1 + c_1/2)$, $E(0, a_1 + c_1)$, $L(a_1, a_1 + c_1)$, $M(2a_1, a_1 + c_1)$. При этом отрицательные значения c_1/a_1 соответствуют случаям, когда включение выходит за прямолинейную границу. На рис. 3 изображены графики распределения моментов M_θ в плите-матрице около контура кругового включения для некоторых значений c_1/a_1 при $\lambda_s^{(1)} = \infty$ (сплошные линии), $\lambda_s^{(1)} = 2$ (пунктирные линии), $\lambda_s^{(1)} = 0,5$ (штрихпунктирные линии) и $\lambda_s^{(1)} = 0$ (штриховые линии); на рис. 4 даны графики распределения M_x около прямолинейной границы сплошными ($\lambda_s^{(1)} = \infty$) и штриховыми ($\lambda_s^{(1)} = 0$) линиями. В табл. 3 приведены данные, аналогичные данным табл. 1 для задачи ТУ.

Из данных табл. 1–3, рис. 3, 4 следует, что взаимовлияние прямолинейной границы и включений (в случае $\lambda_s^{(l)} = \infty$ – отверстий) на напряженное состояние полуплоскости с включениями значительно, начиная с расстояний между ними, равных диаметрам включений. При этом, с приближением включения к прямолинейной границе значения моментов в точках перемены в случаях мягкого включения резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах полуплоскости, в случаях достаточно жестких включений эти значения изменяются

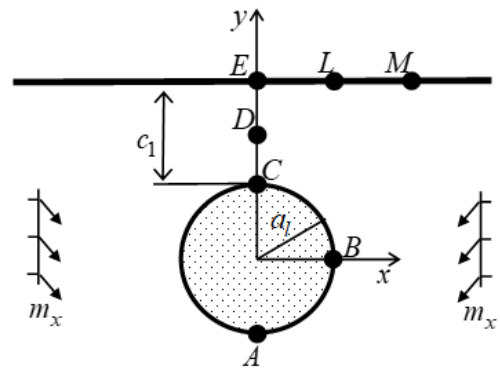


Рис. 2.

Таблица 1. Значения моментов M_θ около контура кругового включения в пьезополуплоскости для некоторых значений c_1/a_1 и $\lambda_s^{(1)}$

$\frac{c_1}{a_1}$	$\lambda_s^{(1)}$	θ											
		$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
∞	∞	1,811	1,468	1,049	0,610	0,238	0,000	0,238	0,610	1,049	1,468	1,728	1,811
	100,000	1,791	1,458	1,050	0,619	0,255	0,021	0,255	0,619	1,050	1,458	1,711	1,791
	2,000	1,256	1,169	1,037	0,875	0,731	0,647	0,731	0,875	1,037	1,169	1,237	1,256
	0,500	0,691	0,771	0,929	1,153	1,360	1,472	1,360	1,153	0,929	0,771	0,705	0,691
	0,100	-0,115	0,111	0,677	1,558	2,387	2,818	2,387	1,558	0,677	0,111	-0,084	-0,115
	0,000	-0,765	-0,444	0,450	1,886	3,246	3,943	3,246	1,886	0,450	-0,444	-0,728	-0,765
2, 0	∞	1,853	1,506	1,080	0,631	0,249	0,000	0,242	0,630	1,091	1,528	1,796	1,884
	2,000	1,266	1,178	1,046	0,882	0,737	0,653	0,737	0,884	1,051	1,185	1,256	1,275
	0,500	0,684	0,765	0,923	1,144	1,345	1,449	1,337	1,132	0,912	0,757	0,691	0,679
	0,100	-0,091	0,142	0,693	1,524	2,273	2,618	2,179	1,406	0,622	0,126	-0,046	-0,051
	0,000	-0,661	-0,326	0,531	1,846	3,008	3,481	2,742	1,527	0,404	-0,269	-0,620	-0,487
1, 0	∞	1,887	1,538	1,107	0,651	0,263	0,000	0,230	0,629	1,124	1,609	1,921	2,024
	2,000	1,277	1,188	1,054	0,888	0,743	0,658	0,741	0,892	1,067	1,213	1,290	1,312
	0,500	0,677	0,760	0,919	1,139	1,333	1,429	1,314	1,107	0,886	0,733	0,670	0,655
	0,100	-0,076	0,166	0,716	1,521	2,212	2,475	1,992	1,217	0,493	0,107	0,011	0,004
	0,000	-0,596	-0,247	0,596	1,842	2,879	3,195	2,369	1,168	0,146	-0,301	-0,336	-0,293
0, 1	∞	2,054	1,704	1,258	0,771	0,351	0,000	0,073	0,362	0,849	1,699	3,186	4,354
	10,000	1,823	1,547	1,188	0,788	0,446	0,191	0,295	0,581	1,030	1,680	2,537	3,092
	2,000	1,313	1,218	1,077	0,904	0,756	0,666	0,733	0,882	1,087	1,312	1,514	1,611
	0,500	0,660	0,750	0,914	1,135	1,320	1,396	1,267	1,039	0,798	0,639	0,570	0,554
	0,100	-0,056	0,208	0,769	1,556	2,171	2,283	1,642	0,760	0,127	0,035	0,106	0,120
	0,000	-0,523	-0,137	0,720	1,922	2,815	2,846	1,716	0,368	-0,341	-0,158	-0,004	0,001
-0, 1	∞	2,013	1,618	1,126	0,623	0,273	0,000	-0,211	-0,283	-0,063	0,083	—	—
	2,000	1,412	1,296	1,120	0,904	0,727	0,559	0,392	0,298	0,285	0,040	—	—
	0,500	0,699	0,781	0,931	1,128	1,288	1,332	1,140	0,837	0,512	0,039	—	—
	0,100	-0,040	0,230	0,793	1,568	2,155	2,214	1,471	0,480	-0,075	0,012	—	—
	0,000	-0,492	-0,096	0,764	1,949	2,790	2,717	1,426	-0,045	-0,448	0,002	—	—
-0, 5	∞	1,891	1,528	1,086	0,632	0,285	0,000	-0,073	0,000	—	—	—	—
	2,000	1,338	1,249	1,098	0,904	0,742	0,564	0,332	0,000	—	—	—	—
	0,5	0,704	0,802	0,964	1,170	1,342	1,385	1,054	0,000	—	—	—	—
	0,1	-0,039	0,249	0,832	1,614	2,158	2,022	0,805	0,000	—	—	—	—
-1, 0	∞	1,769	1,477	1,157	0,818	0,164	0,000	—	—	—	—	—	—
	2,000	1,337	1,345	1,319	1,230	0,168	0,000	—	—	—	—	—	—
	0,500	0,991	1,172	1,501	1,888	0,052	0,000	—	—	—	—	—	—
	0,100	0,336	0,812	1,808	2,998	-0,437	0,000	—	—	—	—	—	—
	0,000	-0,134	0,608	2,136	3,641	-0,651	0,000	—	—	—	—	—	—

Таблица 2. Значения моментов M_x в некоторых точках пьезополуплоскости для некоторых значений c_1/a_1 и $\lambda_s^{(1)}$

$\lambda_s^{(1)}$	Точки	c_1/a_1					
		2	1	0,1	-0,1	-0,5	-1
∞	C	1,884	2,024	4,354	—	—	—
	D	1,332	1,657	4,265	—	—	—
	E	1,322	1,622	4,244	—	—	—
	L	1,139	1,162	0,684	0,374	-0,007	—
	M	1,005	0,949	0,711	0,700	0,708	0,851
2, 0	C	1,275	1,312	1,611	—	—	—
	D	1,117	1,221	1,616	—	—	—
	E	1,108	1,210	1,625	—	—	—
	L	1,053	1,062	0,974	0,544	0,216	—
	M	1,002	0,981	0,919	0,827	0,839	0,906
0, 5	C	0,679	0,655	0,554	—	—	—
	D	0,847	0,734	0,550	—	—	—
	E	0,863	0,746	0,545	—	—	—
	L	0,928	0,917	0,966	0,923	0,546	—
	M	0,995	1,024	1,082	1,073	1,068	1,0077
0, 1	C	-0,051	0,004	0,120	—	—	—
	D	0,456	0,169	0,117	—	—	—
	E	0,513	0,200	0,114	—	—	—
	L	0,738	0,703	0,708	0,689	0,383	—
	M	0,974	1,075	1,216	1,239	1,260	0,988
0, 0	C	-0,487	-0,293	0,001	—	—	—
	D	0,177	-0,137	0,000	—	—	—
	E	0,290	-0,106	0,000	—	—	—
	L	0,586	0,556	0,466	0,397	0,150	—
	M	0,960	1,097	1,272	1,302	1,332	1,041

незначительно всюду. При мягком включении большая концентрация моментов наблюдается и в точках прямолинейной границы вблизи переменычки, причем большие изменения моментов происходят в пределах двух радиусов включения, причем для материала включения, у которого $\lambda_s^{(1)} > 1$, при удалении от точек переменычки значения моментов резко уменьшаются, а затем растут до значения моментов, заданных на бесконечности, а для включения $\lambda_s^{(1)} < 1$ — сначала моменты резко растут, затем снижаются до заданных значений на бесконечности. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зонах высокой концентрации изгибающих моментов, поэтому при исследованиях нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости об изгибе плиты, а нужно решать задачу электромагнитоупругости.

В табл. 4 для электромагнитоупругой полуплоскости с упругим линейным

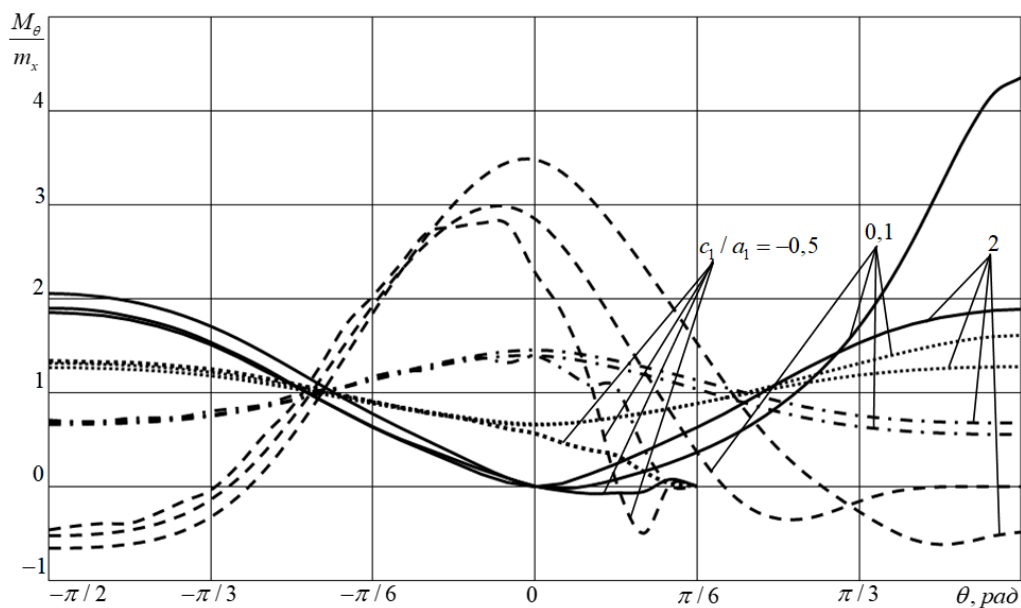


Рис. 3. Графики распределения M_x моментов около контура включения линиями сплошными ($\lambda_s^{(1)} = \infty$), пунктирными ($\lambda_s^{(1)} = 2$), штриховыми ($\lambda_s^{(1)} = 0,5$), штрих-пунктирными ($\lambda_s^{(1)} = 0$).

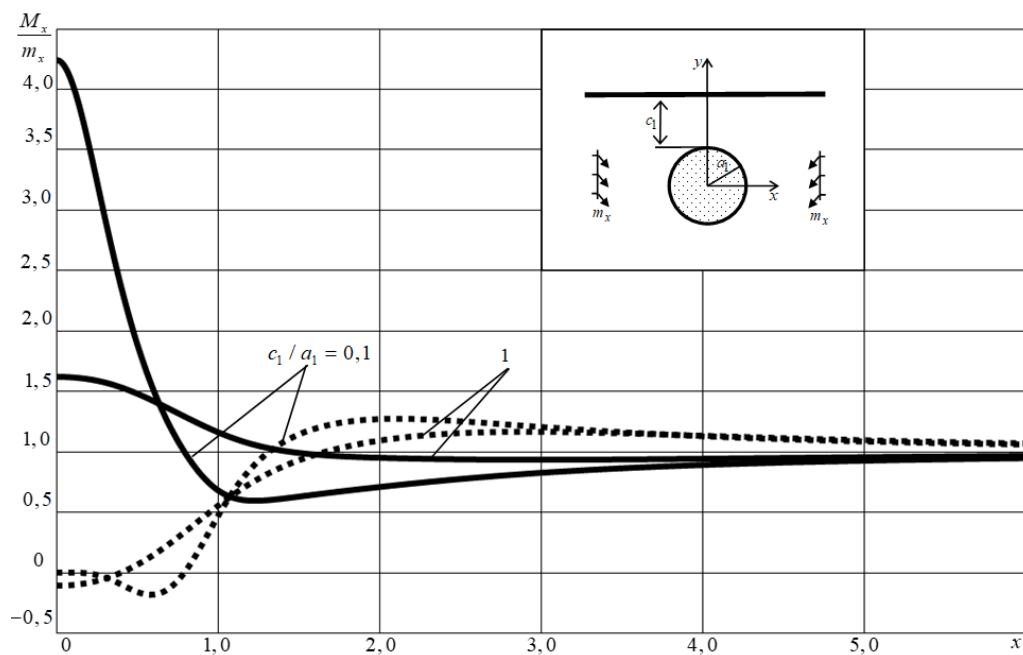


Рис. 4. Графики распределения M_x около прямолинейной границы линиями сплошными ($\lambda_s^{(1)} = \infty$) и штриховыми ($\lambda_s^{(1)} = 0$).

Таблица 3. Значения моментов M_θ около контура кругового включения в задаче ТУ

$\frac{c_1}{a_1}$	$\lambda_s^{(1)}$	θ													
		$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	
∞	∞	1,713	1,658	1,477	1,140	0,667	0,202	0,000	0,202	0,667	1,140	1,477	1,658	1,713	
	2,0	1,240	1,225	1,171	1,060	0,890	0,715	0,638	0,715	0,890	1,060	1,171	1,225	1,240	
	0,5	0,699	0,713	0,772	0,910	1,136	1,377	1,486	1,377	1,136	0,910	0,772	0,713	0,699	
	0,0	-0,785	-0,729	-0,434	0,372	1,791	3,356	4,070	3,356	1,791	0,372	-0,434	-0,729	-0,785	
0, 1	∞	1,939	1,888	1,717	1,384	0,889	0,347	0,000	0,021	0,350	0,867	1,675	3,074	4,180	
	2,0	1,296	1,280	1,225	1,110	0,933	0,748	0,655	0,720	0,898	1,105	1,308	1,499	1,593	
	0,5	0,669	0,684	0,744	0,882	1,103	1,330	1,414	1,279	1,018	0,782	0,639	0,575	0,559	
	0,0	-0,550	-0,482	-0,172	0,592	1,810	2,916	2,983	1,760	0,246	-0,412	-0,185	-0,004	-0,002	
1, 0	∞	2,026	1,978	1,813	1,489	0,993	0,425	0,000	-0,134	-0,072	-0,008	0,003	—	—	
	2,0	1,454	1,439	1,383	1,257	1,042	0,768	0,536	0,431	0,438	0,456	0,006	—	—	
	0,5	0,715	0,729	0,787	0,916	1,115	1,307	1,351	1,179	0,884	0,586	0,009	—	—	
	0,0	-0,533	-0,456	-0,133	0,632	1,830	2,911	2,864	1,499	-0,096	-0,371	0,001	—	—	
-1, 0	∞	1,714	1,659	1,479	1,143	0,670	0,205	0,002	—	—	—	—	—	—	
	2,0	1,491	1,505	1,531	1,518	1,341	-0,711	0,000	—	—	—	—	—	—	
	0,5	1,107	1,154	1,329	1,711	2,005	-0,833	0,000	—	—	—	—	—	—	
	0,0	-0,217	0,098	1,199	3,611	2,089	-0,942	0,000	—	—	—	—	—	—	

включением длины $2a_1$ (рис. 5) и некоторых значений отношения c_1/a_1 , где c_1 – расстояние между верхним концом включения и границей полуплоскости, и параметров жесткости $\lambda_s^{(1)}$ включения, с точностью до множителя m_x приведены значения КИМ для концов включения и изгибающих моментов M_x в некоторых характерных точках полуплоскости, в качестве которых принимались точки $A(0, -a_1)$, $C(0, a_1)$, $D(0, a_1 + c_1/2)$, $E(0, a_1 + c_1)$, $L(a_1, a_1 + c_1)$, $M(2a_1, a_1 + c_1)$. При этом отрицательные значения c_1/a_1 соответствуют случаям, когда включение выходит за прямолинейную границу.

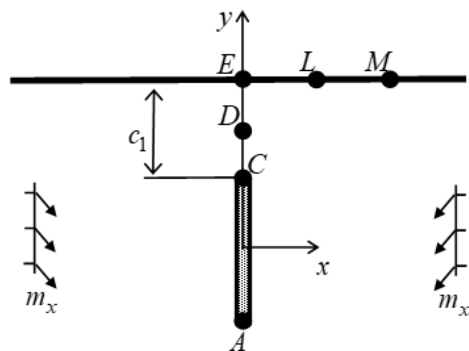


Рис. 5

Как видно из табл. 4, закономерности изменения значений КИМ и изгибающих моментов в этом случае такие же, как в случае полуплоскости с круговым включением, а именно: при приближении линейного включения из мягкого материала к прямолинейной границе значения КИМ и изгибающих моментов резко растут в точках переменычки, для более жесткого включения – изменения значений КИМ и напряжений менее значительны; на прямолинейной границе наибольшие изменения моментов происходят на отрезке до двух радиусов от точки переменычки, причем самые сильные изменения значений происходят вблизи точки переменычки. Как и в предыдущем случае, на значения указанных величин значительно влияет учет пьезосвойства материала.

Таблица 4.

Значения величин в точках пьезополуплоскости с линейным включением для некоторых значений c_1/a_1 и $\lambda_s^{(1)}$

$\lambda_s^{(1)}$	Точки	Величина	c_1/a_1				
			2	1	0,1	-0,1	-0,5
∞	A	k_1^-	0,984	1,013	1,093	1,191	1,115
	C	k_1^+	0,978	1,026	1,421	—	—
	D	M_x	1,149	1,425	5,345	—	—
	E	M_x	1,240	1,491	5,082	—	—
	L	M_x	0,960	1,078	0,870	0,681	0,771
	M	M_x	0,944	0,987	0,898	0,874	0,893
2,0	A	k_1^-	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	C	k_1^+	0,001	0,001	0,001	—	—
	D	M_x	1,000	1,001	1,004	—	—
	E	M_x	1,000	1,001	1,004	—	—
	L	M_x	1,000	1,000	1,000	0,975	0,920
	M	M_x	1,000	1,000	1,000	0,988	0,976
0,5	A	k_1^-	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001
	C	k_1^+	-0,001	-0,001	-0,001	—	—
	D	M_x	1,000	1,000	0,997	—	—
	E	M_x	1,000	1,000	0,997	—	—
	L	M_x	1,000	1,000	1,000	0,978	0,922
	M	M_x	1,000	1,000	1,000	0,990	0,977
0,1	A	k_1^-	-0,003	-0,003	-0,003	-0,004	-0,004
	C	k_1^+	-0,003	-0,003	-0,003	—	—
	D	M_x	0,999	0,998	0,988	—	—
	E	M_x	0,999	0,998	0,989	—	—
	L	M_x	1,000	1,000	1,001	0,980	0,924
	M	M_x	1,000	1,000	1,000	0,991	0,979
0,0	A	k_1^-	-0,478	-0,470	-0,424	-0,420	-0,405
	C	k_1^+	-0,449	-0,418	-0,180	—	—
	D	M_x	0,916	0,811	0,017	—	—
	E	M_x	0,922	0,814	0,016	—	—
	L	M_x	0,962	0,986	1,060	1,054	1,0081
	M	M_x	1,003	1,025	1,039	1,033	1,014

Выводы. Таким образом, в статье дано решение задачи электромагнитоупругости для полуплоскости с включениями из других материалов. Решение дано с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости и приведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Для полуплоскости с круговым

или линейным включением описаны результаты исследований, с помощью которых установлены закономерности изменения электромагнитоупругого состояния плиты в зависимости от физико-механических свойств материалов плиты и включений, их геометрических характеристик включений.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

Список литературы

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 720 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естественных наук», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Nan C.W. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions / C.W. Nan, M.I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan // J. Appl. Phys. – 2008. – V. 103, N 3. – P. 031101.
6. Tian R. Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers / R. Tian, J. Liu, X. Liu // Acta Mechanica Sinica. – 2020. – V. 33. – P. 368–380.
7. Srinivas S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – V. 53. – P. 4135–4142.
8. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 37–57.
9. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
10. Калоеров С.А. Решение задачи о поперечном изгибе электромагнитоупругой полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестн. ПНИПУ. Механика. – 2025. – № 1. – С. 20–33.
11. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
12. Калоеров С.А. Решение задачи об изгибе многосвязной кусочно-однородной электромагнитоупругой тонкой плиты / С.А. Калоеров, О.Э. Ермаков // Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2025. – Т. 25, № 4. – С. 513–523.
13. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
14. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин – М.: Наука, 1977. – 304 с.
15. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
16. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
17. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.

18. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
19. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3–4. – С. 58–79.
20. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

S.A. Kaloerov, O.E. Ermakov, L.P. Vovk

Solving the problem of bending a piecewise homogeneous multiconnected piezoelectric half-plane.

A solution to the problem of transverse bending of a piezo plate in the form of a half-plane with inclusions of other materials is given. To solve the problem, we used complex potentials of the theory of bending thin piezo plates, decomposition of functions into Laurent series and Faber polynomials, and satisfaction of boundary conditions by the generalized least squares method, which leads the problem to an overridden system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The results of numerical studies for a half-plane with circular or linear elastic inclusion, including those facing a rectilinear boundary, are described. The patterns of changes in the electromagnetically elastic state of the plate are investigated depending on the geometric characteristics of the inclusions and the properties of their materials. The influence of inclusions on the values of bending moments and the patterns of their distribution of stiffness, their location, shapes, and piezoelectric properties of the half-plane is studied.

Keywords: *thin piezo plate, half-plane, inclusions, complex potentials, generalized least squares method, bending moments, moment intensity coefficients.*

References

1. Cady, W. (1949). *Piezoelectricity and its practical applications*. Moscow: Foreign Literature Publishing House. 720 p. (In Russian).
2. Berlincourt D.A., Curran D.R. & Jaffe H. (1964). Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers. In: Mason W.P. (ed.) *Physical Acoustics*. New York: Academic Press, 1A, 169–270.
3. Bichurin, M.I., Petrov, V.M., Filippov, D.A., et al. (2006). *Magnetoelectric materials*. Moscow: Academy of Natural Sciences. 296 p. (In Russian)
4. Pyatakov, A.P. (2006). [Magnetoelectric materials and their practical applications]. *Bulletin Ros. Magnit. Obshchestva*. 5(2), 1–3. (In Russian)
5. Nan, C.W., Bichurin, M.I., Dong, S., Viehland, D., & Srinivasan, G. (2008). Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions. *Journal of Applied Physics*. 103(3), 031101.
6. Tian, R., Liu, J., & Liu, X. (2020). Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 33(3), 368–380.
7. Srinivas, S., & Jiang, Y.L. (2005). The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites. *Acta Materialia*. 53, 4135–4142.
8. Kaloerov, S.A. (2019). Complex potentials of the theory of bending of thin electromagnetoelastic plates. *Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences*. (3-4), 37–57. (In Russian)
9. Kaloerov, S.A. (2022). The main relations for the applied theory of thin electromagnetoelastic plates bending. *Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences*. (1), 20–38. (In Russian)
10. Kaloerov, S.A., & Seroshtanov, A.V. (2025). Solving of the problem of transverse bending of

- an electro-magneto-elastic half-plane with holes and cracks. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 1, 20–33. (In Russian)
11. Kaloerov, S.A. & Goryanskaya, E.S. (1995). [Two-dimensional stress state of a multiply connected anisotropic body with cavities and cracks]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 25, 45–56. (In Russian)
 12. Kaloerov S.A. & Ermakov O.E. (2025). Solving of the problem on bending of a multiconnected piecewise homogeneous electromagnetoelastic thin plate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 25(4), 513–523. (In Russian)
 13. Kaloerov, S.A. & Parshikova, O.A. (2012). Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plate. *International Applied Mechanics*. 48(3), 319–331. (In Russian).
 14. Voevodin, V.V. (1977). *Computational foundations of linear algebra*. Moscow: Nauka. 304 p. (In Russian)
 15. Forsythe G.E., Malcolm M.A. & Moler C.B. (1977). *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 259 p.
 16. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29(4), 1322–1342. DOI: 10.1137/050639193.
 17. Drmac, Z. & Veselic, K. (2008). New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 29 (4), 1343–1362. DOI: 10.1137/05063920X
 18. Kaloerov, S.A. (2007). Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media. *International Applied Mechanics*. 43(6), 631–637. (In Russian)
 19. Kaloerov, S.A. (2019). Problems of electroelastic, magnetoelastic, and elastic bending of thin plates as special cases of the electromagnetoelastic bending problem. *Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences*. (3–4), 58–79. (In Russian)
 20. Hou, P.F., Teng, G.-H. & Chen, H.-R. (2009). Three-dimensional Green's function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material. *Mechanics of Materials*. 41, 329–338.

Поступила в редакцию / Original submitted 17.07.2026.

Доработана / Revision submitted 22.08.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-80-89

EDN:OZIZPC



©2026. К.Ш. Мкртчян

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ БАЛКИ ТИМОШЕНКО ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗОК

Дано решение задачи о вынужденных поперечных колебаниях упругой шарнирно-опёртой балки Тимошенко с учётом вращательного движения, вызванного периодически колеблющейся сосредоточенной нагрузкой, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью. Решение задачи строится в виде ряда по собственным формам колебаний. Получены два типа вынужденных поперечных колебаний, выявлены новые резонансные частоты. Показано, что для балки Тимошенко существует новое, ранее неизученное, резонансное состояние. Установлено, что новые резонансные частоты уменьшаются с увеличением длины балки.

Ключевые слова: балка, движущаяся нагрузка, сечение, вынужденные колебания, собственные частоты, собственные формы.

Введение. Вынужденные поперечные колебания упругой шарнирно-опёртой балки Тимошенко, вызванные периодически колеблющейся сосредоточенной нагрузкой, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью, представляют значительный интерес в мостостроении.

Эти колебания в работе [1] достаточно хорошо изучены без учёта вращательного движения. В статье [2] предложена концепция и получены основные уравнения, описывающие изгибные колебания консольного упругого стержня с учётом вращательного движения, исследованы вынужденные колебания упругого стержня, у которого на одном конце задано перемещение, другой конец свободен. В работе [3] исследованы вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно-опёртого стержня Тимошенко с учётом вращательного движения под действием нормальной сосредоточенной силы, периодически изменяющейся во времени.

В данной работе решена более общая задача описания мостовых конструкций с учётом вращательного движения. Задача, как и в работе [3], решается путём разбиения её на две подзадачи, в каждой из которых рассматриваются вынужденные поперечные колебания упругой шарнирно-опёртой балки, обусловленные различными составляющими комбинированного воздействия, включающе-

Мкртчян Каруш Ширакович – докт. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Г. Назарова НАН РА, Гюмри, Армения, e-mail: karush.mkrtyan.57@mail.ru, ORCID: 0009-0000-5402-5287.

Mkrtyan Karush Shirakovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Geophysics and Engineering Seismology named af. A.G. Nazarova ter NAN RA, Gyumri, Armenia.

го динамическое воздействие на балку и вращательное движение относительно фронта изгибной волны.

Постановка и решение подзадачи 1. Рассмотрим упругую однородную шарнирно-опёртую балку Тимошенко длиной l . Пусть в момент времени $t = 0_+$ на балку действует периодически изменяющаяся сосредоточенная нагрузка, перемещающаяся вдоль балки с постоянной скоростью ν . Будем считать, что в начальный момент времени балка находилась в состоянии покоя, а движущаяся нагрузка

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{p \cos(\omega t)}{2\varepsilon}, & \nu t - \varepsilon < x < \nu t + \varepsilon; \\ 0, & \text{при остальных значениях } x, \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{cases}$$

располагалась на её левом конце. Ось координат Ox направлена вдоль продольной оси балки и проходит через центры тяжести её поперечных сечений; начало координат расположено на левом конце балки; оси Oy и Oz направлены вдоль главных осей поперечного сечения. Колебания балки происходят в вертикальной плоскости Oxz , геометрическая схема которой представлена на рис. 1.

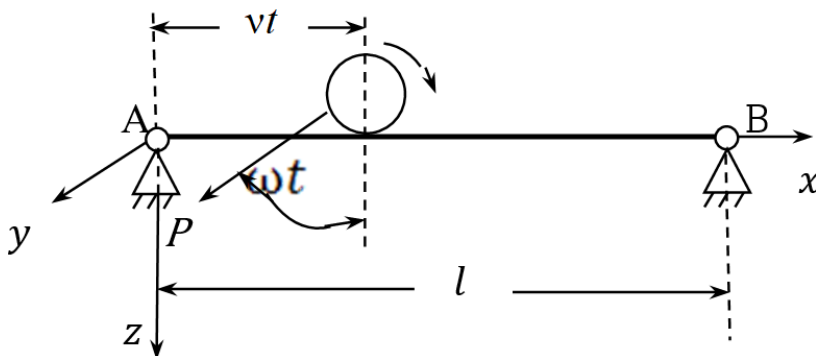


Рис. 1.

Для данного случая вынужденные поперечные колебания балки Тимошенко описываются следующими уравнениями с граничными и начальными условиями [1]:

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + kGF \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) &= \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ kGF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + P(x, t) &= \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$x = 0, l: \quad w = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$t = 0: \quad w = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

в которых t – время, F – площадь поперечного сечения, J – момент инерции поперечного сечения, $\delta()$ – дельта-функция Дирака, P – центробежная сила, ρ – плотность материала, E , G – модули Юнга и сдвига, соответственно, k – безразмерный числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки, w – перемещение центра изгиба сечения в направлении оси z (прогиб), ψ – угол поворота сечения вокруг центра изгиба, ω – угловая скорость.

Граничные условия (2) будут удовлетворены, если решение системы (1) представить в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \mu_n x, \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \cos \mu_n x. \quad (4)$$

Подставляя эти функции в систему (1), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций:

$$\begin{aligned} \rho J \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} + (EJ \mu_n^2 + kGF) \psi_n - kGF \mu_n w_n &= 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} + kGF \mu_n^2 w_n - kGF \mu_n \psi_n &= l^{-1} [\sin(\mu_n \nu + \omega) t]. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение системы (5) при начальных условиях (3) имеет вид

$$\begin{aligned} w_n(t) &= A_n \sin \omega_{n1} t + B_n \sin \omega_{n2} t + \\ &+ P l^{-1} [\Gamma_n^+ H_n^+ \sin(\mu_n \nu + \omega) t + \Gamma_n^- H_n^- (\mu_n \nu - \omega) t], \\ \psi_n(t) &= \left(\mu_n - \frac{\rho \omega_{n1}^2}{kG \mu_n} \right) A_n \sin \omega_{n1} t + \left(\mu_n - \frac{\rho \omega_{n2}^2}{kG \mu_n} \right) B_n \sin \omega_{n2} t + \\ &+ P l^{-1} \mu_n [H_n^+ \sin(\mu_n \nu + \omega) t + H_n^- \sin(\mu_n \nu - \omega) t], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{P}{\rho l \omega_{n1} (\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)} \{ [kG \mu_n^2 - (kG \mu_n^2 - \rho \omega_{n2}^2) \Gamma_n^+] (\mu_n \nu + \\ &+ \omega) H_n^+ + [kG \mu_n^2 - (kG \mu_n^2 - \rho \omega_{n1}^2) \Gamma_n^-] (\mu_n \nu - \omega) H_n^- \}, \\ B_n &= -\frac{P}{\rho l \omega_{n2} (\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)} \{ [kG \mu_n^2 - (kG \mu_n^2 - \rho \omega_{n1}^2) \Gamma_n^+] (\mu_n \nu + \\ &+ \omega) H_n^+ + [kG \mu_n^2 - (kG \mu_n^2 - \rho \omega_{n1}^2) \Gamma_n^-] (\mu_n \nu - \omega) H_n^- \}, \\ H_n^{\pm} &= \{ EJ \mu_n^4 - \left[\rho F + \left(\rho J + \frac{\rho EJ}{kG} \right) \mu_n^2 \right] (\mu_n \nu \pm \omega)^2 + \frac{\rho^2 J}{kG} (\mu_n \nu \pm \omega)^4 \}^{-1}, \\ (H_n^{\pm})^{-1} &\neq 0, \quad \Gamma_n^{\pm} = 1 + \frac{EJ \mu_n^2}{kGF} - \frac{\rho J (\mu_n \nu \pm \omega)^2}{kGF}, \end{aligned}$$

ω_{n1}, ω_{n2} – частоты собственных колебаний, задаваемые выражением

$$\omega_{ni} = (2\gamma)^{\frac{-1}{2}} \left(\lambda_n + (-1)^i (\lambda_n^2 - 4\gamma k_n^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{J}{F} + \frac{EJ}{kGF} \right) \mu_n^2, \quad k_n = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \mu_n^2, \quad \gamma = \frac{\rho J}{kGF}.$$

Здесь и далее $i = 1, 2$.

Подставляя функции $w_n(t)$, $\psi_n(t)$ в соответствующие формулы (4), получаем, что вынужденные поперечные колебания рассматриваемой балки определяются по закону

$$w = \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma_n^+ H_n^+ \sin(\mu_n \nu + \omega) t + \Gamma_n^- H_n^- \sin(\mu_n \nu - \omega) t] \sin \mu_n x,$$

$$\psi = \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n [H_n^+ \sin(\mu_n \nu + \omega) t + H_n^- \sin(\mu_n \nu - \omega) t] \mu_n x. \quad (8)$$

Если знаменатель n -го члена рядов (9) обращается в нуль, частота возмущающей силы приближается к одному из значений

$$\omega_{ni}^{\kappa} = \pm \mu_n \nu \pm \omega_{ni} \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4), \quad (9)$$

которые определяются из условий $(H_n^{\pm})^{-1} = 0$. В этом случае возникает резонанс, так как амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает.

Постановка и решение задачи 2. Рассмотрим вращательное движение невозмущенной части балки Тимошенко (рис.2).

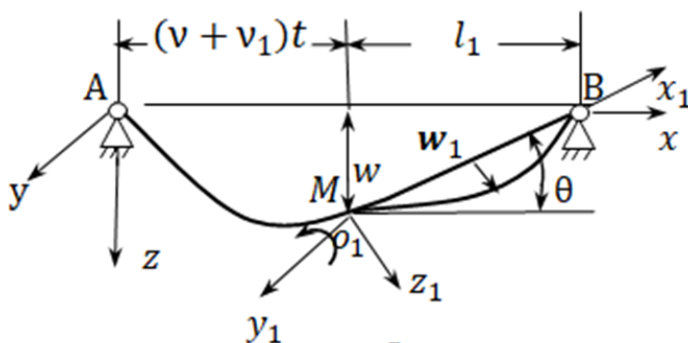


Рис. 2.

В этом случае движение обусловлено вращающим моментом $M(t)$, возникающим на фронте изгибной волны. Необходимо определить вынужденные поперечные колебания, возникающие вследствие вращательного движения невозмущенной части балки. Линейное интегро-дифференциальное уравнение движения

и система уравнений упругих поперечных колебаний шарнирно-опёртой балки описываются уравнениями [3]:

$$\rho F \int_0^l x \left[x\ddot{\theta} - \ddot{w}_1(t, x) \right] dx = M(t) + \rho g F \int_0^l [x \cos \theta + w_1(t, x) \sin \theta] dx; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + kGF \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \psi_1 \right) &= \rho J \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \\ kGF \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + q(x, t) &= \rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11)$$

при граничных и начальных условиях

$$x = 0, l: \quad w_1 = 0; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$t = 0: \quad w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Следует обратить внимание на то, что на рис. 2 представлена форма возмущённой части балки на участке от точки А до точки В в момент времени t с использованием следующих обозначений: o_1 – точка на переднем фронте волны изгиба, расположенная на нейтральной линии балки; Ao_1 – кривая, представляющая форму возмущённой части балки; o_1B – прямолинейный отрезок, представляющий форму невозмущённой части балки; $w(t, x', y)$ – прогиб поперечного сечения на фронте волны изгиба в момент времени t относительно его положения в недеформированном состоянии балки (относительно оси x); $w_1(t, x, y)$ – прогиб, возникающий в результате вращательного движения невозмущённой части балки; x_1, y_1, z_1 – подвижная система координат, жёстко связанная с фронтом волны изгиба; $q(x, t)$ – дополнительные силы, зависимость которых от координаты x и времени t имеет вид

$$q(x, t) = \begin{cases} \rho F [x\ddot{\theta} - g \cos \theta] & \text{при } x' \leq x \leq l, \\ 2ml / (\nu + \nu_1) < t < (2m + 1)l / (\nu + \nu_1), \\ 0 & \text{при остальных значениях } x \text{ и } t \end{cases}$$

где

$$\theta(t) = \psi(t, x'), \quad (14)$$

$x'(t)$ – закон распространения в прямом и обратном направлениях переднего и заднего фронтов изгибной волны вдоль балки, задаваемый уравнениями:

$$x' = (\nu + \nu_1)t - 2ml \quad \text{при } 2ml / (\nu + \nu_1) < t < (2m + 1)l / (\nu + \nu_1); \quad (15)$$

$$x' = 2(m + 1)l - (\nu + \nu_1)t$$

$$\text{при } (2m + 1)l / (\nu + \nu_1) < t < 2(m + 1)l / (\nu + \nu_1). \quad (16)$$

Уравнения распространения волны в прямом и обратном направлениях заднего фронта волны изгиба вдоль балки могут быть получены из уравнений распространения в прямом и обратном направлениях переднего фронта волны изгиба заменой ν на $-\nu$. Здесь m характеризует число отражений волны от границ и принимает значения $m=0, 1, 2, \dots$; ν_1 — групповая скорость для задачи (1)–(3) [4].

Решение системы (11) при пренебрежении собственным весом балки представим в форме

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(t) \sin \mu_n x, \quad 2ml/(\nu + \nu_1) < t < (2m+1)l/(\nu + \nu_1),$$

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}(t) \cos \mu_n x. \quad (17)$$

Подставив эти значения w_1 и ψ_1 в систему (11), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым функций w_{1n}, ψ_{1n}

$$\rho J \frac{d^2 \psi_{1n}}{dt^2} + (EJ\mu_n^2 + kGF) \psi_{1n} - kGF\mu_n w_{1n} = 0,$$

$$\rho F \frac{d^2 w_{1n}}{dt^2} + kGF\mu_n^2 w_{1n} - kGF\mu_n \psi_{1n} = q_n(t), \quad (18)$$

где

$$q_n(t) = 2l^{-1} \rho F \ddot{\theta}_n(t) D_n(x'),$$

$$D_n(x') = \begin{cases} \frac{1}{\mu_n^2} \{ \beta_n - [\sin \mu_n x' - \mu_n x' \cos \mu_n x'] \} \\ \text{при } x' \leq x \leq l, \quad 2ml/(\nu + \nu_1) < t < (2m+1)l/(\nu + \nu_1), \\ -\frac{1}{\mu_n^2} \{ [\sin \mu_n x' - \mu_n x' \cos \mu_n x'] \} \\ \text{при } 0 \leq x \leq x', \quad (2m+1)l/(\nu + \nu_1) < t < 2(m+1)l/(\nu + \nu_1), \end{cases}$$

$$\beta_n = \sin \mu_n l - \mu_n l \cos \mu_n l.$$

Построив решение системы (18) методом вариаций постоянных при начальных условиях (13), получаем, что упругие поперечные колебания балки во времени движения определяются по закону

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_{1n}(\tau) \sin \omega_{n1}(t - \tau) d\tau + \int_0^t f_{2n}(\tau) \sin \omega_{n2}(t - \tau) d\tau \right] \sin \mu_n x,$$

$$x' \leq x \leq l, \quad 2ml/(\nu + \nu_1) < t < (2m+1)l/(\nu + \nu_1);$$

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t g_{1n}(\tau) \sin \omega_{n1}(t - \tau) d\tau + \int_0^t g_{2n}(\tau) \sin \omega_{n2}(t - \tau) d\tau \right] \cos \mu_n x; \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 f_{1n}(t) &= \ddot{\theta}_n(t) D_n(x') P_{1n}, \quad f_{2n}(t) = \ddot{\theta}_n(t) D_n(x') P_{2n}, \\
 g_{1n}(t) &= \left(\mu_n - \frac{\rho \omega_{n1}^2}{kG\mu_n} \right) f_{1n}(t), \quad g_{2n}(t) = \left(\mu_n - \frac{\rho \omega_{n2}^2}{kG\mu_n} \right) f_{2n}(t), \\
 P_{1n} &= \frac{2(kG\mu_n^2 - \rho \omega_{n2}^2)}{\rho l \omega_{n1}(\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)}, \quad P_{2n} = \frac{2(kG\mu_n^2 - \rho \omega_{n1}^2)}{\rho l \omega_{n2}(\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)}.
 \end{aligned}$$

Решения (19) после преобразований можно представить в виде вынужденных и свободных колебаний, вызванных возмущающими силами $q(t, x)$. При этом для вынужденных поперечных колебаний получаются формулы:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{P}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-1} [P_{1n} u_n(\omega_{n1}, t) + P_{2n} u_n(\omega_{n2}, t)] \sin \mu_n x, \\
 x' &\leq x \leq l, \quad 2ml/(\nu + \nu_1) < t < (2m+1)l/(\nu + \nu_1); \\
 \psi_1 &= \frac{P}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-1} [P_{1n}^* u_n(\omega_{n1}, t) + P_{2n}^* u_n(\omega_{n2}, t)] \cos \mu_n x, \\
 P_{1n}^* &= - \left(\mu_n - \frac{\rho \omega_{n1}^2}{kG\mu_n} \right) P_{1n}, \quad P_{2n}^* = - \left(\mu_n - \frac{\rho \omega_{n2}^2}{kG\mu_n} \right) P_{2n}; \quad (20) \\
 u_n(\lambda, t) &= - \frac{\lambda \beta_n H_n^+ [\mu_n(2\nu + \nu_1) + \omega]^2}{\lambda^2 - [\mu_n(2\nu + \nu_1) + \omega]^2} \sin [(\mu_n(2\nu + \nu_1) + \omega)t - 2\mu_n ml] + \\
 &\quad + \frac{\lambda \beta_n H_n^+ (\mu_n \nu_1 - \omega)^2}{\lambda^2 - (\mu_n \nu_1 - \omega)^2} \sin [(\mu_n \nu_1 - \omega)t - 2\mu_n ml] - \\
 &\quad - \frac{\lambda \beta_n H_n^- [\mu_n(2\nu + \nu_1) - \omega]^2}{\lambda^2 - [\mu_n(2\nu + \nu_1) - \omega]^2} \sin [(\mu_n(2\nu + \nu_1) - \omega)t - 2\mu_n ml] + \\
 &\quad + \frac{\lambda \beta_n H_n^- (\mu_n \nu_1 + \omega)^2}{\lambda^2 - (\mu_n \nu_1 + \omega)^2} \sin [(\mu_n \nu_1 + \omega)t - 2\mu_n ml] - \\
 &\quad - \frac{\lambda \mu_n H_n^+}{\lambda^2 - (\mu_n \nu + \omega)^2} \left\{ [(\mu_n \nu + \omega)^2 + \mu_n^2 (\nu + \nu_1)^2] x'(t) \sin (\mu_n \nu + \omega)t - \right. \\
 &\quad \left. - \cos (\mu_n \nu + \omega)t \right\} - \\
 &\quad - \frac{\lambda H_n^+ 2^{-1} [\mu_n(2\nu + \nu_1) + \omega]^2}{\lambda^2 [\mu_n(3\nu + 2\nu_1) + \omega]^2} \{ \mu_n x'(t) \sin [(\mu_n(3\nu + 2\nu_1) + \omega)t - 4\mu_n ml] + - \\
 &\quad - \frac{\lambda^2 - [\mu_n(3\nu + 2\nu_1) + \omega] [\mu_n(5\nu + 4\nu_1) + \omega]}{\lambda^2 - [\mu_n(3\nu + 2\nu_1) + \omega]^2} \cos [(\mu_n(3\nu + 2\nu_1) + \omega)t - 4\mu_n ml] \} + \\
 &\quad + \frac{\lambda H_n^+ 2^{-1} (\mu_n \nu - \omega)^2}{\lambda^2 - [\mu_n(\nu + 2\nu_1) - \omega]^2} \{ \mu_n x'(t) \sin [(\mu_n(\nu + 2\nu_1) - \omega)t - 4\mu_n ml] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2 - [\mu_n (\nu + 2\nu_1) - \omega] [\mu_n (3\nu + 4\nu_1) - \omega]}{\lambda^2 - [\mu_n (\nu + 2\nu_1) - \omega]^2} \cos[(\mu_n (\nu + 2\nu_1) - \omega) t - 4\mu_n m l] \} - \\
 & - \frac{\lambda H_n^-}{\lambda^2 - (\mu_n \nu - \omega)^2} \left\{ [(\mu_n \nu - \omega)^2 + \mu_n^2 (\nu + \nu_1)^2] x'(t) \sin(\mu_n \nu - \omega) t - \right. \\
 & \left. - \frac{2(\nu + \nu_1)(\mu_n \nu - \omega) [\lambda^2 + \mu_n^2 (\nu + \nu_1)^2]}{\lambda^2 - (\mu_n \nu - \omega)^2} \cos(\mu_n \nu - \omega) t \right\} - \\
 & - \frac{\lambda H_n^- 2^{-1} [\mu_n (2\nu + \nu_1) - \omega]^2}{\lambda^2 - [\mu_n (3\nu + 2\nu_1) - \omega]^2} \{ \mu_n x'(t) \sin[(\mu_n (3\nu + 2\nu_1) - \omega) t - 4\mu_n m l] + \\
 & + \frac{\lambda^2 - [\mu_n (3\nu + 2\nu_1) - \omega] [\mu_n (5\nu + 4\nu_1) - \omega]}{\lambda^2 - [\mu_n (3\nu + 2\nu_1) - \omega]^2} \cos[(\mu_n (3\nu + 2\nu_1) - \omega) t - 4\mu_n m l] \} + \\
 & \left\{ + \frac{\lambda H_n^- 2^{-1} (\mu_n \nu + \omega)^2}{\lambda^2 - [\mu_n (\nu + 2\nu_1) + \omega]^2} \{ \mu_n x'(t) \sin[(\mu_n (\nu + 2\nu_1) + \omega) t - 4\mu_n m l] + \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda^2 - [\mu_n (\nu + 2\nu_1) + \omega] [\mu_n (3\nu + 4\nu_1) + \omega]}{\lambda^2 - [\mu_n (\nu + 2\nu_1) + \omega]^2} \cos[(\mu_n (\nu + 2\nu_1) + \omega) t - 4\mu_n m l] \right\}.
 \end{aligned}$$

Вынужденные колебания на участке $0 \leq x \leq x'$, $(2m+1)/(\nu + \nu_1) < t < 2(m+1)l/(\nu + \nu_1)$ ($m = 0, 1, \dots$) упругой шарнирно-опертой балки можно получить с помощью формул (20), заменив β_n , ν , ν_1 , m , на 0 , $-\nu$, $-\nu_1$, $-(m+1)$. Если знаменатель n -го члена ряда (20) равен нулю, то частота возмущающей силы определяется одним из следующих значений:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{ni}^\kappa &= \pm \mu_n \nu_1 \pm \omega_{ni}, \quad \bar{\omega}_{ni}^\kappa = \pm \mu_n (\nu + 2\nu_1) \pm \omega_{ni}, \\
 \bar{\bar{\omega}}_{ni}^\kappa &= \pm \mu_n (3\nu + 2\nu_1) \pm \omega_{ni}, \\
 \omega_{ni}^\kappa &= \pm \mu_n \nu \pm \omega_{ni} \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4).
 \end{aligned}$$

которые определяются из условий

$$\begin{aligned}
 \omega_{ni}^2 - (\mu_n \nu \pm \omega)^2 &= 0, \quad \omega_{ni}^2 - [\mu_n (\nu + 2\nu_1) \pm \omega]^2 = 0, \\
 \omega_{ni}^2 - (\mu_n \nu_1 \pm \omega)^2 &= 0, \quad \omega_{ni}^2 - [\mu_n (3\nu + 2\nu_1) \pm \omega]^2 = 0.
 \end{aligned}$$

В этом случае получается состояние резонанса.

Сравнивая задачу (1)–(3) с задачей (10)–(13), получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{ni}^\kappa &= \pm \mu_n \nu_1 \pm \omega_{ni}, \quad \bar{\omega}_{ni}^\kappa = \pm \mu_n (\nu + 2\nu_1) \pm \omega_{ni}, \\
 \bar{\bar{\omega}}_{ni}^\kappa &= \pm \mu_n (3\nu + 2\nu_1) \pm \omega_{ni} \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Величины $\tilde{\omega}_{ni}^\kappa$, $\bar{\omega}_{ni}^\kappa$, $\bar{\bar{\omega}}_{ni}^\kappa$ пронумеруем так, чтобы выполнялись соотношения

$$\tilde{\omega}_{ni}^3 = -\tilde{\omega}_{ni}^2, \quad \tilde{\omega}_{ni}^4 = -\tilde{\omega}_{ni}^1, \quad \bar{\omega}_{ni}^3 = -\bar{\omega}_{ni}^2, \quad \bar{\omega}_{ni}^4 = -\bar{\omega}_{ni}^1,$$

$$\bar{\omega}_{ni}^3 = -\bar{\omega}_{ni}^2, \quad \bar{\omega}_{ni}^4 = -\bar{\omega}_{ni}^1.$$

Описание результатов численных исследований. В качестве примера рассмотрим прохождения паровоза по мосту в случае четырех однопутных железнодорожных мостов с пролетами 18,3 м, 36,6 м, 73,2 м, 109,7 м.

Пусть скорость движения поезда $v = 36,6$ м/сек, число оборотов ведущих колес паровоза 8 с^{-1} ($\omega = 50,2$ рад/сек), диаметр ведущих колес 1,45 м. Тогда

$$\text{Max } |w_1| / |w| \approx 1,4. \quad (22)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1 и табл. 2, где даны вычисленные по формулам (20) значения резонансных частот $\tilde{\omega}_{ni}^\kappa$, $\bar{\omega}_{ni}^\kappa$, $\overline{\omega}_{ni}^\kappa$ в зависимости от пролета моста при $n = 1$, $i = 1$.

Таблица 1. Значения резонансных частот ω_{11}^1 в зависимости от пролета моста

l	$\omega_{11}^1 = \mu_1 \nu_1 + \omega_{11}$	$\omega_{11}^1 = \mu_1 (\nu + 2\nu_1) + \omega_{11}$	$\omega_{11}^1 = \mu_1 (3\nu + 2\nu_1) + \omega_{11}$
18,3 м	166,7	283,79	296,35
36,6 м	92,27	156,67	162,95
73,2 м	54,92	92,9	96,12
109,7 м	36,58	61,88	64,0

Таблица 2. Значения резонансных частот ω_{11}^2 в зависимости от пролета моста

l	$\omega_{11}^2 = \mu_1 \nu_1 - \omega_{11}$	$\omega_{11}^2 = \mu_1 (\nu + 2\nu_1) - \omega_{11}$	$\omega_{11}^2 = \mu_1 (3\nu + 2\nu_1) - \omega_{11}$
18,3 м	56,83	171,89	184,45
36,6 м	30,25	94,65	100,93
73,2 м	16,1	55,89	59,1
109,7 м	11,9	37,2	39,3

Как видно из данных таблиц, во всех рассматриваемых случаях резонансные частоты $\tilde{\omega}_{ni}^\kappa$, $\bar{\omega}_{ni}^\kappa$, $\overline{\omega}_{ni}^\kappa$ уменьшаются с увеличением пролета мостового строения. Выражение (22) показывает максимальное абсолютное значение $\text{max } |w_1| / |w|$ для пролета 73,2 м в точке $x=40$ м. Величины $|w|$ и $|w_1|$ представляют собой абсолютные значения вынужденных колебаний балки, вычисленные соответственно по формулам (8) и (20). Выражение (22) показывает, что наибольшее абсолютное значение прогиба $|w_1|$ превышает соответствующее значение прогиба $|w|$. Как видно, для мостов малых пролетов резонансная частота настолько высока, что синхронность пульсирующей силы и вынужденных колебаний (20) не может возникать ни при одной скорости, возможной на практике. Приняв, например, 8 ($\omega=50,2 \text{ с}^{-1}$) оборотов ведущих колес в секунду за наивысший предел и используя значения резонансных частот, из приведённых таблиц, можно заключить, что состояние резонанса вряд ли возможно для пролетов менее 18,3 м. Для больших пролетов явление резонанса следует учитывать. Если на мост одновременно воздействуют несколько подвижных нагрузок, вызванные ими колебания накладываются друг на друга.

Заклучение. Таким образом, получено и исследовано решение задачи о вынужденных поперечных колебаниях упругой шарнирно-опёртой балки с учётом вращательного движения, вызванного периодически колеблющейся сосредоточенной нагрузкой, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью. Получен ряд рекомендаций, которые могут быть использованы при проектировании и эксплуатации различных мостов, при эксплуатации которых могут возникать резонансные явления.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
2. Мкртчян К.Ш. О двойственном характере поперечных колебаний упругого стержня / К.Ш. Мкртчян // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, №. 6. – С. 1055–1058.
3. Мкртчян К.Ш. Исследование вынужденных поперечных колебаний упругого шарнирно-опертого стержня с учетом вращательного движения / К.Ш. Мкртчян // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2019. – № 1. – С. 141–153.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Том 7. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Э.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987.– 248 с.

K.Sh. Mkrtchyan

Study of forced transverse vibrations of an elastic pivot-supported Timoshenko beam under moving load.

This paper investigates the forced transverse vibrations of an elastic hinge-supported Timoshenko beam subjected to a periodically oscillating concentrated load moving along the beam at a constant velocity. The problem is solved using a previously proposed method based on combined conditions, taking into account both the dynamic impact on the Timoshenko beam and the rotational motion relative to the bending-wave front. Two types of forced transverse vibrations and new resonant frequencies are obtained. It is shown that the new resonant frequencies decrease as the length of the Timoshenko beam increases. For sufficiently long Timoshenko beams, a new resonant state exists.

Keywords: bridge, centrifugal force, cross section, gravity, transverse vibrations, natural frequencies, mode shapes.

References

1. Timoshenko, S.P. (1959). [*Vibration Problems in Engineering*]. Moscow: Fizmatgiz. 439 p. (In Russian).
2. Mkrtchyan, K.Sh. (1999). [On the dual nature of transverse vibrations of an elastic rod]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 63(6), 1055–1058. (In Russian).
3. Mkrtchyan, K.Sh. (2019). [Forced transverse vibrations of an elastic simply supported rod with allowance for rotational motion]. *Mechanics of Solids*, 1, 141–153. (In Russian).
4. Landau, L.D., & Lifshitz, E.M. (1986). *Theory of Elasticity* (3rd ed., Vol. 7, Course of Theoretical Physics). Moscow: Butterworth-Heinemann.

Поступила в редакцию / Original submitted 01.06.2026.

Доработана / Revision submitted 31.08.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.837:622.838

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-90-102

EDN:PJAEVI



©2026. Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев, В.П. Сажнев,
Т.И. Рахманова, Е.А. Бардакова, Э.Ю. Капинус

Грищенко Николай Николаевич – докт. техн. наук, зав. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: grinmail104@mail.ru.

Grishchenkov Nikolai Nikolaevich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, заместитель директора по научной работе РАНИМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru, ORCID: 0009-0008-5093-4916.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Director for Research, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

Сажнев Вячеслав Петрович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: vyacheslav.p.sazhnev@yandex.ru.

Sazhnev Vyacheslav Petrovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Рахманова Татьяна Ивановна – ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: rahmanovatata@yandex.ru.

Rakhmanova Tat'yana Ivanovna – Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Бардакова Елена Александровна – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru, ORCID: 0009-0009-9446-4925.

Bardakova Elena Aleksandrovna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

Капинус Эдуард Юрьевич – инженер отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: edik2712200319@mail.ru.

Kapinus Eduard Yurevich – Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

МЕТОДИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПЕРВООЧЕРЕДНОЙ ДИАГНОСТИКИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ В СЛОЖНЫХ ГОРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ ДОНЕЦКО-МАКЕЕВСКОГО УГЛЕННОГО РАЙОНА

В работе проведен анализ кумулятивного влияния горных выработок, тектонических нарушений и крутизны склонов на характер повреждений зданий и сооружений на подрабатываемых территориях. Разработан алгоритм выявления зданий с высоким риском возникновения аварийных ситуаций и обоснована необходимость корректировки методик прогноза. По результатам натурных исследований зафиксированы закономерности совместного влияния рельефа и активизации сдвижений земной поверхности при затоплении очистных выработок на деформации зданий.

Ключевые слова: типовые структурные деформации зданий, рельеф земной поверхности, повреждение объектов поверхности, горные работы, подземная добыча угля.

Введение. Анализом существующих баз данных [1] установлено, что подавляющее большинство многоэтажных жилых зданий Донецко-Макеевского угленосного района в настоящий момент имеют возраст 60-80 лет, что приближает их к предельным срокам эксплуатации, установленным нормативными документами [2, 3]. Причем жилищная застройка зачастую создавалась вокруг угледобывающих предприятий, которые активно подрабатывали жилой фонд в последние десятилетия. Причем неравномерность оседаний вызывает вертикальные деформации земной поверхности (наклоны и кривизну), а неравномерность горизонтальных сдвижений – относительные деформации растяжения и сжатия [4–15]. Такие перемещения земной поверхности приводят к структурным деформациям зданий, выражающимся в повреждениях наружных стен, цоколей, перекрытий, перекосе оконных проемов и др. Процесс сдвижения не прекращается и после остановки очистных работ, он повторно активизируется при затоплении выработок, вызывая дополнительные деформации подработанных объектов [16–21]. На характер деформаций объектов поверхности также влияет структура рельефа, углы падения застроенных и ранее подработанных склонов Донецко-Макеевского угленосного района достигают 7-9°.

При этом на сегодняшний день отсутствуют описанные алгоритмы выбора зданий, требующих первоочередной диагностики состояния и разработки мер защиты на участках застройки со сложными горно-геологическими и инженерно-геологическими условиями. В связи с тем, что в таких случаях здания получают дополнительные факторы воздействия на их техническое состояние, для снижения вероятности возникновения аварийных случаев актуальным является вопрос выявления подобных объектов и их первоочередного обследования.

В данной работе разработан алгоритм дистанционного выбора зданий, состояние которых требует их первоочередного обследования для назначения мер защиты. Обоснована необходимость корректировки существующих методик прогноза и приведены примеры результатов обследования с учетом представленного алгоритма.

Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим застроенный участок земной поверхности, подработанный горными выработками и расположенный на склоне мезорельефа. Для определения степени влияния горных выработок на каждый из подработанных объектов поверхности должен осуществляться расчет длин полумульд. Влияние сложной структуры рельефа и наклонного падения горных пород приводит к неравномерному проявлению мульды сдвижения на поверхности, что невозможно определить согласно действующей методике [4]. На наклонных пластах форма мульды сдвижения является трапециевидной и может быть определена при полной подработке по простиранию и вкрест простирания пласта по формулам

$$L_1 = (H + \frac{D_1}{2} \sin \alpha - h - h_m) \operatorname{ctg} \beta_0 + h_m \operatorname{ctg} \delta_{0m} + h \operatorname{ctg} \phi_0 + \\ + (H + \frac{D_1}{2} \sin \alpha) \operatorname{ctg} (\psi_1 + \alpha); \quad (1)$$

$$L_2 = (H - \frac{D_1}{2} \sin \alpha - h - h_m) \operatorname{ctg} \gamma_0 + h_m \operatorname{ctg} \delta_{0m} + h \operatorname{ctg} \varphi_0 \\ + (H - \frac{D_1}{2} \sin \alpha) \operatorname{ctg} (\psi_2 - \alpha); \quad (2)$$

$$L_3 = (H_i - h - h_m) \cdot \operatorname{ctg} \delta_0 + h_m \cdot \operatorname{ctg} \delta_{0m} + h \cdot \operatorname{ctg} \varphi_0 + H_i \cdot \operatorname{ctg} \psi_3, \quad (3)$$

где L_1, L_2 – длины полумульд вкрест простирания пласта, м; L_3 – длина полумульды по простиранию пласта, м; H – средняя глубина разработки, м; H_i – глубина разработки в углах лавы, м; D_1, D_2 – длины очистной выработки вкрест простирания и по простиранию соответственно, м; α – угол падения пласта, градус; h – мощность наносов, м; h_m – мощность мезозойских отложений, м; $\delta_0, \gamma_0, \beta_0$ – граничные углы по простиранию, по восстанию и по падению соответственно, градус; φ_0 – граничный угол в наносах, градус; δ_0 – граничный угол в мезозойских отложениях, градус; ψ_1, ψ_2, ψ_3 – углы полных сдвижений, градус.

Для рассматриваемого участка земной поверхности, на основании приведенных в [4] зависимостей, также рассчитаем оседания, сдвижения и горизонтальные деформации. Определим участки с максимальными показателями деформаций, на которых возможно определение зон совместного влияния подработки и рельефа. При этом учтем, что рельеф местности в Донецко-Макеевском угленосном районе представлен большим количеством участков с перепадом высот от десятков до более ста метров на один километр подработанной территории (рис. 1). Обследование зданий целесообразно выполнять на участках с покатыми и сильнопокатыми склонами.

При обследовании жилых домов нужно фиксировать все имеющиеся деформации и повреждения конструктивных элементов: наличие, расположение и величина раскрытия трещин в стенах; отклонение стен в вертикальной плоскости;

изгиб кладки стен и цоколя в горизонтальной и вертикальной плоскостях; состояние кладки и штукатурки стен и цоколя; перекосы оконных и дверных проемов; срез кладки под опорными частями перемычек; изгиб оконных перемычек и поясов кладки под окнами.

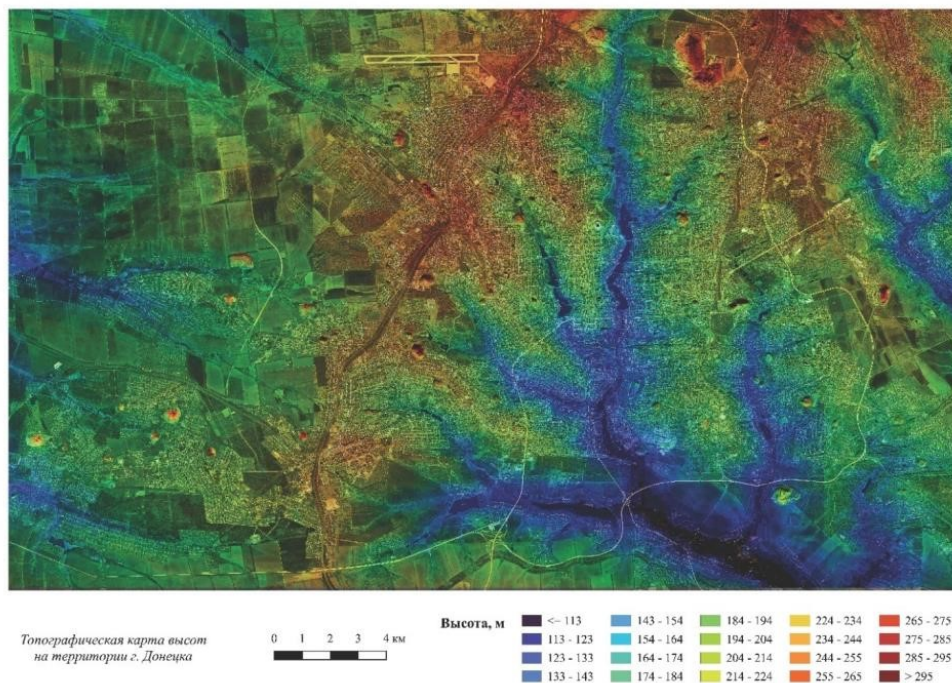


Рис. 1. Цифровая модель рельефа г. Донецка

В данной работе в качестве объектов представителей по указанному алгоритму производился выбор жилых домов, расположенных в Ворошиловском районе г. Донецка на правом склоне реки Кальмиус, для обследования и анализа их технического состояния: № 23, 23а, 38, 40 по пр. Театральному, № 117, 117б, 119, 119а, 123, 125 по ул. Набережной, № 143а, 143б по ул. 50-летия СССР. Дома расположены на участке застройки со сложными горно-геологическими и инженерно-геологическими условиями, в период с 1979 г. по 2004 г. они были подработаны 11-ю лавами по пластам h_7 , h_8 и h_{10} закрытой шахты им. М. Горького.

План поверхности с нанесенными линиями рельефа и wybranнми жилыми домами показан на рис. 2.

На рис. 3 показаны графики фактических и расчетных («Прогноз») оседаний земной поверхности от влияния всех указанных выше лав.

Анализ результатов расчета деформаций земной поверхности и данных инструментальных измерений позволяет определить участки локализации наибольших оседаний (рис. 4).



Рис. 2. Элемент плана г. Донецка с линиями мезорельефа и выбранными жилыми домами:
1 – линии мезорельефа с высотными отметками; 2 – обследованные здания

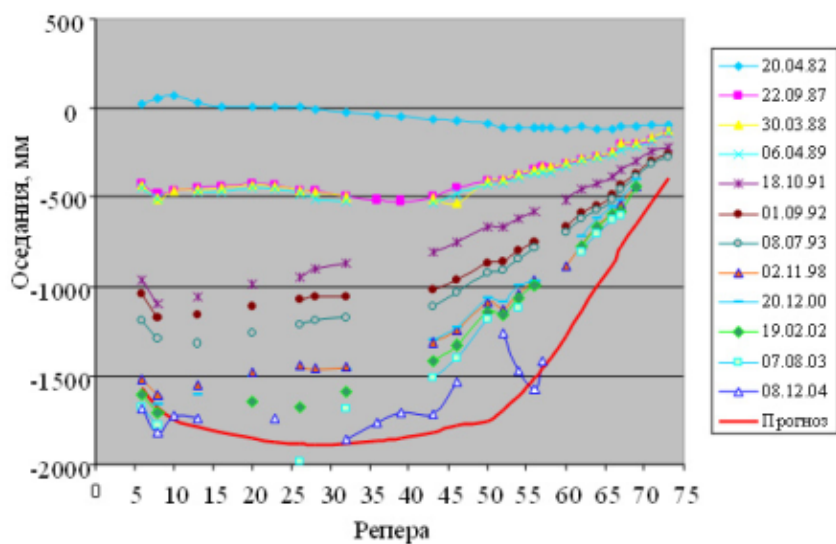


Рис. 3. Графики оседания земной поверхности

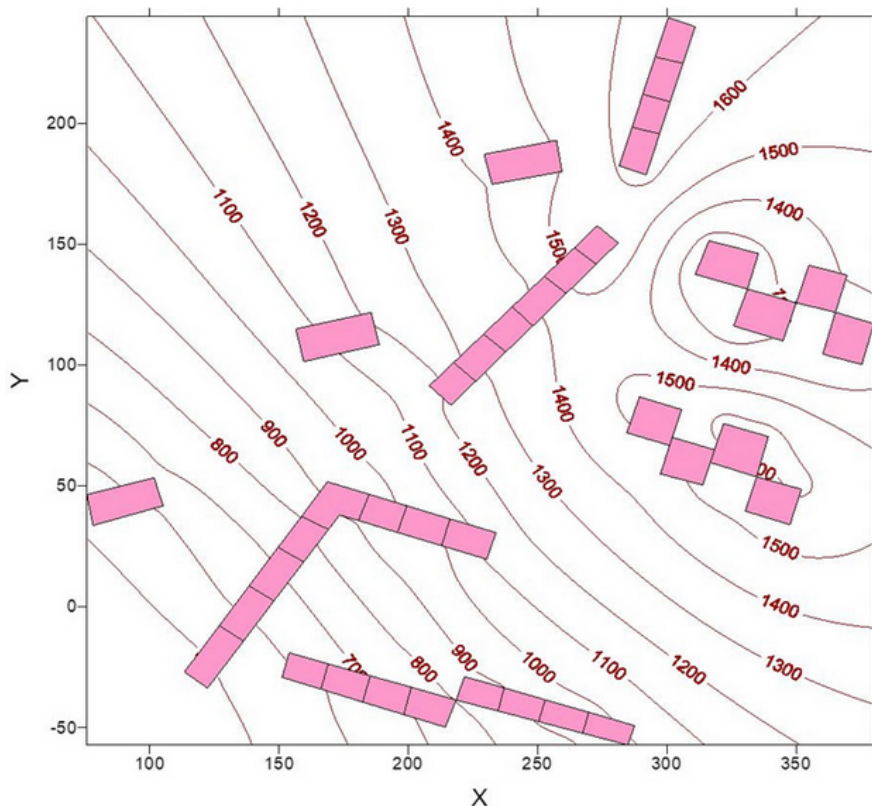


Рис. 4. График расчетных оседаний земной поверхности от всех влияющих лав (мм)

Анализ графика оседаний земной поверхности показывает, что максимальные оседания (до 1800 мм) наблюдаются в районе жилых домов № 23 и № 23а по пр. Театральной и дома № 117 по ул. Набережной. Кроме того, оседания, близкие к максимальным, наблюдаются в районе домов № 1176 и № 119 по ул. Набережной. Указанные дома, кроме дома № 23, попадают в зону возможного проявления тектонического нарушения – Мушкетовского надвига.

Для установления причин (факторов), оказавших влияние на деформирование конструкций жилых домов выполнено следующее: собраны исходные данные о конструктивных особенностях жилых домов, инженерно-геологических и горно-геологических условиях площадки застройки; проведено визуальное обследование фасадов жилых домов, лестничных клеток, подвалов и технических этажей с фотофиксацией имеющихся дефектов и повреждений конструкций; проведены инструментальные измерения кренов жилых домов и наклонов рельефа земной поверхности в основании домов; определено влияние горных выработок и других факторов на площадку застройки.

На основании проведенных исследований выполнен анализ состояния жилых домов, установлены причины деформирования их конструкций.

В жилых домах № 23 и № 23а по пр. Театральной зафиксированы поврежде-

ния: оседание отмостки с образованием горизонтальных зазоров между цоколем и отмосткой 120-240 мм (рис. 5, а, б); местами на фасадах разрушение керамической облицовки стен и цоколя; трещина раскрытием до 10 мм, заделанная цементным раствором, в стене дома № 23 в уровне девятого этажа (рис. 5, в); раскрытие деформационных швов между отсеками (рис. 5, г) и др.



Рис. 5. Повреждения жилых домов по пр. Театральному: а, в – жилой дом № 23; б, г – жилой дом № 23а

В жилом доме № 40 по пр. Театральному зафиксированы наклонные трещины в наружных стенах раскрытием до 5–7 мм, в верхней части стены правого торцевого фасада наклонная трещина раскрытием до 17–18 мм (рис. 6), повреждение облицовки стен, раскрытие деформационных швов и др.

Были проведены инструментальные наблюдения по определению фактических кренов жилых домов и наклона рельефа земной поверхности на площадках расположения домов. Отклонения жилых домов от вертикали определялись в двух направлениях, соответствующих осям этих домов.

Согласно результатам инженерно-геологических изысканий грунты на рассматриваемой площадке не обладают просадочными свойствами, однако, характеризуются различными деформационными свойствами.

Территория относится к подтопленной. Основными факторами подтопления являются: изменение условий поверхностного стока при строительстве зданий; засыпка естественных дренажных отводов, производство земляных работ; утеч-

ки из водонесущих и водоотводящих коммуникаций; уменьшение испарения влаги под зданиями; полив зеленых насаждений; инфильтрация вод; наличие слабопроницаемых грунтов и прослоек; близкое расположение подземных вод к земной поверхности.



Рис. 6. Трещины в стенах жилого дома № 40 по пр. Театральному: а – стена главного фасада; б – стена правого фасада

В жилом доме № 117 по ул. Набережной зафиксированы трещины в наружных стенах раскрытием до 3–5 мм, разрушение облицовки стен, отслоение нащельников деформационных швов и др.

Грунты, слагающие основание жилых домов, обладают различными физическими, деформационными, прочностными и фильтрационными свойствами, что способствует неравномерным оседаниям оснований домов.

В основании жилых домов № 23а по пр. Театральному, и № 117, 117б, 119 по ул. Набережной расположена зона перемятых пород Мушкетовского надвига.

В основании жилых домов № 23а и № 40 по пр. Театральному, № 119 по ул. Набережной расположен выход под наносы известняка K_3 .

В основании жилых домов № 23 по пр. Театральному и № 143б по ул. 50-летия СССР расположен выход под наносы угольного пласта k_2^2 .

В районе обследованных жилых домов шахтой им. М. Горького проводились инструментальные наблюдения на трех маркшейдерских наблюдательных станциях, заложенных вдоль пр. Театрального; ул. 50-летия СССР и ул. Набережной.

Полученные числовые данные наблюдений были проанализированы и по ним построены графики оседаний, которые характеризуют динамику процесса сдвижения земной поверхности. Кроме того, для реперов всех наблюдательных станций были вычислены прогнозные значения деформаций земной поверхности.

Результаты фактических инструментальных наблюдений и результаты прогноза, выполненного по методике [4] показаны на рис. 3. Проведенные исследования позволили установить четкую взаимосвязь между величинами расчетных и фактических деформаций земной поверхности, параметрами рельефа и степенью поврежденности конструктивных элементов обследованных зданий. Анализ графиков расчетных оседаний показал, что максимальные вертикальные перемещения земной поверхности, достигающие 1800 мм, локализуются в районе жилых домов № 23 и № 23а по пр. Театральному, а также дома № 117 по ул. Набережной. Именно на этих участках зафиксированы наиболее интенсивные повреждения несущих и ограждающих конструкций, что подтверждает определяющую роль горно-геологического фактора в формировании технического состояния зданий. Особого внимания заслуживает тот факт, что дома № 117б и № 119 по ул. Набережной, демонстрирующие также значительные деформации, попадают в зону влияния Мушкетовского тектонического надвига, что указывает на кумулятивный эффект от совместного воздействия подработки и тектонических нарушений.

Важным результатом анализа является количественная оценка влияния мезорельефа на характер повреждений. Инструментальные замеры высот цоколей позволили установить углы наклонов рельефа в сторону реки Кальмиус, которые для наиболее поврежденных домов варьируются от $1,44^\circ$ до $6,51^\circ$, что значительно превышает нормативные значения для плоскостных сооружений. Наибольшие углы наклонов зафиксированы у дома № 23а (до $6,51^\circ$), где также отмечены максимальные раскрытия деформационных швов и зазоров между цоколем и отмосткой (до 240 мм). Это свидетельствует о том, что склоновые процессы не просто сопутствуют, но и усиливают деформации, вызванные подработкой, создавая опасные сочетания растягивающих и сдвиговых напряжений в основании.

Выводы. Таким образом, на основании комплексирования аналитических расчетов параметров сдвига земной поверхности при активизации геомеханических процессов над очистными горными выработками, компьютерной обработки спутниковых снимков и натурных наблюдений доказано, что техническое состояние многоэтажных зданий в Донецко-Макеевском угленосном районе определяется комплексным воздействием трех основных факторов – длительной подработкой очистными выработками, активизацией сдвижений при затоплении горных выработок и сложным мезорельефом с углами наклонов до 7–9 градусов. Это создает условия для возникновения структурных деформаций, значительно превышающих нормативные пределы для типовых серий зданий. Установлено, что наиболее критичные повреждения фиксируются не просто в зонах максимальных оседаний, а на участках совместного действия подработки и тектонических нарушений, таких как Мушкетовский налив, где происходит перераспределение напряжений в массиве горных пород с образованием дополнительных зон концентрации деформаций. Обоснована необходимость корректировки существующих методик прогноза деформаций для условий Дон-

басса с введением поправочных коэффициентов, учитывающих неоднородность инженерно-геологического строения, наличие тектонических нарушений и реальные углы наклонов рельефа. Практическая значимость данной работы заключается в разработке алгоритма первоочередного выбора зданий для детального инструментального обследования, основанного на комплексировании данных о горно-геологических условиях, результатах моделирования мульды сдвижения и экспресс-оценке уклонов рельефа, что позволяет оптимизировать затраты на мониторинг и своевременно выявлять объекты с высоким риском прогрессирующих деформаций. Результаты исследования подтверждают, что здания с нормативным сроком эксплуатации 60–80 лет в условиях комплексного воздействия негативных факторов требуют разработки индивидуальных мер защиты, а не типовых решений, с обязательным учетом локальных особенностей каждого участка застройки.

Исследование выполнено в ФГБНУ «РАНИМИ» за счет гранта Российского научного фонда № 26-17-20018 (<https://rscf.ru/project/26-17-20018/>).

Список литературы

1. PhotoBuildings: архитектурная база. – URL: photobuildings.com (дата обращения: 28.07.2026).
2. ГОСТ 27751–2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – Введ. 2015-07-01. – М.: Росстандарт, 2015. – 14 с.
3. ВНС 58-88(р). Положение об организации и проведении реконструкции, ремонта и технического обслуживания зданий, объектов коммунального и социально-культурного назначения. Нормы проектирования. – Введ. 1989-07-01. – М.: Госкомархитектуры, 2008. – 42 с.
4. ПБ 07-269-98. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях / Утв. Постановлением Госгортехнадзора России от 16.03.1998 № 13. – Введ. 1998-03-16. – М., 1998. – 110 с.
5. Ларченко В.Г. Скорректированная методика расчета ожидаемых сдвижений и деформаций земной поверхности при подземной разработке угольных пластов / В.Г. Ларченко, Е.В. Коваленко, Н.В. Хоружая // Тр. РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41). – Т. 2. – С. 18–33.
6. Борисенко Э.В. Прогноз сдвижений земной поверхности на основе исследования деформационных свойств водонасыщенных горных пород / Э.В. Борисенко, Ф.М. Голубев, С.А. Попович // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископ. – 2024. – № 5. – С. 73–79.
7. Литвинский Г.Г. Геомеханические модели процессов сдвижения подработанного горного массива / Г.Г. Литвинский // Тр. РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41). – Т. 1. – С. 101–128.
8. Иофис М.А. Сдвижение горных пород и земной поверхности при разработке месторождений полезных ископаемых: Учебное пособие / М.А. Иофис, А.В. Гришин, Е.Н. Есина. – М.: РУДН, 2011. – 103 с.
9. Писаренко М.В. Прогноз ожидаемых сдвижений и деформаций земной поверхности с помощью ГИС технологий / М.В. Писаренко // Горн. информ.-аналит. бюл. – 2009. – № 12. – С. 310–315.
10. Антонов В.А. Методология обнаружения и прогнозирования горизонтальной деформации земной поверхности смежных блоков горных пород по данным GPS мониторинга / В.А. Антонов // Горн. информ.-аналит. бюл. – 2021. – № 5 (2). – С. 16–29.
11. Khau L.V. Determination of parameters of the underground inclined coal seam mining in Quang Ninh basin under protected objects on the surface / L.V. Khau // J. Mining Institute. – 2017. – Vol. 226. – P. 412–419.
12. Zhang Y. Study on stability evaluation of goaf based on AHP and EWM-taking the northern

- new district of Liaoyuan city as an example / Y. Zhang, Z. Wen, J. Zhang, J. Huang, J. Qi, M. Li // Scientific reports. – 2024. – Vol. 14. – URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-68858-x> (дата обращения: 28.07.2026).
13. Qi J. Study on the restoration of ecological environments in mining area based on GIS technology / J. Qi, Y. Zhang, J. Zhang, C. Wu, Y. Chen, Z. Cheng // Sustainability. – 2023. – Vol. 15 (7). – URL: <https://doi.org/10.3390/su15076128> (дата обращения: 28.07.2026).
 14. Hou H. Spatial estimate of ecological and environmental damage in an underground coal mining area on the Loess Plateau: Implications for planning restoration interventions / H. Hou, Z. Ding, S. Zhang, S. Guo, Y. Yang, Z. Chen, J. Mi, X. Wang // J. Cleaner Production. – 2021. – Vol. 287. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.125061> (дата обращения: 28.07.2026).
 15. Xu Z. Research on monitoring and stability evaluation of ground subsidence in gypsum mine goaf / Z. Xu, W. Xu, Z. Zhu, J. Zhao // Frontiers in Environmental Science. – 2022. – Vol. 10. – URL: <https://doi.org/10.3389/fenvs.2022.1097874> (дата обращения: 28.07.2026).
 16. Грищенко Н.Н. Прогноз сдвижения земной поверхности при ликвидации угледобывающих предприятий в различных угленосных районах Донбасса / Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев, В.П. Сажнев // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2018. – № 1–2(62–63). – С. 71–81.
 17. Грищенко Н.Н. Меры защиты здания нового корпуса школы № 145 города Донецка от влияния горных работ и закрытия шахты «Мушкетовская» / Н.Н. Грищенко, Л.А. Иванова, Т.И. Рахманова, Е.Т. Сушко, В.П. Сажнев // Пробл. горного давления. – 2021. – № 1–2. – С. 62–77.
 18. Грищенко Н.Н. Определение предельно допустимой глубины затопления горных выработок ликвидируемых шахт Центрального района Донбасса / Н.Н. Грищенко, Л.А. Иванова, Т.И. Рахманова, В.П. Сажнев, Е.Т. Сушко, Е.А. Бардакова // Тр. РАНИМИ. – 2022. – № 18–19 (33–34). – С. 94–106.
 19. Грищенко Н.Н. Оценка состояния объектов поверхности действующих и ликвидируемых шахт Торезско-Снежнянского геолого-промышленного района Донбасса / Н.Н. Грищенко, Л.А. Иванова, Т.И. Рахманова, Ф.М. Голубев, В.П. Сажнев, Е.Т. Сушко // Тр. РАНИМИ. – 2023. – № 20–21 (35–36). – С. 66–78.
 20. Грищенко Н.Н. Определение безопасных условий эксплуатации жилых и общественных зданий на горных отводах закрывающихся шахт г. Горловки / Н.Н. Грищенко, Е.Т. Сушко, Ф.М. Голубев, Л.А. Иванова, Т.И. Рахманова, В.П. Сажнев // Тр. РАНИМИ. – 2023. – № 20–21 (35–36). – С. 119–137.
 21. Грищенко Н.Н. Анализ влияния подработки и закрытия шахты «Бутовская» на техническое состояние здания ГБОУ «Школа № 4 Ясиноватского м.о.» / Н.Н. Грищенко, Л.А. Иванова, Т.И. Рахманова, Ф.М. Голубев, В.П. Сажнев, Е.Т. Сушко // Тр. РАНИМИ. – № 8 (46). – 2025. – С. 105–120.

N.N. Grishchenkov, F.M. Golubev, V.P. Sazhnev, T.I. Raxmanova, E.A. Bardakova, E.Y. Kapinus

Methodological criteria for priority diagnostics of multi-story buildings in complex mining and geological conditions of the Donetsk-Makeevsky coal-bearing region.

This paper presents an analysis of the cumulative influence of underground mining, tectonic faults, and slope steepness on the magnitude of ground surface deformations and the nature of damage to buildings and structures. The necessity of adjusting prediction methodologies is substantiated, and a priority diagnostic algorithm has been developed to identify buildings at high risk of emergencies. Based on the results of field studies, regularities of the combined effect of terrain and the activation of ground surface movements due to flooding of mined-out workings on building deformations were recorded.

Keywords: *typical structural deformations of buildings, ground surface topography, damage to surface features, mining operations, underground coal mining.*

References

1. PhotoBuildings: architectural database. – URL: photobuildings.com (date accessed: 28.07.2026). (In Russian)
2. GOST 27751–2014. Reliability of building structures and foundations. Basic provisions. (2015). Moscow. 14 p. (In Russian)
3. VNS 58-88(r). Regulations on the organization and implementation of reconstruction, repair, and technical maintenance of buildings, public utilities, and socio-cultural facilities. Design standards. (2008). Moscow. 42 p. (In Russian)
4. PB 07-269-98. Rules for the protection of structures and natural objects from the harmful effects of underground mining at coal deposits. (1998). Moscow. 110 p. (In Russian)
5. Larchenko, V.G., Kovalenko, E.V. & Khoruzhaya, N.V. (2024). Adjusted Methodology for Calculating Expected Shifts and Deformations of the Earth's Surface during Underground Coal Seam Mining. *Proceedings of RANIMI*. 3 (41), Vol. 2, 18–33. (In Russian).
6. Borisenko, E.V., Golubev, F.M. & Popovich, S.A. (2024). Prediction of surface subsidence based on deformation properties of water-saturated rocks. *Physical and Technical Problems of Mineral Resource Development*. 5, 73–79. (in Russian)
7. Litvinsky, G.G. (2024). Geomechanical models of the processes of displacement of an under-worked rock mass. *Proceedings of RANIMI*. 3 (41). Vol. 1, 101–128. (In Russian)
8. Iofis, M.A., Grishin, A.V. & Esina, E.N. (2011). *Subsidence of rock masses and earth surface during mineral deposit development*. Moscow: RUDN University. 103 p. (in Russian)
9. Pisarenko, M.V. (2009). Forecast of expected subsidence and deformation of the earth surface using GIS technologies. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 12, 310–315. (in Russian)
10. Antonov, V.A. (2021). Methodology for detection and prediction of horizontal ground deformation of adjacent rock blocks based on GPS monitoring data. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 5 (2), 16–29. (in Russian)
11. Khau, L.V. (2017). Determination of Parameters of the Underground Inclined Coal Seam Mining in Quang Ninh Basin Under Protected Objects on the Surface. *Journal of Mining Institute*. 226, 412–419.
12. Zhang, Y., Wen, Z., Zhang, J., Huang, J., Qi, J. & Li, M. (2024). Study on stability evaluation of goaf based on AHP and EWM: Case study of Liaoyuan city northern district. *Scientific Reports*. 14. URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-68858-x>. (date accessed: 28.07.2026).
13. Qi, J., Zhang, Y., Zhang, J., Wu, C., Chen, Y. & Cheng, Z. (2023). Study on restoration of ecological environments in mining areas based on GIS technology. *Sustainability*. 15 (7). URL: <https://doi.org/10.3390/su15076128>. (date accessed: 28.07.2026). (date accessed: 28.07.2026).
14. Hou, H., Ding, Z., Zhang, S., Guo, S., Yang, Y., Chen, Z., Mi, J. & Wang, X. (2021). Spatial estimation of ecological and environmental damage in underground coal mining areas on the Loess Plateau. *Journal of Cleaner Production*. 287. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.125061>. (date accessed: 28.07.2026).
15. Xu, Z., Xu, W., Zhu, Z. & Zhao, J. (2023). Monitoring and stability evaluation of ground subsidence in gypsum mine goaf. *Frontiers in Environmental Science*. 10. URL: <https://doi.org/10.3389/fenvs.2022.1097874>. (date accessed: 28.07.2026).
16. Grishchenkov, N.N., Golubev, F.M. & Sazhnev, V.P. (2018). Forecast of the Earth's Surface Shift during the Liquidation of Coal Mining Enterprises in Various Coal-Bearing Regions of Donbass. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 1–2 (62–63), 71–81. (In Russian)
17. Grishchenkov, N.N., Ivanova, L.A., Raxmanova, T.I., Sushko, E.T. & Sazhnev, V.P. (2021). Measures to Protect the Building of the New Apt. of School No. 145 in Donetsk from the Impact of Mining Operations and the Closure of the Mushketovskaya Mine. *Problems of rock pressure*. 1–2, 62–77. (In Russian)
18. Grishchenkov, N.N., Ivanova, L.A., Raxmanova, T.I., Sazhnev, V.P., Sushko, E.T. & Bardakova, E.A. (2022). Determination of the maximum permissible flooding depth of mine workings of liquidated mines in the Central region of Donbass. *Proceedings of RANIMI*. 18–19 (33–34), 94–106. (In Russian)
19. Grishchenkov, N.N., Ivanova, L.A., Raxmanova, T.I., Golubev, F.M., Sazhnev, V.P.,

- & Sushko, E.T. (2023). Assessment of the state of surface objects of operating and liquidated mines of the Torez-Snezhnyansky geological and industrial region of Donbass. *Proceedings of RANIMI*. 20–21 (35–36), 66–78. (In Russian)
20. Grishchenkov, N.N., Sushko, E.T., Golubev, F.M., Ivanova, L.A., Raxmanova, T.I., & Sazhnev, V.P. (2023) Determination of safe operating conditions for residential and public buildings on the mining allotments of closed mines in Gorlovka. *Proceedings of RANIMI*. 20–21 (35–36), 119–137. (In Russian)
21. Grishchenkov, N.N., Ivanova, L.A., Raxmanova, T.I., Golubev, F.M., Sazhnev, V.P. & Sushko, E.T. (2025) Analysis of the impact of undermining and closure of the Butovskaya mine on the technical condition of the building of the State Budgetary Educational Institution School No. 4 of the Yasinovataya Municipal District. *Proceedings of RANIMI*. 8 (46), 105–120. (In Russian)

Поступила в редакцию / Original submitted 30.07.2026.

Доработана / Revision submitted 12.08.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

УДК 550.8.013

doi:10.24412/0136-4545-2026-3-103-112

EDN:EUXRMS



©2026. Е.Д. Ходырев, В.В. Трофимов, М.В. Гордиенко

ОЦЕНКА ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ВЫРАБОТАННОГО ПРОСТРАНСТВА ОТРАБОТАННЫХ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

Решена задача теоретической оценки фильтрационных свойств подработанных горных пород. Разработан соответствующий математический подход, основанный на совместном моделировании напряженно-деформированного состояния массива и изменений его проницаемости с учетом необратимого деформирования пород за пределом прочности. Получены оценки распределения проницаемости в наиболее значимых зонах фильтрационной неоднородности – в областях влияния барьерных целиков и в зонах полных сдвижений. Установлено, что размеры целиков оказывают существенное влияние на формирование зон повышенной и пониженной проницаемости, что определяет эффективность их гидроизоляционной функции. Установлено, что в зонах полной подработки проницаемость пород возрастает примерно на два порядка по сравнению с разгруженным состоянием и на три–четыре порядка относительно ненарушенного массива, а остальные виды фильтрационных неоднородностей могут быть представлены как суперпозиция исследованных зон.

Ключевые слова: *выработанное пространство, проницаемость, зоны полных сдвижений, зоны водопроницающих трещин, фильтрация, напряженно-деформированное состояние, необратимые деформации.*

Введение. Закрытие, консервация и последующее затопление угольных шахт сопровождаются существенным изменением гидрогеологических параметров горного массива. Прекращение водоотлива приводит к постепенному восстановлению уровня подземных вод и формированию нового гидродинамического режима, который существенно отличается от условий эксплуатации месторождения. Эти процессы сопровождаются частичной или полной инверсией

Ходырев Евгений Дмитриевич – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНМИ, Донецк, e-mail: hodyrev_ed@mail.ru.

Khodyrev Evgeny Dmitrievic – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

Трофимов Виктор Валериевич – канд. техн. наук, зав. отд. компьютерных технологий РАНМИ, Донецк, e-mail: victor.trofimov@ranimi.ru, ORCID: 0009-0008-9955-3102.

Trofimov Viktor Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Computer Technology Department.

Гордиенко Мария Валерьевна – мл. науч. сотр. отд. проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНМИ, Донецк, e-mail: gordienko.mariya@gmail.com.

Gordienko Maria Valerievna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

техногенного режима подземных вод и могут вызывать комплекс негативных экологических последствий регионального масштаба.

К числу наиболее опасных последствий от закрытия или консервации шахт относятся подтопление подработанных территорий, изменение направлений движения подземных вод, аварийное увеличение водопритоков на действующих шахтах, активизация процессов сдвижения и деформирования земной поверхности, загрязнение водоносных горизонтов высокоминерализованными шахтными водами, а также нарушение устойчивости инженерных сооружений и природных экосистем. В условиях высокой плотности размещения угледобывающих предприятий, характерной для большинства угольных бассейнов, указанные процессы приобретают региональный характер и требуют комплексного научного анализа. Одним из ключевых факторов, определяющих особенности формирования потоков подземных вод в процессе затопления шахт, являются фильтрационные свойства подработанного массива. Проницаемость горных пород после проведения очистных работ изменяется на несколько порядков [1] вследствие перераспределения напряжений, образования систем трещин и необратимых деформаций. При этом пространственное распределение фильтрационных характеристик приобретает выраженную неоднородность, что существенно осложняет прогнозирование процессов фильтрации и массопереноса. Особое значение приобретает исследование наиболее характерных зон фильтрационной неоднородности, формирующихся в пределах выработанного пространства. К ним относятся зоны влияния барьерных целиков, а также области полной подработки, занимающие основную часть площади отработанных пластов. Именно эти зоны в значительной степени определяют конфигурацию фильтрационных потоков, скорость распространения шахтных вод и эффективность естественных либо искусственных гидроизоляционных барьеров.

Определение проницаемости подработанных пород связано со значительными техническими трудностями, высокой стоимостью исследований и ограниченной возможностью проведения натурных наблюдений на больших глубинах [2, 3]. Кроме того, пространственная изменчивость напряженно-деформированного состояния массива требует большого количества измерений, что делает полномасштабные натурные исследования практически невозможными. В связи с этим особую актуальность приобретают методы математического моделирования, позволяющие на основе механики деформируемого твердого тела и теории фильтрации оценивать изменение фильтрационных свойств пород в различных зонах подработанного массива.

Современные методы математического моделирования позволяют учитывать взаимосвязь между напряженно-деформированным состоянием (НДС) горных пород и их фильтрационными характеристиками, а также прогнозировать изменение проницаемости при переходе пород в запредельное состояние деформирования. Использование подобных моделей существенно повышает достоверность прогнозов гидродинамических процессов, возникающих при затоплении шахт, и позволяет обосновывать инженерные решения, направленные на обеспе-

чение безопасной ликвидации горнодобывающих предприятий. Таким образом, достоверность математического моделирования процессов затопления шахт в значительной степени определяется корректностью оценки пространственного распределения проницаемости подработанного массива. В связи с этим оценка проницаемости отдельных участков отработанных угольных пластов становится самостоятельной актуальной научной задачей, решение которой необходимо для повышения надежности прогноза гидродинамических процессов, происходящих при затоплении угольных предприятий.

Постановка задачи. Диапазон изменения проницаемости подработанных горных пород достигает 5–6 порядков и определяется пространственной неоднородностью их напряженно-деформированного состояния [1]. Наиболее характерными областями формирования фильтрационных неоднородностей являются зоны влияния барьерных целиков и зоны полных сдвижений, занимающие до 90 % площади выработанного пространства [4]. Остальные виды фильтрационных неоднородностей в первом приближении могут рассматриваться как их суперпозиция. В связи с этим необходимо разработать метод теоретической оценки фильтрационных свойств указанных зон, основанный на совместном моделировании НДС массива и изменений проницаемости при необратимом деформировании горных пород. Разработанный подход позволит получить количественные оценки распределения проницаемости в зонах влияния барьерных целиков и полных сдвижений, установить влияние размеров целиков на формирование зон повышенной и пониженной проницаемости и определить характер изменения фильтрационных свойств выработанного пространства [5, 6].

Описание результатов исследований. При деформировании горных пород за пределом прочности для оценки фильтрационных свойств подработанных горных пород необходимо иметь соответствующий способ оценки изменений напряженно-деформированного состояния (НДС) массива.

Такой способ предложен в работах [7, 8]. Этот способ основан на учете особенностей сдвижения горных пород при их подработке. Расчет проводят одновременно в двух вертикальных разрезах – вкрест и по простиранию пласта. Оседание любой точки массива в пределах исследуемого участка для угольных районов Донбасса вычисляется по формуле:

$$\eta = 0,96 \cdot \exp[-0,067 \cdot (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})] \cdot m \cos \alpha \cdot S(z_1) \cdot S(z_2), \quad (1)$$

где m – вынимаемая мощность пласта, м; $S(z_1)$, $S(z_2)$ – функция типичной кривой, определяемая по действующим "Правилами..." [4]; n_1 , n_2 – коэффициенты, рассчитываемые по формулам:

$$n_1 = \frac{M_i}{M_1} = \frac{M_i}{D_1} \cdot \frac{\sin(\psi_1 + \psi_2)}{\sin(\psi_1) \cdot \sin(\psi_2)} \leq 1, \quad n_2 = \frac{M_i}{M_2} = \frac{M_i}{D_2} \cdot \frac{2 \cos \alpha}{tg \psi_3} \leq 1, \quad (2)$$

где M_i – расстояние, измеряемое по нормали к наслоению от пласта до i -й расчетной точки массива или до i -го пересечения, параллельного наслоению, м; M_1 , M_2 – расстояния, измеряемые по нормали до наслоения от пласта до

вершины зоны полных сдвижений соответственно на разрезах вкрест и по простиранию, м; D_1, D_2 – размеры выработанного пространства соответственно вкрест и по простиранию пласта, м; ψ_1, ψ_2, ψ_3 – углы полных сдвижений, градус; α – угол падения пласта, градус.

Расчет относительных деформаций массива ε_z вдоль вертикальной оси проводится для участка массива между двумя соседними расчетными точками, по формуле:

$$\varepsilon_z = \frac{\eta_n - \eta_v}{\Delta H}, \quad (3)$$

где η_n, η_v – оседания соответственно нижней и верхней точки данного участка, м; ΔH – расстояние по вертикали между этими точками, м.

При использовании такой расчетной схемы все суммарные деформации массива (упругие и необратимые) интегрально отражаются в форме мульды сдвижений в различных сечениях массива.

В работе [9] получены определяющие соотношения, связывающие значения проницаемости пород с их напряженно-деформированным состоянием (НДС), учитывающие возможность деформирования пород за пределом прочности.

Согласно работе [10] схема получения аналитического выражения проницаемости может считаться универсальной и применительной к упругой среде, с изотропным конечным распределением систем трещин. Сначала выбирается некая эквивалентная модель среды, структура порового пространства которой соответствует усредненным геометрическим характеристикам порового пространства рассматриваемых типов горных пород. Затем используется какое-либо гидродинамическое соотношение, связывающее скорость течения флюида в единичном канале с градиентом давления.

Для описания порового пространства горных пород в нашем случае использовалась модель, характеризующаяся наличием различно ориентированных и сгруппированных в системы трещин. При этом в роли универсального гидродинамического соотношения, отражающего закономерности течения жидкостей и газов в щелевидных каналах, выступает уравнение Буссинеска, связывающее скорость течения в единичной трещине с проекцией градиента давлений на плоскость трещины.

Для нахождения средней скорости фильтрации необходимо проинтегрировать это уравнение по всем системам трещин. В этом случае, $a(n)$ – плотность распределения систем трещин, где n – вектор нормали к выбранной системе трещин. Тогда, полученный тензорный множитель, определяющий связь между вектором средней скорости фильтрации и градиентом давления, представляет по определению тензор проницаемости, который в нашем случае с учетом трещинной природы проницаемости имеет следующий вид:

$$K_0 = \frac{1}{12} \oint\!\!\!\oint_S g(n)(I - nn)ds, \quad (4)$$

где S – поверхность полусферы единичного радиуса; I – единичный тензор;

m – просветность системы трещин с нормалью n ; $a(n)$ – плотность систем трещин; $b(n)$ – раскрытие систем трещин; nn – векторная диада.

Тензорному множителю (4) отвечают три главных направления и три главных значения по этим направлениям.

Изменения проницаемости горных пород, вызванные необратимыми деформациями, не ограничиваются открытием уже существующих трещин и описываются следующей математической зависимостью:

$$K = \frac{1}{12} \iint_S [a(n) + \Delta a(\varepsilon^p)] L_n^2 (m_0 + \varepsilon_{nn})^3 (I - nn) dS, \quad (5)$$

где $\Delta a(\varepsilon^p)$ – дополнительное слагаемое в виде набора $\delta(\varepsilon^p)$ – функций для плоскостей сдвига; L_n – среднее расстояние между трещинами в системе; ε^p – необратимые деформации; ε_{nn} – деформации, перпендикулярные к системе трещин с нормалью n .

Эти соотношения являются дальнейшим обобщением результатов [10] на случай среды с произвольным распределением систем трещин и возможностью деформирования пород за пределом прочности. Следует отметить, что для слоистой среды тензор проницаемости (5) отвечает случаю трансверсальной изотропии относительно оси, нормальной к напластованию.

Влияние неравнокомпонентности напряжений с избытком превышает роль начальной анизотропии [9], что дает основание использовать уравнения (4) и (5) при постоянных g и m_0 .

Соотношения (4), (5) успешно использованы в [11] для оценки проницаемости надработанных горных пород, при их упругом восстановлении связанным с отработкой смежных защитных пластов. Для подработанных горных пород, попадающих в зону сдвижения, условия деформирования намного сложнее, т.к. они происходят за пределом прочности. При необратимом деформировании происходит значительное разрыхление материала, и деформации по некоторым направлениям становятся положительными и большими. В итоге зависимость проницаемости от напряжений становится весьма сложной и неоднозначной. Именно такой сложный и неоднозначный характер изменения проницаемости при переходе от до- к запределному деформированию фиксируется на практике [12]. Сравнение теоретических [1, 4] и экспериментальных данных [12], свидетельствует о том, что теория улавливает все качественные зависимости и порядки величин. Учитывая большой разброс экспериментальных данных при запределном деформировании, можно считать удовлетворительным и количественное согласие.

При отработке угольного пласта в его кровле образуется так называемая зона водопроводящих трещин (ЗВТ), которая наряду с выработанным пространством также должна учитываться при изучении процессов фильтрации при затоплении угольных шахт. Размеры этих зон зависят от многих параметров, но в среднем не превышают 60–70 м [13]. В некотором смысле эти зоны являются частью выработанного пространства т.к. принимают активное участие в формировании потоков в плоскости пласта. Поэтому при оценке фильтрационных

свойств выработанного пространства имеет смысл говорить о некоторой средней проницаемости выработанного пространства и ЗВТ.

На рис. 1 изображено распределение нормированной величины трансверсальной составляющей тензора проницаемости $k_n = k / k_0$ горных пород в вертикальном сечении, расположенном перпендикулярно простиранию целика, где k – расчетное значение, k_0 – исходное значение проницаемости. На рис. 1 по оси ординат в процентах от размеров ЗВТ (h) отложено расстояние по нормали от плоскости отработанного пласта до рассматриваемой точки, а по оси абсцисс отложено расстояние от некоторого фиксированного положения начала системы координат, расположенного в выработанном пространстве пласта, до расчетной точки. При этом левая граница целика расположена в точке с абсциссой равной 70 м, а правая граница целика расположена соответственно в точке с абсциссой 90 м ($70 + l$, где l – ширина целика).

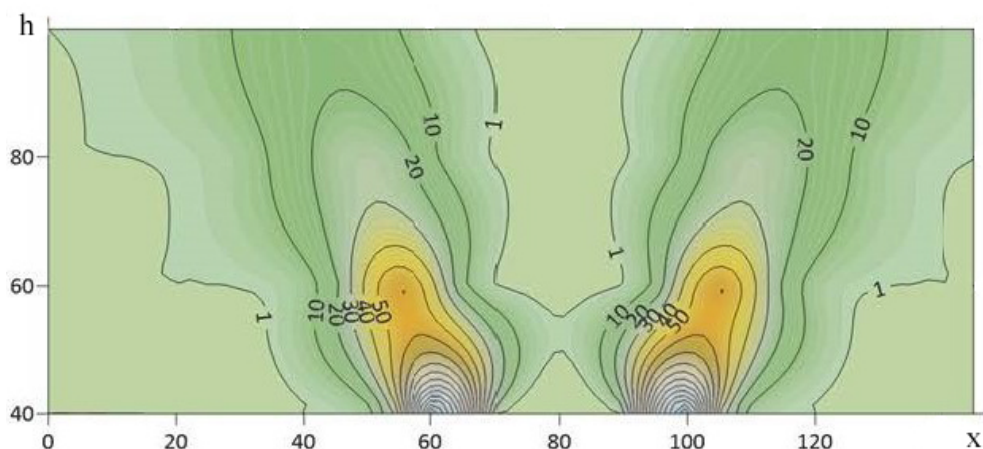


Рис. 1. Распределение нормированной трансверсальной составляющей тензора проницаемости горных пород подработанного массива в ЗВТ при ширине целика $l = 20$ м

Из полученных результатов следует, что вокруг целика в ЗВТ образуется зона выраженной фильтрационной неоднородности. Зоны знакопеременных деформаций, примыкающие справа и слева к краевым частям целика, сопровождаются существенным увеличением трансверсальной составляющей тензора проницаемости горных пород (на два порядка) по отношению к зонам полной подработки (плоского дна мульды сдвижений), которые расположены над выработанным пространством ($0 < x < 70$ и $90 < x < 140$). Зона массива, расположенная непосредственно над целиком ($70 < x < 90$), является зоной концентрации напряжений и характеризуется неоднозначными изменениям проницаемости. Зоны пониженной проницаемости (10^{-2}), возникающие непосредственно над целиком и на некотором удалении от него, исходя из своих размеров, оказывают заметное влияние на уменьшение общей проницаемости ЗВТ. Наличие таких зон уменьшает общую проницаемость ЗВТ, однако это уменьшение мало в силу малых

размеров этих зон. Кроме того, на некотором удалении от целика по нормали в сторону ЗВТ наблюдается рост трансверсальной составляющей тензора проницаемости. Такое поведение трансверсальной составляющей тензора проницаемости связано с малым размером целика и наложением полумульд сдвижения от выработанных пространств пласта, расположенных справа и слева от целика.

Как итог, относительные водоупоры, находящиеся в кровле барьерных целиков, при небольшом размере целика могут попасть в зону увеличения проницаемости. В этом случае водоупоры перестают быть защитными экранами и эффективность использования ненормативных целиков падает.

В зоне полных сдвижений (в плоском дне мульды сдвижений) $S(z_1)$ и $S(z_2)$ равны единице. Поэтому, согласно (3), при удалении от выработанного пространства распределение оседаний и деформаций имеют затухающий экспоненциальный характер. Такой характер распределения деформаций подтверждается теоретическими [14] и экспериментальными [12, 15, 16] данными. В плоскости отработанного пласта n_1, n_2 равны нулю, а на верхней границе ЗВТ в зоне полной подработки $n_1 = n_2 = h/H$ где h – высота ЗВТ, H – глубина разработки. Для больших глубин разработки ($H = 500$ м) эти величины n_1 и n_2 составляют 0,12–0,14. Таким образом, для пласта мощностью $m = 1,5$ м средняя величина нормальных к напластованию деформаций в ЗВТ, согласно (2) и (3) составит:

$$0,95 \times 10^{-3} < \varepsilon_{nn} < 1,25 \times 10^{-3}, \quad (6)$$

При подработке горных пород необратимые деформации локализуются в виде трещин в плоскости напластования и по нормали к напластованию [15, 16]. Однако при оценках последствий затопления угольных шахт важно иметь оценки проницаемости вдоль напластования (трансверсальную составляющую тензора) т.к. в этом направлении область фильтрации распространяется на несколько километров [17], а по нормали к напластованию она не превышает размеры ЗВТ.

При сильном преобладании одной из систем трещин (в нашем случае трещин вдоль напластования) уравнения (4) и (5) для трансверсальной составляющей существенно упрощаются и принимают следующий вид:

$$K = K_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_{nn}}{m_0} \right)^3, \quad (7)$$

где g и m_0 – постоянные. Первая характеризует проницаемость в разгруженном состоянии, а вторая равна абсолютной величине деформации сжатия, при которой проницаемость пород практически равна нулю. Для пород Донбасса эта величина деформации составляет не более 1 мм/м [14]. Подставляя полученную выше оценку нормальных к напластованию деформаций из (6) в (7) имеем следующий диапазон изменения проницаемости пород в зоне полных сдвижений:

$$K_0 \times 75 < K^* < K_0 \times 10^2.$$

Полученная оценка проницаемости горных пород выработанного пространства пласта в зонах полной подработки говорит о существенном изменении

фильтрационных свойств горных пород по сравнению с их свойствами в разгруженном состоянии. Отметим также, что сделанная теоретическая оценка проницаемости, в большинстве случаев не может быть получена даже с помощью сложных и дорогостоящих экспериментальных опытно-фильтрационных работ.

Выводы. Получены теоретические оценки пространственного распределения проницаемости подработанного массива на основе совместного моделирования НДС горных пород и изменений их проницаемости при необратимом деформировании. Установлено, что размеры барьерных целиков оказывают существенное влияние на формирование зон повышенной и пониженной проницаемости, определяя их гидроизоляционную эффективность. Показано, что разработанная методика позволяет выполнять количественную оценку влияния барьерных целиков на процессы подземной гидродинамики с учетом деформирования пород за пределом прочности. Получены оценки, согласно которым в зонах полных сдвижений проницаемость горных пород возрастает примерно на два порядка по сравнению с разгруженным состоянием и на три-четыре порядка относительно ненарушенного массива. Показано, что остальные виды фильтрационных неоднородностей могут быть представлены как суперпозиции зон влияния барьерных целиков и зон полных сдвижений. Полученные результаты могут быть использованы при построении региональных расчетных схем прогнозирования гидродинамических процессов, сопровождающих затопление угольных шахт.

Исследования выполнены в рамках научной темы FRSR-2024-0001 «Изучение геомеханических и геофильтрационных процессов в подработанных обводненных массивах».

Список литературы

1. *Шашенко А.Н.* Механика горных пород / А.Н. Шашенко. – Днепропетровск: Национальный горный университет. – 2002. – 302 с.
2. *Driban V.A.* Evaluation of changes in rock mass permeability due to long-time repeated mining / V.A. Driban, N.A. Dubrova // *Progressive technologies of coal, coalbed methane, and ores mining*. – 2014. – P. 167–174.
3. *Дрибан В.А.* Метод определения фильтрационных характеристик многократно подработанного массива / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // *Наукові праці УкрНДМІ НАН України*. – 2015. – № 15. – С. 192–208.
4. *ГСТУ 101.00159226.001-2003* Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01.01.2004. – 2004. – 128 с.
5. *Назаров Л.А.* Экспериментальное определение фильтрационных свойств трещиновато-пористых геоматериалов в рамках модели среды с двойной проницаемостью / Л.А. Назаров, Н.А. Голиков, А.А. Скулкин, Л.А. Назарова // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. – 2023. – № 4. – С. 11–23.
6. *Pandey R.K.* A robust deep structured prediction model for petroleum reservoir characterization using pressure transient test data / R.K. Pandey, A. Kumar, A. Mandal // *Petroleum Research*. – 2022. – Vol. 7, No. 2. – P. 204–219.
7. *Кулибаба С.Б.* Основные положения методики расчета вертикальных сдвижений и деформаций подрабатываемого горного массива / С.Б. Кулибаба // *Маркшейдерия и недропользование*. – 2019. – № 5. – С. 42–45.
8. *Кулибаба С.Б.* Оценка свойств техногенных коллекторов метана с учетом главных составляющих деформаций горного массива в зоне полных сдвижений / С.Б. Кулибаба, Е.Д. Хо-

- дырев // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – Вип. 13, ч. 1. – 2013. – С. 218–229.
9. Петухов И.М. Расчетные методы в механике горных ударов и выбросов / И.М. Петухов, А.М. Линьков, В.С. Сидоров, В.В. Зубков и др. // Справочное пособие. – М.: Недра, 1992. – 256 с.
 10. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород / Е.С. Ромм. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.
 11. Норватов Ю.А. Анализ и прогноз процесса дегазации при защитной надработке угольных пластов с учетом изменения их напряженно-деформированного состояния / Ю.А. Норватов, Е.Д. Ходырев // Инженерная геология. – 1989. – № 3. – С. 46–51.
 12. Ставрогин А.Н. Механика деформирования и разрушения горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1992. – 224 с.
 13. Норватов Ю.А. Изучение и прогноз техногенного режима подземных вод / Ю.А. Норватов. – Л.: Недра, 1988. – 260 с.
 14. Петухов И.М. Теория защитных пластов / И.М. Петухов, А.М. Линьков, В.С. Сидоров и др. – М.: Недра, 1974. – 214 с.
 15. Яхеев В.В. 2Методика определения площадей и объема полостей расслоения в кровле горных выработок (полостей Вебера) с помощью глубинных реперов / В.В. Яхеев // Маркшейдерский вестник. – 2013. – № 4. – С. 5–6.
 16. Zhang L. Surface Subsidence Monitoring of Mining Areas in Hunan Province Based on Sentinel-1A and DS-InSAR / L. Zhang, P. Gao, Z. Gan, W. Wu, Y. Sun, C. Zhu, S. Long, M. Liu, H. Peng // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No. 19, Article 8146. – DOI: 10.3390/s23198146.
 17. Ходырев Е.Д. Эффективная модель фильтрации в гетерогенных напорных пластах / Е.Д. Ходырев, В.В. Трофимов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2025. – № 6. – С. 64–72.

E.D. Khodyrev, V.V. Trofymov, M.V. Gordienko

Assessment of the filtration properties of the mined-out space of worked-out coal seams.

The task for theoretical assessment of undermined rocks filtration properties is considered in the Article. The research topicality derives from the need to improve the accuracy in predicting hydrodynamic processes associated with coal mining enterprises mothballing and abandonment, including area flooding, changes in water inflows, and groundwater contamination. A mathematical approach has been developed, which is based on concurrent simulation of the stress-and-strain state of the rock mass and the changes in its permeability while taking into account the irreversible deformation of rocks beyond their break-down point. The estimates have been obtained on the permeability distribution within the most significant filtration heterogeneity zones – within the barrier pillars influenced areas and within total displacement zones. It has been established that pillars size has a significant impact on the formation of hyper- and hypo-permeability zones, which determines their damp-proofing function efficiency. It has been shown that at totally undermined areas, rocks permeability is about two-orders-of-magnitude increased compared to that of their relaxed state and by three-quarter-orders-of-magnitude compared to that of the undisturbed mass. It is noted that other types of filtration heterogeneities can be represented as a superposition of the zones studied.

Keywords: *developed space, permeability, zones of complete shear, zones of water-conducting fractures, filtration, stress-strain state, irreversible deformations..*

References

1. Shashenko, A.N. (2002). *Rock Mechanics*. Dnipropetrovsk: National Mining University. 302 p. (In Russian).
2. Driban, V.A., & Dubrova, N.A. (2014). Evaluation of changes in rock mass permeability due

- to long-time repeated mining. In *Progressive Technologies of Coal, Coalbed Methane, and Ores Mining* (pp. 167–174).
3. Driban, V.A., & Dubrova, N.A. (2015). [Method for determining the filtration characteristics of repeatedly undermined rock mass]. *Naukovi Pratsi UkrNDMI NAN Ukrainy = Scientific Proceedings of UkrNDMI of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 15, 192–208. (In Russian).
 4. GSTU 101.00159226.001-2003. (2004). *Rules for Undermining Buildings, Structures, and Natural Objects During Underground Coal Mining*. 128 p. (In Russian).
 5. Nazarov, L.A., Golikov, N.A., Skulkin, A.A., & Nazarova, L.A. (2023). [Experimental determination of the filtration properties of fractured-porous geomaterials within the framework of a dual-permeability medium model]. *Journal of Mining Science*, 4, 11–23. (In Russian).
 6. Pandey, R.K., Kumar, A., & Mandal, A. (2022). A robust deep structured prediction model for petroleum reservoir characterization using pressure transient test data. *Petroleum Research*, 7(2), 204–219.
 7. Kulibaba, S.B. (2019). [Fundamental principles of the method for calculating vertical displacements and deformations of an undermined rock mass]. *Marksheideriya i Nedropol'zovanie = Mine Surveying and Subsurface Management*, 5, 42–45. (In Russian).
 8. Kulibaba, S.B., & Khodyrev, E.D. (2013). [Assessment of the properties of technogenic methane reservoirs with allowance for the principal components of rock-mass deformation in the zone of complete subsidence]. *Naukovi Pratsi UkrNDMI NAN Ukrainy = Scientific Proceedings of UkrNDMI of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 13(1), 218–229. (In Russian).
 9. Petukhov, I.M., Lin'kov, A.M., Sidorov, V.S., Zubkov, V.V., et al. (1992). *Computational Methods in the Mechanics of Rock Bursts and Outbursts: A Handbook*. Moscow: Nedra. 256 p. (In Russian).
 10. Romm, E.S. (1985). *[Structural Models of the Pore Space of Rocks]*. Leningrad: Nedra. 240 p. (In Russian).
 11. Norvatov, Yu.A., & Khodyrev, E.D. (1989). [Analysis and prediction of the degassing process during protective overmining of coal seams with allowance for changes in their stress–strain state]. *Inzhenernaya Geologiya = Engineering Geology*, 3, 46–51. (In Russian).
 12. Stavrogin, A.N., & Protosenya, A.G. (1992). *Mechanics of Deformation and Failure of Rocks*. Moscow: Nedra. 224 p. (In Russian).
 13. Norvatov, Yu.A. (1988). *Investigation and Prediction of the Technogenic Regime of Groundwater*. Leningrad: Nedra. 260 p. (In Russian).
 14. Petukhov, I.M., Lin'kov, A.M., Sidorov, V.S., et al. (1974). *Theory of Protective Seams*. Moscow: Nedra. 214 p. (In Russian).
 15. Yakheev, V.V. (2013). [Method for determining the area and volume of roof delamination cavities in mine workings (Weber cavities) using deep benchmarks]. *Marksheiderskii Vestnik = Mine Surveying Bulletin*, 4, 5–6. (In Russian).
 16. Zhang, L., Gao, P., Gan, Z., Wu, W., Sun, Y., Zhu, C., Long, S., Liu, M., & Peng, H. (2023). Surface subsidence monitoring of mining areas in Hunan Province based on Sentinel-1A and DS-InSAR. *Sensors*, 23(19), Article 8146. DOI: 10.3390/s23198146
 17. Khodyrev, E. D., & Trofimov, V. V. (2025). [An efficient filtration model for heterogeneous confined aquifers]. *Journal of Mining Science*, 6, 64–72. (In Russian).

Поступила в редакцию / Original submitted 26.06.2026.

Доработана / Revision submitted 17.08.2026.

Рекомендована к печати / Accepted 22.09.2026.

**ФГБОУ ВО
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ЖУРНАЛ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ**

Научный журнал

Основан в 1970 г

№ 3 (96) / 2026

Подписано к изданию 28.09.2026

**ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
(83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24;
тел.: технический редактор: +7 856 302 92 71,
тел.: ответственный секретарь: +7 856 302 92 71,
e-mail: jtam_donnu@mail.ru,
URL: <http://donnu.ru/jtam>, <http://dongu-jtam.ru/>)**