

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 4 (93)

2025

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. **A.V. Анциферов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **A.O. Ватулян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Д.В. Георгиевский**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцов**, д-р техн. наук, проф. **Н.Н. Грищенков**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Зыза**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.А. Илюхин**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносевич**, д-р физ.-мат. наук, доц. **А.В. Мазнев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Мущанов**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Р.Н. Нескородев**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыш**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Н. Соловьев**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **С.Н. Царенко**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of phys. and math., prof. **D.V. Georgievskiy**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of tech., prof. **N.N. Grishchenkov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Zyza**, Dr. of phys. and math., prof. **A.A. Ilyukhin**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., docent **A.V. Maznev**, Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of phys. and math., docent **R.N. Neskorodev**, Dr. of tech., prof. **V.N. Pavlysh**, Dr. of phys. and math., prof. **A.N. Soloviev**, Dr. of tech., docent **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., docent **S.N. Tsarenko**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки). Квартиль К2 с 23.05.2025. Журнал включен в актуальную версию Единого государственного перечня научных изданий («Белый список» научных журналов) – 4 уровень.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 230-11/2025 от 17 ноября 2025 г.).

Утверждено к изданию ученым советом

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

№ 4 (93) / 2025

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

- Гордеев Г.Г.* Применение теории конечных поворотов в кинетической аналогии между задачами равновесия криволинейных упругих стержней и движения гиростата 5

Механика деформируемого твердого тела

- Авдюшина Е.В., Нескородев Р.Н.* Исследование напряженного состояния горного полупространства с горизонтальной выработкой криволинейного сечения и разгрузочными щелями обобщенным методом наименьших квадратов 17
- Глухова Ж.Л.* О формоизменении наводороженных палладиевых пластин в процессе их дегазации 29
- Калоеров С.А., Сероштанов А.В., Вовк Л.П.* Электроупругое состояние многосвязной пьезополосы при ее поперечном изгибе 35
- Гольцев А.С.* Компьютерная модель сосредоточенного воздействия продольной силы в изотропных сферических оболочках 48
- Калоеров С.А., Ермаков О.Э., Вовк Л.П.* Поперечный изгиб электроупругой кусочно-однородной тонкой пьезоплиты 60
- Глушанков Е.С.* Влияние дефектов типа трещин на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинок из пьезоматериалов. I 72
- Дзундза А.И., Мельничук Н.Ю., Моисеенко И.А., Нескородев Р.Н.* Исследование неосесимметричных нормальных волн в полых цилиндрах с многофакторной функциональной радиальной неоднородностью изотропного материала 86
- Звойчинская Э.Б., Лавриков Г.Е.* Математическое моделирование масштабно-структурного разрушения при одноосном нагружении титановых сплавов во всем диапазоне асимметрии цикла 107

**Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

<i>Авдюшина Е.В., Полянский Д.Д., Сторожев С.В.</i> Нечетко-множествен- ный расчетный анализ параметрически неопределенных моделей термоупруго- го деформирования закрепленных по граням электропроводящих пластин при индукционном нагреве	131
Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэrogазодинамика и горная теплофизика	
<i>Грищенков Н.Н., Бардакова Е.А., Скаженик В.Б.</i> Методика прогноза параметров активизации затопления горных выработок с учетом гео- технических и горно-геологических факторов	140
<i>Аленичев В.М., Криницын Р.В.</i> Методология определения достоверно- сти напряжений на контуре горной выработки методом щелевой раз- грузки	148

C O N T E N T S

Rigid Body Dynamics

- Gordieiev G.G.* Application of the theory of finite rotations in the kinetic analogy between the problems of equilibrium of curvilinear elastic rods and the motion of a gyrostat 5

Solid Mechanics

- Avdyushina E.V., Neskorochev R.N.* Stress state analysis of a geological half-space with a horizontal working of curvilinear cross-section and relief slots using the generalized least-squares method 17
- Glukhova Zh.L.* On the shape changes of hydrogenated palladium plates during their degasation 29
- Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V., Vovk L.P.* Electroelastic state of a multiply connected piezostrip under its transverse bending 35
- Goltsev A.S.* Computer model of concentrated longitudinal force action in isotropic spherical shells 48
- Kaloerov S.A., Ermakov O.E., Vovk L.P.* Transverse bending of an electroelastic piecewise homogeneous thin piezoplate 60
- Glushankov E.S.* The effect of crack-type defects on the thermo-electro-magneto-elastic state of piezo-electric plates. I 72
- Dzundza A.I., Melnichuk N.I., Moiseyenko I.A., Neskorochev R.N.* Study of non-axisymmetric normal waves in hollow cylinders with multifactorial functional radial inhomogeneity of an isotropic material 86
- Zavoychinskaya E.B., Lavrikov G.E.* Mathematical modeling of scale-structural failure at uniaxial loading of titanium alloys with cycle asymmetry 107

**Mathematical Modeling,
Numerical Methods and Program Complexes**

<i>Avdyushina E.V., Polyansky D.D., Storozhev S.V.</i> Fuzzy-set computational analysis of parametrically uncertain models of thermoelastic deformation of electrically conductive plates fixed along the edges under inductive heating ..	131
Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics	
<i>Grishchenkov N.N., Bardakova E.A., Skazhenik V.B.</i> Methodology for predicting the parameters of activation of flooding of mine workings taking into account geotechnical and mining-geological factors	140
<i>Alenichev V.M., Krinitsyn R.V.</i> Methodology for determining the strength of rock massif rocks under gravitational and tectonic stress conditions	148

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.381; 531.39; 539.6

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-5-16

EDN:XZKOVZ



©2025. Г.Г. Гордеев¹

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ В КИНЕТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ РАВНОВЕСИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

Рассмотрена кинетическая аналогия Кирхгофа между задачами равновесия прямолинейных упругих стержней под действием концевых усилий и движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Рассмотрено распространение этой аналогии на задачи равновесия криволинейных упругих стержней и движения гиростата (кинетическая аналогия Кирхгофа–Лармора). Приведены необходимые сведения из теории конечных поворотов. Уравнения аналогий записаны в компонентах вектора конечного поворота в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.

Ключевые слова: кинетический момент, криволинейный стержень, деформация, гиростат, вектор конечного поворота.

Введение. В научных исследованиях часто используются аналогии. Аналогии основаны на одинаковых уравнениях, описывающих разные модели, в том числе и механические, при этом физический смысл величин в разных задачах различный. Наиболее известны электромеханические аналогии, то есть аналогии между механическими, электрическими и акустическими системами. Они основаны на уравнениях, описывающих колебательные процессы, которые достаточно хорошо изучены. Аналогии позволяют использовать результаты исследования известной модели для изучения неизвестных явлений. Такой подход называют методом аналогий. Аналогии существуют не только между физическими явлениями, но и между задачами, например, физики и биологии, даже экономики.

В работе рассматривается известная аналогия Кирхгофа между задачей о конечных деформациях прямолинейных стержней под действием концевых уси-

¹Гордеев Георгий Григорьевич – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отд. технической механики ИПММ, Донецк, e-mail: gordeev_g_g@mail.ru.

Gordieiev Georgie Grigorywich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Technical Mechanics.

лий и задачей о движении твердого тела с неподвижной точкой. Рассматривается распространение этой аналогии на задачи о конечных деформациях криволинейных стержней и движения гиростата (аналогия Кирхгофа в форме Лармора).

Для составления уравнений аналогии Кирхгофа–Лармора в качестве независимых величин используются компоненты вектора конечного поворота, являющегося инвариантным по отношению к выбору подвижной системы отсчета.

1. Постановка задачи. Уравнения кинетической аналогии Кирхгофа. Уравнения кинетической аналогии Кирхгофа записаны в компонентах вектора конечного поворота в работе [1]. Ставится задача представления уравнений распространенной аналогии Кирхгофа (аналогии Кирхгофа–Лармора) между нелинейной теорией криволинейных стержней и задачей о движении гиростата в компонентах вектора конечного поворота.

Кирхгоф создал нелинейную теорию конечных деформаций тонких прямолинейных стержней [2]. Им доказана теорема, утверждающая, что уравнения равновесия прямолинейного упругого стержня под действием концевых сил совпадают по форме с уравнениями движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Эта теорема получила название кинетической аналогии Кирхгофа [2].

Первое применение этой теоремы связано с задачей нахождения формы равновесия тонкого прямолинейного стержня для случая, когда его ось и упругая линия плоские. Кинетическим аналогом такого стержня будет физический маятник, который вращается вокруг неподвижной оси в вертикальной плоскости под действием силы тяжести [3]. Это – известная задача об эластике, которую впервые решил Эйлер [3]. Приведем в векторном виде уравнения кинетической аналогии Кирхгофа.

Нелинейные уравнения равновесия, описывающие конечные деформации прямолинейного тонкого стержня силами и парами сил, приложенными на его концах, имеют вид [2, 4]:

$$\frac{\tilde{d}\bar{L}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L} = P\bar{e} \times \bar{\gamma}, \quad (1)$$

$$\bar{L} = A\bar{\omega}, \quad (2)$$

$$\frac{\tilde{d}\bar{\gamma}}{dt} = \bar{\gamma} \times \bar{\omega}. \quad (3)$$

В этих уравнениях t – длина дуги упругой линии стержня; \bar{L} – его главный момент внутренних сил в поперечном сечении; P – модуль главного вектора концевых сил, направленный по центральной оси этих сил, единичный вектор которой $\bar{\gamma}$; \bar{e} – единичный вектор касательной к упругой линии; вектор $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости трехгранника главных осей кручения и изгиба стержня при перемещении его начала вдоль упругой линии; знак \sim означает дифференцирование в этих осях; A – матрица жесткостей стержня, вычисляемая с использованием упругих констант материала изотропного или анизотропного стержня.

Уравнения (1)–(3) называются уравнениями Кирхгофа [2].

Если обозначить единичные векторы главных осей кручения и изгиба стержня через $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, вектор $\bar{\omega}$ можно записать в виде [3]:

$$\bar{\omega} = -k \cos \chi \bar{e}_1 + k \sin \chi \bar{e}_2 + (\varkappa + \frac{d\chi}{dt}) \bar{e}_3, \quad (4)$$

где k, \varkappa – кривизна и кручение упругой линии, а χ – угол закручивания стержня.

Такими же уравнениями (1)–(3) описывается движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Фигурирующие в (1)–(3) величины в этом случае имеют следующий смысл: t – время; \bar{L} – момент количества движения твердого тела относительно неподвижной точки; $\bar{\gamma}$ – единичный вектор вертикали; \bar{e} – единичный вектор радиуса-вектора \bar{r}_c центра масс тела в неподвижной точке ($\bar{e} = \bar{r}_c / |\bar{r}_c|$); $P = mg|\bar{r}_c|$; m – масса тела, g – ускорение свободного падения; $\bar{\omega}$ – угловая скорость тела; знак \sim означает дифференцирование в осях, связанных с телом; A – матрица моментов инерции тела.

Уравнения (1)–(3) – это уравнения Эйлера движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

2. Уравнения распространенной аналогии Кирхгофа (аналогии Кирхгофа–Лармора). Кирхгофом и Клебшем создана нелинейная теория конечных деформаций тонких криволинейных стержней [3].

Распространение теоремы Кирхгофа о кинетической аналогии на стержни, имеющие кривизну и кручение в первоначальном недеформированном состоянии (криволинейные стержни) осуществил Лармор (1864) [3]. Он установил, что уравнения равновесия криволинейного стержня совпадают с уравнениями движения тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой, который представляет систему двух твердых тел. Одно тело вращается относительно неподвижной точки (несущее тело); другое тело вращается относительно оси, неизменно связанной с первым телом (несомое тело), при этом несомых тел может быть несколько.

Теорема Кирхгофа о кинетической аналогии может быть распространена на криволинейные стержни, имеющие в недеформированном состоянии постоянные кривизну и кручение. Это условие выполняется для, например, непризматического стержня, в котором соответствующие линии сечения лежат на винтовой поверхности, или когда ось стержня – дуга окружности и стержень не закручен, или когда ось стержня – винтовая линия, а кручение таково, что он вновь станет призматическим, если устраниТЬ изгиб [3]. Возможны и другие случаи.

Распространение кинетической аналогии Кирхгофа на криволинейные стержни можно назвать кинетической аналогией Кирхгофа–Лармора.

Приведём уравнения этой аналогии. Нелинейные уравнения, описывающие конечные деформации криволинейных стержней силами и парами сил, приложенных на его концах, имеют вид [3]:

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \bar{L} + \bar{\omega} \times \bar{L} = P \bar{e} \times \bar{\gamma}, \quad (5)$$

$$\bar{L} = A\bar{\omega} + \bar{\lambda}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\gamma} = \bar{\gamma} \times \bar{\omega}. \quad (7)$$

В этих уравнениях величины $t, \bar{L}, \bar{\gamma}, \bar{e}, A, \bar{\omega}$ имеют тот же смысл, что и в уравнениях (1)–(3). Вектор $\bar{\lambda}$ характеризует криволинейность стержня в недеформированном состоянии. Выражение для упругого момента (6) получено Клебшем [3]:

$$\bar{\lambda} = -A\bar{\omega}_0, \quad (8)$$

где $\bar{\omega}_0$ – вектор угловой скорости трехгранника x_0, y_0, z_0 , образуемого главными центральными осями поперечного сечения стержня и касательной при движении его начала по оси стержня в недеформированном состоянии с единичной скоростью

$$\bar{\omega}_0 = -k_0 \cos \chi_0 \bar{e}_{10} + k_0 \sin \chi_0 \bar{e}_{20} + (\varkappa_0 + \frac{d\chi_0}{dt}) \bar{e}_3, \quad (9)$$

где k_0, \varkappa_0 – кривизна и кручение недеформированной оси; ось x_0 образует с нормалью угол, равный $\frac{\pi}{2} - \chi_0$, а $\bar{e}_{10}, \bar{e}_{20}, \bar{e}_{30}$ – единичные векторы осей x_0, y_0, z_0 .

Такими же уравнениями (5)–(7) описывается движение тяжёлого гиростата с неподвижной точкой [5, 6]. В этих уравнениях \bar{L} – момент количества движения гиростата относительно неподвижной точки; $\bar{\omega}$ – угловая скорость несущего тела; A – матрица моментов инерции гиростата относительно его центра масс C ; $\bar{\gamma}$ – единичный вектор вертикали; \bar{e} – единичный вектор радиус-вектора центра масс гиростата с началом в неподвижной точке C . Вектор $\bar{\lambda}$, называемый гиростатическим моментом, имеет вид [6]:

$$\bar{\lambda} = I_1 \omega_1 \bar{e}_1, \quad (10)$$

где I_1 – момент инерции несомого тела относительно оси вращения; ω_1 – его угловая скорость; \bar{e}_1 – единичный вектор оси вращения в случае, когда гиростат имеет одно несомое тело. Если несомых тел n , то

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n A_i \omega_i \bar{e}_i, \quad (11)$$

где A_i – момент инерции i -того несомого тела; ω_i – его угловая скорость; \bar{e}_i – единичный вектор его оси вращения.

3. Вектор конечного поворота и его компонеты. Уравнения, описывающие конечные деформации криволинейного упругого стержня под действием концевых усилий и движение гиростата, в гамильтоновой форме были записаны в компонентах вектора конечного поворота в работе [7]. В настоящей работе эти уравнения представлены в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.

Согласно теореме Эйлера, произвольное перемещение твёрдого тела с неподвижной точкой может быть осуществлено одним поворотом вокруг оси вращения, проходящей через эту точку. Формула, связывающая радиус-вектор \bar{r} до поворота и радиус-вектор этой точки \bar{R} после поворота, получена Родригом [8] и имеет вид:

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\theta^2} \bar{\theta} \times (\bar{r} + \frac{1}{2}\bar{\theta} \times \bar{r}). \quad (12)$$

Вектор

$$\bar{\theta} = 2\bar{n} \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \quad (13)$$

называется вектором конечного поворота Родрига. Здесь \bar{n} – единичный вектор оси поворота; χ – угол поворота [8]. Вектор $\bar{\theta}$ имеет равные проекции на неподвижные оси с базисом $\bar{e}_{10}, \bar{e}_{20}, \bar{e}_{30}$ и подвижные оси с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$\bar{\theta} = \tilde{\theta}_1 \bar{e}_{10} + \tilde{\theta}_2 \bar{e}_{20} + \tilde{\theta}_3 \bar{e}_{30}, \quad (14)$$

$$\bar{\theta} = \theta_1 \bar{e}_1 + \theta_2 \bar{e}_2 + \theta_3 \bar{e}_3, \quad (15)$$

то есть компоненты вектора конечного поворота есть инварианты по отношению к выбору системы отсчёта:

$$\theta_1 = \tilde{\theta}_1, \quad \theta_2 = \tilde{\theta}_2, \quad \theta_3 = \tilde{\theta}_3. \quad (16)$$

Модуль вектора конечного поворота

$$\theta = |\bar{\theta}| = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2, \quad (17)$$

или

$$\theta = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}. \quad (18)$$

Единичные базисы подвижной системы координат имеют вид [8]

$$\bar{e}_k = \bar{e}_{k0} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\theta^2} \times (\bar{e}_{k0} + \frac{1}{2}\bar{\theta} \times \bar{e}_{k0}). \quad (19)$$

Базисы неподвижной и подвижной системы координат связаны с помощью матрицы направляющих косинусов C :

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \bar{e}_{10} \\ \bar{e}_{20} \\ \bar{e}_{30} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{11} &= c \left[1 + \frac{1}{4}(2\theta_1^2 - \theta^2) \right], & c_{12} &= c \left(\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 \right), & c_{13} &= c \left(-\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3 \right), \\ c_{21} &= c \left(-\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_1 \right), & c_{22} &= c \left[1 + \frac{1}{4}(2\theta_2^2 - \theta^2) \right], & c_{23} &= c \left(\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3 \right), \\ c_{31} &= c \left(\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_3\theta_1 \right), & c_{32} &= c \left(-\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_3\theta_2 \right), & c_{33} &= c \left[1 + \frac{1}{4}(2\theta_3^2 - \theta^2) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$c = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\theta^2}. \quad (23)$$

Вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ тела–носителя гиростата (вектор кривизны в теории стержней) имеет вид:

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{c}_{21}c_{31} + \dot{c}_{22}c_{32} + \dot{c}_{23}c_{33}, \\ \omega_2 &= \dot{c}_{31}c_{11} + \dot{c}_{32}c_{12} + \dot{c}_{33}c_{13}, \\ \omega_3 &= \dot{c}_{11}c_{21} + \dot{c}_{12}c_{22} + \dot{c}_{13}c_{23}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив элементы матрицы направляющих косинусов C и их производные по t , получим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= c(\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\theta_3\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}\theta_2\dot{\theta}_3), \\ \omega_2 &= c(-\frac{1}{2}\theta_3\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\theta_1\dot{\theta}_3), \\ \omega_3 &= c(\frac{1}{2}\theta_2\dot{\theta}_1 - \frac{1}{2}\theta_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3). \end{aligned} \quad (26)$$

Эти соотношения можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где Ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix}; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= c, & \Omega_{12} &= \frac{1}{2}c\theta_3, & \Omega_{13} &= -\frac{1}{2}c\theta_2, \\ \Omega_{21} &= -\frac{1}{2}c\theta_3, & \Omega_{22} &= c, & \Omega_{23} &= \frac{1}{2}c\theta_1, \\ \Omega_{31} &= \frac{1}{2}c\theta_2, & \Omega_{32} &= -\frac{1}{2}c\theta_1, & \Omega_{33} &= c. \end{aligned} \quad (29)$$

Можно выразить из уравнения (27) $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \Omega^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где Ω^{-1} – обратная матрица матрицы Ω

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega'_{11} & \Omega'_{12} & \Omega'_{13} \\ \Omega'_{21} & \Omega'_{22} & \Omega'_{23} \\ \Omega'_{31} & \Omega'_{32} & \Omega'_{33} \end{pmatrix}; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Omega'_{11} &= 1 + \frac{1}{4}\theta_1^2, & \Omega'_{12} &= \frac{1}{2}(-\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2), & \Omega'_{13} &= \frac{1}{2}(\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3), \\ \Omega'_{21} &= \frac{1}{2}(\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2), & \Omega'_{22} &= 1 + \frac{1}{4}\theta_2^2, & \Omega'_{23} &= \frac{1}{2}(-\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3), \\ \Omega'_{31} &= \frac{1}{2}(-\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3), & \Omega'_{32} &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3), & \Omega'_{33} &= 1 + \frac{1}{4}\theta_3^2. \end{aligned} \quad (32)$$

В координатной форме уравнения (30) имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= (1 + \frac{1}{4}\theta_1^2)\omega_1 + \frac{1}{2}(-\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2)\omega_2 + \frac{1}{2}(\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3)\omega_3, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{1}{2}(\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2)\omega_1 + (1 + \frac{1}{4}\theta_2^2)\omega_2 + \frac{1}{2}(-\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3)\omega_3, \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{1}{2}(-\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3)\omega_1 + \frac{1}{2}(\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3)\omega_2 + (1 + \frac{1}{4}\theta_3^2)\omega_3. \end{aligned} \quad (33)$$

4. Уравнения аналогии в компонентах вектора конечного поворота.

Векторные уравнения равновесия криволинейного упругого стержня под действием концевых нагрузок или уравнения движения гиростата (5)–(7) можно записать в координатной форме в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= b_1\omega_2\omega_3 + a_1(\lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 - \dot{\lambda}_1) + P_1c_{23}, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= b_2\omega_1\omega_3 + a_2(\lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 - \dot{\lambda}_2) - P_2c_{13}, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= b_3\omega_1\omega_2 + a_3(\lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 - \dot{\lambda}_3), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{A_1}, & a_2 &= \frac{1}{A_2}, & a_3 &= \frac{1}{A_3}, \\ b_1 &= \frac{A_2 - A_3}{A_1}, & b_2 &= \frac{A_3 - A_1}{A_2}, & b_3 &= \frac{A_1 - A_2}{A_3}, \\ P_1 &= \frac{P}{A_1}, & P_2 &= \frac{P}{A_2}, & P_3 &= \frac{P}{A_3}. \end{aligned} \quad (35)$$

С помощью соотношений (22), (26), (35) правые части уравнений (34) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_k = & c^2(a_{k1}x_1^2 + a_{k2}x_2^2 + a_{k3}x_3^2 + a_{k4}x_1x_2 + a_{k5}x_1x_3 + a_{k6}x_2x_3 + \\ & + b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + b_{k3}x_3 + n_k) \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$x_1 = \dot{\theta}_1, \quad x_2 = \dot{\theta}_2, \quad x_3 = \dot{\theta}_3. \quad (37)$$

Величины a_{ki} ($k = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) и b_{ki}, n_k ($k, i = 1, 2, 3$) являются функциями компонент вектора конечного поворота $\theta_1, \theta_2, \theta_3$:

$$\begin{aligned} a_{11} = & -\frac{1}{4}b_1\theta_2\theta_3, \quad a_{12} = -\frac{1}{2}b_1\theta_1, \quad a_{13} = \frac{1}{2}b_1\theta_1, \\ a_{14} = & \frac{1}{2}b_1(b_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3), \quad b_{15} = \frac{1}{2}b_1(-\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2), \quad a_{16} = b_1(1 - \frac{1}{4}\theta_1^2), \\ b_{11} = & \frac{1}{2}a_1(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3), \quad b_{12} = -a_1(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\frac{1}{2}\lambda_2\theta_1 + \lambda_3), \\ b_{13} = & a_1(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\lambda_2 - \lambda_3\theta_1), \quad n_1 = P_1(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(-\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_3) - \\ & - a_1(1 + \frac{1}{4}\theta^2)^2\dot{\lambda}_1; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} a_{21} = & \frac{1}{2}b_2\theta_2, \quad a_{22} = -\frac{1}{4}b_2\theta_1\theta_3, \quad a_{23} = -\frac{1}{2}b_2\theta_2, \\ a_{24} = & \frac{1}{2}b_2(-\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3), \quad a_{25} = b_2(1 - \frac{1}{4}\theta_2^2), \quad a_{26} = \frac{1}{2}b_2(-\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2), \\ b_{21} = & a_2(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1\theta_2), \quad b_{22} = \frac{1}{2}a_2(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\lambda_2\theta_3 + \lambda_1\theta_1), \\ b_{23} = & -a_2(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\frac{1}{2}\theta_2\lambda_2 + \lambda_1), \\ n_2 = & P_2(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\theta_2 - \frac{1}{2}\theta_1\theta_3) - a_2(1 + \frac{1}{4}\theta^2)^2\dot{\lambda}_2; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} a_{31} = & -\frac{1}{2}b_3\theta_3, \quad a_{32} = \frac{1}{2}b_3\theta_3, \quad a_{33} = -\frac{1}{4}b_3\theta_1\theta_2, \\ a_{34} = & b_3(1 - \frac{1}{4}\theta_3^2), \quad a_{35} = \frac{1}{2}b_3(\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2)\theta_3, \quad a_{36} = \frac{1}{2}b_3(-\frac{1}{2}\theta_1\theta_2), \\ b_{31} = & -a_3(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\lambda_1\theta_3 + \lambda_2), \quad b_{32} = a_3(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2\theta_3), \end{aligned} \quad (40)$$

$$b_{33} = \frac{1}{2}a_3(1 + \frac{1}{4}\theta^2)(\theta_1\lambda_1 - \theta_2\lambda_2),$$

$$n_3 = -a_3(1 + \frac{1}{4}\theta^2)^2\dot{\lambda}_3.$$

С помощью соотношений (27), (28) выразим $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ через x_1, x_2, x_3 и

$$\ddot{\theta}_1 = \dot{x}_1, \quad \ddot{\theta}_2 = \dot{x}_2, \quad \ddot{\theta}_3 = \dot{x}_3, \quad (41)$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= c(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\theta_3\dot{x}_2 - \frac{1}{2}\theta_2\dot{x}_3) + \frac{\dot{c}}{c}\omega_1, \\ \dot{\omega}_2 &= c(-\frac{1}{2}\theta_3\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \frac{1}{2}\theta_1\dot{x}_3) + \frac{\dot{c}}{c}\omega_2, \\ \dot{\omega}_3 &= c(\frac{1}{2}\theta_2\dot{x}_1 - \frac{1}{2}\theta_1\dot{x}_2 + \dot{x}_3) + \frac{\dot{c}}{c}\omega_3, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\dot{c} = -\frac{1}{2}c^2(\theta_1x_1 + \theta_2x_2 + \theta_3x_3). \quad (43)$$

В матричном представлении уравнения (42) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \frac{\dot{c}}{c} \Omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \Omega' \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} - \frac{\dot{c}}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где обратная матрица $\Omega' = \Omega^{-1}$ вычисляется по формулам (31), (32).

Вычислим первое слагаемое в правой части последнего уравнения, обозначив его

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \Omega' \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

В результате вычислений получим величины

$$\begin{aligned} g_k &= c^2(p'_{k1}x_1^2 + p'_{k2}x_2^2 + p'_{k3}x_3^2 + p'_{k4}x_1x_2 + p'_{k5}x_1x_3 + p'_{k6}x_2x_3 + \\ &\quad + q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + q_{k3}x_3 + n_k) \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} p'_{km} &= \sum_{i=1}^3 \Omega'_{ki} a_{im}, \\ q_{km} &= \sum_{i=1}^3 \Omega'_{ki} b_{im}, \\ n_k &= \sum_{i=1}^3 \Omega'_{ki} n_i. \end{aligned} \quad (47)$$

Второе слагаемое в уравнении (44) обозначим

$$\begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{pmatrix} = -\frac{\dot{c}}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Подставив \dot{c} по формуле (43), представим g'_k ($k = 1, 2, 3$) в виде

$$g'_k = c^2(p_{k1}^1 x_1^2 + p_{k2}^1 x_2^2 + p_{k3}^1 x_3^2 + p_{k4}^1 x_1 x_2 + p_{k5}^1 x_1 x_3 + p_{k6}^1 x_2 x_3), \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_1, & p_{12}^1 &= 0, & p_{13}^1 &= 0, \\ p_{14}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_2, & p_{15}^1 &= -\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta_3^2), & p_{16}^1 &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} p_{21}^1 &= 0, & p_{22}^1 &= -\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_2, & p_{23}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_3, \\ p_{24}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_1, & p_{25}^1 &= 0, & p_{26}^1 &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} p_{31}^1 &= 0, & p_{32}^1 &= 0, & p_{33}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_3, \\ p_{34}^1 &= 0, & p_{35}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_1, & p_{36}^1 &= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\theta^2)\theta_2. \end{aligned} \quad (52)$$

Введём обозначения

$$p_{km} = p'_{km} + p_{km}^1 \quad (k = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \quad (53)$$

Уравнения (34) аналогии в компонентах вектора конечного поворота в векторной форме можно записать в виде

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}), \quad (54)$$

где

$$\bar{y} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_1, x_2, x_3). \quad (55)$$

В координатном виде уравнения можно записать в следующей форме

$$\frac{d\theta_1}{dt} = x_1, \quad (56)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = x_2, \quad (57)$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = x_3, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = c^2(p_{11}x_1^2 + p_{12}x_2^2 + p_{13}x_3^2 + p_{14}x_1x_2 + p_{15}x_1x_3 + p_{16}x_2x_3 + \\ + q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + n_1), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} = c^2(p_{21}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + p_{23}x_3^2 + p_{24}x_1x_2 + p_{25}x_1x_3 + p_{26}x_2x_3 + \\ + q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3 + n_2), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} = c^2(p_{31}x_1^2 + p_{32}x_2^2 + p_{33}x_3^2 + p_{34}x_1x_2 + p_{35}x_1x_3 + p_{36}x_2x_3 + \\ + q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 + n_3). \end{aligned} \quad (61)$$

Выводы. Уравнения кинетической аналогии между задачами равновесия криволинейных упругих стержней и движения гиростата в компонентах вектора конечного поворота являются базовыми для любых обобщённых координат. Выразив, например, компоненты вектора поворота через углы Эйлера или параметры Родрига–Гамильтона (параметры Эйлера), можно получить уравнения аналогии в этих переменных. Из полученных уравнений распространённой аналогии Кирхгофа, положив $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, можно получить уравнения классической аналогии Кирхгофа между задачей о равновесии прямолинейного упругого стержня под действием концевых нагрузок и задачей о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Правые части полученных уравнений являются рациональными функциями, которые представлены в виде полиномов, делённых на $(1 + \frac{1}{4}\theta^2)^2$, причём $1 + \frac{1}{4}\theta^2 \neq 0$, что не приводит к особенностям. Такое представление правых частей уравнений удобно при применении численных методов и реализации в виде компьютерных программ, а также для применения приближённых методов исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации программы регионального Азово–Черноморского математического центра по соглашению № 075-02-2025-1620.

1. Илюхин А.А. Уравнения Эйлера–Кирхгофа в компонентах вектора конечного поворота / А.А. Илюхин, Г.Г. Гордеев // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. Физико-математические и естественные науки. – 2013. – № 1. – С. 1–8.

2. Кирхгоф Г. Механика / Г. Кирхгоф. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 403 с.
3. Ляг А. Математическая теория упругости / А. Ляг . – М.-Л.: Научно-техническое изд-во АН СССР, 1935. – 674 с.
4. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин. – К.: Наук. думка, 1979. – 216 с.
5. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. – М.: Мир, 1980. – 294 с.
6. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2013. – 408 с.
7. Гордеев Г.Г. Уравнения Эйлера–Кирхгофа в гамильтоновой форме (обобщенные координаты – компоненты вектора конечного поворота) / Г.Г. Гордеев // Сборник трудов горно-электромеханического факультета ДонГТУ. – 1996. – С. 40–44.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

G.G. Gordieiev

Application of the theory of finite rotations in the kinetic analogy between the problems of equilibrium of curvilinear elastic rods and the motion of a gyrostat.

Described kinetic analogy of Kirchhoff between the problems of equilibrium of rectilinear elastic rods under the action of end forces and the motion of a heavy rigid body with a fixed point. Described extension of this analogy to the problems of equilibrium of curvilinear elastic rods and gyrostat motion (Kirchhoff – Larmore kinetic analogy). The necessary information from the theory of finite rotations is provided. The analogy equations are written in the components of the final rotation vector as a system of differential equations in normal form.

Keywords: *kinetic moment, curved rod, deformation, gyrostat, final rotation vector.*

*Статья поступила в редакцию 06.11.2025;
доработана 03.12.2025;
рекомендована к печати 19.12.2025.*

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-17-28

EDN:YASICO



©2025. Е.В. Авдюшина¹, Р.Н. Нескородев²

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕЧЕНИЯ И РАЗГРУЗОЧНЫМИ ЩЕЛЯМИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

С использованием комплексных потенциалов и обобщенного метода наименьших квадратов решена задача по определению напряженного состояния горного массива с выработкой вблизи дневной поверхности и разгрузке вокруг поверхности выработки криволинейного сечения с ленточными щелями в случае, когда по участку дневной поверхности действуют равномерно распределенные внешние усилия. Криволинейное сечение выработки и разгрузочные щели аппроксимируются дугами эллипсов и берегами разрезов. Методом комплексных потенциалов на основе конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и использования метода интегралов типа Коши получены общие представления комплексных потенциалов. Для нахождения коэффициентов рядов Лорана из граничных условий на контуре сечений выработки и трещин использован обобщенный метод наименьших квадратов. Численными исследованиями изучено влияние на значения напряжений вокруг выработки таких параметров модели, как расстояние от выработки до дневной поверхности, длина отрезка приложения нагрузки на прямолинейной границе и длина разгрузочных щелей-трещин.

Ключевые слова: концентрация напряжений, полупространство, загрузка вблизи поверхности горных выработок, разгрузочные щели, модель двумерного напряженного состояния, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

¹ Авдюшина Елена Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: elena.v.a.2023@mail.ru.

Avdyushina Elena Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

² Нескородев Роман Николаевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nromn72@mail.ru.

Neskorodev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Введение. Проектирование подземных сооружений вблизи дневной поверхности часто сталкивается с вопросом возникновения зон высокой концентрации напряжений, приводящих к изменению форм этих сооружений или даже к разрушению горных пород. Задачи по определению таких зон и уровней концентрации напряжений, зависимости их от параметров выработок и разгрузочных щелей могут рассматриваться как соответствующие задачи теории упругости по определению напряженного состояния упругого тела с отверстиями и трещинами. А решения последних задач в случае двумерного напряженного состояния удобнее всего проводить с использованием комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости анизотропного тела [1].

Возможность применения метода комплексных потенциалов в задачах по определению напряженного состояния анизотропного горного массива с выработками различной конфигурации представлено в работе [2]; сделан вывод о преимуществах прочностных свойств выработок с сечениями сводчатой формы. При этом для удовлетворения граничным условиям на контурах выработок применялся достаточно громоздкий дискретный метод наименьших квадратов, а также не было рассмотрено расположение выработки вблизи дневной поверхности. Аналогичным методом, но для изотропного массива с выработкой вблизи дневной поверхности, напряженное состояние изучено в работе [3]. Численные исследования напряженного состояния горного изотропного массива с выработками различных конфигураций приведены в [4], что также подтверждает преимущество использования выработок со сводчатым контуром и необходимость проведения дальнейших исследований. В работах [5, 6] решена задача теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости с использованием комплексных потенциалов и удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши, а на остальных контурах – обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [7].

В данной статье решена задача по определению напряженного состояния анизотропного массива горных пород с горизонтальной выработкой вблизи дневной поверхности. Проведены численные исследования по определению двумерного напряженного состояния массива и установлены закономерности распределения напряжений около поверхности горной выработки, концентрации напряжений и ее снижения с помощью разгрузочных щелей.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим анизотропную многосвязную полуплоскость с прямолинейной границей и произвольными отверстиями и трещинами (рис. 1), которая является поперечным сечением горного массива с туннельными выработками и ленточными разгрузочными щелями. Контуры отверстий могут иметь произвольную криволинейную конфигурацию, которую будем аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов. Поэтому контуры отверстий будем считать эллиптическими, а как частный случай – прямолинейными разрезами, когда одна из полуосей равна нулю. В связи с этим будем рассматривать многосвязную полуплоскость S , ограниченную прямолинейной границей L^+ и контурами эллиптических отверстий L_l с

полуосами a_l, b_l ($l = \overline{1, L}$). Начало прямоугольной системы координат Oxy выберем в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы; ось Ox направим параллельно прямолинейной границе. Для каждого из эллипсов выберем локальную систему координат $O_l x_l y_l$ эллипса L_l с началом в центре соответствующего эллипса и направлением оси Ox_l вдоль полуоси a_l . В этом случае параметрические

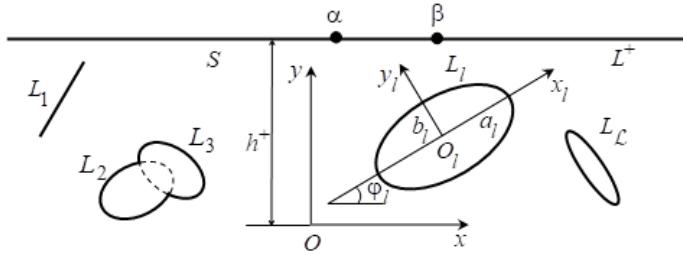


Рис. 1.

уравнения эллипсов L_l в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy представляются в виде

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где θ – угловая переменная параметрического задания эллипса, изменяющаяся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

Пусть на конечном отрезке $[\alpha, \beta]$ прямолинейной границы L^+ действуют непрерывно распределенные внешние усилия, а остальная ее часть свободна от усилий; контуры отверстий L_l не загружены и не подкреплены.

Если для определения напряженного состояния рассматриваемой полуплоскости использовать комплексные потенциалы, то решение задачи сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) обобщенных комплексных переменных [1]

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \quad (4)$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций материала полуплоскости.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в нижних полуплоскостях S_k , получаемых из рассматриваемой полуплоскости S аффинными преобразованиями (3) и ограниченных контурами L_k^+ и L_{kl} , соответствующими контурам L^+ и

L_l при этих преобразованиях. Тогда общие представления комплексных потенциалов для многосвязной области после конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} и разложения потенциалов в ряды Лорана запишем в виде [8]

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (5)$$

где $\varphi_{kln}(z_k) = 1/\zeta_{kl}^n$; a_{kln} – неизвестные коэффициенты рядов; ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений [8]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (6)$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} областей S_k ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \quad (7)$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Для многосвязных областей граничные условия на контурах L_l удобнее использовать в дифференциальной форме

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ikl} \delta_{ks} \Phi'_k(t_k) = f'_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (8)$$

где $\delta_{ks} = dz_k/ds$;

$$g_{1kl} = 1, \quad g_{2kl} = -\mu_k, \quad f'_{1l}(t) = \mp Y_{ln}, \quad f'_{2l}(t) = \mp X_{ln};$$

X_{ln} , Y_{ln} – проекции на оси основной системы координат внешних усилий на контурах L_l .

Из аналогичных (8) граничных условий на прямолинейной границе L^+ при $\delta_{ks} = 1$ имеем

$$\Phi'_k(t_k) + \bar{r}_{1k} \overline{\Phi'_k(t_k)} + \bar{r}_{2,k+1} \overline{\Phi'_{k+1}(t_{k+1})} = f_k^+(t), \quad (9)$$

где

$$\bar{r}_{1k} = \frac{\bar{\mu}_k - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}, \quad \bar{r}_{2,k+1} = \frac{\bar{\mu}_{k+1} - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}},$$

$$f_k^+(t) = \begin{cases} -\frac{X_n^+ + \mu_{k+1} Y_n^+}{\mu_k - \mu_{k+1}} & \text{на отрезке } [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{вне отрезка } [\alpha, \beta]; \end{cases} \quad (10)$$

k – индекс, принимающий значения 1, 2, причем значение индекса $k + 1$ при $k = 2$ формально полагается равным 1; X_n^+ , Y_n^+ – проекции на оси основной системы координат действующих на отрезке $[\alpha, \beta]$ прямолинейной границы L^+ внешних усилий.

Так как контуры отверстий полностью лежат внутри полу平面ости, проведем удовлетворение граничным условиям (9) на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши. Тогда, учитывая представление (5), для производных комплексных потенциалов, точно удовлетворяющих граничным условиям на прямолинейной границе, получаются выражения [5, 6]

$$\Phi'_k(z_k) = F_k^+(z_k) + \\ + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \bar{r}_{1k} \varphi'_{kln}^+(z_k) \bar{a}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \varphi'_{k+1ln}^+(z_k) \bar{a}_{k+1,ln}], \quad (11)$$

где a_{kln} – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана, которые будем определять из граничных условий (8) на контурах отверстий ОМНК [7];

$$F_k^{'+}(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_k^+(t) dt}{t - z_k}, \quad (12)$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})},$$

$$\varphi'_{k+j,ln}^+(z_k) = -\frac{n}{\bar{R}_{kl} \left(\zeta_{k+j,l}^+ \right)^{n-1} \left(\left(\zeta_{k+j,l}^+ \right)^2 - \bar{m}_{kl} \right)} \quad (j = 0, 1).$$

При этом переменные $\zeta_{k+j,l}^+$ получаются на основе перехода в конформных отображениях (6) к сопряженным величинам, а также на основе конформных отображений внешностей единичных окружностей $|\zeta_{k+j,l}^+| \geq 1$ на внешности воображаемых контуров $L_{k+j,l}^+$ верхней полу平面ости по формулам [5, 6]

$$\bar{z}_{k+j} = t_k + (\bar{\mu}_{k+j} - \mu_k) h^+ = \bar{z}_{k+j,l} + \bar{R}_{k+j,l} \left(\zeta_{k+j,l}^+ + \frac{\bar{m}_{k+j,l}}{\zeta_{k+j,l}^+} \right) \quad (j = 0, 1), \quad (13)$$

в которых переменная $\bar{\zeta}$ для лучшего восприятия заменена на ζ^+ , что подчеркивает ее связь с краевыми условиями на границе L^+ .

Выбрав систему точек $M_{pm} (x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$, $m = \overline{1, M_p}$) на каждом из контуров L_p области S и подставив функции (11) в граничные условия (8), для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линей-

ных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 2Re \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{ks} \times \\ & \times \left[\varphi'_{klm}(t_{kpm}) a_{klm} - \bar{r}_{1k} \varphi'^+_{klm}(t_{kpm}) \bar{a}_{klm} - \bar{r}_{2,k+1} \varphi'^+_{k+1,lm}(t_{kpm}) \bar{a}_{k+1,lm} \right] = \quad (14) \\ & = -2Re \sum_{k=1}^2 \delta_{ks} F_k^+(t_{kpm}) \quad (i = 1, 2; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}+1}; \quad m = \overline{1, M_p}). \end{aligned}$$

Решениями системы (14) методом сингулярных разложений [9, 10] являются постоянные a_{klm} . После их определения функции $\Phi'_k(z_k)$ становятся известными, что позволит вычислять в любой точке полуплоскости основные напряжения по формулам

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2Re \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (15)$$

и нормальные напряжения на произвольных площадках с нормалью n и касательной s

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)). \end{aligned} \quad (16)$$

2. Решение задачи о разгрузке поверхностей горных выработок в полупространстве. Пусть в массиве горных пород, обладающих в общем случае свойствами прямолинейно-анизотропного тела, вблизи дневной поверхности проведена горизонтальная выработка криволинейного сечения. На дневной поверхности расположены сооружения или имеется элемент рельефа местности, которые создают в зонах расположения механические воздействия на полупространство в плоскости деформации горного массива, не изменяющиеся в рассматриваемой модели вдоль выработки.

Тогда определение напряженного состояния в массиве сводится к решению задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости с криволинейным отверстием при заданных на прямолинейной границе усилиях, моделируемых равномерно распределенным давлением интенсивности q на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Исходя из практики чаще всего применяются выработки сводчатого сечения [2, 4], поэтому длину основания выработки будем считать равной $5r$, длины боковых сторон – $2r$, высоту крышки свода – $2r$, где r – масштабная единица длины (рис. 2), в результате чего высота всей выработки имеет величину $4r$. Купол эллипса будем считать половиной контура эллипса L_1 . Прямолинейные участки боковых сторон и основания свода будем аппроксимировать внешними берегами разрезов, представленных эллипсами L_2, L_3, L_4 . При этом для их полуосей имеют место равенства $b_l = 10^{-4}a_l$, что соответствует известному неравенству $b_l \leq 10^{-3}a_l$ [8], когда эллипс можно считать прямолинейным разрезом-трещиной.

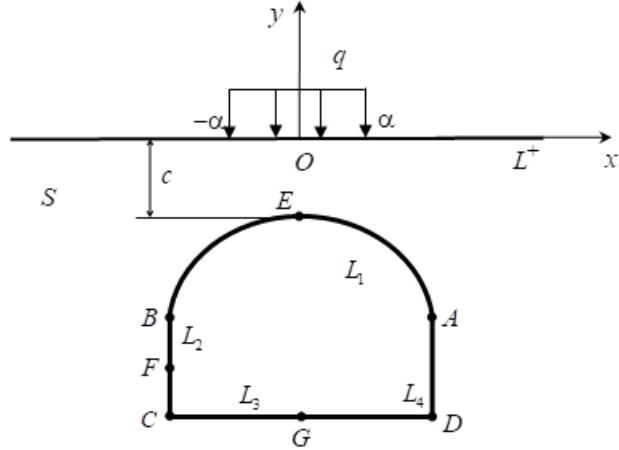


Рис. 2.

Расстояние от вершины крышки свода до дневной поверхности (прямолинейной границы полуплоскости) обозначим через c , также примем $h^+ = 0$.

Тогда комплексные потенциалы имеют вид (11) при

$$F_k'^+(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1}q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t - z_k} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1}q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \ln \frac{z_k - \beta}{z_k - \alpha}; \\ \mathcal{L} = 4;$$

$$L_1 : a_1 = 2,5r, b_1 = 2r, x_{01} = 0, y_{01} = a_2 = r, \varphi_1 = 0; \quad (17)$$

$$L_2 : a_2 = r, b_2 = 10^{-4}a_2, x_{02} = -a_3 = -2,5r, y_{02} = 0, \varphi_2 = \pi/2;$$

$$L_3 : a_3 = 2,5r, b_3 = 10^{-4}a_3, x_{03} = 0, y_{03} = -a_2 = -r, \varphi_3 = \pi;$$

$$L_4 : a_4 = r, b_4 = 10^{-4}a_4, x_{04} = a_3 = 2,5r, y_{04} = 0, \varphi_4 = 3\pi/2.$$

При этом для всех аппроксимирующих элементов в процессе формирования множества точек, для которых составляются уравнения системы (14), угловая переменная θ параметрического задания эллипсов (1) изменяется от 0 до π ($0 \leq \theta \leq \pi$).

Решение задачи для выработки в изотропном горном массиве получается, как частный случай из приведенного. При этом один из коэффициентов деформации a_{ij} необходимо брать незначительно отличным от реального, например, a_{11} и a_{22} брать отличающимися друг от друга в пятой – шестой значащих цифрах в конце. Тогда получим случай слабой анизотропии и корни характеристического уравнения (4) будут близки к мнимой единице i . Разработанное программное приложение позволяет в этом случае вычислять значения напряжений, практически совпадающие с решением задачи теории упругости для изотропной полуплоскости [3].

3. Описание результатов численных исследований. На базе разработанной численно-аналитической методики проведены исследования распределения

ния напряжений вокруг горной выработки без разгрузочных щелей и с разгрузочными щелями в зонах высокой концентрации напряжений. При этом все значения напряжений получены с точностью до интенсивности равномерного давления q на участке прямолинейной границы $[-\alpha, \alpha]$. При проведении численных исследований количество «коллокационных точек» M_p на L_p ($p = \overline{1, L}$), для которых составлялись уравнения системы (14), и количество членов в бесконечных рядах Лорана (11) увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. В описываемых ниже случаях для удовлетворения краевым условиям на свободных граничных поверхностях с достижением соответствующими нормальными напряжениями на площадках, касательных к контурам, значений менее 10^{-3} , необходимо было в указанных рядах оставлять от 20 до 40 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 350 «коллокационных точек».

Исследования проведены для горных массивов из трансверсально-изотропного алевролита (материал М1) и гранита изотропного с возмущенными механическими характеристиками (материал М2). Технические постоянные этих материалов приведены в таблице 1 [11]. Заметим, что коэффициенты деформации a_{ij} по известным техническим постоянным вычисляются с использованием формул: $a_{11} = 1/E_1$, $a_{22} = 1/E_2$, $a_{12} = -v_{21}/E_1 = -v_{12}/E_2$, $a_{66} = 1/G_{12}$. В случае квазизотропного материала М2 модуль Юнга E_2 для применимости разработанной и программно реализованной методики выбран, как было описано ранее, несколько отличным от E_1 ; получаемые при этом значения напряжений отличаются от напряжений в массиве изотропного гранита на величины менее сотых долей процента.

Таблица 1. Технические постоянные материалов

Материал	E_1 , МПа	E_2 , МПа	G_{12} , МПа	ν_{21}
М1	10740	5230	12000	0,413
М2	4200	4199	17000	0,22

В таблице 2 даны значения напряжений σ_s/q вдоль контура свода (17) (рис. 2) в зависимости от угловой переменной θ параметрического задания эллипсов L_1 , L_2 , L_3 для свода в массиве из алевролита (М1) и гранита (М2). Значения приведены для левой половины свода, для правой половины они легко восстанавливаются в силу симметрии напряженного состояния относительно оси Oy . При этом в исследовании приведены результаты для различных значений длины с перемычками между вершиной свода и дневной поверхностью, а также в зависимости от ширины участка загружения $[-\alpha, \alpha]$ дневной поверхности.

Как следует из данных таблицы 2, вблизи вершин углов основания свода (точки C и D) возникает весьма высокая концентрация сжимающих напряжений, которая может приводить к разрушению породы в этих зонах; вблизи середины почвы выработки (точка G) возникают растягивающие напряжения, которые могут приводить здесь к выпучиванию пород; по поверхности купола возникают сжимающие напряжения и положительные напряжения вблизи вер-

Таблица 2. Значения σ_s/q в некоторых точках сторон левой половины свода в зависимости от расстояния s и длины отрезка $[-\alpha, \alpha]$

Сторона	θ (рад.)	Материал								
		M1				M2				
		[-r, r]			[-2r, 2r]		[-3r, 3r]		[-r, r]	
		c/r			c/r		c/r		c/r	
L_1	2	1	0,5		2	1	2	1	1	0,5
	$90\pi/180$	1,851	3,839	7,523	2,308	4,016	2,137	3,319	2,605	5,421
	$135\pi/180$	-1,176	-2,332	-4,187	-1,957	-3,734	-2,189	-3,877	-2,994	-5,792
	$178\pi/180$	-0,987	-1,314	-1,553	-1,913	-2,525	-2,668	-3,469	-1,239	-1,434
L_2	$179\pi/180$	-0,933	-1,241	-1,454	-1,810	-2,387	-2,528	-3,288	-1,183	-1,345
	$\pi/180$	-1,826	-1,678	-7,015	-3,590	-3,125	-5,165	-4,182	0,562	-7,989
	$2\pi/180$	-1,270	-1,387	-2,938	-2,488	-2,652	-3,551	-3,642	-0,391	-2,898
	$45\pi/180$	-0,655	-0,832	-0,951	-1,279	-1,617	-1,815	-2,273	-0,764	-0,857
	$90\pi/180$	-0,492	-0,591	-0,636	-0,969	-1,165	-1,401	-1,682	-0,526	-0,547
	$135\pi/180$	-0,485	-0,552	-0,557	-0,964	-1,108	-1,418	-1,642	-0,470	-0,445
	$178\pi/180$	-3,519	-3,609	-2,695	-7,219	-7,791	-11,091	-12,463	-2,734	-1,472
	$179\pi/180$	-10,012	-10,292	-7,026	-20,558	-22,295	-31,614	-35,745	-8,143	-4,022
L_3	$\pi/180$	-4,883	-4,511	-2,086	-10,331	-10,579	-16,488	-18,215	-1,955	-0,173
	$2\pi/180$	-1,490	-1,231	-0,268	-3,237	-3,136	-5,328	-5,756	-0,484	0,274
	$45\pi/180$	0,226	0,295	0,396	0,420	0,521	0,561	0,656	0,201	0,268
	$90\pi/180$	0,207	0,261	0,339	0,389	0,469	0,529	0,605	0,173	0,225

шины (точка E); концентрация сжимающих напряжений наблюдается в углах крышки значительно ниже концентрации напряжений вблизи углов основания. Ширина участка загружения дневной поверхности практически не влияет на значения напряжений в вершине свода, оказывая значительные влияния на значения напряжений в других зонах. Также видно, что на значения напряжений степень анизотропии материала породы оказывает влияние в углах основания выработки, здесь значения модулей сжимающих напряжений из M1 почти в 1,5 раза больше аналогичных напряжений для выработки из M2.

Высокую концентрацию напряжений возможно снизить за счет проведения в зонах ее возникновения разгрузочных щелей-трещин, моделируемых плоскими щелями в виде эллиптических разрезов с весьма малыми полуосями b_l , т. е. когда b_l/a_l мало.

Для разгрузки напряжений в центре основания и около угловых точек основания свода проведены разгрузочные щели – наклонные эллиптические щели L_{23} и L_{34} с полуосями $a_{23} = a_{34}$ из точек пересечения сторон L_2 и L_3 , L_3 и L_4 основания свода вдоль биссектрис углов их пересечения (рис. 3, а)

$$\begin{aligned} L_{23} : a_{23}, b_{23} &= 10^{-4}a_{23}, x_{023} = -a_3, y_{023} = -a_2, \varphi_{23} = 3\pi/4; \\ L_{34} : a_{34} &= a_{23}, b_{34} = 10^{-4}a_{34}, x_{034} = a_3 = 2,5r, y_{034} = -a_2, \varphi_{34} = -\pi/4 \end{aligned} \quad (18)$$

и вертикальная разгрузочная эллиптическая щель в центре основания L_3 (рис. 3, б) с расчетными параметрами

$$L_{33} : a_{33}, b_{33} = 10^{-4}a_{33}, x_{033} = 0, y_{033} = -a_2, \varphi_{23} = -\pi/2. \quad (19)$$

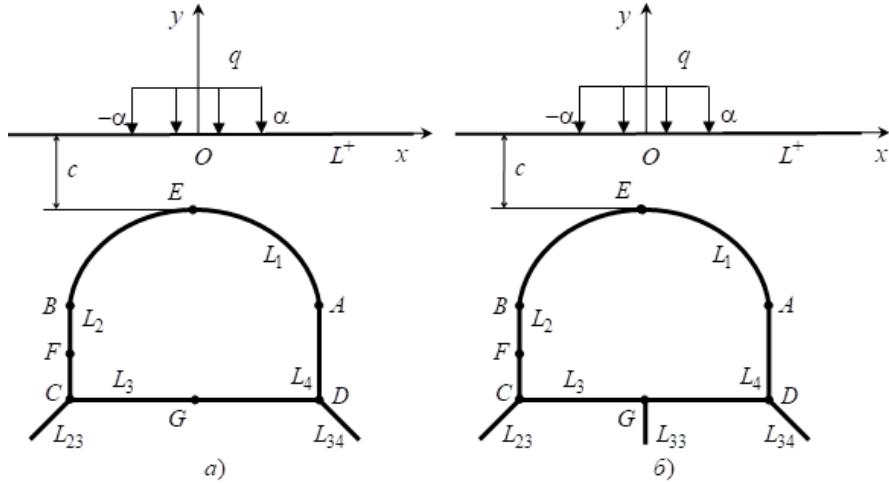


Рис. 3.

В таблице 3 для массива из материала М1 даны значения напряжений σ_s/q вдоль контура свода в зависимости от параметров θ параметрических заданий эллипсов L_1, L_2, L_3 для различных длин разгрузочных щелей a_{23}/r и вертикального разреза a_{33}/r . При этом считалось, что длина перемычки $c = r$, отрезок загружения $[-r, r]$.

Таблица 3. Значения σ_s/q в некоторых точках сторон левой половины свода в зависимости от длины наклонных a_{23}/r и вертикальной a_{33}/r разгрузочных разрезов

Сторона	θ (рад.)	a_{23}/r					
		0		0,5		1	
		a_{33}/r	a_{33}/r				
			0	0,1	0,2	0,3	0,5
L_1	$90\pi/180$	3,839	3,811	3,813	3,813	3,813	3,818
	$45\pi/180$	-2,332	-2,333	-2,333	-2,333	-2,333	-2,332
	$178\pi/180$	-1,314	-1,285	-1,312	-1,289	-1,283	-1,284
	$179\pi/180$	-1,241	-1,214	-1,271	-1,224	-1,211	-1,214
L_2	$\pi/180$	-1,678	-1,122	-0,998	-0,349	-1,311	-1,004
	$2\pi/180$	-1,387	-1,130	-1,003	-0,814	-1,207	-1,083
	$45\pi/180$	-0,832	-0,791	-0,784	-0,789	-0,790	-0,789
	$90\pi/180$	-0,591	-0,502	-0,499	-0,501	-0,501	-0,499
	$135\pi/180$	-0,552	-0,248	-0,247	-0,247	-0,246	-0,244
	$178\pi/180$	-3,609	0,004	-0,003	0,001	$-4*10^{-4}$	0,002
	$179\pi/180$	-10,292	0,030	$3*10^{-4}$	0,008	0,004	0,009
	$90\pi/180$	0,261	0,265	—	—	—	0,222
L_3	$\pi/180$	-4,511	0,002	0,005	-0,003	0,001	-0,004
	$2\pi/180$	-1,231	-0,005	$-3*10^{-4}$	-0,004	-0,002	-0,004
	$45\pi/180$	0,295	0,255	0,250	0,240	0,224	0,190
	$88\pi/180$	0,262	0,265	-0,056	-0,029	-0,029	-0,011
	$89\pi/180$	0,261	0,265	-0,139	0,003	-0,011	$3*10^{-4}$
	$90\pi/180$	0,261	0,265	—	—	—	0,222

Как следует из таблицы 3, технологическое создание наклонных разгрузочных щелей в углах основания свода даже при небольшой длине приводит к разгрузке вблизи вершины углов С и D основания, причем достаточно выбрать $a_{23} = a_{34} = 0,5 r$. При этом значения напряжений в других зонах, в том числе и в зоне выпучивания на основании, практически не изменяются. Дополнительное проведение вертикальной разгрузочной щели L_{33} снимает выпучивающие напряжения в середине основания (точка G), незначительно снижая их в других зонах. Также необходимо проведение дальнейших исследований по уменьшению выпучивающих напряжений вблизи купола свода.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий.* – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. *Полухин В.А. Управление напряженным состоянием породного массива и устойчивостью горных выработок / В.А. Полухин, С.А. Калоеров, Ю.Б. Грядущий, Е.С. Горянская.* – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 304 с.
3. *Калоеров С.А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинах / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко.* – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.
4. *Богомолова О.А. Влияние параметров подземной выработки на величину осадки дневной поверхности подрабатываемой территории / О.А. Богомолова, А.В. Жиделев // Construction and Geotechnics.* – 2020. – Т. 11, № 2. – С. 5–18. – DOI: 10.15593/2224-9826/2020.2.01.
5. *Калоеров С.А. Исследование напряженного состояния многосвязной анизотропной полуплоскости обобщенным методом наименьших квадратов / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, О.Э. Ермаков // Журнал теоретической и прикладной механики.* – № 1 (74). – 2021. – С. 16–30.
6. *Калоеров С.А. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* – 2023. – № 4. – С. 23–37.
7. *Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластиинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика.* – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
8. *Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика.* – 1995. – № 25. – С. 45–56.
9. *Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин.* – М.: Наука, 1977. – 304 с.
10. *Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер.* – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. *Ержанов Ж.С. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве / Ж.С. Ержанов, Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов.* – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.

E.V. Avdyushina, R.N. Neskorodev

Stress state analysis of a geological half-space with a horizontal working of curvilinear cross-section and relief slots using the generalized least-squares method.

Using complex potentials and the generalized least squares method, we solved the problem of determining the stress state of a rock mass with a working near the surface and unloading around the working surface of a curved cross-section with band cracks when uniformly distributed external

forces act across the surface. The curvilinear cross-section of the working and the unloading cracks are approximated by elliptical arcs and the edges of the cuts. Using the complex potential method, we obtained general representations of complex potentials based on conformal mappings, Laurent series expansions of holomorphic functions, and the Cauchy integral method. A generalized least squares method was used to find the Laurent series coefficients from the boundary conditions on the contours of the working cross-sections and cracks. Numerical studies were performed to examine the influence of model parameters such as the distance from the working to the surface, the length of the load application segment on the straight boundary, and the length of the relief cracks on stress values around the working.

Keywords: *stress concentration, half-space, loading near working surfaces, relief cracks, two-dimensional stress model, complex potentials, generalized least squares method.*

*Статья поступила в редакцию 16.11.2025;
доработана 05.12.2025;
рекомендована к печати 19.12.2025.*

УДК 669.788:539.37

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-29-34

EDN:MBDPRQ



©2025. Ж.Л. Глухова¹

О ФОРМОИЗМЕНЕНИИ НАВОДОРОЖЕННЫХ ПАЛЛАДИЕВЫХ ПЛАСТИН В ПРОЦЕССЕ ИХ ДЕГАЗАЦИИ

В настоящей статье описаны закономерности формоизменения наводороженной палладиевой пластины в процессе ее дегазации. Установленные экспериментально закономерности водородоупругого формоизменения образцов могут быть использованы в технологиях водородной обработки и для решения прикладных задач водородной энергетики.

Ключевые слова: водород в металлах, водородоупругость, палладиевая пластинка, формоизменение

Введение. Безопасное хранение водорода – одна из актуальных задач водородной энергетики. Перспективным является способ хранения водорода в металлогидридах. Поэтому эксперименты по изучению процессов сорбции и десорбции водорода гидридообразующими металлами позволяют решать не только различные теоретические задачи, стоящие перед исследователями взаимодействия водорода с материалами, но и имеют чисто практическое значение.

Процессы диффузии атомов водорода в металлах и возникновение при этом упругих напряжений вызывают разнообразные эффекты, которые являются различными сторонами одного явления – водородоупругости [1]. Распределение водорода, вызываемое градиентами его концентрации, а также деформацией среды, описывается системой связанных дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями водородоупругости [2]. Этой же системой описывается и обратный эффект – деформация металла, вызванная процессом распределения водорода. Её решение в аналитическом виде вызывает трудности. Для решения задач такого рода используются численные методы [3].

Цель настоящей работы – установить закономерности формоизменения наводороженной палладиевой пластины в процессе ее дегазации.

1. Методика проведения исследований. В исследованиях была использована водородо-вакуумная установка, которая позволяет проводить бароупругое нагружение образцов водородом, наблюдать и измерять стрелу прогиба консольно закрепленной пластинки в ходе эксперимента. На рисунке 1 показана рабочая камера данной установки, выполненная из нержавеющей стали, и ее связь

¹Глухова Жанна Лукъяновна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. физики ДонНТУ, Донецк, e-mail: zhglukhova@yandex.ru.

Glukhova Zhanna Lukyanovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National Technical University, Donetsk, Chair of Physics.

с другими блоками. Образец (1) из палладиевой фольги жестко крепится одним концом в держателе (2). Наблюдение за изгибом образца осуществляется катетометром (3) через окно (4), закрытое оптическим стеклом. Вакуумирование рабочей камеры осуществляется форвакуумным насосом (5). Остаточное давление в камере измеряется термопарным вакуумметром (6). Образец нагревают электропечью (7), контролируя температуру с помощью хромель–алюмелевой термопары (8).

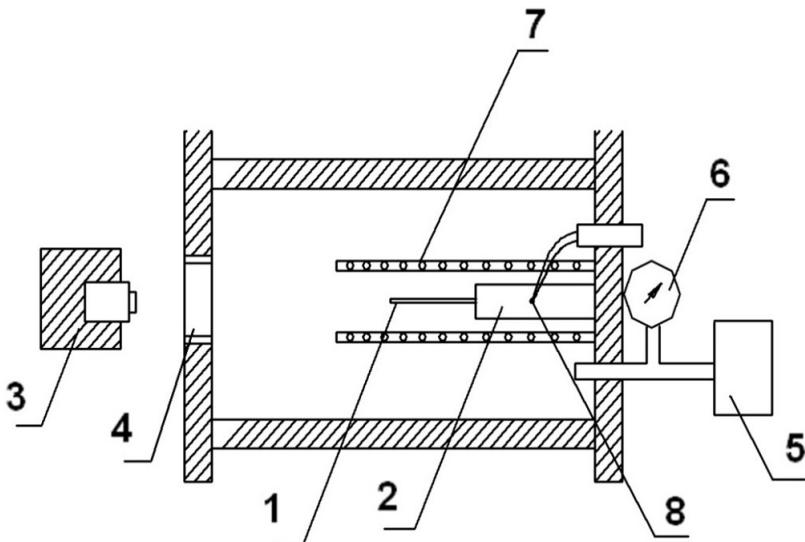


Рис. 1. Рабочая камера водородо-вакуумной установки и ее связь с другими блоками: 1 – образец; 2 – держатель; 3 – катетометр; 4 – окно; 5 – насос; 6 – вакуумметр; 7 – электропечь; 8 – термопара

Установка имеет следующие характеристики:

- остаточное давление газов в рабочей камере 1.32 Па;
- интервал изменения давлений водорода в рабочей камере $10^3 - 2 \times 10^5$ Па;
- интервал изменения температуры образца 20 – 170° С;
- точность поддержания температуры $\pm 0.5^\circ$ С;
- точность измерения стрелы прогиба образца ± 0.2 мм.

В качестве материала для исследования используется палладий в силу специфики его взаимодействия с водородом (высокая водородопроницаемость, растворимость и диффузионная подвижность) и большого практического значения этого металла. Палладий, будучи благородным металлом, обеспечивает высокую активность поверхности образцов. Это в сочетании с использованием в экспериментах диффузионно-очищенного водорода гарантирует надежность результатов и установленных закономерностей.

Для исследования формоизменения палладиевой пластины при ее одностороннем и резком насыщении водородом (водородном «ударе») и последующей дегазации использовали палладий, содержащий следующие примеси (в вес. %): Pt – 0.009, Rh – 0.002, Fe – 0.009, Si – 0.001. Из него прокатали фольгу толщиной

0.28 мм и вырезали образцы в виде пластинок размером $68 \times 5.5 \times 0.28$ мм. Образцы отжигали в вакууме (10^{-2} мм рт. ст.) при температуре 600°C в течение одного часа и охлаждали с печью до 20°C . Отжиг проводили на специально выполненной из нержавеющей стали подложке, чтобы исключить возможность внесения деформации при помещении и извлечении образца из камеры для отжига.

Одну сторону образца покрывали медной пленкой способом электролитического осаждения меди из раствора серной кислоты и медного купороса. Электролиз проводили при комнатной температуре, плотность тока равнялась $2-6$ А/дм². Толщина медного покрытия, определенная по массе осажденной меди, составляла 1.5 мкм. Пленка такой толщины в интервале температур от 150° до 100°C представляет собой непроницаемую мембрану для водорода. Таким образом достигалось одностороннее насыщение и дегазация образца.

Эксперименты проводили по следующей схеме. Образец одним концом закрепляли горизонтально в рабочей камере водородо-вакуумной установки таким образом, что ее верхней стороной была та, что покрыта медью. Соответственно, наблюдаемые экспериментально прогибы пластины были направлены вверх. Смещение свободного конца пластиинки под воздействием водорода наблюдали через окно рабочей камеры. Величину смещения измеряли катетометром с точностью ± 0.2 мм. После монтажа образца в камере для стабилизации его состояния проводили 3 термоцикла, нагревая и охлаждая образец в вакууме (10^{-2} мм рт. ст.) от комнатной температуры до температуры, при которой проводится серия экспериментов. Стабилизированный таким образом образец нагревали до заданной температуры, которая в процессе эксперимента затем поддерживалась постоянной. Выдерживали образец в вакууме при этой температуре в течение 0.5 часа. Далее осуществляли быстрый (за 1–5 с) напуск диффузионно-очищенного водорода в рабочую камеру до заданного давления. Изобарическая выдержка при этом давлении длилась от 0.5 до 1 часа, пока образец не приходил в стационарное состояние. Затем камера дегазировалась, и водород эвакуировался из образца до достижения стационарного состояния палладиевой пластины (это достигалось в течение от 0.5 до 1 часа).

2. Результаты эксперимента и их анализ. Ранее [4, 5] экспериментально установлено, что при односторонних воздействиях водорода различных давлений и при различных температурах (в процессах сорбции и десорбции водорода) Pd-пластинка закономерно изменяет свою форму. При этом за полный цикл (насыщение–дегазация) формоизменение практически полностью обратимо. На первой стадии цикла при насыщении водородом в формоизменении можно условно выделить обратимую и остаточную составляющие. Показано [1], что наблюдаемые экспериментально закономерности поведения остаточного формоизменения на стадии насыщения водородом связаны с торможением водородоупругими напряжениями процесса выравнивания концентрации водорода по толщине пластины. Не обратимые формоизменения при насыщении и их поведение в зависимости от давления при различных температурах можно объяснить

остаточными градиентами концентрации, обусловленными синергетическим эффектом влияния водородных концентрационных напряжений на процесс диффузии водорода. Обратимое формоизменение является прямым следствием наличия в образце градиентов концентрации водорода.

Интересным проявлением влияния водородных концентрационных напряжений на распределение водорода в пластине являются формоизменения, наблюдаемые в процессе дегазации образцов в экспериментах, описанных в [1]. На рисунке 2 представлены временные зависимости стрелы прогиба палладиевой пластины при ее одностороннем насыщении водородом (кривая 1), а также при последующей дегазации (кривая 2) при 140°C и давлении водорода 0,9 атм. Кривая 2 представляет абсолютные значения стрелы прогиба пластины при дегазации (так как изгиб пластины происходит в обратном направлении, то условно можно считать Δy отрицательными).

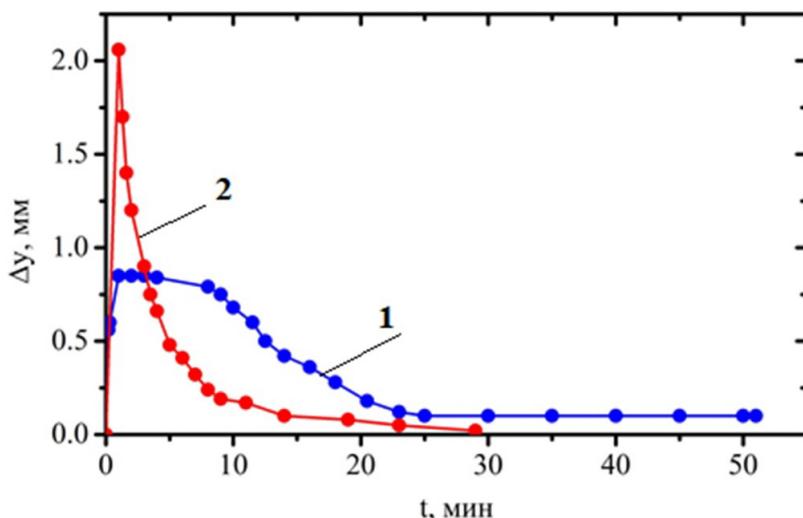


Рис. 2. Временная зависимость стрелы прогиба пластины при ее одностороннем насыщении водородом при 140°C и давлении водорода 0,9 атм., а также последующей дегазации; кривая 1 соответствует процессу насыщения; кривая 2 соответствует процессу дегазации

И первая, и вторая кривые на рисунке 2 показывают, что максимальные значения стрелы прогиба (формоизменения) образца наблюдаются в первые моменты насыщения и дегазации. Однако видно, что максимальные значения стрелы прогиба и ход временной зависимости формоизменения при насыщении пластины и при дегазации существенно отличаются. Максимальные формоизменения напрямую связаны с максимальными градиентами концентрации водорода по толщине пластины. Различия по абсолютной величине значений максимальных формоизменений при насыщении и дегазации можно объяснить разной скоростью изменения концентрации водорода на входной (не покрытой медью) стороне пластины при насыщении и дегазации. И эти различия увеличиваются с увеличением давления в камере при постоянной температуре (см. кривые 1 и 2).

на рис. 3). Рост максимального формоизменения с увеличением давления «водородных ударов» при постоянной температуре объясняется возрастанием растворимости водорода в металлах в соответствии с законом Сивертса. При постоянной скорости подачи водорода в камеру с увеличением давления водорода время, в течение которого в приповерхностном слое металла устанавливается концентрация водорода, близкая к равновесной растворимости, увеличивается. Этот фактор и диффузия водорода в металле приводят к уменьшению градиентов концентрации водорода на начальных этапах насыщения образца водородом. Так как дегазация образца происходит при постоянном вакуумировании рабочей камеры, то можно предположить, что уже в первые секунды концентрация в приповерхностном слое пластины уменьшается до минимальных значений, что и вызывает появление максимальных градиентов концентрации по толщине пластины больших, чем при насыщении образца. Скорость диффузии также пропорциональна градиенту концентрации. Поэтому различаются временные зависимости стрелы прогиба пластины: при насыщении – меньшие градиенты концентрации и медленнее уменьшается Δy и при дегазации – большие градиенты концентрации и быстрее уменьшается Δy .

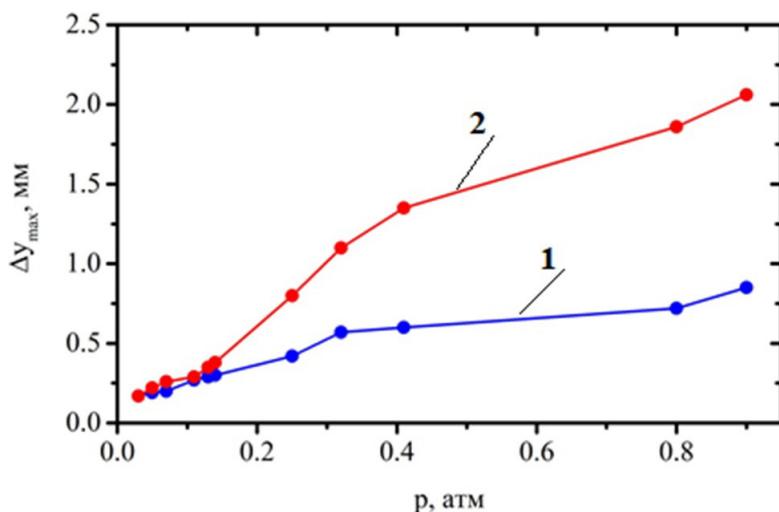


Рис. 3. Зависимость максимального формоизменения пластины от давления водорода при 140°C; кривая 1 – при ее одностороннем насыщении водородом; кривая 2 – при последующей дегазации

Заключение. Таким образом, наводороженные палладиевые пластины при их последующей дегазации изменяют свою форму закономерным образом. Установленные экспериментально закономерности водородоупругого формоизменения образцов могут быть использованы в технологиях водородной обработки и для решения прикладных задач водородной энергетики.

1. Goltsov V.A. Hydrogen elasticity effect and its importance in diffusion of concentration inhomogeneities in palladium hydrides // J. Alloys Compounds. 2006. Vol. 432, No. 1. P. 13–17.

- geneities in metals / V.A Goltsov, Zh.L. Glukhova, A.L. Redko // Int. Journal Hydrogen Energy. – 1997. – Vol. 22. – P. 179–183.
2. Гольцов В.А. Водородоупругое формоизменение палладиевой пластины. Теоретическое описание / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова // Физика металлов и металловедение. – 2001. – № 3. – С. 21–25.
 3. Молчанов И.И. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. – К.: Нauкова думка, 1979. – 235 с.
 4. Глухова Ж.Л. Явление водородоупругости в системах металл-водород / Ж.Л. Глухова, В.А. Гольцов // Альтернативная энергетика и экология. – 2014. – № 1. – С. 138–151.
 5. Щеголева Т.А. Методика экспериментального исследования формоизменения металлических пластин / Т.А. Щеголева, Ж.Л. Глухова, А.В. Ветчинов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 3 (76). – С. 25–31.

Zh.L. Glukhova

On the shape changes of hydrogenated palladium plates during their degasation.

This article describes the examples of shape changes of a hydrogenated palladium plate during its degassing. The experimentally established examples of hydrogen-elastic shape changes of the samples can be used in hydrogen processing technologies and for solving applied problems in hydrogen energy.

Keywords: *hydrogen in metals, hydrogen elasticity, palladium plate, and shape change.*

*Статья поступила в редакцию 18.11.2025;
доработана 08.12.2025;
рекомендована к печати 19.12.2025.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-35-47

EDN:WITKNG



©2025. С.А. Калоеров¹, А.В. Сероштанов², Л.П. Вовк³

ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПОЛОСЫ ПРИ ЕЕ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба электроупругих тонких плит решена задача об изгибе полосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе пересекающимися друг с другом и пересекающих прямолинейные границы. При этом комплексные потенциалы представлены в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами, определямыми из граничных условий на контурах отверстий и прямолинейных границах обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полосы с центральным круговым отверстием, с центральным круговым отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами из него, с двумя круговыми выемками на прямолинейных границах полосы. Исследованы закономерности изменения электроупругого состояния полосы в зависимости от геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения. Установлено, что с приближением прямолинейных границ полосы к отверстию или трещине значения изгибающих моментов в точках перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах полосы. Большая концентрация моментов наблюдается и в точках прямолинейных границ полосы вблизи перемычек. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зонах высокой концентрации изгибающих моментов, поэтому в этих случаях нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости об изгибе плиты, а нужно решать задачу электроупругости.

Ключевые слова: тонкая пьезоплита, полоса, отверстия, трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, коэффициенты интенсивности изгибающих моментов.

¹Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Сероштанов Александр Владимирович – асп. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: aleks.serosht@gmail.com

Seroshtanov Aleksandr Vladimirovich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Вовк Леонид Петрович – докт. техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ Горловка, e-mail: leonidovk166@gmail.com

Vovk Leonid Petrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technology, Chair of Mathematical Modeling.

Введение. На протяжении длительного времени тонкие пластинки, изготовленные из пьезоматериалов, активно используются в качестве конструктивных элементов в различных областях науки и техники [1–4]. Наличие отверстий и трещин в таких пластинках приводит к тому, что при различных механических и электрических воздействиях вблизи этих отверстий и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений и индукций, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Следовательно, нужно иметь надежные методы определения электроупругого состояния (ЭУС) пластин с различными отверстиями и трещинами.

Эти вопросы особенно актуальны для случая тонких пластин, эксплуатируемых в условиях их поперечного изгиба и называемых в этом случае тонкими плитами. К сожалению, до недавнего времени широкомасштабные исследования ЭУС тонких пьезоплит с отверстиями и трещинами не проводились. Были решены лишь отдельные задачи для пьезоплит из материалов простейшей микроструктуры (с ограничениями на электрические свойства) и геометрии (в основном сплошных или имеющих круговую границу) [5–9].

Что касается плит с произвольными отверстиями и трещинами, то исследования по определению их ЭУС начали проводиться лишь в последние десятилетия. И здесь наиболее достоверные результаты получаются при использовании методов комплексных потенциалов. Эти функции, введённые в работе [10], уже были использованы при решении различных задач для многосвязной пластины [11] и полу平面ости [12].

В данной статье с помощью метода комплексных потенциалов решена задача электроупругости для полосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на прямолинейные границы в виде выемов. При этом граничные условия как на контурах отверстий и трещин, так и на прямолинейных границах удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [13].

1. Постановка и решение задачи.

Рассмотрим полосу из электроупругого материала, занимающую многосвязную область, ограниченную прямолинейными границами L^+ (верхней), L^- (нижней) и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l (рис. 1). Каждый из эллипсов может переходить в прямолинейный разрез-трещину, пересекать прямолинейные границы, пересекать другие контуры. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полосы и осью Ox , параллельной прямолинейным границам. Обозначим расстояния от начала координат до прямолинейных границ L^+ , L^- соответственно через h^+ и h^- .

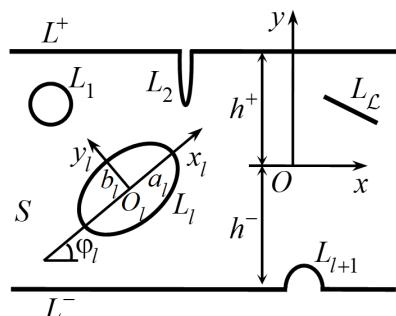


Рис. 1

Электроупругое состояние многосвязной пьезополосы при ее поперечном изгибе

Выберем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l так, что уравнение L_l в локальной системе координат имеет вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в системе Oxy будет таким:

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ – угловая переменная параметрического задания эллипса, изменяющаяся в интервале от 0 до 2π .

Будем считать, что прямолинейные границы L^+ , L^- и контуры отверстий не загружены; на бесконечности полоса изгибается механическим моментом M_x^∞ и моментом электрической индукции M_{dx}^∞ ; моменты M_y^∞ , H_{xy}^∞ , M_{dy}^∞ в силу незагруженности прямолинейной границы равны нулю.

Если задачу об определении электроупругого состояния рассматриваемой полосы решать с использованием комплексных потенциалов электроупругости [10, 14], то она сводится к нахождению функций $W_k'(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y,$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения 6-го порядка, из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ik} W_k'(t_k) = (c_1, c_2, c_3) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

в которых

$$(g_{1k}, g_{2k}, g_{3k}) = (p_k / \mu_k, q_k, d_{yk}),$$

p_k, q_k, d_{yk} – известные постоянные [10]; c_i – комплексные постоянные, разные для разных эллиптических контуров и прямолинейных границ.

Обозначим заданную область, ограниченную прямолинейными границами и контурами отверстий через S , верхнюю полуплоскость с границей L^+ – через S^+ , нижнюю полуплоскость с границей L^- – через S^- . В областях комплексных переменных z_k ($k = \overline{1, 3}$) области S соответствуют многосвязные полосы S_k с прямолинейными границами L_k^+, L_k^- и контурами отверстий L_{kl} .

Функции $W_k'(z_k)$ определены в областях S_k , и на основе общих представлений комплексных потенциалов [10, 14] представимы в виде

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L W_{kl}'(z_k) + W_k'^+(z_k) + W_k'^-(z_k), \quad (3)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = (-M_x^\infty, 0, 0, -M_{dx}^\infty, 0, 0);$$

r_k, d_{xk} – известные постоянные [10], зависящие от коэффициентов деформации материала и пьезоэлектрических модулей деформации и напряженности и коэффициентов диэлектрической восприимчивости; $W'_{kl}(z_k)$ – функции голоморфные вне L_{kl} ; $W_k'^+(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с границами L_k^+ ; $W_k'^-(z_k)$ – функции, голоморфные в верхних полуплоскостях с границами L_k^- .

Используя конформные отображения внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl}

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (4)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}},$$

функции $W'_{kl}(z_k)$, голоморфные вне контуров L_{kl} , представим рядами Лорана вида

$$W'_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$$

с неизвестными коэффициентами a_{kln} .

Для точек прямолинейных границ L_k^+ и L_k^- соответствующих областей имеем

$$x = t, \quad y = ih^+, \quad t_k = x + \mu_k y = t + \mu_k h^+,$$

Если взять сопряжение от последнего равенства и перейти от получаемого \bar{t}_k к t_k , будем иметь

$$\bar{t}_k = x + \bar{\mu_k} y = x + \mu_k h^+ + (\bar{\mu_k} - \mu_k) h^+ = t_k + (\bar{\mu_k} - \mu_k) h^+.$$

Переходя в (4) к сопряженным величинам и заменив в равенствах \bar{t}_k на приведенное значение, запишем получаемое равенство в виде

$$t_k = \bar{z}_{kl} - (\bar{\mu_k} - \mu_k) h^+ + \bar{R}_{kl} \left(\bar{\zeta}_{kl} + \frac{\bar{m}_{kl}}{\zeta_{kl}} \right).$$

Переходя от контурного значения t_k на значения переменной в области z_k и заменив для удобства переменные $\bar{\zeta}_{kl}$ на переменные ζ_{kl}^+ , получим связь

$$z_k = -(\overline{\mu_k} - \mu_k)h^+ + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left(\zeta_{kl}^+ + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^+} \right), \quad (5)$$

которая, как видно, является конформным отображением эллипса L_{kl}^+ , симметричного эллипсу L_{kl} области S_k относительно прямолинейной границы L_k^+ . Тогда функцию $W_k'^+(z_k)$, голоморфную в нижней полуплоскости с границей L_k^+ , можно выбрать в виде функции, голоморфной вне контуров L_{kl}^+ , т. е. в виде [12]

$$W_k'^+(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{kln}}{(\zeta_{kl}^+)^n}$$

с неизвестными коэффициентами b_{kln} .

Аналогичным образом получаем представления голоморфных в верхних полуплоскостях с границами L_k^- функций

$$W_k'^-(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{kln}}{(\zeta_{kl}^-)^n},$$

в которых c_{kln} – неизвестные постоянные; ζ_{kl}^- – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = (\overline{\mu_k} - \mu_k)h^- + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}} \left(\zeta_{kl}^- + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^-} \right). \quad (6)$$

Окончательно, для комплексных потенциалов (3) будем иметь выражения

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) + b_{kln} \varphi_{kln}^+(z_k) + c_{kln} \varphi_{kln}^-(z_k)], \quad (7)$$

где

$$\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \quad \varphi_{kln}^+(z_k) = (\zeta_{kl}^+)^{-n}, \quad \varphi_{kln}^-(z_k) = (\zeta_{kl}^-)^{-n};$$

ζ_{kl} , ζ_{kl}^+ , ζ_{kl}^- – функции, вычисляемые из неявных зависимостей (4), (5), (6); a_{kln} , b_{kln} , c_{kln} – неизвестные коэффициенты.

Постоянные a_{kln} , b_{kln} , c_{kln} ($k = \overline{1, 3}$; $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = 1, 2, \dots$) определим из граничных условий (2) на прямолинейных границах L^+ , L^- и на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), которые после дифференцирования по дугам контуров имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikp} \delta_{k,s} W_k''(t_{kp}) = 0, \quad (i = \overline{1, 3}; p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}). \quad (8)$$

При этом для точек контуров отверстий $\delta_{k,s} = \frac{dt_{kp}}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$; x' , y' – производные переменных (1) по угловой переменной θ параметрического задания эллипсов; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки; для прямолинейных границ L^+ , L^- параметр $\delta_{k,s} = 1$.

Границным условиям (8) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [13, 15, 16]. Для этого выберем «коллокационные отрезки» на прямолинейных границах L^+ и L^- , затем на них и на контурах отверстий и трещин L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) систему точек M_{pm} (x_{pm}, y_{pm}) ($m = \overline{1, M_p}$; $p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (7). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{klm} , b_{klm} и c_{klm} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} & \left[\varphi'_{klm}(t_{kpm}) a_{klm} + \varphi'_{klm}^+(t_{kpm}) b_{klm} + \varphi'_{klm}^-(t_{kpm}) c_{klm} \right] = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikp} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 3}; m = \overline{1, M_p}; p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}). \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме уравнений (9), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 i a_{kl1} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (10)$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_l .

Систему (9), дополненную уравнениями (10), будем решать с использованием сингулярных разложений [17, 18]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{klm} , b_{klm} и c_{klm} , а, следовательно, и функции $W'_k(z_k)$, будут известными, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перerezывающие силы на основных площадках) [10, 14]. По основным характеристикам можно найти также моменты на произвольных площадках. При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) [19].

Как частный случай из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следует решение задачи теории упругости (ТУ). Оно получается из приведенного, если в последнем принять равными нулю пьезоэлектрические модули деформации и напряженностей g_{ij} . Но для проведения численных исследований в задаче ТУ можно пользоваться программой решения задачи электроупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$ и принимая $\lambda_g \leq 10^{-3}$.

2. Описание результатов численных исследований. Были проведены численные исследования для плит из следующих пьезоэлектрических материалов: 1) Селенид кадмия CdSe (материал М1); 2) Пьезокерамика PZT-4 (материал

M2) [20]. Ненулевые упругие и пьезоэлектрические постоянные этих материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1.
Физико-механические постоянные материалов

Величина	Материалы	
	ЭМ1	ЭМ2
s_{11}/s_0	22,260	10,745
s_{22}/s_0	14,984	7,398
s_{66}/s_0	47,481	7,637
s_{12}/s_0	-6,437	-2,542
g_{16}/g_0	109,22	2,054
g_{21}/g_0	-4,333	-1,159
g_{22}/g_0	8,016	2,458
β_{11}/β_0	19,612	0,106
β_{22}/β_0	10,612	0,090

$$s_o = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \text{ м}^{-2}, \quad \beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}.$$

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (7) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этих контурах и на «коллокационных отрезках» прямолинейных границ, для которых составлялись уравнения (9), увеличивалось до тех пор, пока однородные граничные условия на контурах отверстий и на прямолинейных границах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В качестве «коллокационных отрезков» на прямолинейных границах выбирались отрезки, за пределами которых влияние отверстий и трещин на значения исследуемых величин незначительно. В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 20 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационных отрезках» прямолинейной границы брать от 100 до 800 «коллокационных точек». При этом в качестве «коллокационных отрезков» на прямолинейных границах были отрезки длины 2–10 диаметров основного концентратора моментов с центром в точке, где наиболее существенно влияние отверстий и трещин.

В таблице 2 для задач ЭУ и ТУ об изгибе моментами $M_x^\infty = m_x$ полосы с центральным круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полосы в зависимости от отношения c_1/a_1 , где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и границами полосы. При этом характерными были

точки $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $D^+(0, a_1 + c_1)$, $E^+(a_1, a_1 + c_1)$. На рисунке 3 для полосы из более пьезоактивного материала М2, для некоторых значений c_1/a_1 изображены графики распределения M_s/m_x по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, а на рисунке 4 изображены графики распределения моментов M_x/m_x по некоторому отрезку прямолинейной границы L^+ .

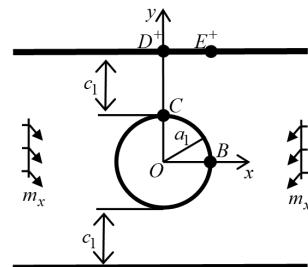


Рис. 2

Таблица 2.

Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы с центральным круговым отверстием в зависимости от c_1/a_1

Материал	Точка	Момент	Задача	c_1/a_1				
				∞	2	1	0,5	0,1
M1	B	M_y	ЭУ	0,397	0,391	0,389	0,376	0,293
			ТУ	0,220	0,220	0,220	0,217	0,196
	C	M_x	ЭУ	1,760	1,937	2,272	3,061	9,234
			ТУ	1,713	1,904	2,257	3,069	9,338
	D^+	M_x	ЭУ	1,000	1,349	1,805	2,717	9,107
			ТУ	1,000	1,313	1,782	2,704	9,098
	E^+	M_x	ЭУ	1,000	1,198	1,326	1,431	1,272
			ТУ	1,000	1,206	1,346	1,458	1,471
M2	B	M_y	ЭУ	-0,058	-0,058	-0,058	-0,041	-0,044
			ТУ	-0,070	-0,078	-0,094	-0,080	-0,060
	C	M_x	ЭУ	1,421	1,663	2,048	2,936	9,568
			ТУ	1,421	1,649	2,036	2,883	9,051
	D^+	M_x	ЭУ	1,000	1,407	1,874	2,810	9,488
			ТУ	1,000	1,393	1,864	2,759	8,971
	E^+	M_x	ЭУ	1,000	1,183	1,248	1,311	1,296
			ТУ	1,000	1,174	1,240	1,288	1,231

Из данных таблицы 2, рисунка 3 и рисунка 4 следует, что влияние прямолинейных границ полосы на электроупругое состояние около отверстия значительно, если отверстие находится на расстоянии менее диаметра отверстия от прямолинейных границ ($c_1/a_1 < 2$). На значения моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала полосы. Последнее особенно ярко видно из сравнения значений моментов в точке C , где учет пьезосвойств приводит к значительному изменению (уменьшению для М1 и увеличению для М2) значений моментов в этой точке. Поэтому при исследовании напряженного состояния плит из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости, а нужно решать задачу электроупругости.

В таблице 3 для задач ЭУ и ТУ об изгибе моментами $M_x^\infty = m_x$ полосы из М2 с круговым отверстием радиуса a_1 и двумя симметричными краевыми

Электроупругое состояние многосвязной пьезополосы при ее поперечном изгибе

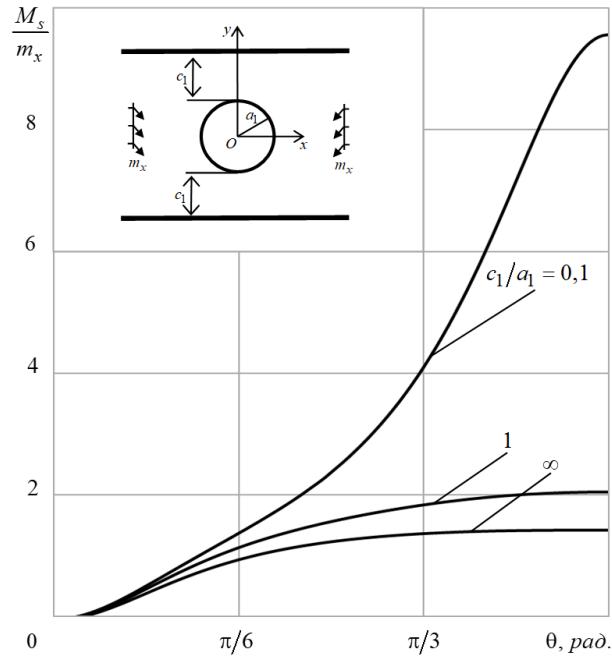


Рис. 3. Графики распределения моментов M_s/m_x около контура кругового отверстия в полосе из материала $M2$ для некоторых значений c_1/a_1

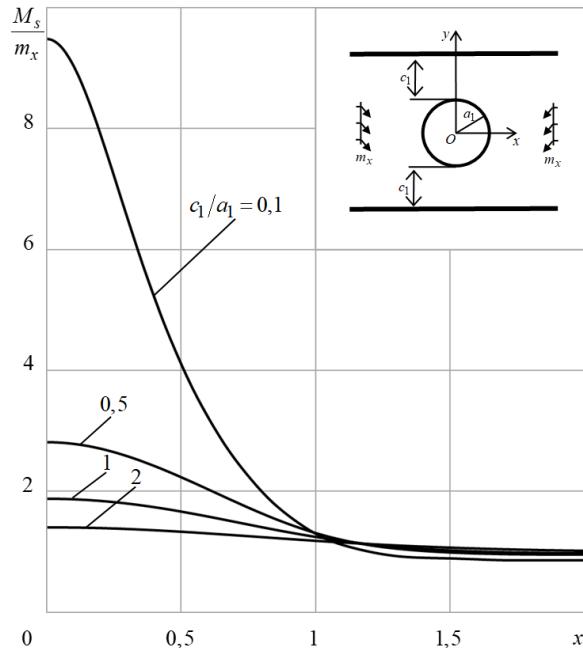


Рис. 4. Графики распределения M_x/m_x по отрезку прямолинейной границы L^+ в полосе с круговым отверстием из материала $M2$ для некоторых значений c_1/a_1

трещинами длины l_2 (рис. 5) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов и КИМ в некоторых характерных точках в зависимости от отношения l_2/a_1 . При этом ширина полосы равна $4a_1$, а характерными точками были $B(a_1, 0)$, $F(0, a_1 + l_2)$, $D^+(0, 2a_1)$, $E^+(a_1, 2a_1)$. На рисунке 6 для этого же случая изображены графики распределения моментов M_s/m_x по контуру кругового отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, для некоторых значений l_2/a_1 в случае задачи ЭУ для полосы из материала М2.

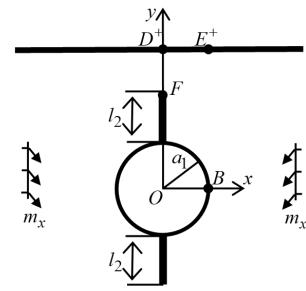


Рис. 5

Таблица 3.

Значения изгибающих моментов и КИМ в некоторых точках полосы с центральным круговым отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами из него в зависимости от l_2/a_1

Материал	Точка	Величина	Задача	l_2/a_1				
				0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
M2	B	M_y	ЭУ	-0,089	-0,087	-0,095	-0,094	-0,118
			ТУ	-0,067	-0,067	-0,067	-0,067	-0,066
	F	k_1^+	ЭУ	0,654	1,153	1,587	2,186	3,857
			ТУ	0,554	1,021	1,432	2,027	3,654
	D^+	M_x	ЭУ	1,931	2,162	2,725	4,258	12,312
			ТУ	1,912	2,129	2,691	4,190	12,192
	E^+	M_x	ЭУ	1,265	1,264	1,262	1,268	1,253
			ТУ	1,255	1,252	1,247	1,238	1,218

Как видно, с увеличением длин трещин значения основных характеристик ЭУС в зонах перемычек и КИМ для концов трещин резко растут. При этом значения M_s/m_x около контура отверстия вблизи трещин резко уменьшаются, практически не изменяясь вдали от трещин.

На рисунке 7 для полосы из материала М2 с двумя симметричными круговыми выемками радиуса a_1 для некоторых значений отношения c_1/a_1 , где c_1 – длина перемычки между ближайшими точками выемок, изображены графики распределения моментов M_s/m_x по контуру нижнего выема в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки.

Видно, что сближение границ полосы с выемками друг к другу приводит к существенному росту значений основных характеристик ЭУС в перемычке и на контурах выемов в зоне перемычки, практически не изменяясь в остальных зонах.

Выводы. Таким образом, дано решение задачи об изгибе тонкой многосвязной пьезополосы с произвольно расположенным относительно друг друга и

Электроупругое состояние многосвязной пьезополосы при ее поперечном изгибе

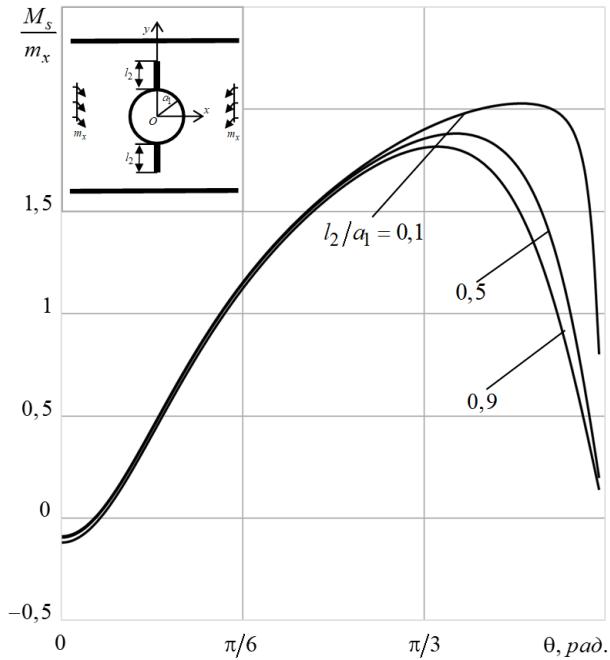


Рис. 6. Графики распределения M_s/m_x около контура кругового отверстия с двумя краевыми трещинами в полосе из М2 для некоторых значений l_2/a_1

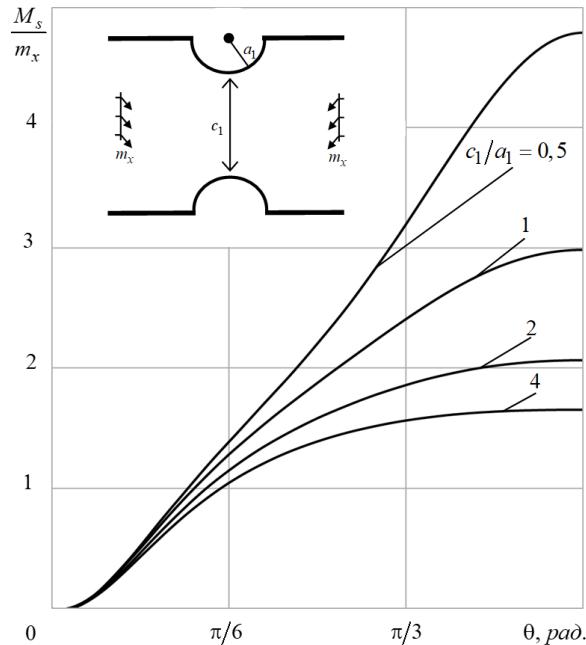


Рис. 7. Графики распределения M_s/m_x около контура нижнего выема в полосе из М2 с двумя симметричными круговыми выемами для некоторых значений c_1/a_1

относительно прямолинейных границ отверстиями и трещинами, в том числе пересекающими друг друга и прямолинейные границы. Для решения задачи использованы комплексные потенциалы теории изгиба тонких электроупругих плит [10, 14], их разложение в ряды Лорана, удовлетворение граничным условиям на контурах отверстий, трещин и на прямолинейных границах обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полосы с центральным круговым отверстием, центральным круговым отверстием и двумя симметричными краевыми трещинами из него, с двумя круговыми выемками на прямолинейных границах полосы. Изучены закономерности изменения ЭУС плиты в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин. Установлено, что, если отверстия (трещины) располагаются на значительном расстоянии (более их диаметров) от прямолинейных границ, то полученные результаты совпадают с аналогичными для бесконечной многосвязной плиты [11]. Также установлено, что на значения механических и индукционных изгибающих моментов значительно влияет учет пьезо свойств материала полосы и им пренебрегать нельзя.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

1. *Берлинкур Д.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. *Eringen A.C.* Electrodynamics of Continua I / A.C. Eringen, G.A. Maugin. – New York: Springer, 1990. – 436 р. – DOI: 10.1007/978-1-4612-3226-1.
3. *Пятаков А.П.* Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
4. *Fang D.* Fracture mechanics of piezoelectric and ferroelectric solids / D. Fang, J. Liu. – Springer Berlin, Heidelberg, 2013. – 417 р. – DOI: 10.1007/978-3-642-30087-5.
5. *Iesan D.* On the bending of piezoelectric plates with microstructure / D. Iesan // Acta Mech. – 2008. – Vol. 198, N. 3. – P. 191–208. – DOI: 10.1007/s00707-007-0527-8
6. *Xu S.-P.* Bending of piezoelectric plates with a circular hole / S.-P. Xu, W. Wang // Acta Mech. – 2009. – Vol. 203. – P. 127–135. – DOI: 10.1007/s00707-008-0025-7. – EDN: MQIZFG.
7. *Zhou Y.* Vibration and bending analysis of multiferroic rectangular plates using third-order shear deformation theory / Y. Zhou, J. Zhu // Composite Structures. – 2016. – Vol. 153. – P. 712–723. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.06.064.
8. *Dai M.* An anisotropic piezoelectric half-plane containing an elliptical hole or crack subjected to uniform in-plane electromechanical loading / M. Dai, C.-F. Gao, P. Schiafone // Journal of mechanics of materials and structures. – 2016. – Vol. 11, No. 4. – P. 433–448. – DOI: 10.2140/jomms.2016.11.433. – EDN: XZGMUN.
9. *Moradi-Dastjerdi R.* Thermo-electro-mechanical behavior of an advanced smart lightweight sandwich plate / R. Morandi-Dastjerdi, K. Behdinan // Aerospace Science and Technology. – 2020. – Vol. 106. – P. 106–142. – DOI: 10.1016/j.ast.2020.106142.
10. *Калоев С.А.* Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоев // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38. – EDN: EZZZBN.
11. *Калоев С.А.* Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты / С.А. Калоев, А.В. Сероштанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 143–155. – DOI: 10.15372/PMTF20220415. – EDN: LWKFFP.
12. *Калоев С.А.* Решение задачи об изгибе многосвязной пьезополуплоскости с приближен-

- ным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестн. ДонНУ. Сер. А: Естеств. науки. – 2024. – № 1. – С. 28-41. – DOI:10.5281/zenodo.12527097. – EDN: BYCRBC.
- 13. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
 - 14. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3–4. – С. 58–79. – EDN: ZZEFFN.
 - 15. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
 - 16. Форсайт Дж. Машины методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
 - 17. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
 - 18. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, N. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.
 - 19. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007.– Т. 43, № 6. – С. 56–62.
 - 20. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov, L.P. Vovk

Electroelastic state of a multiply connected piezostrip under its transverse bending.

Using complex potentials of the theory of bending of electroelastic thin plates, the problem of bending a strip with arbitrary holes and cracks, including intersecting with each others and crossing rectilinear boundaries, is solved. The complex potentials are represented as Laurent series with unknown coefficients determined from the boundary conditions on the contours of the holes and rectilinear boundaries using the generalized least squares method. The results of numerical studies are described for a strip with a central circular hole, with a central circular hole and two symmetrical edge cracks from it, and with two circular recesses on the rectilinear boundaries of the strip. The patterns of change in the electroelastic state of the strip depending on the geometric characteristics of the holes and cracks, as well as their relative positions, are investigated. It has been established that as the rectilinear boundaries of the strip approach the hole or crack, the values ??of the bending moments at the jumper points increase sharply, changing slightly in other zones of the strip. A high concentration of moments is also observed at the points of the rectilinear boundaries of the strip near the jumpers. The values of bending moments are significantly affected by taking into account the piezoelectric properties of the material, especially in areas of high concentration of bending moments, therefore in these cases one cannot limit oneself to solving the problem of elasticity theory about the bending of the plate, but must solve the problem of electroelasticity.

Keywords: thin piezo plate, strip, holes, cracks, complex potentials, generalized least squares method, bending moments intensity factors.

Статья поступила в редакцию 25.11.2025;
доработана 10.12.2025;
рекомендована к печати 19.12.2025.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-48-59

EDN:WPKJJB



©2025. А.С. Гольцев¹

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ В ИЗОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Рассмотрена задача о действии сосредоточенной силы в срединной поверхности изотропных сферических оболочек. Описана методика построения фундаментального решения с использованием специальной G-функции. Построена компьютерная модель распределения внутренних силовых факторов в локальной области точки нагружения. Сделан вывод о преимуществах анализа компьютерных моделей.

Ключевые слова: сферические оболочки, сосредоточенная сила, фундаментальное решение, преобразование Фурье, компьютерная модель.

Введение. Тематика сосредоточенных и локальных воздействий на тонкостенные элементы конструкций является актуальной уже на протяжении половины столетия. Основные результаты научных исследований в этом направлении в двадцатом столетии изложены в монографиях [1, 2], а итоги подведены в литературном обзоре [3]. Продолжением этих исследований в начале двадцать первого века можно считать монографию [4]. Текущие исследования в данном направлении касаются в основном сосредоточенных и локальных воздействий в цилиндрических оболочках [5–8]. В одной из последних публикаций [9] рассмотрена также цилиндрическая оболочка, жёстко закреплённая на одном конце и свободная на другом. Определяется напряжённо-деформированное состояние этой оболочки под действием сосредоточенной силы, направленной вдоль образующей и приложенной в произвольной точке.

Приведённые выше публикации последних десятилетий касаются преимущественно цилиндрических оболочек. Поэтому результаты исследований, приведённые в данной статье, являются расширением соответствующей тематики.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую изотропную сферическую оболочку кривизны k и постоянной толщины h . Срединную поверхность оболочки отнесем к ортогональной системе координат x, y, z . Модуль упругости материала оболочки примем E , коэффициент Пуассона ν . Пусть оболочка находится

¹Гольцев Аркадий Сергеевич – докт. физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: asgoltsev@mail.ru.

Goltsev Arkady Sergeevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

под действием сосредоточенного продольного усилия P , приложенного в начале координат в направлении оси Ox . Задача состоит в определении внутренних силовых факторов, вызванных указанным сосредоточенным воздействием, и построении компьютерной модели, описывающей распределение усилий и моментов в локальной области сосредоточенного воздействия.

Сосредоточенные воздействия вызывают локальные напряжённые состояния, расположенные в непосредственной близости от места приложения нагрузки. Решения для таких областей строятся исходя из уравнений напряжённых состояний с большим показателем изменяемости, совпадающих с уравнениями теории пологих оболочек [2], которые и примем как разрешающие [10]. Кроме того, будем считать, что край оболочки находится на значительном удалении от места приложения сосредоточенной силы и напряжённое состояние затухает на линии внешней границы. Тогда в постановке задачи граничные условия можно не учитывать.

Полная система разрешающих уравнений классической теории тонких пологих изотропных сферических оболочек включает следующие группы уравнений, представленные в безразмерной системе координат ($x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$), определённых с точностью до толщины оболочки.

1. Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} &= -X, & \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} &= -Y, \\ k(N_1 + N_2) - \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= Z, & Q_1 &= \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2}, & Q_2 &= \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где N_1 , N_2 , S – нормальные и касательное мембранные усилия, определённые с точностью до множителя Eh ; M_1 , M_2 , H – изгибающие и крутящий моменты, определённые с точностью до множителя Eh^2 ; Q_1 , Q_2 – перерезывающие силы, определённые с точностью до множителя Eh ; X , Y , Z – проекции внешней нагрузки на координатные оси, определённые с точностью до множителя E .

2. Уравнения физического закона

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{1-\nu^2}[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2], & N_2 &= \frac{1}{1-\nu^2}[\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2], & S &= \frac{1}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}, \\ M_1 &= \frac{1}{12(1-\nu^2)}[\kappa_1 + \nu\kappa_2], & M_2 &= \frac{1}{12(1-\nu^2)}[\nu\kappa_1 + \kappa_2], \\ H &= \frac{1}{12(1+\nu)}\kappa_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_1 , ε_2 , ε_{12} , κ_1 , κ_2 , κ_{12} – компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности.

3. Геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} + kw, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} + kw, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2},$$

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \kappa_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (3)$$

где u, v, w – безразмерные перемещения.

Подставляя геометрические соотношения (3) в уравнения физического закона (2) и внутренние силовые факторы – в уравнения равновесия (1), получим разрешающую систему для рассматриваемых оболочек в перемещениях.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + k(1+\nu) \frac{\partial w}{\partial x_1} &= -(1-\nu^2) X, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + k(1+\nu) \frac{\partial w}{\partial x_2} &= -(1-\nu^2) Y, \\ k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} + \frac{1}{12(1+\nu)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right] + 2k^2 w &= (1-\nu) Z. \end{aligned} \quad (4)$$

Сосредоточенное воздействие моделируем с помощью дельта-функции Дирака (δ). Тогда нагрузка для случая действия единичной силы ($P = 1$) вдоль оси Ox_1 имеет вид

$$X = \delta(x_1, x_2), \quad Y = 0, \quad Z = 0. \quad (5)$$

2. Методика решения. Сформулированную задачу (4), (5) о действии продольной сосредоточенной силы решаем методом интегральных преобразований. Применим двумерное интегральное преобразование Фурье к разрешающей системе сферических оболочек (4). В результате получим следующую систему алгебраических уравнений в пространстве трансформант:

$$\begin{aligned} \left(\xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} \xi_2^2 \right) \tilde{u} + \frac{1+\nu}{2} \xi_1 \xi_2 \tilde{v} + k(1+\nu) i \xi_1 \tilde{w} &= (1-\nu^2) \tilde{X}, \\ \frac{1+\nu}{2} \xi_1 \xi_2 \tilde{u} + \left(\frac{1-\nu}{2} \xi_1^2 + \xi_2^2 \right) \tilde{v} + k(1+\nu) i \xi_2 \tilde{w} &= (1-\nu^2) \tilde{Y}, \\ -k(i \xi_1 \tilde{u} + i \xi_2 \tilde{v}) + \left\{ \frac{1}{12(1+\nu)} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 2k^2 \right\} \tilde{w} &= (1-\nu) \tilde{Z}, \end{aligned} \quad (6)$$

где трансформанты перемещений и компонент нагрузки обозначены тильдой.

Решение системы (6) с учётом трансформанты дельта-функции

$$F\{\delta(x_1, x_2)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1, x_2) \exp(i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2\pi},$$

описывается следующими формулами:

$$\tilde{u} = \frac{(1+\nu)}{\pi} \frac{(\frac{1-\nu}{2} \xi_1^2 + \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} + \frac{12(1-\nu^2)(1+\nu)^2}{2\pi} k^2 \frac{\xi_1^2}{\Delta},$$

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= -\frac{(1+\nu)^2}{2\pi} \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} + \frac{12(1-\nu^2)(1+\nu)^2}{2\pi} k^2 \frac{\xi_1 \xi_2}{\Delta}, \\ \tilde{w} &= \frac{12(1-\nu^2)(1+\nu)}{2\pi} k \frac{i \xi_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\Delta}, \\ \Delta &= (\xi_1^2 + \xi_2^2)^4 + k_0^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2, \quad k_0^4 = 12(1-\nu^2)k^2.\end{aligned}\tag{7}$$

Подставим полученные решения (7) в уравнения физического закона (2), выраженные через перемещения с помощью геометрических соотношений (3) в пространстве трансформант. В результате получим трансформанты внутренних силовых факторов.

$$\begin{aligned}\widetilde{N}_1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{-i \xi_1 (\xi_1^2 + (2+\nu)\xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} + \frac{12(1-\nu^2)(1+\nu)}{2\pi} k^2 \frac{i \xi_1 \xi_2^2}{\Delta}, \\ \widetilde{N}_2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{-i \xi_1 (\nu \xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} + \frac{12(1-\nu^2)(1+\nu)}{2\pi} k^2 \frac{i \xi_1^3}{\Delta}, \\ \widetilde{S} &= \frac{1}{2\pi} \frac{i \xi_2 (\nu \xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} + \frac{12(1-\nu^2)(1+\nu)}{2\pi} k^2 \frac{-i \xi_1^2 \xi_2}{\Delta}, \\ \widetilde{M}_1 &= \frac{(1+\nu)}{2\pi} k \frac{i \xi_1 (\xi_1^2 + \nu \xi_2^2) (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\Delta}, \\ \widetilde{M}_2 &= \frac{(1+\nu)}{2\pi} k \frac{i \xi_1 (\nu \xi_1^2 + \xi_2^2) (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\Delta}, \\ \widetilde{H} &= \frac{(1-\nu^2)}{2\pi} k \frac{i \xi_1^2 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\Delta}, \\ \widetilde{Q}_1 &= \frac{(1+\nu)}{2\pi} k \frac{\xi_1^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}{\Delta}, \quad \widetilde{Q}_2 = \frac{(1+\nu)}{2\pi} k \frac{\xi_1 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}{\Delta}.\end{aligned}\tag{8}$$

К полученным трансформантам внутренних силовых факторов применим формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) \exp(-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2.$$

В результате получим трансформанты внутренних силовых факторов.

Методику обращения проиллюстрируем на примере мембранныго усилия N_1 . Выражение для трансформанты \widetilde{N}_1 из формул (8) рассмотрим отдельно для плоской части (p) – первое слагаемое, не зависящее от кривизны, и для оболочечной добавки (o) – второе слагаемое, зависящее от кривизны.

Имеем

$$N_1^p(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i\xi_1 (\xi_1^2 + (2 + \nu)\xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \exp(-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)) d\xi_1 d\xi_2.$$

Для вычисления несобственного интеграла разобьём подынтегральную функцию на составляющие выражения \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2

$$\tilde{f}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\xi_1^3}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}, \quad \tilde{f}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\xi_1\xi_2^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}.$$

Тогда

$$N_1^p(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} [I_1(x_1, x_2) + (2 + \nu)I_2(x_1, x_2)].$$

Для первого интеграла имеем

$$I_1(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\xi_1^3}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \exp(-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)) d\xi_1 d\xi_2.$$

Используя свойства чётных и нечётных функций, получим

$$I_1(x_1, x_2) = 4 \int_0^{+\infty} \xi_1^3 \sin x_1 \xi_1 d\xi_1 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x_2 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} d\xi_2.$$

Значение внутреннего интеграла получим из табличного интеграла № 2.5.6.6 работы [11], и далее используем значения интегралов № 2.50.30.8 и № 2.5.31.6 из [11]. Окончательно получим

$$I_1(x_1, x_2) = \pi \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \pi x_2 \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

или в полярной системе координат (r, φ)

$$I_1(r, \varphi) = \pi \frac{\cos \varphi}{r} (1 + 2 \sin^2 \varphi).$$

Для второго интеграла

$$I_2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\xi_1 \xi_2^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \exp(-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)) d\xi_1 d\xi_2$$

аналогичным методом, с использованием табличных интегралов № 2.5.9.8 и № 2.5.31.7 из работы [11], получим

$$I_2(r, \varphi) = \pi \frac{\cos \varphi}{r} (1 - 2 \sin^2 \varphi).$$

В результате

$$N_1^p(r, \varphi) = -\frac{1}{8\pi r} [(5 + \nu) \cos \varphi + (1 + \nu) \cos 3\varphi].$$

Для оболочечной добавки N_1^o имеем

$$N_1^o(x_1, x_2) = \frac{12(1 - \nu^2)(1 + \nu)}{4\pi^2} k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\xi_1 \xi_2^2}{\Delta} \exp(-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2.$$

Для упрощения несобственного интеграла используем свойства чётных и нечётных функций.

$$N_1^o(x_1, x_2) = \frac{12(1 - \nu^2)(1 + \nu)}{\pi^2} k^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\xi_1 \xi_2^2}{\Delta} \sin x_1 \xi_1 \cos x_2 \xi_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Для проведения дальнейших вычислений и взятия несобственного интеграла (J) необходимо перейти к полярным системам координат в исходном пространстве (r, φ) и в пространстве изображений (ρ, θ) .

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta.$$

Воспользуемся также разложением Якоби [10]

$$\begin{aligned} & \sin(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \cdot \cos(r\rho \sin \varphi \sin \theta) = \\ & = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(r\rho) \cos(2n+1)\varphi \cos(2n+1)\theta, \end{aligned}$$

где $J_{2n+1}(r\rho)$ – функция Бесселя первого рода.

В результате получим

$$\begin{aligned} J(r, \varphi) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho \cos \varphi \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^4(\rho^4 + k_0^4)} \times \\ &\times 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(r\rho) \cos(2n+1)\varphi \cos(2n+1)\theta \rho d\rho d\theta = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(r\rho) \cos(2n+1)\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta \times \\ &\times \int_0^{+\infty} \frac{J_{2n+1}(r\rho)}{\rho^4 + k_0^4} \cos(2n+1)\theta \rho d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\rho^4 + k_0^4} = -\frac{1}{k_0^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\rho^2 + ik_0^2},$$

несобственный интеграл преобразуем к виду

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_{2n+1}(r\rho)}{\rho^4 + k_0^4} d\rho = -\frac{1}{k_0^2} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \frac{J_{2n+1}(r\rho)}{\rho^2 + ik_0^2} d\rho.$$

Далее используется интегральное представление специальной G-функции [10]

$$G_{n,\nu}(az) = (-1)^n \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(at)}{t^2 + z^2} dt$$

$$(-1 < \operatorname{Re} \nu < n + 3/2, \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0),$$

которое для значений индексов $n = n + 1$ и $\nu = n$ приводит к соотношению

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_{2n+1}(r\rho)}{\rho^2 + ik_0^2} d\rho = (-1)^{n+1} \frac{r}{2} G_{n+1,n}(\sqrt{ik_0}r).$$

В итоге,

$$J(r, \varphi) = \frac{r}{k_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta \cos(2n+1)\theta d\theta \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{ik_0}r).$$

Выражение для оболочечной добавки будет следующим:

$$N_1^o(r, \varphi) = \frac{1+\nu}{\pi^2} k_0^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \cdot F_{N1}(n) \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{ik_0}r),$$

где

$$F_{N1}(n) = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta \cos(2n+1)\theta d\theta.$$

Тогда окончательное выражение для усилия N_1 определяется формулой

$$\begin{aligned} N_1(r, \varphi) = & -\frac{1}{8\pi r} [(5+\nu) \cos \varphi + (1+\nu) \cos 3\varphi] + \\ & + \frac{1+\nu}{\pi^2} k_0^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \cdot F_{N1}(n) \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{ik_0}r), \end{aligned}$$

$$F_{N1}(n) = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta \cos(2n+1)\theta d\theta.$$

Аналогичная методика обращения используется для нахождения оригиналов остальных внутренних силовых факторов. Формулы для их вычисления приведены ниже:

$$N_2(r, \varphi) = \frac{1}{8\pi r} [(1 - 3\nu) \cos \varphi + (1 + \nu) \cos 3\varphi] + \\ + \frac{1 + \nu}{\pi^2} k_0^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \cdot F_{N2}(n) \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{i}k_0 r),$$

$$F_{N2}(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \cos(2n+1)\theta d\theta;$$

$$S(r, \varphi) = -\frac{1}{8\pi r} [(3 - \nu) \sin \varphi + (1 + \nu) \sin 3\varphi] - \\ - \frac{1 + \nu}{\pi^2} k_0^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \sin(2n+1)\varphi \cdot F_S(n) \operatorname{Im} G_{n+1,n}(\sqrt{i}k_0 r),$$

$$F_S(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \sin(2n+1)\theta d\theta;$$

$$M_1(r, \varphi) = -\frac{1 + \nu}{\pi^2} kr \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \cdot F_{M1}(n) \operatorname{Re} G_{n+1,n}(\sqrt{i}k_0 r),$$

$$F_{M1}(n) = \int_0^{\pi/2} f_{m1}(\theta) \cos \theta \cos(2n+1)\theta d\theta, \quad f_{m1}(\theta) = \cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta;$$

$$M_2(r, \varphi) = -\frac{1 + \nu}{\pi^2} kr \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\varphi \cdot F_{M2}(n) \operatorname{Re} G_{n+1,n}(\sqrt{i}k_0 r),$$

$$F_{M2}(n) = \int_0^{\pi/2} f_{m2}(\theta) \cos \theta \cos(2n+1)\theta d\theta, \quad f_{m2}(\theta) = \nu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta;$$

$$H(r, \varphi) = -\frac{1 - \nu^2}{\pi^2} kr \sum_{n=0}^{\infty} \sin(2n+1)\varphi \cdot F_H(n) \operatorname{Re} G_{n+1,n}(\sqrt{i}k_0 r),$$

$$F_H(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \sin(2n+1)\theta d\theta;$$

$$Q_1(r, \varphi) = \frac{1+\nu}{\pi^2} k \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \cdot F_{Q1}(n) \operatorname{Re} G_{n,n}(\sqrt{i}k_0 r),$$

$$F_{Q1}(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cos 2n\theta d\theta, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \ (n \geq 1);$$

$$Q_2(r, \varphi) = \frac{1+\nu}{\pi^2} 2k \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\varphi \cdot F_{Q2}(n) \operatorname{Re} G_{n,n}(\sqrt{i}k_0 r),$$

$$F_{Q2}(n) = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \sin 2n\theta d\theta.$$

Входящая в расчётные формулы специальная G-функция по своим свойствам подобна функции Макдональда ($K_\mu(z)$). Её можно определить следующим выражением:

$$G_{n,\mu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu-n} K_{n+\mu}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(\mu+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k}$$

$$(n > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -1),$$

где $\Gamma(\mu)$ – гамма-функция.

Все определённые интегралы, входящие в расчётные формулы, находятся прямыми численными методами. При вычислении внутренних силовых факторов в представленных рядах Фурье достаточно ограничиться десятью членами ряда.

Расчётные формулы для мембранных усилий содержат два слагаемых. Первое из них не зависит от кривизны оболочки и соответствует «плоской части», которая описывает решение для пластин. Второе слагаемое, содержащее кривизну оболочки, соответствует «оболочечной добавке», которая отражает влияние изогнутой поверхности оболочки на решение.

Расчётные формулы для моментов и перерезывающих сил представлены лишь оболочечной добавкой. Это соответствует общим положениям механики пластин, поскольку плоское напряжённое состояние описывается только мембранными усилиями.

3. Результаты численных исследований. Компьютерная модель сосредоточенного воздействия продольной силы в сферических оболочках построена с помощью системы компьютерной математики Maple. С помощью команды PLOT3D и графической структуры трёхмерной графики типа GRID осуществлена визуализация распределения рассматриваемых величин в локальной области сосредоточенного воздействия. На рисунках 1–8 показано распределение усилий (N_1, N_2, S), моментов (M_1, M_2, H) и перерезывающих сил (Q_1, Q_2) соответственно. Значения величин даны в относительных единицах, умноженных на 100; X и Y – безразмерные координаты.

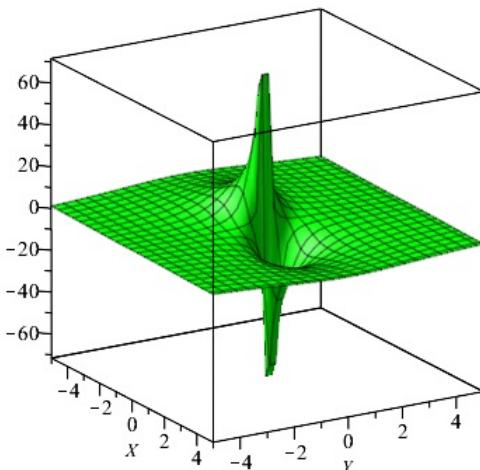


Рис. 1

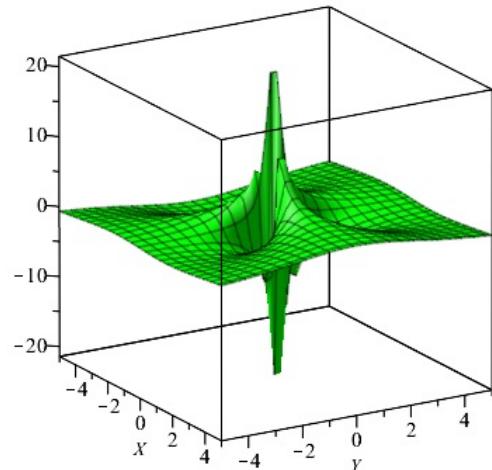


Рис. 2

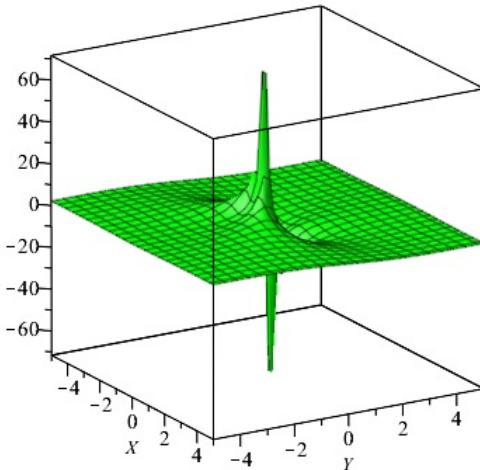


Рис. 3

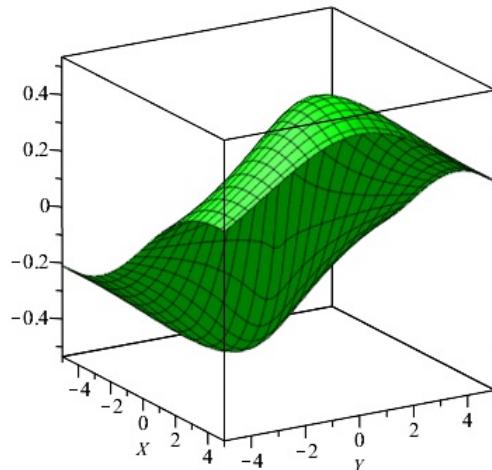


Рис. 4

Полученные картины распределения внутренних силовых факторов наглядно демонстрируют локальный характер напряжённого состояния в случае сосредоточенного воздействия. На границах рассматриваемой области мембранные усилия практически исчезают, а моменты и перерезывающие силы имеют явную тенденцию к уменьшению своих значений. При этом абсолютные значения моментов и перерезывающих сил на два порядка меньше абсолютных значений мембранных усилий, что обусловлено характером нагрузки. С увеличением зоны визуализации локальный характер напряжённого состояния проявится более явственно.

Компьютерная модель явно демонстрирует особенность r^{-1} для мембранных усилий и особенность $\ln r$ для перерезывающего усилия Q_1 в месте сосредоточенного воздействия.

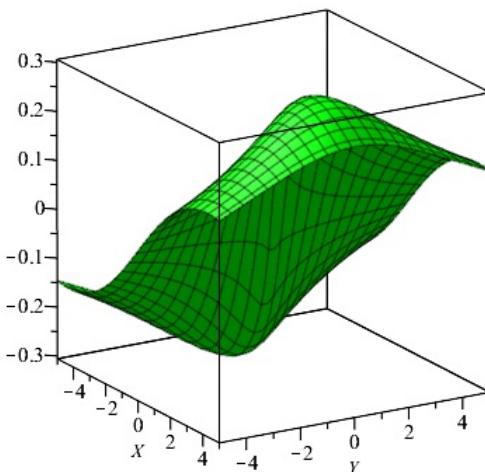


Рис. 5

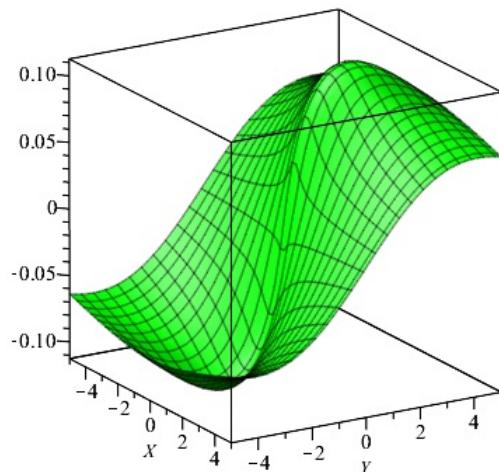


Рис. 6

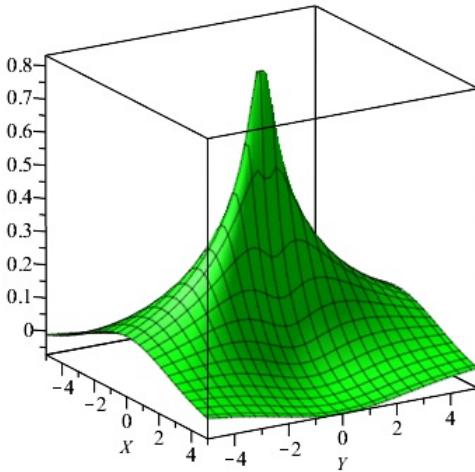


Рис. 7

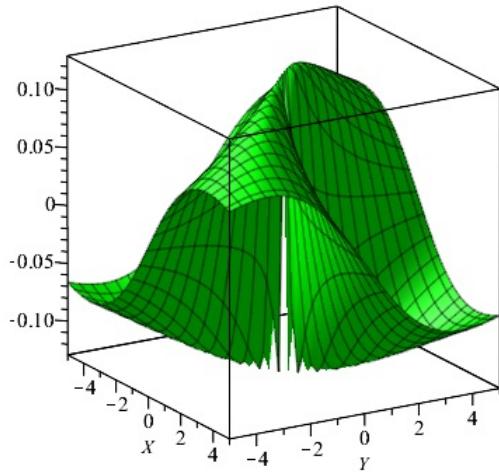


Рис. 8

Выводы.

Предложенная методика построения компьютерных моделей для тонкостенных элементов конструкций при сосредоточенных воздействиях позволяет проводить комплексные исследования по распределению напряжённого состояния в зоне локального нагружения. Визуализация характера изменений внутренних силовых факторов при удалении от места нагрузки позволяет определить те направления, в которых оценку возможных напряжений необходимо проводить более тщательно и точно. Особенно это актуально при использовании тонкостенных элементов конструкций из композиционных материалов, расчёт которых необходимо проводить с учётом анизотропных свойств материала.

Исследование проводилось в ФГБОУ ВО ДонГУ в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400353-3).

1. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич. – М.: Мир, 1982. – 544 с.
2. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7. – С. 159–196.)
3. Нерубайло Б.В. Локализованные силовые и температурные воздействия на оболочки / Б.В. Нерубайло, И.Ф. Образцов, В.П. Ольшанский // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Методы решения. – Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1992. – С. 29–40.
4. Шагивалеев К.Ф. Расчет замкнутой цилиндрической оболочки на локальные и сосредоточенные нагрузки / К.Ф. Шагивалеев. – Саратов: Саратовский гос. технический ун-т, 2011. – 315 с.
5. Шагивалеев К.Ф. Расчет замкнутой цилиндрической оболочки на сосредоточенные нагрузки / К.Ф. Шагивалеев // Вестник СГТУ. – 2007. – № 1 (21), вып. 1. – С. 36–42.
6. Сойкин Б.М. Определение напряжений в цилиндрической оболочке, нагруженной радиальной сосредоточенной силой / Б.М. Сойкин // Альманах современной науки и образования. – 2012. – № 8 (63). – С. 145–148.
7. Леоненко Д.В. Локальные нагрузления трёхслойных круговых цилиндрических оболочек с упругим наполнителем / Д.В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник / пред. ред. кол. А.В. Чигарев. – Минск: БНТУ, 2013. – Вып. 28. – С. 109–113.
8. Дубровин В.М. Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при воздействии ударной сосредоточенной нагрузки / В.М. Дубровин, Т.А. Бутина // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 9. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/957.html>
9. Шагивалеев К.Ф. Расчёт замкнутой цилиндрической оболочки на сосредоточенную нагрузку, действующую вдоль образующей / К.Ф. Шагивалеев, Е.К. Сурнина // Техническое регулирование в транспортном строительстве. – 2020. – № 5 (44) – 4 с. – URL: trts.esrae.ru/67-590 (дата обращения: 16.08.2025).
10. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
11. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

A.S. Goltsev

Computer model of concentrated longitudinal force action in isotropic spherical shells.

The problem of the action of a concentrated force on the middle surface of isotropic spherical shells is considered. A method for constructing a fundamental solution using a special G-function is described. A computer model of the distribution of internal force factors in the local area of the loading point was constructed. A conclusion about the advantages of analyzing computer models is made.

Keywords: spherical shells, concentrated force, fundamental solution, Fourier transform, computer model.

Статья поступила в редакцию 26.11.2025;
доработана 12.12.2025;
рекомендована к печати 19.12.2025.

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-60-71

EDN:TCZKRG



©2025. С.А. Калоеров¹, О.Э. Ермаков², Л.П. Вовк³

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ТОНКОЙ ПЬЕЗОПЛИТЫ

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба электроупругих тонких плит решена задача об изгибе пьезоплиты с эллиптическими включениями из других материалов. При этом функции, голоморфные вне отверстий, представлены рядами Лорана; функции, голоморфные во включениях, – рядами по полиномам Фабера. При удовлетворении граничным условиям на контурах контактов плиты и включений обобщенным методом наименьших квадратов определение неизвестных коэффициентов рядов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Исследованы закономерности влияния физико-механических свойств материалов и геометрических характеристик включений на значения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов для концов линейных включений.

Ключевые слова: пьезоплита, пьезовключения, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, изгибающие моменты.

Введение. Элементы различных конструкций современной техники изготавливаются из пьезоматериалов [1–7]. Часто такие элементы, представляющие собой изгибающие тонкие плиты, имеют отверстия, трещины и инородные включения. При этом вблизи контуров этих отверстий, трещин и включений возникают высокие концентрации изгибающих механических и индукционных мо-

¹Калоеров Стефан Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Ермаков Олег Эдуардович – асп. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: ermakov.donetsk@mail.ru.

Ermakov Oleg Eduardovich – Postgraduate student, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Вовк Леонид Петрович – докт. техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com

Vovk Leonid Petrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technology, Chair of Mathematical Modeling.

ментов, что может приводить к разрушению этих элементов и подлежит учету при проектировании соответствующих конструкций. Соответственно, для этого нужно иметь надежные методы определения электроупругого состояния (ЭУС) многосвязных тонких кусочно-однородных плит.

Как показывают исследования, наиболее достоверные результаты по определению ЭУС многосвязных плит в рамках прикладной модели электроупругого изгиба получаются при решении задач с использованием комплексных потенциалов электроупругости [8].

В данной работе с использованием потенциалов обобщенных комплексных переменных построено общее решение задачи об изгибе бесконечной пьезоплиты с произвольными включениями. При этом комплексные потенциалы для бесконечной плиты представлены рядами Лорана, для включений – рядами по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [9]. Для плиты с двумя круговыми или линейными включениями проведены широкомасштабные численные исследования распределений изгибающих моментов и изменения коэффициентов интенсивности моментов (КИМ). Установлен ряд закономерностей влияния на ЭУС плит геометрических характеристик включений, их места расположения, физико-механических свойств материалов плиты и включений.

1. Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy электроупругую тонкую плиту, ослабленную эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, L}$) и полуосами a_l, b_l (рис. 1), в которые вложены включения из других пьезоматериалов, находящиеся с плитой в условиях идеального электроупругого контакта. Каждое из включений может переходить в линейное (например, при $b_l = 0$). Обозначим бесконечную многосвязную область, ограниченную контурами L_l , через S ; области включений – через S_l . Введем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, L}$) с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l так, что в этих системах и в основной системе координат уравнения эллипсов имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta; \quad (1)$$

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (2)$$

где φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ – параметр, изменяющийся в интервале от 0 до 2π . На бесконечности плита находится

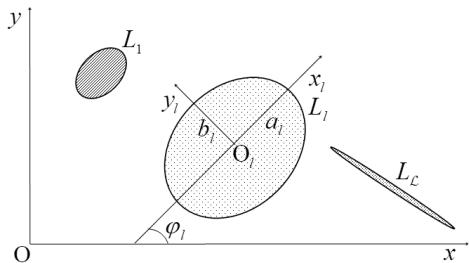


Рис. 1. Многосвязная плита с включениями

под действием механических изгибающих моментов $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ и моментов индукций $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty$ или напряженностей $H_{dx}^\infty, H_{dy}^\infty$.

Если для решения задачи об определении электроупругого состояния рассматриваемой пьезоплиты использовать комплексные потенциалы теории изгиба тонких электроупругих плит [8], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) для бесконечной плиты и комплексных потенциалов $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ ($k = \overline{1, 3}$) для каждого включения.

Комплексные потенциалы $W'_k(z_k)$ являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k - корни характеристического уравнения

$$l_{4s}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}^2(\mu) = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$ - полиномы вида

$$l_{4s}(\mu) = -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}),$$

$$l_{3g}(\mu) = C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11};$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ - упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$ - электрические жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$; h - полутолщина плиты; $b_{ij}, c_{gij}, c_{\beta ij}$ - элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

s_{ij} - коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического поля; g_{ij} - пьезоэлектрические модули деформации и напряженостей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} - коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях [8].

Комплексные потенциалы $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ ($k = \overline{1, 3}$) для каждого включения $S^{(l)}$ являются функциями обобщенных комплексных переменных

$$z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y, \quad (5)$$

где $\mu_k^{(l)}$ - корни характеристического уравнения, получаемого из уравнения (4) заменой всех величин на аналогичные величины с индексом (l) вверху.

Функции $W_k'(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (3) и ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l при этих преобразованиях, и в общем случае многосвязной плиты они могут быть представлены в виде [8, 9]

$$W_k'(z_k) = a_{00} + \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (6)$$

где Γ_k – известные постоянные, определяемые по значениям моментов на бесконечности [8]; ζ_{kl} – переменные, получаемые из конформных отображений внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} [10]

$$\begin{aligned} z_k &= z_{kl0} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \\ z_{kl0} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}; \end{aligned} \quad (7)$$

a_{kln} – неизвестные коэффициенты рядов, которые определим из граничных условий на контурах контакта плиты с включениями.

Функции $W_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ голоморфны в конечных областях $S_k^{(l)}$, получаемых из областей $S^{(l)}$ аффинными преобразованиями (5), и они могут быть представлены рядами по полиномам Фабера для этих областей

$$W_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}), \quad (9)$$

где $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$ – полиномы Фабера для эллипса $L_k^{(l)}$, имеющие вид [11]

$$P_{k0}^{(l)} = 1, \quad P_{kn}^{(l)} = \left(\zeta_k^{(l)} \right)^n + \frac{\left(m_k^{(l)} \right)^n}{\left(\zeta_k^{(l)} \right)^n};$$

$\zeta_k^{(l)}$ – переменные, вводимые при конформных отображениях внешности единичных кругов $|\zeta_k^{(l)}| \geq 1$ на внешности контуров $L_k^{(l)}$ на базе использования формул

$$z_k^{(l)} = z_{k0}^{(l)} + R_k^{(l)} \left(\zeta_k^{(l)} + \frac{m_k^{(l)}}{\zeta_k^{(l)}} \right); \quad (10)$$

$$z_{k0}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l},$$

$$R_k^{(l)} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) + i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_k^{(l)} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) - i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l)}{2R_k^{(l)}},$$

$\mu_k^{(l)}$ – корни уравнения (4) для включения $S^{(l)}$.

Поскольку полиномы Фабера $P_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$ можно представить рядами по степеням $z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)}$ [11], то и функции $W_k'^{(l)}(z_k^{(l)})$ можно представить и в виде степенных рядов

$$W_k'^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n, \quad (11)$$

где $a_{kn}^{(l)}$ – неизвестные постоянные, которые, как и a_{kl} , будем определять из граничных условий на контурах контактов плиты S и включений $S^{(l)}$.

На контурах включений, где имеет место идеальный контакт плиты с включениями, граничные условия для определения комплексных потенциалов имеют вид [8]

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(g_{ikl} W_k'(z_k) - g_{ik}^{(l)} W_k'^{(l)}(z_k^{(l)}) \right) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (12)$$

где

$$g_{1kl} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2kl} = q_k, \quad g_{3kl} = 1, \quad (13)$$

$$g_{4kl} = \mu_k, \quad g_{5kl} = d_{yk}, \quad g_{6kl} = \nu_k;$$

$$g_{1k}^{(l)} = \frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}}, \quad g_{2k}^{(l)} = q_k^{(l)}, \quad g_{3k}^{(l)} = 1,$$

$$g_{4k}^{(l)} = \mu_k^{(l)}, \quad g_{5k}^{(l)} = d_{yk}^{(l)}, \quad g_{6k}^{(l)} = \nu_k^{(l)},$$

$$f_{1l} = -c_l x + c_{1l}, \quad f_{2l} = c_l y + c_{2l}, \quad (14)$$

$$f_{3l} = f_{4l} = 0, \quad f_{jl} = c_{jl}, \quad j = 5, 6;$$

p_k, q_k, d_{yk}, ν_k – известные постоянные [8]; c_l – вещественные постоянные, причем, все величины со значком (l) вверху относятся к включению $S^{(l)}$ и получаются по приведенным выше формулам для плиты заменой соответствующих величин без значка на величины со значком (l) .

Для многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивные постоянные, входящие в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из условий (12) их дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[g_{ikl} \delta_{k,s} W_k''(z_k) - g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} W_k''^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = \frac{df_{il}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (15)$$

где

$$W_k''(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_{kln}(z_k) a_{kln}, \quad W_k''^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) a_{kn}^{(l)}; \quad (16)$$

$$\delta_{k,s} = \frac{dz_k}{ds}, \quad \delta_{k,s}^{(l)} = \frac{dz_k^{(l)}}{ds},$$

$$\phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad \phi'_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = n(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}).$$

Границным условиям (15) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9, 12, 13]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$; $m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (16) в граничные условия (15) в точках $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$, для определения неизвестных постоянных a_{kln} и $a_{kn}^{(l)}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} \phi'_{kn}^{(l)}(t_{km}^{(p)}) a_{kn}^{(l)} \right] = \\ = \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 6}; p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}). \quad (17)$$

Кроме уравнений (17), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (18)$$

следующие из требования однозначности прогиба при полном обходе каждого из контуров L_p .

Систему (17), дополненную уравнениями (18), будем решать методом сингулярных разложений [14, 15]. После нахождения псевдорешений этой системы функций $W'_k(z_k)$ и $W_k''^{(l)}(z_k^{(l)})$ будут известны, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического поля, перерезывающие силы) [8]. Если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейное включение, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) k_{1M}^{\pm} и k_{2M}^{\pm} по известным формулам

$$k_{1M}^{\pm} = 2\operatorname{Re} \left[p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \cos \varphi_l \sin \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_{2M}^{\pm} = 2\operatorname{Re} \left[(q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k,$$

в которых

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln},$$

причем «+» и «-» у КИМ в локальной системе координат $O_l x_l y_l$ относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

Как частный случай из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следует решение задачи теории упругости (ТУ). При проведении численных исследований результаты для этой задачи можно получить по общей программе решения задачи ЭУ, проводя вычисления для модельного материала с постоянными $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}$, $\nu'_{ij} = \lambda_g \nu_{ij}$ и полагая $\lambda_g = 1$ для задачи ЭУ, $\lambda_g \leq 10^{-3}$ для задачи ТУ.

2. Описание результатов численных исследований. Были проведены численные исследования для плит из материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3 - CaFe_2O_4$ (материал М1) [16, 17]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$ (материал М2) [18]. При проведении расчетов упругие свойства материала каждого включения связывались со свойствами материала бесконечной плиты соотношениями $s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} s_{ij}$, где $\lambda_s^{(l)}$ – параметры пропорциональности характеристик соответствующих материалов в бесконечной плите (область S) и включениях (области $S^{(l)}$). Ввиду того, что на значения моментов в бесконечной плите пьезосвойства включений влияют незначительно, при проведении расчетов эти свойства включений не учитывались, т.е. считалось, что $\lambda_g^{(l)} = \lambda_p^{(l)} = \lambda_{gp}^{(l)} = 0$.

В таблице 1 для изгиба моментами $M_y^\infty = m_y$ бесконечной плиты из «существенно анизотропного» материала М2 и слабо пьезоактивного материала М1 с двумя одинаковыми круговыми упругими (не обладающими пьезосвойствами) включениями радиуса a_1 ($b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 = a_1$) (рис. 2), с точностью до множителя m_y , в зависимости от c/a_1 , где c – расстояние между включениями, от параметра механической жесткости включений $\lambda_s^{(1)}$ и центрального угла θ контура L_1 , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов M_s в точках контакта плиты с левым включением, на площадках, перпендикулярных к контуру. Значения $\lambda_s^{(1)}$, равные 0 и ∞ , относятся к случаям плиты с абсолютно жесткими включениями и абсолютно мягкими включениями (отверстиями). На рисунке 3 для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения этих моментов около контура L_1 в плите из материала М2. Сплошные линии относятся к случаю $c/a_1 = 0, 1$; штриховые – к случаю $c/a_1 = \infty$.

Из таблицы 1, рисунка 3 и других полученных результатов следует, что вли-

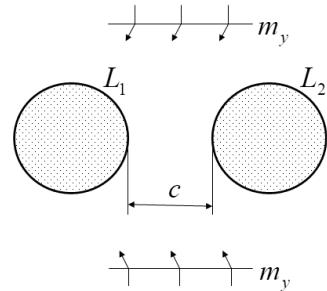


Рис. 2. Схема задачи с двумя круговыми включениями

Поперечный изгиб электроупругой кусочно-однородной тонкой пьезоплиты

Таблица 1. Значения M_s/m_y в плите около контура левого включения

c/a_1	$\lambda_s^{(1)}$	θ , рад.									
		0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	
		Задача ЭМУ					Задача ТУ				
Материал М2											
∞	0,0	-0,852	-0,322	0,963	0,988	-0,852	-0,849	-0,218	0,679	1,027	
	0,1	-0,196	0,044	0,639	0,540	-0,196	-0,170	0,106	0,447	0,559	
	0,5	0,647	0,532	0,314	0,089	0,647	0,669	0,546	0,253	0,094	
	2,0	1,316	0,956	0,247	-0,005	1,315	1,280	0,945	0,302	-0,013	
	10,0	1,825	1,306	0,331	0,112	1,825	1,696	1,272	0,469	0,078	
	∞	2,063	1,474	0,394	0,199	2,063	1,876	1,424	0,565	0,146	
1,00	0,0	-0,629	-0,508	0,628	0,876	-0,830	-0,649	-0,382	0,439	0,907	
	0,1	-0,183	-0,083	0,476	0,484	-0,207	-0,185	-0,004	0,344	0,500	
	10,0	2,199	1,440	0,320	0,107	1,930	2,098	1,406	0,438	0,075	
	∞	2,610	1,662	0,371	0,189	2,208	2,454	1,617	0,519	0,138	
0,10	0,0	-1,630	-0,584	0,554	0,869	-0,894	-1,627	-0,449	0,386	0,899	
	0,1	-0,604	-0,191	0,409	0,465	-0,237	-0,575	-0,105	0,299	0,480	
	10,0	4,081	1,442	0,269	0,127	2,055	3,816	1,355	0,320	0,091	
	∞	6,714	1,499	0,254	0,204	2,410	6,146	1,386	0,281	0,148	
0,01	0,0	-5,557	-0,278	0,616	0,876	-0,937	-5,690	-0,224	0,435	0,907	
	0,1	-1,331	-0,128	0,415	0,462	-0,247	-1,267	-0,078	0,300	0,477	
	0,5	0,390	0,443	0,275	0,071	0,614	0,459	0,462	0,240	0,076	
	2,0	1,868	1,022	0,245	0,006	1,379	1,746	1,002	0,274	-0,002	
	10,0	6,106	1,253	0,236	0,132	2,088	5,453	1,192	0,279	0,096	
	∞	20,727	0,630	0,136	0,219	2,504	18,601	0,570	0,129	0,152	
Материал М1											
∞	0	-0,774	-0,266	0,798	1,207	-0,774	-0,756	-0,262	0,783	1,207	
	0,1	-0,134	0,078	0,520	0,663	-0,134	-0,122	0,080	0,511	0,663	
	0,5	0,678	0,543	0,269	0,110	0,678	0,681	0,543	0,266	0,110	
	2	1,231	0,908	0,279	-0,010	1,231	1,268	0,942	0,298	-0,008	
	10	1,642	1,231	0,465	0,138	1,642	1,664	1,255	0,472	0,120	
	∞	1,826	1,384	0,579	0,247	1,826	1,835	1,399	0,577	0,215	
1,00	0,0	-0,623	-0,361	0,410	1,052	-0,730	-0,667	-0,459	0,478	1,056	
	0,1	-0,216	-0,066	0,354	0,584	-0,134	-0,195	-0,054	0,380	0,591	
	10,0	2,534	1,759	0,596	0,041	2,077	2,407	1,579	0,521	0,203	
	∞	2,534	1,759	0,596	0,041	2,077	2,407	1,579	0,521	0,203	
0,10	0	-0,425	-0,225	-0,181	1,050	-0,509	-0,194	-0,072	-0,250	0,587	
	0,1	-0,188	-0,011	0,047	0,573	-0,055	0,019	0,092	-0,130	0,492	
	10	6,332	1,403	0,173	0,012	2,254	6,018	1,332	0,313	0,218	
	∞	6,340	1,551	0,282	0,104	2,251	6,022	1,339	0,307	0,218	

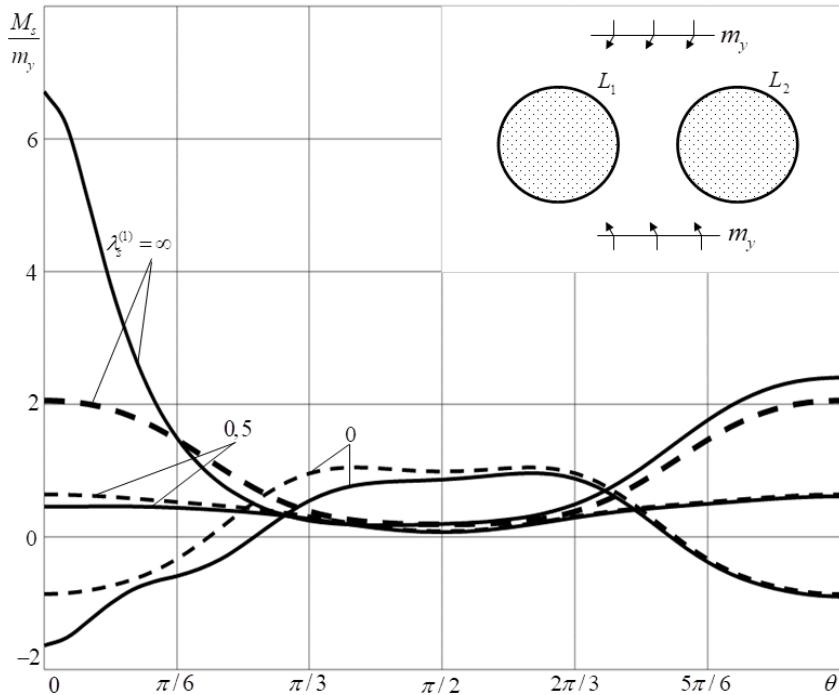


Рис. 3. Графики распределения моментов M_s около контура L_1 при $c/a_1 = 0,1$ (сплошные линии) и $c/a_1 = \infty$ (штриховые линии)

яние одного включения на ЭУС около другого значительно, если расстояние между включениями менее диаметров включений ($c/a_1 \leq 2$); с уменьшением этого расстояния между включениями значения момента M_s в плите около контуров включений резко изменяются вблизи точек перемычки и несколько меньше – в зонах противоположных перемычки (возрастают при $\lambda_s^{(1)} > 1$ (при $E_1^{(1)} < E_1$) и уменьшаются при $\lambda_s^{(1)} < 1$ (при $E_1^{(1)} > E_1$)). При этом на значения момента в этой зоне существенно влияет значение параметра жесткости $\lambda_s^{(1)}$: с увеличением значения $\lambda_s^{(1)}$ (с уменьшением жесткости включений) значения момента M_s резко возрастают. Так, если $c/a_1 = 0,01$, то в точке контура, соответствующей $\theta = 0$, при изменении $\lambda_s^{(1)}$ от 0 (абсолютно жесткие включения) до ∞ (неподкрепленные отверстия) значения момента растут от $-5,557$ до $20,727$. Вдали от перемычки эти значения изменяются незначительно. Значения изгибающих моментов в плите из «существенно анизотропного» материала М2 значительно больше, чем в плите из «близкого к изотропному» материала М1. На изгибающие моменты в плите значительно влияют пьезо свойства; порой значения момента с учетом пьезо свойств (задача ЭУ) в 2 и более раз отличаются от их значений без учета пьезо свойств (задача ТУ).

С уменьшением отношения полуосей эллиптических отверстий b_l/a_l значения

моментов M_s в окрестности концов малых полуосей эллипсов b_l значительно уменьшаются, но они резко растут в окрестности концов больших полуосей a_l , стремясь к бесконечности, и при $b_l/a_l \leq 10^{-3}$ можно говорить о КИМ для концов линейных включений.

В таблице 2 для плиты из материала М2 с двумя одинаковыми упругими линейными включениями (не обладающими пьезо свойствами) длины $2a_1$ ($2a_2 = 2a_1$) (рис. 4) в зависимости от c/a_1 , где c – расстояние между включениями, и параметра механической жесткости включений $\lambda_s^{(1)}$ даны значения КИМ k_1^\pm (в данном случае $k_2^\pm = 0$). Значения $\lambda_s^{(1)}$, равные 0 и ∞ , относятся к случаям абсолютно жестких включений и трещин соответственно. Для случаев, когда параметр $\lambda_s^{(1)}$ равен 0,1 и 10, значения k_1^+ (КИН для правого конца трещины) для всех c/a_1 получаются такими же, как и k_1^- , поэтому они в таблице 2 не приведены.

Таблица 2. Значения КИМ для концов левого линейного включения в плите из материала М2 с двумя линейными включениями

$\lambda_s^{(1)}$	КИМ	c/a_1					
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01
0	k_1^-	-0,549	-0,564	-0,577	-0,593	-0,632	-0,672
	k_1^+	-0,549	-0,575	-0,611	-0,675	-0,985	-2,103
10^{-3}	k_1^-	-0,160	-0,161	-0,162	-0,163	-0,164	-0,165
	k_1^+	-0,160	-0,163	-0,166	-0,173	-0,207	-0,322
0,1	k_1^-	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003
10	k_1^-	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
10^3	k_1^-	0,437	0,441	0,444	0,447	0,453	0,456
	k_1^+	0,437	0,446	0,459	0,484	0,602	1,003
∞	k_1^-	0,998	1,026	1,050	1,079	1,149	1,221
	k_1^+	0,998	1,046	1,110	1,226	1,791	3,838

Как видно из таблицы 2, если механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ($\lambda_s^{(1)} > 1$), то КИМ положительны, и в малой окрестности концов линейных включений при положительных толщинных координатах z напряжения положительны (происходит растяжение); если же механическая жесткость включений меньше жесткости плиты ($\lambda_s^{(1)} < 1$), то КИМ отрицательны, и в малой окрестности концов включений при положительных толщинных координатах z напряжения в плите отрицательны (происходит сжатие). Если материалы плиты и включений по механическим свойствам одинаковы ($\lambda_s^{(1)} = 1$), то, как и следовало ожидать, КИМ равны нулю и напряженное состояние в плите такое же, как в плите без включения. При сближении друг с другом включений

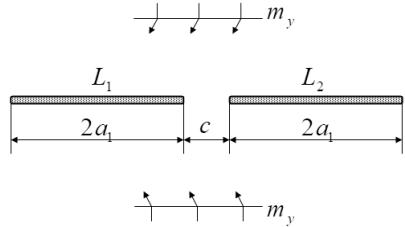


Рис. 4. Схема задачи с двумя линейными включениями

из более жесткого материала, чем материал плиты ($\lambda_s^{(1)} < 1$) значения КИМ несколько уменьшаются; при сближении друг с другом включений из выражено мягкого материала, чем материал плиты ($\lambda_s^{(1)} \gg 1$), значения КИМ резко растут, особенно для ближайших друг к другу концов включений (трещин).

Заключение. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких пьезоплит [8] решена задача об изгибе плиты с включениями из других материалов. При решении задачи голоморфные вне областей включений функции после соответствующих конформных отображений разлагаются в ряды Лорана, функции, голоморфные в эллиптических областях, – в ряды по полиномам Фабера. Определение неизвестных коэффициентов рядов из граничных условий реализуется с применением обобщенного метода наименьших квадратов [9, 12, 13] и сведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений [14, 15]. Численные исследования проведены для плиты с двумя круговыми или линейными включениями. Установлены закономерности изменения электроупругого состояния плиты в зависимости от физико-механических свойств материалов плиты и включений, геометрических характеристик включений.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностр. лит., 1949. – 717 с.
3. Бичурин М.И. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин [и др.]. – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Rahmoune M. New thin piezoelectric plate models / M. Rahmoune, A. Benjeddou, R. Ohayon // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1998. – Vol. 9. – P. 1017–1029.
6. Srinivas S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142. – DOI: 10.1016/j.actamat.2005.05.014.
7. Vel S.S. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators / S.S. Vel, R.C. Batra // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – P. 240–251. – DOI: 10.1088/0964-1726/10/2/309.
8. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38. – EDN: EZZZBN.
9. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3.– С. 103–116.
10. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
11. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев-Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
12. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин. – М.: Наука,

1977. – 304 с.
- 13. Форсайт Дж. Машины методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
 - 14. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.
 - 15. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X.
 - 16. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002.
 - 17. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
 - 18. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – V. 41. – P. 329–338. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

S.A. Kaloerov, O.E. Ermakov, L.P. Vovk

Transverse bending of an electroelastic piecewise homogeneous thin piezoplate.

Using the complex potentials of the theory of bending of electroelastic thin plates, the problem of bending piezoplates with elliptical inclusions of other materials has been solved. In this case, functions that are holomorphic outside the holes are represented by Laurent series, and functions that are holomorphic in inclusions are represented by Faber polynomial series. By satisfying the boundary conditions on the contact contours of the plate and inclusions using the generalized least squares method, the determination of unknown coefficients of the series is reduced to an overridden system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The results of numerical studies for a plate with two circular or linear inclusions are described. The patterns of the influence of the physico-mechanical properties of materials and geometric characteristics of inclusions on the values of bending moments and moment intensity coefficients for the ends of linear inclusions are investigated.

Keywords: piezoplate, piezo inclusions, complex potentials, generalized least squares method, bending moments.

Статья поступила в редакцию 27.11.2025;
доработана 12.12.2025;
рекомендована к печати 24.12.2025.

УДК 539.3
doi:10.24412/0136-4545-2025-4-72-85
EDN:GQVPWL



©2025. Е.С. Глушанков¹

ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТОВ ТИПА ТРЕЩИН НА ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНОК ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛОВ. I

В данной работе рассмотрено влияние краевых трещин, выходящих из контуров пластинки, на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинки около этих контуров при действии линейного потока тепла. Пластинка полагалась изготовленной из пьезоматериала. С помощью численных исследований установлены закономерности влияния конфигурации отверстий и трещин, их размеров, а также температурных граничных условий на их контурах на значения температурных напряжений в окрестности контуров отверстий.

Ключевые слова: многосвязная пластинки, трещины, линейный поток тепла, температурные напряжения, коэффициенты интенсивности напряжений, комплексные потенциалы.

Введение. Во многих областях науки и техники в качестве конструкционных элементов широко применяются пластинки, изготовленные из пьезоматериалов. По технологическим или эксплуатационным причинам эти пластинки могут содержать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. При эксплуатации пластинки могут подвергаться действию температурных полей, которые способны порождать высокие концентрации напряжений в пластинке. Это следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций [1–3]. К настоящему времени было проведено множество исследований температурного воздействия на пластинки с электроупругими свойствами [4], в том числе, действия линейного потока тепла [5].

В данной работе на основе известного решения задачи о действии линейного потока тепла в многосвязной пластинке из пьезоматериала [5] исследовано влияние краевых трещин, выходящих из контуров отверстий в пластинке, на значения температурных напряжений окрестности этих контуров в зависимости от их конфигурации, размеров и тепловых граничных условий. Дополнительно исследовано термонапряженное состояние около вершин трещин (значения коэффициентов интенсивности напряжений). Проведены численные исследования

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

термоэлектромагнитоупругого состояния находящейся под действием линейного потока тепла пластинки с круговым отверстием и краевой трещиной, направленной вдоль либо поперек действия потока тепла с установлением закономерностей влияния вышеуказанных факторов на значения напряжений в пластинке.

1. Постановка и решение задачи о действии линейного потока тепла. Рассмотрим пластинку из пьезоматериала, находящуюся в условиях обобщенного плоского термоэлектромагнитоупругого состояния, занимающую бесконечную многосвязную область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$) с центрами $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контуры L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе, касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы. На контурах пластинки заданы значения температуры T_l либо плотности теплового потока q_{ln} . Контуры не подкреплены либо жестко подкреплены, электромагнитные воздействия отсутствуют. На бесконечности под углом α к оси Ox действует линейный тепловой поток плотности q , а механические и электромагнитные воздействия отсутствуют.

Если несвязанную задачу определения термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки из пьезоматериала решать с использованием комплексных потенциалов, то она сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$, а затем комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из граничных условий соответственно задачи теплопроводности и задачи термоэлектромагнитоупругости.

Комплексный потенциал теплопроводности $F_5(z_5)$ является функцией обобщенной комплексной переменной z_5 , которая определяется аффинным преобразованием вида

$$z_5 = x + \mu_5 y. \quad (1)$$

Здесь μ_5 – корень характеристического уравнения теплопроводности [4, 5]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (2)$$

где k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки. После определения функции $F_5(z_5)$ значения основных характеристик температурного поля (относительной температуры T , плотностей потока тепла q_x, q_y) в точках пластинки определяются по формулам [4, 5]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5), \quad (3)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) + 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_5, -1) F'_5(z_5), \quad (4)$$

где

$$T^* = q(t_x x + t_y y),$$

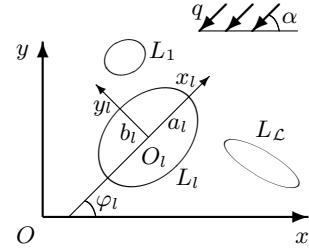


Рис. 1

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\kappa^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\kappa^2},$$

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha,$$

$$\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}.$$

Комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) являются функциями обобщенных комплексных переменных z_k ($k = \overline{1, 4}$), которые определяются аффинными преобразованиями вида

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (5)$$

Здесь μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корни характеристического уравнения электромагнитоупругости [4, 5]

$$l_8(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix},$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} – коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости материала; α_i – коэффициенты теплового расширения материала; t_i и m_i – пироэлектрические и пиromагнитные модули материала. После определения функций $\Phi_k(z_k)$ значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} ; индукций электрического поля D_x , D_y ; индукций магнитного поля B_x , B_y ; напряженностей электрического поля E_x , E_y ; напряженностей магнитного поля H_x , H_y ; перемещений u , v ; потенциала электрического поля φ ; потенциала магнитного поля ψ) в точках пластиинки можно определять по формулам [4, 5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (7)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (8)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (9)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{5g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{5p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5},$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{l_8(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1 \mu_5^2 + \alpha_6 \mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1 \mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1 \mu_5 - m_2,$$

$$p_k = s_{11} \mu_k^2 - s_{16} \mu_k + s_{12} + (g_{11} \mu_k - g_{12}) \nu_k + (p_{11} \mu_k - p_{12}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} \alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12} \mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - \left(g_{21} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) \nu_k - \left(p_{21} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k + \frac{\delta_{k5} \alpha_2}{r_5 \mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11} \mu_k^2 - g_{16} \mu_k + g_{12} - (\beta_{11} \mu_k - \beta_{12}) \nu_k - (\nu_{11} \mu_k - \nu_{12}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11} \mu_k^2 - p_{16} \mu_k + p_{12} - (\nu_{11} \mu_k - \nu_{12}) \nu_k - (\chi_{11} \mu_k - \chi_{12}) \rho_k + \frac{\delta_{k5} m_1}{r_5},$$

$$(E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) = (t_1, t_2, m_1, m_2) T^*,$$

$$u^* = q \left(\frac{\alpha_1 t_x}{2} x^2 - \frac{\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y}{2} y^2 + \alpha_1 t_y xy \right),$$

$$\begin{aligned}
 v^* &= q \left(\frac{\alpha_2 t_y}{2} y^2 - \frac{\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x}{2} x^2 + \alpha_2 t_x x y \right), \\
 \varphi^* &= -q \left(\frac{t_1 t_x}{2} x^2 - \frac{t_2 t_y}{2} y^2 - t_1 t_x x y \right), \\
 \psi^* &= -q \left(\frac{m_1 t_x}{2} x^2 - \frac{m_2 t_y}{2} y^2 - m_1 t_x x y \right), \\
 \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5,
 \end{aligned}$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

В общем случае эти функции принимают вид [4, 5]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5), \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kl} \varphi_{kl}(z_k). \quad (12)$$

Здесь c_5 , D_{5l} – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$; z_{5l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (1) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{5ln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$; ζ_{5l} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k);$$

Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – комплексные постоянные, определяемые из решений систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k &= \\
 &= -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, \mu_5^2, q_5 - \mu_5 p_5, \nu_5, \mu_5 \nu_5, \rho_5, \mu_5 \rho_5) \Gamma_5, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} &= \\
 &= -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i A_{5l}, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} &= \\
 &= -2 \operatorname{Re} (1, \mu_5, p_5, q_5, \nu_5, \rho_5, r_5^0, h_5^0) i B_{5l};
 \end{aligned}$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$; $A_{5l} = r_5 D_{5l}$; $B_{5l} = r_5 (c_{5l} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании (5) произвольным точкам внутри контуров L_l ; a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоэлектромагнитоупругости; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} – комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ уравнения эллипсов (рис. 1) в параметрической форме принимают вид [4]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy –

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned}$$

где θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – угловой параметр уравнения эллипса.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 5}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} d_l F_5(\tau_5) = f_l(\tau), \quad (14)$$

где τ_5 – точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (1); τ – аффикс граничной точки. В случае задания на контуре L_l значений температуры T_l

$$d_l = 1, \quad f_l(\tau) = T_l,$$

а в случае задания плотности потока тепла q_{nl} по направлению нормали

$$d_l = i\kappa, \quad f_l(\tau) = \int_0^s (q_n^*(\tau) - q_{nl}(\tau)) ds + c_l;$$

$q_n^*(\tau) = q_x^* \cos(nx) + q_y^* \sin(ny)$; c_l – неизвестные постоянные интегрирования.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям [4, 5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi'_k(\tau_k) = \\ = \left(\frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau), \frac{df_{l3}}{ds}(\tau), \frac{df_{l4}}{ds}(\tau) \right) - \\ - 2 \operatorname{Re} (d_{5l1}, d_{5l2}, d_{5l3}, d_{5l4}) \delta_{5,s}(\tau_5) r_5 F_5(\tau_5), \end{aligned} \quad (15)$$

где τ_k ($k = \overline{1, 4}$) – точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (5); $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$. Для неподкрепленных контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}), \end{aligned}$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) = (u_l(\tau) - u^*(\tau), v_l(\tau) - v^*(\tau), c_{l3}, c_{l4}); \end{aligned}$$

c_{lp} – неизвестные постоянные интегрирования; $u_l(\tau), v_l(\tau)$ – заданные на границе значения перемещений.

В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные c_5 , D_l , c_{5ln} , a_{kln} определяются из граничных условий (14) и (15) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_j выбирается система точек M_{jm} ($m = \overline{1, M_i}$), в которых минимизируются невязки граничных условий соответствующих задач.

В задаче теплопроводности при подстановке функции (11) в граничное условие (14) для определения неизвестных постоянных c_5 , D_l , c_{5ln} получается система линейных алгебраических уравнений [4, 5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} d_j c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} d_j w_{5l}(\tau_{5jm}) D_{5l} + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_j \varphi_{5ln}(\tau_{5jm}) c_{5ln} = f_j(\tau_{jm}) \\ (j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_j}), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tau_{5jm} = x_{jm} + \mu_5 y_{jm}$, τ_{jm} – аффикс точки M_{jm} . Систему (16) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [6, 7]. После решения этой системы постоянные c_5 , D_l , c_{5ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции можно в любой точке найти температуру и плотности потока тепла по формулам (3)–(4).

В задаче термоэлектромагнитоупругости при подстановке функций (11) и (12) в условия (15) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается

система линейных алгебраических уравнений [4, 5]

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kj} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) \varphi'_{kl} (t_{kjm}) a_{kl} = \\
 & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kj} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) N'_k(t_{kjm}) - \\
 & - 2 \operatorname{Re} d_{5j} \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) r_5 F_5(t_{5jm}) + \frac{df_{jp}}{ds}(t_{jm}) \\
 & (j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_j}, p = \overline{1, 4}),
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. Систему (17) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [6, 7]. После решения этой системы постоянные a_{kl} , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12) будут известны, и по ним можно находить значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния в точках пластиинки по формулам (7)–(10) [4, 5]. Если эллипс L_l в предельном случае трансформируется в прямолинейный разрез ($b_l \rightarrow 0$), то можно вычислить и коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей по формулам [5]

$$k_1^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl}^{\pm},$$

$$k_2^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(1 - \mu_k^2) \sin \varphi_l \cos \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl}^{\pm},$$

$$k_D^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [-\nu_k \cos \varphi_l - \nu_k \mu_k \sin \varphi_l] M_{kl}^{\pm},$$

$$k_E^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [r_k^0 \mu_k \cos \varphi_l - r_k^0 \sin \varphi_l] M_{kl}^{\pm},$$

$$(k_B^{\pm}, k_H^{\pm}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [-\rho_k \cos \varphi_l - \rho_k \mu_k \sin \varphi_l] M_{kl}^{\pm},$$

$$(k_B^{\pm}, k_H^{\pm}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [h_k^0 \mu_k \cos \varphi_l - h_k^0 \sin \varphi_l] M_{kl}^{\pm},$$

где

$$M_{kl}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{a_l}} \left(A_{kl} (z_{kl} \pm a_l) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kl} \right).$$

2. Численные исследования. Были проведены численные исследования термоэлектромагнитного состояния пластинок с круговым отверстием радиуса a ($a_1 = b_1 = a$) и горизонтальной (рис. 2, *a*) или вертикальной (рис. 2, *b*) краевой трещиной длины ℓ ($a_2 = b_2 = \ell/2$). Контур отверстия и берега трещин полагались неподкрепленными.

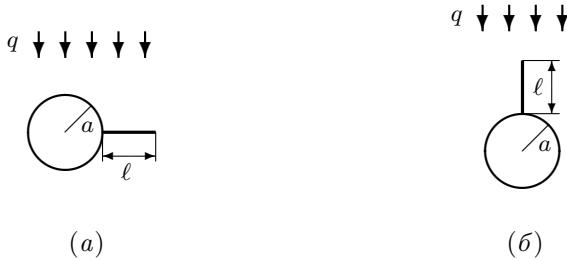


Рис. 2

Пластинки полагались изготовленными из следующих материалов:

- композит $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал M1) [9, 10]:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 7,165s_0, & s_{22} &= 6,797s_0, & s_{66} &= 19,912s_0, & s_{12} &= -2,337s_0, \\ g_{16} &= 2,028g_0, & g_{21} &= -0,496g_0, & g_{22} &= 1,157g_0, \\ p_{16} &= 1,850p_0, & p_{21} &= 0,576p_0, & p_{22} &= 1,186p_0, \\ \beta_{11} &= 0,156\beta_0, & \beta_{22} &= 0,137\beta_0, & \nu_{11} &= -0,190\nu_0, & \nu_{22} &= -0,185\nu_0, \\ \chi_{11} &= 0,336\chi_0, & \chi_{22} &= 0,119\chi_0, & \alpha_1 &= 8,530\alpha_0, & \alpha_2 &= 1,990\alpha_0, \\ t_2 &= 133,000t_0, & m_2 &= 133,000m_0, & k_{11} &= 2,5k_0, & k_{22} &= 2,5k_0; \end{aligned}$$

- композит на основе $CdSe$ и $BaTiO_3$ (материал M2) [9, 11]:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 22,260s_0, & s_{22} &= 14,984s_0, & s_{66} &= 47,481s_0, & s_{12} &= -6,437s_0, \\ g_{16} &= 109,220g_0, & g_{21} &= -4,333g_0, & g_{22} &= 8,016g_0, \\ p_{16} &= 268,318p_0, & p_{21} &= 17,778p_0, & p_{22} &= 31,206p_0, \\ \beta_{11} &= 19,612\beta_0, & \beta_{22} &= 10,612\beta_0, & \nu_{11} &= 213,404\nu_0, & \nu_{22} &= -5,534\nu_0, \\ \chi_{11} &= 0,590\chi_0, & \chi_{22} &= 0,575\chi_0, & \alpha_1 &= -3,031\alpha_0, & \alpha_2 &= -0,608\alpha_0, \\ t_2 &= 40,853t_0, & m_2 &= 0,394m_0, & k_{11} &= 9,0k_0, & k_{22} &= 9,0k_0; \end{aligned}$$

- композит на основе $PZT - 4$ и $CoFe_2O_4$ (материал M3) [9, 11]:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 10,745s_0, & s_{22} &= 7,398s_0, & s_{66} &= 7,637s_0, & s_{12} &= -2,542s_0, \\ g_{16} &= 2,054g_0, & g_{21} &= -1,159g_0, & g_{22} &= 2,458g_0, \\ p_{16} &= 98,843p_0, & p_{21} &= 12,102p_0, & p_{22} &= 22,268p_0, \\ \beta_{11} &= 0,106\beta_0, & \beta_{22} &= 0,090\beta_0, & \nu_{11} &= -14,931\nu_0, & \nu_{22} &= -3,740\nu_0, \\ \chi_{11} &= 0,805\chi_0, & \chi_{22} &= 0,704\chi_0, & \alpha_1 &= -1,578\alpha_0, & \alpha_2 &= -0,326\alpha_0, \\ t_2 &= 2,405t_0, & m_2 &= 0,207m_0, & k_{11} &= 1,2k_0, & k_{22} &= 1,5k_0. \end{aligned}$$

Влияние дефектов типа трещин

Здесь принятые такие обозначения: $s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}$, $g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2$, $p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}$, $\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}$, $\nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}$, $\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1}$, $m_0 = 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$, $k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$.

При проведении численных исследований количество членов в рядах Лорана для функций (11) и (12) и «коллокационных точек» \mathcal{M}_j на контурах L_j , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (16) и (17), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических и упругих характеристик пластинок необходимо было в указанных рядах оставлять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 400 до 1000 «коллокационных точек».

При этом решались следующие задачи: *задача термоэлектромагнитоупругости* (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала пластинки; *задача термоупругости* (ТУ), когда электромагнитные свойства материала пластинки не учитываются.

Таблица 1. Значения напряжений σ_s , МПа в точках контура отверстия (рис. 2, а, случай 1)

Тип задачи	θ , рад.	Значения ℓ/a								
		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
Материал M1										
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,188	-0,156	-0,097	-0,061	-0,044	-0,034	-0,028	-0,024	-0,022
	$\pi/4$	-0,448	-0,445	-0,430	-0,404	-0,376	-0,350	-0,328	-0,308	-0,293
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,479	0,486	0,495	0,505	0,516	0,528	0,539
	$3\pi/4$	-0,448	-0,448	-0,448	-0,446	-0,444	-0,441	-0,437	-0,434	-0,430
ТУ	$\pi/12$	0,036	0,029	0,010	-0,003	-0,011	-0,016	-0,019	-0,021	-0,023
	$\pi/4$	0,204	0,203	0,198	0,187	0,176	0,163	0,151	0,140	0,131
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,475	0,472	0,469	0,464	0,458	0,452	0,446
	$3\pi/4$	0,204	0,204	0,204	0,202	0,202	0,200	0,198	0,196	0,194
Материал M2										
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,005	-0,003	0,006	0,006	0,009	0,009	0,005	0,010	0,010
	$\pi/4$	-0,011	-0,011	-0,014	-0,013	-0,014	-0,014	-0,011	-0,013	-0,012
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,014	-0,014	-0,013	-0,013	-0,013	-0,013	-0,012
	$3\pi/4$	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,010	-0,010
ТУ	$\pi/12$	-0,001	-0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/4$	-0,008	-0,008	-0,008	-0,007	-0,007	-0,006	-0,006	-0,005	-0,005
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,014	-0,014	-0,014
	$3\pi/4$	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,007
Материал M3										
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,029	-0,024	-0,014	-0,006	-0,003	0,000	0,001	0,002	0,003
	$\pi/4$	-0,110	-0,109	-0,106	-0,100	-0,093	-0,086	-0,080	-0,076	-0,071
	$\pi/2$	-0,091	-0,091	-0,090	-0,089	-0,087	-0,084	-0,081	-0,078	-0,075
	$3\pi/4$	-0,110	-0,110	-0,110	-0,109	-0,109	-0,108	-0,107	-0,106	-0,105
ТУ	$\pi/12$	-0,014	-0,009	-0,001	0,002	0,004	0,005	0,006	0,006	0,006
	$\pi/4$	-0,090	-0,089	-0,085	-0,077	-0,070	-0,063	-0,058	-0,053	-0,049
	$\pi/2$	-0,094	-0,094	-0,093	-0,092	-0,091	-0,089	-0,088	-0,086	-0,084
	$3\pi/4$	-0,090	-0,090	-0,090	-0,089	-0,088	-0,087	-0,086	-0,084	-0,083

Угол действия потока тепла α выбирался таким образом, чтобы для сплошной пластиинки без отверстий и трещин не возникали индукции электромагнитного поля. Поскольку материалы М1 и М3 поляризованы вдоль оси Oy , то таким углом является [12] угол $\alpha = \pi/2$.

В таблице 1 для случая действия линейного теплового потока q с плотностью $q = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$ приведены значения напряжений σ_s , МПа в точках контура кругового отверстия в пластинке с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной (рис. 2, a), на контурах которых задана одинаковая температура (здесь и далее – условия 1), в зависимости от значения отношения ℓ/a .

В таблице 2 приведены аналогичные значения напряжений σ_s , МПа в этой же пластинке для случая теплоизолированных контура отверстия и берегов трещин (здесь и далее – условия 2).

Таблица 2. Значения напряжений σ_s , МПа в точках контура отверстия (рис. 2, a, случай 2)

Тип задачи	θ , рад.	Значения ℓ/a								
		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
Материал М1										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	-0,006	-0,006	-0,135	-0,218	-0,269	-0,302	-0,321	-0,331
	$\pi/4$	0,448	0,412	0,412	0,321	0,188	0,033	-0,132	-0,299	-0,464
	$\pi/2$	-0,476	-0,509	-0,509	-0,551	-0,609	-0,680	-0,762	-0,852	-0,948
	$3\pi/4$	0,448	0,497	0,497	0,540	0,586	0,634	0,682	0,730	0,777
ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,034	-0,036	-0,037	-0,038	-0,039	-0,039	-0,039	-0,039
	$\pi/4$	-0,204	-0,220	-0,258	-0,307	-0,359	-0,413	-0,466	-0,518	-0,569
	$\pi/2$	-0,476	-0,498	-0,549	-0,619	-0,699	-0,788	-0,882	-0,980	-1,081
	$3\pi/4$	-0,204	-0,215	-0,242	-0,278	-0,322	-0,372	-0,426	-0,483	-0,544
Материал М2										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,005	0,004	0,002	0,000	-0,002	-0,003	-0,004	-0,004	-0,005
	$\pi/4$	0,011	0,012	0,012	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013
	$\pi/2$	0,015	0,016	0,018	0,021	0,024	0,027	0,030	0,034	0,037
	$3\pi/4$	0,011	0,012	0,013	0,014	0,016	0,018	0,020	0,022	0,024
ТУ	$\pi/12$	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
	$\pi/4$	0,008	0,009	0,010	0,012	0,014	0,016	0,018	0,020	0,022
	$\pi/2$	0,015	0,016	0,017	0,019	0,022	0,024	0,027	0,030	0,033
	$3\pi/4$	0,008	0,008	0,009	0,011	0,012	0,014	0,016	0,018	0,021
Материал М3										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,028	0,011	-0,002	-0,009	-0,014	-0,016	-0,018	-0,019
	$\pi/4$	0,123	0,127	0,133	0,133	0,130	0,126	0,121	0,116	0,111
	$\pi/2$	0,101	0,108	0,124	0,142	0,163	0,185	0,207	0,230	0,253
	$3\pi/4$	0,123	0,129	0,143	0,161	0,182	0,206	0,230	0,256	0,282
ТУ	$\pi/12$	0,015	0,013	0,010	0,008	0,008	0,008	0,007	0,007	0,007
	$\pi/4$	0,101	0,109	0,125	0,142	0,160	0,179	0,197	0,216	0,234
	$\pi/2$	0,105	0,110	0,122	0,138	0,155	0,173	0,192	0,212	0,232
	$3\pi/4$	0,101	0,107	0,120	0,139	0,160	0,183	0,208	0,234	0,262

В таблицах 3 и 4 для случая действия линейного теплового потока q с плотностью $q = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$ приведены значения коэффициента интенсивности напряжений k_2^+ для вершины трещины в этой же пластинке, в зависимости от значения отношения ℓ/a для случаев условий 1 и условий 2 соответственно.

Влияние дефектов типа трещин

Таблица 3. Значения КИН k_2^+ у вершины трещины (рис. 2, а, случай 1)

Тип задачи	Значения ℓ/a							
	0, 25	0, 5	0, 75	1	1, 25	1, 5	1, 75	2
	Материал М1							
ТЭМУ	4, 0540	7, 3501	9, 3944	10, 4548	10, 9510	11, 0981	11, 0283	10, 8420
ТУ	-1, 0143	-2, 4683	-3, 7245	-4, 7132	-5, 4646	-6, 0324	-6, 4604	-6, 7808
	Материал М2							
ТЭМУ	0, 0775	0, 1241	0, 1939	0, 2379	0, 2691	0, 3042	0, 3061	0, 3154
ТУ	0, 0417	0, 0978	0, 1439	0, 1787	0, 2042	0, 2228	0, 2364	0, 2463
	Материал М3							
ТЭМУ	0, 7386	1, 5542	2, 1120	2, 4706	2, 7036	2, 8529	2, 9463	3, 0028
ТУ	0, 4650	1, 1104	1, 5826	1, 8913	2, 0923	2, 2235	2, 3086	2, 3628

Таблица 4. Значения КИН k_2^+ у вершины трещины (рис. 2, а, случай 2)

Тип задачи	Значения ℓ/a							
	0, 25	0, 5	0, 75	1	1, 25	1, 5	1, 75	2
	Материал М1							
ТЭМУ	-5, 8713	-12, 2037	-17, 1461	-20, 8524	-23, 6594	-25, 8473	-27, 6177	-29, 1123
ТУ	0, 7796	2, 3716	4, 4228	6, 7636	9, 3026	11, 9880	14, 2200	17, 6836
	Материал М2							
ТЭМУ	-0, 1111	-0, 2371	-0, 3543	-0, 4668	-0, 5770	-0, 6867	-0, 7971	-0, 9087
ТУ	-0, 0320	-0, 0953	-0, 1733	-0, 2595	-0, 3511	-0, 4467	-0, 5454	-0, 6469
	Материал М3							
ТЭМУ	-1, 0200	-2, 3436	-3, 5586	-4, 6815	-5, 7556	-6, 8106	-7, 8638	-8, 9254
ТУ	-0, 4426	-1, 3190	-2, 2780	-3, 2417	-4, 2067	-5, 1782	-6, 1603	-7, 1557

В таблице 5 для случая действия аналогичного линейного теплового потока приведены значения напряжений σ_s , МПа в точках контура кругового отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и вертикальной краевой трещиной (рис. 2, б) для случая условий 1 в зависимости от значения отношения ℓ/a , а в таблице 6 – значения коэффициента интенсивности напряжений k_1^+ для вершины трещины в этой же пластинке для случая условий 1 в зависимости от значения отношения ℓ/a .

Выводы. Из приведенных данных для случая пластинки отверстием с горизонтальной краевой трещиной видно, что длина трещины оказывает мало-выраженное влияние на термоэлектромагнитоупругое состояние около отверстия в случае 1 и оказывает существенное влияние в случае 2 – тогда с длиной трещины стремительно растут по модулю значения напряжений. Вместе с тем, установлено, что длина краевой трещины оказывает значительное влияние на значения КИН у ее вершины. Трещине большей длины соответствует большее значение КИН. Установлено, что более значительный рост КИН наблюдается в случае 2, нежели в случае 1. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала (при решении задачи ТУ) существенно искажает истинные значения напряжений и КИН (при решении задачи ТЭМУ), поэтому при расчетах нельзя не учитывать эти свойства.

Таблица 5. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия (рис. 2, б, случай 1)

Тип задачи	θ , рад.	Значения ℓ/a								
		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
ТЭМУ	$-\pi/2$	-0,476	-0,669	-0,811	-0,901	-0,954	-1,020	-1,079	-1,105	-1,133
	$-5\pi/12$	-0,120	-0,177	-0,222	-0,250	-0,266	-0,286	-0,305	-0,310	-0,318
	$-\pi/3$	0,330	0,471	0,569	0,631	0,671	0,717	0,759	0,784	0,805
	$-\pi/4$	0,448	0,696	0,872	0,984	1,053	1,136	1,210	1,249	1,285
	$-\pi/6$	0,357	0,645	0,852	0,983	1,062	1,158	1,244	1,285	1,325
	$-\pi/12$	0,188	0,489	0,704	0,839	0,918	1,015	1,102	1,138	1,176
	0	0,000	0,300	0,512	0,640	0,711	0,801	0,882	0,911	0,944
	$\pi/12$	-0,188	0,101	0,297	0,410	0,468	0,546	0,617	0,639	0,665
	$\pi/6$	-0,357	-0,095	0,073	0,163	0,203	0,266	0,325	0,342	0,364
	$\pi/4$	-0,448	-0,250	-0,134	-0,077	-0,054	-0,007	0,041	0,057	0,078
	$\pi/3$	-0,330	-0,278	-0,247	-0,227	-0,216	-0,184	-0,151	-0,135	-0,117
	$5\pi/12$	0,120	-0,095	-0,122	-0,123	-0,120	-0,115	-0,109	-0,105	-0,100
	$\pi/2$	0,476	—	—	—	—	—	—	—	—
ТУ	$-\pi/2$	-0,476	-0,598	-0,676	-0,726	-0,756	-0,793	-0,815	-0,840	-0,851
	$-5\pi/12$	-0,433	-0,549	-0,625	-0,673	-0,701	-0,737	-0,759	-0,782	-0,793
	$-\pi/3$	-0,327	-0,429	-0,497	-0,541	-0,567	-0,600	-0,621	-0,640	-0,649
	$-\pi/4$	-0,204	-0,290	-0,349	-0,387	-0,410	-0,438	-0,458	-0,473	-0,481
	$-\pi/6$	-0,102	-0,172	-0,223	-0,255	-0,275	-0,299	-0,318	-0,327	-0,334
	$-\pi/12$	-0,036	-0,096	-0,140	-0,167	-0,183	-0,203	-0,221	-0,228	-0,234
	0	0,000	-0,056	-0,096	-0,120	-0,134	-0,152	-0,170	-0,175	-0,183
	$\pi/12$	0,036	-0,026	-0,068	-0,093	-0,108	-0,126	-0,145	-0,152	-0,164
	$\pi/6$	0,102	0,021	-0,032	-0,063	-0,083	-0,104	-0,126	-0,138	-0,152
	$\pi/4$	0,204	0,089	0,013	-0,031	-0,059	-0,083	-0,104	-0,118	-0,132
	$\pi/3$	0,327	0,142	0,031	-0,019	-0,045	-0,062	-0,075	-0,083	-0,090
	$5\pi/12$	0,433	0,070	-0,012	-0,024	-0,026	-0,026	-0,026	-0,025	-0,025
	$\pi/2$	0,476	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 6. Значения КИН k_1^+ у вершины трещины (рис. 2, б, случай 1)

Тип задачи	Значения ℓ/a							
	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
ТЭМУ	-0,8033	-1,7042	-2,6363	-3,4911	-4,2852	-5,2617	-6,3325	-7,8550
ТУ	3,4008	6,6432	10,3565	14,3779	18,3053	22,4355	27,2665	32,4185

Для случая пластинки с отверстием с вертикальной краевой трещиной видно, что длина трещины оказывает существенное влияние на ТЭМУС около отверстия в случае 1. Значения напряжений резко уменьшаются около точки выхода трещины на контур отверстия. В других частях контура напряжения, наоборот, резко возрастают с длиной трещины. Вместе с тем, установлено, что длина краевой трещины оказывает значительное влияние на значения КИН у ее вершины. Трещине большей длины соответствует большее значение КИН у ее конца. Как в случае горизонтальной краевой трещины, при решении задачи ТУ значения напряжений и КИН значительно искажаются, поэтому необходимо учитывать все свойства материала пластинки.

При этом, наибольшие напряжения возникают в пластинке из материала М1. Это связано тем, что материал М1 имеет, по сравнению с материалами М2 и М3, наименьшие коэффициенты деформации (наибольшую жесткость),

наименьшие пьезомагнитные коэффициенты, наибольшие пироэлектрические и пиромагнитные модули и наибольшие коэффициенты теплового расширения.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
2. Можсен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Парトン В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
4. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
5. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донецк. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
6. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
7. Форсайт Дж. Машины методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
8. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
9. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
10. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
11. Hou P.-F. Three-dimensional Green's function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.-F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mat. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.
12. Глушанков Е.С. Новое решение задачи о действии линейного потока тепла в сплошной пластинке из пьезоматериала / Е.С. Глушанков // Вестн. Донецк. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2025. – № 3. – С. 56–66. – DOI: 10.5281/zenodo.17052556. – EDN: MPSVJK.

E.S. Glushankov

The effect of crack-type defects on the thermo-electro-magneto-elastic state of piezoelectric plates. I.

The article discusses the effect of the boundary cracks originated from the plate's contours on the thermo-electro-magneto-elastic state of the plate at these contours, under heat flux action. The plate is considered made of piezoelectric material. The patterns of the influence of the holes' and cracks' configuration, their sizes, and the thermal boundary conditions on the values of thermal stresses in the contours' neighborhood are obtained with the numerical studies.

Keywords: multiply connected plate, cracks, linear heat flux, thermal stresses, stress intensity factors, complex potentials.

Статья поступила в редакцию 28.11.2025;
доработана 15.12.2025;
рекомендована к печати 24.12.2025.

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-86-106

EDN:HNGFKK



©2025. А.И. Дзундза¹, Н.Ю. Мельничук², И.А. Моисеенко³,
Р.Н. Нескородев⁴

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ С МНОГОФАКТОРНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

С использованием предложенных вариантов модели функциональной неоднородности решена задача построения базисного набора аналитических частных решений математической модели, описывающей процесс распространения неосесимметричных упругих нормальных волн в функционально-градиентных полых изотропных цилиндрах кольцевого поперечного сечения. Изучены свойства таких волн в аспекте влияния вида функциональной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих волн.

Ключевые слова: функционально-градиентный материал, многофакторная неоднородность, полый цилиндрический волновод, изотропия, нормальные волны, аналитические базисные частные решения, дисперсионный спектр, фазовая скорость, групповая скорость.

¹Дзундза Алла Ивановна – докт. пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

Dzundza Alla Ivanovna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Мельничук Наталия Юрьевна – мл. науч. сотр. НОМЦ «Математический центр ДонГУ», Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

Melnichuk Natalia Iurievna – Junior Researcher, Donetsk State University Mathematical Center, Donetsk.

³Моисеенко Игорь Алексеевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

⁴Нескородев Роман Николаевич – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nrromn72@mail.ru.

Neskorodev Roman Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Введение и цели исследования. Теоретические исследования в области волновой динамики, как правило, предполагают построение базисных наборов аналитических частных решений дифференциальных уравнений для соответствующих пространственных моделей. В случае изучения волновых процессов в полых протяженных цилиндрах из инновационных функционально-градиентных материалов плодотворным оказался подход, связанный с заданием специального вида функциональных законов изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной кольцевой координате. Так, для единого двухпараметрического экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности материала волновода построены в аналитическом виде базисные наборы частных решений уравнений модели для случаев изотропного [1], трансверсально-изотропного [2] и ортотропного [3] материалов. Устранение лежащего в основе представленных исследований ограничения, связанного с единообразным видом функциональных законов неоднородности, лежит в области привлечения многофакторных моделей функциональной радиальной неоднородности. В работе [4] на базе введенных специальных двух- и трехфакторных моделей неоднородности, свободных от ограничений на независимый вид функциональных законов изменения физико-механических характеристик изотропного материала волновода, построены базисные наборы аналитических частных решений уравнений математической модели для двух типов осесимметричных нормальных упругих волн, распространяющихся в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения. В данном исследовании указанная трехфакторная модель неоднородности применена для построения базисного набора аналитических частных решений уравнений математической модели в случае неосесимметричного волнового процесса в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения.

1. Постановка задачи. Рассматривается цилиндрический волновод, в поперечном сечении представляющий собой концентрическое круговое кольцо с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами. Вводится безразмерная, нормированная параметром $R_* = (R_1 + R_2)/2$, цилиндрическая система координат $Or\theta z$, в которой волновод занимает область

$$V = \{r \in [1 - h, 1 + h], \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad z \in (-\infty, \infty)\},$$

где $h = (R_2 - R_1)/(R_1 + R_2)$ ($0 < h < 1$). Изотропный материал волновода полагается функционально-неоднородным

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \quad \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r),$$

где

$$\tilde{\lambda}(r) > 0, \quad \tilde{\mu}(r) > 0, \quad \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [1 - h, 1 + h]). \quad (1)$$

Здесь параметры $C_* = const$ и $\rho_* = const$ имеют размерность соответственно упругих модулей Ламе и плотности, а функциональные законы $\tilde{\lambda}(r)$, $\tilde{\mu}(r)$, $\tilde{\rho}(r)$

полагаются произвольными в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик и относятся к классу $C^2(1-h, 1+h)$.

Исследование распространяющихся вдоль оси Oz с круговой частотой ω , нормированным параметром R_* продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) и окружным волновым числом τ ($\tau \in \mathbb{N}$) неосесимметричных нормальных упругих волн реализуется в рамках пространственной линейной математической модели волновой динамики. Для построения решений указанной модели допускается применение метода разделения переменных.

Вводится замена переменных $r = \eta(x) = 1 + hx$, где $x \in [-1, 1]$ – обобщенная кольцевая координата [5]. В новой системе координат $Ox\theta z$ соотношения (1) переписываются следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(x) > 0, \tilde{\mu}(x) > 0, \tilde{\rho}(x) > 0 \quad (x \in [-1, 1]). \quad (2)$$

Соотношения математической модели в матрично-векторном виде получают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U \mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x), \\ \boldsymbol{\Sigma}(x, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(\tau)}(x); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, \theta, z, t) &= [u_r(x, \theta, z, t), u_\theta(x, \theta, z, t), u_z(x, \theta, z, t)]^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}(x, \theta, z, t) &= [\sigma_{rr}(x, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(x, \theta, z, t), \sigma_{zz}(x, \theta, z, t), \\ &\quad \sigma_{\theta z}(x, \theta, z, t), \sigma_{rz}(x, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(x, \theta, z, t)]^T; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) &= [\tilde{u}_r^{(\tau)}(x), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(x), \tilde{u}_z^{(\tau)}(x)]^T, \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(\tau)}(x) &= [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(x)]^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\tilde{u}_s^{(\tau)}(x)$ ($s = r, \theta, z$) и $\tilde{\sigma}_s^{(\tau)}(x)$ ($s = rr, \theta\theta, zz, \theta z, rz, r\theta$) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процесса; \mathbf{P}_U и \mathbf{P}_Σ – квадратные диагональные матрицы комплексной нормировки с элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_U]_{1,1} &= [\mathbf{P}_U]_{2,2} = 1, [\mathbf{P}_U]_{3,3} = i, \\ [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} &= 1 \quad (j = 1, 2, 3, 6), [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} = i \quad (j = 4, 5); \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)$ и $\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)$ – квадратные диагональные функциональные матрицы зависимости от угловой координаты с элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} &= [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} = \cos(\tau\theta), [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} = \sin(\tau\theta), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \cos(\tau\theta) \quad (j = 1, 2, 3, 5), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \sin(\tau\theta) \quad (j = 4, 6). \end{aligned} \quad (7)$$

Неосесимметричные нормальные волны с многофакторной функциональной неоднородностью

Векторные функции $\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(x)$ и $\tilde{U}^{(\tau)}(x)$ связаны дифференциальным соотношением

$$\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(x) = \tilde{G}(x) \left(\tilde{M}^{(\tau)}(x) \cdot \tilde{U}^{(\tau)}(x) \right), \quad (8)$$

где $\tilde{G}(x)$ – матрица упругих модулей Гука размерности 6×6 с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} [\tilde{G}(x)]_{n,m} &= \tilde{\lambda}(x) \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ [\tilde{G}(x)]_{j,j} &= \tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad [\tilde{G}(x)]_{j,j} = \tilde{\mu}(x) \quad (j = \overline{4, 6}); \end{aligned} \quad (9)$$

$\tilde{M}^{(\tau)}(x)$ – матричный размерности 6×3 дифференциальный оператор с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{1,1} &= h^{-1}d_x, \quad [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{2,1} = \eta(x)^{-1}, \quad [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{2,2} = \tau\eta(x)^{-1}, \\ [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{3,3} &= -k, \quad [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{4,2} = k, \quad [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{4,3} = -\tau\eta(x)^{-1}, \\ [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{5,1} &= k, \quad [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{5,3} = h^{-1}d_x, \\ [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{6,1} &= -\tau\eta(x)^{-1}, \quad [\tilde{M}^{(\tau)}(x)]_{6,2} = h^{-1}d_x - \eta(x)^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения движения преобразуются к виду

$$\tilde{D}^{(\tau)}(x) \cdot \tilde{U}^{(\tau)}(x) = \mathbf{O}, \quad (11)$$

где \mathbf{O} – нулевой вектор-столбец размерности 3; $\tilde{D}^{(\tau)}(x)$ – матричный размерности 3×3 дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned} [\tilde{D}^{(\tau)}(x)]_{mm} &= d_x^2 + \tilde{f}_{mm}^{(1)}(x)d_x + \tilde{f}_{mm}^{(2)}(x) \quad (m = \overline{1, 3}), \\ [\tilde{D}^{(\tau)}(x)]_{mn} &= \tilde{f}_{mn}^{(1)}(x)d_x + \tilde{f}_{mn}^{(2)}(x) \quad (m \neq n = \overline{1, 3}). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{11}^{(1)}(x) &= \frac{h}{\eta(x)} + \frac{\lambda'(x) + 2\mu'(x)}{\lambda(x) + 2\mu(x)}, \\ \tilde{f}_{11}^{(2)}(x) &= -\frac{h^2}{\eta(x)^2} + \frac{h^2 \left(\Omega^2 \tilde{\rho}(x) - \tilde{\mu}(x) \left(k^2 + \tau^2 \eta(x)^{-2} \right) \right) + h\eta(x)^{-1}\tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \\ \tilde{f}_{12}^{(1)}(x) &= \frac{h\tau}{\eta(x)} \left(1 - \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)} \right), \\ \tilde{f}_{12}^{(2)}(x) &= -\frac{h\tau}{\eta(x)^2} \left(h + \frac{h\tilde{\mu}(x) - \eta(x)\tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{13}^{(1)}(x) &= -hk \left(1 - \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)} \right), \quad \tilde{f}_{13}^{(2)}(x) = -\frac{hk\tilde{\lambda}'(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \\
\tilde{f}_{21}^{(1)}(x) &= -\frac{h\tau}{\eta(x)} \left(1 - \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \quad \tilde{f}_{21}^{(2)}(x) = -\frac{h\tau}{\eta(x)^2} \left(3h + \frac{h\tilde{\lambda}(x) + \eta(x)\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\
\tilde{f}_{22}^{(1)}(x) &= \frac{h}{\eta(x)} + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \\
\tilde{f}_{22}^{(2)}(x) &= h \left(h \left(\Omega^2 \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\mu}(x)} - k^2 \right) - \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\eta(x)\tilde{\mu}(x)} - \frac{h}{\eta(x)^2} \left(1 + \tau^2 \left(2 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right) \right) \right), \\
\tilde{f}_{23}^{(1)}(x) &= 0, \quad \tilde{f}_{23}^{(2)}(x) = -\frac{h^2k\tau}{\eta(x)} \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\
\tilde{f}_{31}^{(1)}(x) &= hk \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \quad \tilde{f}_{31}^{(2)}(x) = hk \left(\frac{h}{\eta(x)} \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right) + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\
\tilde{f}_{32}^{(1)}(x) &= 0, \quad \tilde{f}_{32}^{(2)}(x) = \frac{h^2k\tau}{\eta(x)} \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right), \\
\tilde{f}_{33}^{(1)}(x) &= \frac{h}{\eta(x)} + \frac{\tilde{\mu}'(x)}{\tilde{\mu}(x)}, \quad \tilde{f}_{33}^{(2)}(x) = h^2 \left(\Omega^2 \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\mu}(x)} - k^2 \left(2 + \frac{\tilde{\lambda}(x)}{\tilde{\mu}(x)} \right) - \frac{\tau^2}{\eta(x)^2} \right),
\end{aligned}$$

$\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ – безразмерная приведенная частота.

Математическая модель (2) – (11) дополняется граничными условиями для случая свободного

$$\tilde{\sigma}_s^{(\tau)}(\pm 1) = 0 \quad (s = rr, rz, r\theta) \quad (12)$$

либо жестко закрепленного

$$\tilde{u}_s^{(\tau)}(\pm 1) = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (13)$$

волновода.

2. Модель радиальной неоднородности. Следуя работе [4] вводятся: декартова система координат Oxy и комплексная переменная $\xi = x+iy$; произвольные функции $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$), аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$); два типа моделей неоднородности для функциональных законов (2), аналогичных представленным в указанной работе для случая осесимметричных волн продольно-сдвигового типа.

Аналитическая модель неоднородности. Применима в случае, когда функции $\tilde{\lambda}(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$ допускают аналитическое продолжение в аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функции. Соотношения модели имеют вид

$$\psi_1(\xi) = \hat{\lambda}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\mu}(\xi), \quad \psi_3(\xi) = \hat{\rho}(\xi). \quad (14)$$

Численная модель неоднородности. Имеет два альтернативных вида и реализуется с применением полиномиальных аппроксимаций так:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &\approx \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \quad \psi_2(x) \approx \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)}, \\ \psi_3(x) &\approx \ln(\tilde{\lambda}(x) + 2\tilde{\mu}(x)) \quad (x \in [-1, 1]);\end{aligned}\quad (15\text{-A})$$

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &\approx \tilde{\lambda}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_2(x) \approx \tilde{\rho}(x)/\tilde{\mu}(x), \quad \psi_3(x) \approx \ln(\tilde{\mu}(x)) \\ &\quad (x \in [-1, 1]).\end{aligned}\quad (15\text{-Б})$$

Здесь

$$\psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (16)$$

В работе [4] приведены условия определения порядка полиномов в соотношениях (16), а также для каждого типа модели неоднородности сформулированы достаточные условия несильной радиальной неоднородности, при выполнении которых дифференциальный оператор $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(x)$ допускает аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной ξ в дифференциальный оператор $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi)$ с аналитическими в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функциональными коэффициентами $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1, 2}$; $n, m = \overline{1, 3}$).

В случае соотношений (14) представления для $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$ имеют вид

$$\hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) = h \eta(\xi)^{-1} (\chi_1(\xi) + 2\chi_2(\xi)) + \chi_7(\xi) + 2\chi_8(\xi), \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) &= -h \eta(\xi)^{-2} \left(h \left(\chi_1(\xi) + \left(2 + \tau^2 + k^2 \eta(\xi)^2 \right) \chi_2(\xi) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \eta(\xi) \left(h \Omega^2 \eta(\xi) \chi_3(\xi) + \chi_7(\xi) \right) \right),\end{aligned}$$

$$\hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) = h \tau \eta(\xi)^{-1} (\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)),$$

$$\hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) = -h \tau \eta(\xi)^{-2} (h (\chi_1(\xi) + 3\chi_2(\xi)) - \eta(\xi) \chi_7(\xi)),$$

$$\hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) = -h k (\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)), \quad \hat{f}_{13}^{(2)}(\xi) = -h k \chi_7(\xi),$$

$$\hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) = -h \tau \eta(\xi)^{-1} (\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)),$$

$$\hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) = -h \tau \eta(\xi)^{-2} (h (\chi_4(\xi) + 3\chi_5(\xi)) + \eta(\xi) \chi_{11}(\xi)),$$

$$\hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) = h \eta(\xi)^{-1} \chi_5(\xi) + \chi_{11}(\xi),$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) &= -h \eta(\xi)^{-2} \left(h \left(\tau^2 \chi_4(\xi) + \left(1 + 2\tau^2 + k^2 \eta(\xi)^2 \right) \chi_5(\xi) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta(\xi) (\chi_{11}(\xi) - h \Omega^2 \eta(\xi) \chi_6(\xi)) \right),\end{aligned}$$

$$\hat{f}_{23}^{(1)}(\xi) = 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = h^2 k \tau \eta(\xi)^{-1} (\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)),$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) &= hk(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)), \\
 \hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) &= hk\left(h\eta(\xi)^{-1}(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)) + \chi_{11}(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{32}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_4(\xi) + \chi_5(\xi)), \\
 \hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1}\chi_5(\xi) + \chi_{11}(\xi), \\
 \hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) &= -h^2\left(k^2\chi_4(\xi) + (2k^2 + \tau^2\eta(\xi)^{-2})\chi_5(\xi) - \Omega^2\chi_6(\xi)\right),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \chi_j(\xi) &= f_1(\xi)\psi_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \quad \chi_{j+3}(\xi) = f_2(\xi)\psi_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \\
 \chi_{j+6}(\xi) &= f_1(\xi)\psi'_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \quad \chi_{j+9}(\xi) = f_2(\xi)\psi'_j(\xi) \quad (j = \overline{1,3}), \\
 f_1(\xi) &= (\psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi))^{-1}, \quad f_2(\xi) = \psi_2(\xi)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

В случае соотношений (15-А) либо (15-Б) представления для $\hat{f}_{n m}^{(j)}(\xi)$ имеют соответственно такой вид:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi), \\
 \hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) &= -h\eta(\xi)^{-2}\left(h + h\left(\tau^2 + k^2\eta(\xi)^2\right)\psi_1(\xi) + 2\eta(\xi)\psi'_1(\xi) - \right. \\
 &\quad \left.- h\Omega^2\eta(\xi)^2\psi_2(\xi) - \eta(\xi)\psi'_3(\xi) + 2\eta(\xi)\phi_1(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1}(1 - \psi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-2}\left(h(1 + \psi_1(\xi)) + \eta(\xi)(2\psi'_1(\xi) - \psi'_3(\xi) + 2\phi_1(\xi))\right), \\
 \hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) &= hk(\psi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{13}^{(2)}(\xi) &= hk(2\psi'_1(\xi) - \psi'_3(\xi) + 2\phi(\xi)), \\
 \hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1}(1 - \chi_1(\xi)), \\
 \hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-2}\left(h + \eta(\xi)\psi'_3(\xi) + h\chi_1(\xi) + \eta(\xi)\chi_3(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi) + \chi_3(\xi), \\
 \hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) &= -h\eta(\xi)^{-2}\left(h\left(1 + k^2\eta(\xi)^2\right) + \eta(\xi)\psi'_3(\xi) + \right. \\
 &\quad \left.+ h\tau^2\chi_1(\xi) - h\Omega^2\eta(\xi)^2\chi_2(\xi) + \eta(\xi)\chi_3(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{23}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) &= hk(\chi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) &= hk\left(\psi'_3(\xi) + h\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) - 1) + \chi_3(\xi)\right), \\
 \hat{f}_{32}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) - 1), \\
 \hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi) + \chi_3(\xi), \\
 \hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) &= -h^2\left(\tau^2\eta(\xi)^{-2} + k^2\chi_1(\xi) - \Omega^2\chi_2(\xi)\right);
 \end{aligned} \tag{19-А}$$

Неосесимметричные нормальные волны с многофакторной функциональной неоднородностью

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1}(2\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)) + \chi_4(\xi) + 2\chi_5(\xi) + \chi_6(\xi), \\
\hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) &= -h\left(h\left(\left(\eta(\xi)^{-2}(2+\tau^2)+k^2\right)\chi_1(\xi)+\eta(\xi)^{-2}\chi_2(\xi)-\Omega^2\chi_3(\xi)\right)-\right. \\
&\quad \left.-\eta(\xi)^{-1}(\chi_4(\xi) + \chi_6(\xi))\right), \\
\hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1}(\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)), \\
\hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-1}\left(h\eta(\xi)^{-1}(3\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)) - \chi_4(\xi) - \chi_6(\xi)\right), \\
\hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) &= -hk(\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)), \quad \hat{f}_{13}^{(2)}(\xi) = -hk(\chi_4(\xi) + \chi_6(\xi)), \\
\hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) &= h\tau\eta(\xi)^{-1}(1 + \psi_1(\xi)), \\
\hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) &= -h\tau\eta(\xi)^{-1}\left(h\eta(\xi)^{-1}(3 + \psi_1(\xi)) + \psi'_3(\xi)\right), \\
\hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi), \\
\hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) &= -h\left(h\eta(\xi)^{-2}(1 + \tau^2(2 + \psi_1(\xi))) + \right. \\
&\quad \left.+h(k^2 - \Omega^2\psi_2(\xi)) + \eta(\xi)^{-1}\psi'_3(\xi)\right), \\
\hat{f}_{23}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(1 + \psi_1(\xi)), \\
\hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) &= hk(1 + \psi_1(\xi)), \\
\hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) &= hk\left(h\eta(\xi)^{-1}(1 + \psi_1(\xi)) + \psi'_3(\xi)\right), \\
\hat{f}_{32}^{(1)}(\xi) &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = h^2k\tau\eta(\xi)^{-1}(1 + \psi_1(\xi)), \\
\hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) &= h\eta(\xi)^{-1} + \psi'_3(\xi), \\
\hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) &= -h^2\left(k^2(\psi_1(\xi) + 2) - \Omega^2\psi_2(\xi) + \tau^2\eta(\xi)^{-2}\right).
\end{aligned} \tag{19-Б}$$

В соотношениях (19-А) и (19-Б) используются вспомогательные функции, которые соответственно определены так:

$$\begin{aligned}
\chi_1(\xi) &= \psi_1(\xi)^{-1}, \quad \chi_2(\xi) = \psi_1(\xi)^{-1}\psi_2(\xi), \\
\chi_3(\xi) &= \psi_1(\xi)^{-1}\psi'_1(\xi), \quad \phi_1(\xi) = \psi_1(\xi)\psi'_3(\xi);
\end{aligned} \tag{20-А}$$

$$\begin{aligned}
\chi_1(\xi) &= (2 + \psi_1(\xi))^{-1}, \quad \chi_2(\xi) = \chi_1(\xi)\psi_1(\xi), \\
\chi_3(\xi) &= \chi_1(\xi)\psi_2(\xi), \quad \chi_4(\xi) = \chi_1(\xi)\psi'_1(\xi), \\
\chi_5(\xi) &= \chi_1(\xi)\psi'_3(\xi), \quad \chi_6(\xi) = \chi_1(\xi)\psi_1(\xi)\psi'_3(\xi).
\end{aligned} \tag{20-Б}$$

3. Базисное частное решение. В рамках представленной соотношениями (14), (15-А), (15-Б) модели неоднородности при выполнении соответствующих достаточных условий несильной радиальной неоднородности [4] дифференциальное уравнение (11) получает следующий вид:

$$\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta). \tag{21}$$

Известно [6], что матричное дифференциальное уравнение (21) имеет представленные в векторном виде частные решения

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \\ \hat{u}_\theta^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \\ \hat{u}_z^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \end{bmatrix} \quad (q = \overline{1, 6}) \quad (22)$$

с аналитическими в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) элементами $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$ ($s = r, \theta, z$; $q = \overline{1, 6}$). Указанные векторные решения строятся в виде разложений их элементов в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$). Водятся представления

$$\begin{aligned} \psi_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \phi_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(1)} \xi^n, \\ \chi_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1, 12}), \\ \hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s, q)} \xi^n \quad (s = r, \theta, z; \quad q = \overline{1, 6}). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\left\{ a_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = \overline{1, 3}$) – определяемые из соотношений (14) в случае аналитической модели неоднородности, из соотношений (15-А), (16) либо (15-Б), (16) в случае численной модели неоднородности наборы коэффициентов; $\left\{ g_n^{(1)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ и $\left\{ b_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = \overline{1, 12}$) – наборы коэффициентов, определяемые из очевидных явных рекуррентных соотношений, полученных на основании представлений (18), либо (20-А), либо (20-Б); $\left\{ d_n^{(s, q)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($s = r, \theta, z; \quad q = \overline{1, 6}$) – подлежащие нахождению наборы коэффициентов. Следует отметить, что в случае представления функций $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) полиномами порядка N , в разложениях (23) указанных функций, а также функции $\phi_1(\xi)$, следует положить $a_n^{(j)} = 0$ ($j = \overline{1, 3}$; $n = \overline{N+1, \infty}$), $g_n^{(1)} = 0$ ($n = \overline{2N, \infty}$).

После подстановки разложений (23) в представление (22), а также соответственно выбранной модели неоднородности в соотношения (17), либо (19-А), либо (19-Б), дифференциальное уравнение (21) преобразуется в однородное векторное функциональное уравнение

$$\hat{\mathbf{F}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta). \quad (24)$$

Здесь

$$\left[\hat{\mathbf{F}}^{(\tau)}(\xi) \right]_m = \sum_{p=0}^{\infty} w_p^{(m)} \left(\left\{ d_n^{(s, q)} \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ a_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ b_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ g_p^{(1)} \right\}_{n=0}^{\infty} \right) \xi^p \quad (m = \overline{1, 3})$$

аналитические в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функции. На основании свойств аналитических функций из уравнения (24) получается последовательность систем линейных алгебраических уравнений

$$w_p^{(m)} \left(\left\{ d_n^{(s,q)} \right\}_{n=0}^p, \left\{ a_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ b_p^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ g_p^{(1)} \right\}_{n=0}^{\infty} \right) = 0 \quad (m = \overline{1,3}), \quad (25)$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots)$$

для определения искомых наборов коэффициентов $\left\{ d_n^{(s,q)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($s = r, \theta, z; q = \overline{1,6}$).

При $p = 0$ и $p = 1$ из уравнений (25) для коэффициентов разложений элементов векторных частных решений $\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$ ($q = \overline{1,6}$) определяются начальные условия единого для всех представленных вариантов модели неоднородности вида:

$$\begin{aligned} & \left\{ d_0^{(r,1)} = 1, d_1^{(r,1)} = 0, d_0^{(\theta,1)} = 0, d_1^{(\theta,1)} = 0, d_0^{(z,1)} = 0, d_1^{(z,1)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,2)} = 0, d_1^{(r,2)} = 1, d_0^{(\theta,2)} = 0, d_1^{(\theta,2)} = 0, d_0^{(z,2)} = 0, d_1^{(z,2)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,3)} = 0, d_1^{(r,3)} = 0, d_0^{(\theta,3)} = 1, d_1^{(\theta,3)} = 0, d_0^{(z,3)} = 0, d_1^{(z,3)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,4)} = 0, d_1^{(r,4)} = 0, d_0^{(\theta,4)} = 0, d_1^{(\theta,4)} = 1, d_0^{(z,4)} = 0, d_1^{(z,4)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,5)} = 0, d_1^{(r,5)} = 0, d_0^{(\theta,5)} = 0, d_1^{(\theta,5)} = 0, d_0^{(z,5)} = 1, d_1^{(z,5)} = 0 \right\}, \\ & \left\{ d_0^{(r,6)} = 0, d_1^{(r,6)} = 0, d_0^{(\theta,6)} = 0, d_1^{(\theta,6)} = 0, d_0^{(z,6)} = 0, d_1^{(z,6)} = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

При $p \geq 2$ из неоднородных линейных систем уравнений (25) получаются явные рекуррентные соотношения для определения искомых коэффициентов $d_p^{(s,q)}$ ($s = r, \theta, z; q = \overline{1,6}$). В случае аналитической модели неоднородности (14), (17), (18) рекуррентные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} d_p^{(r,q)} &= -\frac{1}{p(p-1)} \left(2h(p-1)(p-2)d_{p-1}^{(r,q)} + h^2(p-2)(p-3)d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(3)} - k^2 b_{p-4-j}^{(2)} \right) d_j^{(r,q)} - kh^3 b_{p-4-j}^{(7)} d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^2 \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(3)} - k^2 b_{p-3-j}^{(2)} \right) + (j+1) b_{p-3-j}^{(7)} + 2jb_{p-3-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau h^2 b_{p-3-j}^{(7)} d_j^{(\theta,q)} - kh^2 \left(h j \left(b_{p-3-j}^{(1)} + b_{p-3-j}^{(2)} \right) + 2b_{p-3-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{p-2} \left(\left(h^2 \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(3)} - (k^2 + \tau^2 - 2j + 2) b_{p-2-j}^{(2)} \right) + (j-1) b_{p-2-j}^{(1)} \right) + \right. \right. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
& +h \left((2j+1) b_{p-2-j}^{(7)} + 4jb_{p-2-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + \\
& + h\tau \left(h \left((j-1) b_{p-2-j}^{(1)} + (j-3) b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(7)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \\
& - hk \left(2hj \left(b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(7)} \right) d_j^{(z,q)} + \\
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left(j \left(h \left(b_{p-1-j}^{(1)} + 2b_{p-1-j}^{(2)} \right) + b_{p-1-j}^{(7)} + 2b_{p-1-j}^{(8)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\
& \left. + \tau h j \left(b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(\theta,q)} - khj \left(b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\
d_p^{(\theta,q)} & = -\frac{1}{p(p-1)} \left(2h(p-1)(p-2) d_{p-1}^{(\theta,q)} + h^2(p-2)(p-3) d_{p-2}^{(\theta,q)} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(6)} - k^2 b_{p-4-j}^{(5)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^2 \left(-\tau b_{p-3-j}^{(11)} d_j^{(r,q)} + \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(6)} - k^2 b_{p-3-j}^{(5)} \right) + (j-1) b_{p-3-j}^{(11)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tau kh \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-h \left(\tau \left(h \left((j+1) b_{p-2-j}^{(4)} + (j+3) b_{p-2-j}^{(5)} \right) + b_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - h \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(6)} + (j-1-k^2-2\tau^2) b_{p-2-j}^{(5)} - \tau^2 b_{p-2-j}^{(4)} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (2j-1) b_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(\theta,q)} - h\tau k \left(b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left(j \left(-h\tau \left(b_{p-1-j}^{(4)} + b_{p-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(r,q)} + \left(hb_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(11)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right) \right) \right), \\
d_p^{(z,q)} & = -\frac{1}{p(p-1)} \left(2h(p-1)(p-2) d_{p-1}^{(z,q)} + h^2(p-2)(p-3) d_{p-2}^{(z,q)} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^3 \left(kb_{p-4-j}^{(11)} d_j^{(r,q)} + h \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(6)} - k^2 \left(b_{p-4-j}^{(4)} + 2b_{p-4-j}^{(5)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^2 \left(k \left(h(j+1) \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) + 2b_{p-3-j}^{(11)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + h\tau k \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + h\tau k \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(5)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(6)} - k^2 \left(b_{p-3-j}^{(4)} + 2b_{p-3-j}^{(5)} \right) \right) + jb_{p-3-j}^{(11)} \right) d_j^{(z,q)} \Big) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left(h \left(k \left(h(2j+1) \left(b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) + b_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + h\tau k \left(b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(5)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \right. \\
 & + \left(h \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(6)} - k^2 b_{p-2-j}^{(4)} - (2k^2 + \tau^2 - j) b_{p-2-j}^{(5)} \right) + 2jb_{p-2-j}^{(11)} \right) d_j^{(z,q)} \Big) \Big) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-1} \left(j \left(hk \left(b_{p-1-j}^{(4)} + b_{p-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(r,q)} + \left(hb_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(11)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) \Big) \\
 & \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 6}) .
 \end{aligned}$$

Для численной модели неоднородности вида (15-А), (16), (19-А), (20-А) либо (15-Б), (16), (19-Б), (20-Б), с учетом формально дополняющих разложения (23) определений $d_{-2}^{(s,q)} = d_{-1}^{(s,q)} = 0$ ($s = r, \theta, z; q = \overline{1, 6}$), рекуррентные соотношения соответственно записываются так:

$$\begin{aligned}
 d_p^{(r,q)} = & -\frac{1}{p(p-1)} \left(h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2(p-1)(p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \quad (28\text{-A}) \\
 & + h\tau(p-1) d_{p-1}^{(\theta,q)} + h^2\tau(p-3) d_{p-2}^{(\theta,q)} - \\
 & - hk(p-1) d_{p-1}^{(z,q)} - 2kh^2(p-2) d_{p-2}^{(z,q)} - kh^3(p-3) d_{p-3}^{(z,q)} + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4 \left(\Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} - k^2 a_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + 2kh^3 g_{p-4-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-h^2 \left(-2 \left(h \left(\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} - k^2 a_{p-3-j}^{(1)} \right) - g_{p-3-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2\tau g_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} + k \left(h(j-2p+6) a_{p-3-j}^{(1)} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - h(j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} - 4g_{p-3-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \Big) + \\
 & + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-h \left(- \left(h \left(\Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - (k^2 + \tau^2 + 2p - 2j - 4) a_{p-2-j}^{(1)} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + (j+1)(p-j-2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) - 2g_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - \\
 & \quad - \tau \left(h \left((j-2p+3) a_{p-2-j}^{(1)} - (j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) - 2g_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \\
 & \quad + 2k \left(h \left((j-2p+4) a_{p-2-j}^{(1)} - (j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) - g_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \Big) \Big) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left(- \left(j(j-p) a_{p-j}^{(3)} + h(-p+j+1) \left((2j+1) a_{p-1-j}^{(3)} - 2a_{p-1-j}^{(1)} \right) \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\
& \quad \left. + h\tau \left((j-2p+2) a_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \right. \\
& \quad \left. - hk \left((j-2p+2) a_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \Bigg), \\
d_p^{(\theta,q)} & = - \frac{1}{p(p-1)} \left(h\tau(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2\tau(p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
& \quad \left. + h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(\theta,q)} - h^2(k^2 - p^2 + 4p - 3) d_{p-2}^{(\theta,q)} - \right. \\
& \quad \left. - 2h^3k^2 d_{p-3}^{(\theta,q)} - h^4k^2 d_{p-4}^{(\theta,q)} - h^2k\tau d_{p-2}^{(z,q)} - h^3k\tau d_{p-3}^{(z,q)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4\Omega^2 b_{p-4-j}^{(2)} d_j^{(\theta,q)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^2 \left(-\tau b_{p-3-j}^{(3)} d_j^{(r,q)} + \left(2h\Omega^2 b_{p-3-j}^{(2)} + (j-1) b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + h k \tau b_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-h \left(-\tau \left(h(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} - h(j+1) b_{p-2-j}^{(1)} - b_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \left(h\Omega^2 b_{p-2-j}^{(2)} - h\tau^2 b_{p-2-j}^{(1)} + (2j-1) b_{p-2-j}^{(3)} - \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. - h(j-1)(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - h k \tau b_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \left(h\tau \left((j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} - j b_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(j(j-p) a_{p-j}^{(3)} - j b_{p-1-j}^{(3)} + h(2j-1)(j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right) \right), \\
d_p^{(z,q)} & = - \frac{1}{p(p-1)} \left(-hk(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} - h^2k(2p-3) d_{p-2}^{(r,q)} - h^3k(p-2) d_{p-3}^{(r,q)} - \right. \\
& \quad \left. - h^2\tau k d_{p-2}^{(\theta,q)} - h^3\tau k d_{p-3}^{(\theta,q)} + \right. \\
& \quad \left. + h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(z,q)} + h^2 \left((p-2)^2 - \tau^2 \right) d_{p-2}^{(z,q)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=0}^{p-4} \left(kh^3 b_{p-4-j}^{(3)} d_j^{(r,q)} + h^4 \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(2)} - k^2 b_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-h^2 \left(k \left(h(j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} - h(j+1) b_{p-3-j}^{(1)} - 2b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - h k \tau b_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} - \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(2)} - k^2 b_{p-3-j}^{(1)} \right) + j b_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-h \left(k \left(2h(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} - h(2j+1) b_{p-2-j}^{(1)} - b_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - h k \tau b_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} - \left(-h j(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + h \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(2)} - k^2 b_{p-2-j}^{(1)} \right) + 2j b_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left(-k h \left((j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} - j b_{p-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
& \quad \left. - j \left((j-p) a_{p-j}^{(3)} + 2h(j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} - b_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \Big) \\
& \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 6}); \\
d_p^{(r,q)} & = -\frac{1}{p(p-1)} \left(2h(p-1)(p-2) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2(p-2)(p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \quad (28-B) \\
& + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^3 \left(h \left(\Omega^2 b_{p-4-j}^{(3)} - k^2 b_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - k \left(b_{p-4-j}^{(4)} + b_{p-4-j}^{(6)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& \quad + \sum_{j=0}^{p-3} \left(-h^2 \left(- \left(2h \left(\Omega^2 b_{p-3-j}^{(3)} - k^2 b_{p-3-j}^{(1)} \right) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + 2j b_{p-3-j}^{(5)} + (j+1) \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(6)} \right) \right) d_j^{(r,q)} - \tau \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(6)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + k \left(h j \left(b_{p-3-j}^{(1)} + b_{p-3-j}^{(2)} \right) + 2 \left(b_{p-3-j}^{(4)} + b_{p-3-j}^{(6)} \right) \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& \quad + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-h \left(- \left(h \left(\Omega^2 b_{p-2-j}^{(3)} - (k^2 + \tau^2 - 2j + 2) b_{p-2-j}^{(1)} \right) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + (j-1) b_{p-2-j}^{(2)} \right) + (2j+1) \left(b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(6)} \right) + 4j b_{p-2-j}^{(5)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
& \quad \left. - \tau \left(h \left((j-3) b_{p-2-j}^{(1)} + (j-1) b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(6)} \right) d_j^{(\theta,q)} + \right. \\
& \quad \left. + k \left(2h j \left(b_{p-2-j}^{(1)} + b_{p-2-j}^{(2)} \right) + b_{p-2-j}^{(4)} + b_{p-2-j}^{(6)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \Big) + \\
& \quad + \sum_{j=0}^{p-1} \left(j \left(h \left(2b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) + b_{p-1-j}^{(4)} + 2b_{p-1-j}^{(5)} + b_{p-1-j}^{(6)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h \tau \left(b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(\theta,q)} - hk \left(b_{p-1-j}^{(1)} + b_{p-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \Big) \Big) \Big), \\
d_p^{(\theta,q)} &= -\frac{1}{p(p-1)} \left(-h \tau (p-1) d_{p-1}^{(r,q)} - h^2 \tau (p+1) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
& + h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(\theta,q)} - h^2 (k^2 + 2\tau^2 - p^2 + 4p - 3) d_{p-2}^{(\theta,q)} - \\
& - 2h^3 k^2 d_{p-3}^{(\theta,q)} - h^4 k^2 d_{p-4}^{(\theta,q)} + h^2 k \tau d_{p-2}^{(z,q)} + h^3 k \tau d_{p-3}^{(z,q)} + \\
& + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4 \Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} d_j^{(\theta,q)} \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^3 \left(2\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} d_j^{(\theta,q)} + \tau k a_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-h^2 \left(\tau \left((j+1) a_{p-2-j}^{(1)} - (j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& - \left. \left(\Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - \tau^2 a_{p-2-j}^{(1)} - (j-1)(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \right. \\
& \left. \left. - k \tau a_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left(-h \tau \left(j a_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
& - \left. \left(j(j-p) a_{p-j}^{(3)} + h(2j-1)(j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} \right) \Big), \\
d_p^{(z,q)} &= -\frac{1}{p(p-1)} \left(hk(p-1) d_{p-1}^{(r,q)} + h^2 k(2p-3) d_{p-2}^{(r,q)} + \right. \\
& + h^3 k(p-2) d_{p-3}^{(r,q)} + \\
& + h^2 \tau k d_{p-2}^{(\theta,q)} + h^3 \tau k d_{p-3}^{(\theta,q)} + h(p-1)(2p-3) d_{p-1}^{(z,q)} - \\
& - h^2 \left(\tau^2 + 2k^2 - (p-2)^2 \right) d_{p-2}^{(z,q)} - 4h^3 k^2 d_{p-3}^{(z,q)} - 2h^4 k^2 d_{p-3}^{(z,q)} + \\
& + \sum_{j=0}^{p-4} \left(h^4 \left(\Omega^2 a_{p-4-j}^{(2)} - k^2 a_{p-4-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-3} \left(h^3 \left(k \left((j+1) a_{p-3-j}^{(1)} - (j-p+3) a_{p-3-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + k \tau a_{p-3-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} + 2 \left(\Omega^2 a_{p-3-j}^{(2)} - k^2 a_{p-3-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{p-2} \left(-h^2 \left(-k \left((2j+1) a_{p-2-j}^{(1)} - 2(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - k\tau a_{p-2-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - k^2 a_{p-2-j}^{(1)} - j(j-p+2) a_{p-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) + \\
& + \sum_{j=0}^{p-1} \left(kh \left(ja_{p-1-j}^{(1)} - (j-p+1) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - \right. \\
& \quad \left. \left. - j \left((j-p) a_{p-j}^{(3)} + 2h(j-p+2) a_{p-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right) \right) \\
& \quad (p = 2, 3, \dots; q = \overline{1, 6}) .
\end{aligned}$$

На основе набора векторных частных решений (22) можно определить искомое базисное матричное решение уравнения (21) размерности 3×6 в следующем виде

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) = [\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 1)}(\xi) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 6)}(\xi)]. \quad (29)$$

4. Общее решение. С использованием базисного решения (29) можно определить общее решение уравнения (11) так:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{general})}(x) = \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(x) \mathbf{A}, \quad (30)$$

где \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 6. Аналогично соотношению (30) можно записать представление для вектора $\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(x)$ в виде

$$\tilde{\Sigma}^{(\tau, \text{general})}(x) = \hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) \mathbf{A}. \quad (31)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) = \hat{\mathbf{G}}(\xi) \left(\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) \right),$$

где $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$ и $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$ – аналитические продолжения на плоскость комплексной переменной ξ соответственно матрицы упругих модулей Гука $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ и матричного дифференциального оператора $\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(x)$. В случае аналитической модели неоднородности (14), (17), (18) отличные от нуля элементы матрицы $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{n,m} &= \psi_1(\xi) \quad (n, m = 1, 2; \quad 2, 1; \quad 1, 3; \quad 3, 1; \quad 2, 3; \quad 3, 2), \\
[\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{j,j} &= \psi_1(\xi) + 2\psi_2(\xi) \quad (j = \overline{1, 3}), \\
[\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{j,j} &= \psi_2(\xi) \quad (j = \overline{4, 6}).
\end{aligned} \quad (32)$$

Для численной модели неоднородности вида (15-А), (16) (19-А), (20-А) либо (15-Б), (16) (19-Б), (20-Б) отличные от нуля элементы матрицы $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$ соответственно определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{n,m} &= (1 - 2\psi_1(\xi)) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ [\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{j,j} &= \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{1, 3}), \\ [\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{j,j} &= \psi_1(\xi) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{4, 6}); \end{aligned} \quad (33\text{-A})$$

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{n,m} &= \psi_1(\xi) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ [\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{j,j} &= (2 + \psi_1(\xi)) \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{1, 3}), \\ [\hat{\mathbf{G}}(\xi)]_{j,j} &= \exp(\psi_3(\xi)) \quad (j = \overline{4, 6}). \end{aligned} \quad (33\text{-Б})$$

5. Дисперсионные соотношения. На основании граничных условий (12), (13) с учетом представлений (30), (31) получаются дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа k и приведенной частоты Ω соответственно вида:

$$\Phi_{\Sigma}^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left(\begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(-1)]_{[1,5,6], [1..6]} \\ [\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(1)]_{[1,5,6], [1..6]} \end{bmatrix} \right) = 0; \quad (34)$$

$$\Phi_U^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left(\begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(-1)] \\ \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(1) \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (35)$$

6. Численный эксперимент. Исследование дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих изгибных волн ($\tau = 1$) в свободном протяженном полом цилиндре ($h = 0.3$) проводилось для однородного материала

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)} \quad (36)$$

и различных случаев функционально неоднородного материала. Вид функциональных законов неоднородности определялся задачей изучить влияние фактора неоднородности по каждой физико-механической характеристике изотропного материала на свойства волнового процесса. Функциональные законы были заданы следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}(1 + 0, 2x^3), \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (37\text{-A})$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}(1 + 0, 2x^3), \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (37\text{-Б})$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}^{(Al)}(1 + 0, 2x^3). \quad (37\text{-В})$$

В приведенных соотношениях использовались физико-механические характеристики алюминия

$$\tilde{\lambda}^{(Al)} = 5,91; \quad \tilde{\mu}^{(Al)} = 2,61; \quad \tilde{\rho}^{(Al)} = 2,7;$$

$$C_* = 10^{10} \text{ H/m}^2; \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг/m}^3.$$

Ниже волновод, задаваемый характеристиками (36), называется однородным, а характеристиками (37-А) – (37-В) – соответственно неоднородным волноводом А, Б или В типа.

Для неоднородных волноводов А–В типов в работе [4] применительно к случаю волн продольно-сдвигового типа подробно исследованы достаточные условия несильной радиальной неоднородности и погрешность аппроксимации. В представленных ниже результатах численного эксперимента использованы сформулированные в указанной работе рекомендации по оптимальному выбору типа и вида модели неоднородности: (14), (15-А), (15-Б).

Численный эксперимент проводился в области изменения параметров $k \in [0, 30]$ и $\Omega \in [0, 30]$ для однородного волновода и неоднородных волноводов А–В типов. Построенные фрагменты спектров представлены на рисунках 1–3.

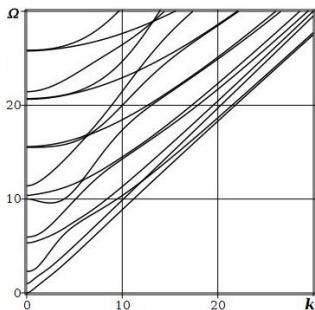


Рис. 1. Спектр однородного волновода

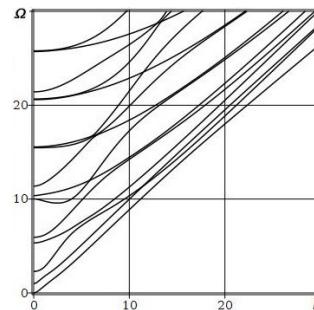


Рис. 2. Спектр неоднородного волновода А типа

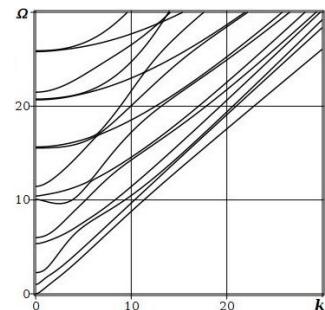


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода В типа

Прежде всего следует отметить, что неоднородность только по упругому модулю $\tilde{\lambda}(x)$ визуально не сказывается на дисперсионной картине при сопоставлении со спектром однородного волновода (рис. 1), и по этой причине указанный спектр не приводится. При этом неоднородность по двум другим характеристикам материала $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 2) и $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 3) приводит к качественному изменению спектральной картины для младших мод. Это, в частности, проявляется в зонах асимптотической локализации первой моды по отношению к старшим модам спектра в коротковолновой высокочастотной области спектра. Количественный сопоставительный анализ поведения пяти младших мод фрагментов спектров однородного и неоднородного волновода А–В типов проведен с использованием функций сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left(\Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right), \quad (38)$$

и представлен на рисунках 4–6. Порядковые номера сопоставляемых мод указаны в нижней части рисунков. Отмеченный выше качественный вывод о слабом

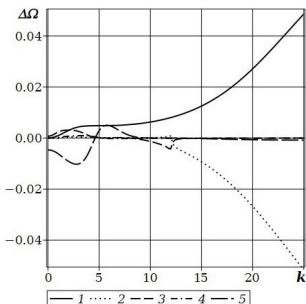


Рис. 4. Сопоставление парных мод спектров неоднородного А типа и однородного волноводов

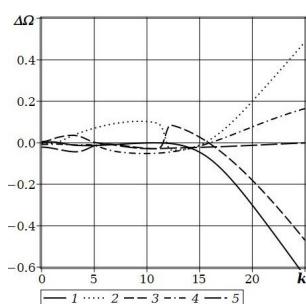


Рис. 5. Сопоставление парных мод спектров неоднородного Б типа и однородного волноводов

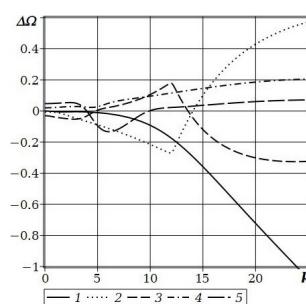


Рис. 6. Сопоставление парных мод спектров неоднородного В типа и однородного волноводов

влиянии неоднородности только по упругому модулю $\tilde{\lambda}(x)$ имеет на представленных рисунках количественную оценку – значения функции $\Delta\Omega(k)$ при сопоставлении спектров однородного и неоднородного по модулю $\tilde{\lambda}(x)$ волновода (рис. 4) в абсолютных значениях оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении однородного и неоднородных только по модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 5) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 6) волноводов. Эта закономерность отмечена также в работе [4] при исследовании спектров для случая осесимметричных волн продольно-сдвигового типа. Для неоднородного только по модулю $\tilde{\lambda}(x)$ волновода (рис. 4) следует указать на тенденцию смещения в коротковолновой высокочастотной области первой моды в область более высоких частот, а второй моды – в область более низких частот. Указанная тенденция для неоднородных только по модулю $\tilde{\mu}(x)$ (рис. 5) и плотности $\tilde{\rho}(x)$ (рис. 6) волноводов наблюдается с точностью до наоборот.

Исследованию подлежали также фазовые и групповые скорости волн для представленных на рисунках 1–3 фрагментов спектров. На рисунках 7–9 и 10–12 представлены соответственно графики нормированных величиной $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$ фазовых и для пяти младших мод групповых скоростей.

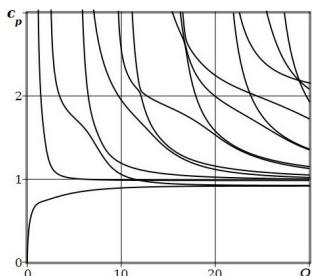


Рис. 7. Фазовые скорости волн в однородном волноводе

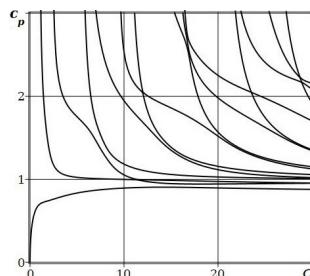


Рис. 8. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе Б типа

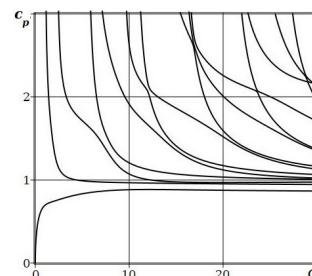


Рис. 9. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе В типа

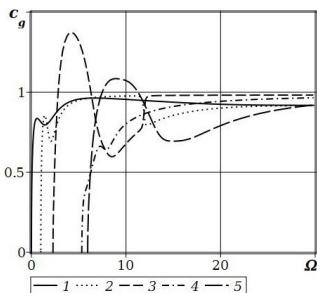


Рис. 10. Групповые скорости волн в однородном волноводе

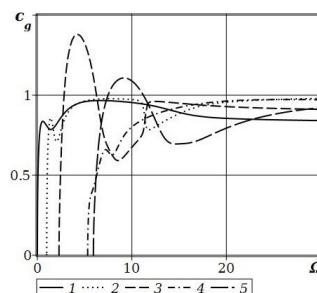


Рис. 11. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе А типа

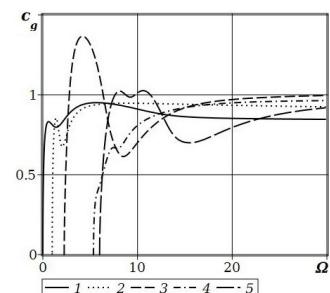


Рис. 12. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе В типа

Представленные на рисунках 7–12 графики иллюстрируют ранее отмеченные тенденции характерной локализации асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области двух низших мод по отношению к старшим модам спектра.

Заключение. Результатами представленных в статье исследований являются построенные на основе апробированной в случае осесимметричных волн продольно-сдвигового типа модели функциональной многофакторной радиальной неоднородности изотропного материала полого цилиндрического волновода аналитические базисные частные решения для случая неосесимметричных волновых процессов, а также полученные в процессе проведения численного эксперимента выводы о влиянии характера неоднородности на топологию дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих нормальных волн указанного типа.

Исследования проводились в ФГБОУВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Мoiseenko I.A. Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 31–53.
2. Moiseenko I.A. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134–146.
3. Moiseenko I.A. Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 27–41.
4. Дзундза А.И. Осесимметричные нормальные волны в протяженных полых цилиндрах с многофакторной функциональной радиальной неоднородностью изотропного материала / А.И. Дзундза, В.А. Моисеенко, И.А. Моисеенко, Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2025. – № 3 (92). – С. 103–120.
5. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 9. – С. 14–18.
6. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.

А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук, И.А. Моисеенко, Р.Н. Нескородев

A.I. Dzundza, N.I. Melnichuk, I.A. Moiseyenko, R.N. Neskorodev

Study of non-axisymmetric normal waves in hollow cylinders with multifactorial functional radial inhomogeneity of an isotropic material.

The article considers the problem of constructing a basis set of analytical partial solutions of a mathematical model describing the propagation of non-axisymmetric elastic normal waves in functionally-gradient hollow isotropic cylinders of annular cross-section. The properties of such waves are studied in terms of the influence of the type of functional inhomogeneity of the waveguide material on the topology of dispersion spectra, phase and group velocities of traveling waves.

Keywords: *functional-gradient material, multifactorial inhomogeneity, hollow cylindrical waveguide, isotropy, normal waves, analytical basis partial solutions, dispersion spectrum, phase velocity, group velocity.*

*Статья поступила в редакцию 02.12.2025;
доработана 18.12.2025;
рекомендована к печати 24.12.2025.*

УДК 539.422.24

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-107-130

EDN:HUHOWU

©2025. Э.Б. Завойчинская¹, Г.Е. Лавриков²

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАСШТАБНО-СТРУКТУРНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ОДНООСНОМ НАГРУЖЕНИИ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ ВО ВСЕМ ДИАПАЗОНЕ АСИММЕТРИИ ЦИКЛА

Предлагаются выражения кривых многоцикловой усталости равной вероятности разрушения по уровням микро-, мезо- и макродефектности при одночастотном осевом нагружении во всем диапазоне возможных коэффициентов асимметрии цикла. Определяющие соотношения для функции распределения вероятностей разрушения представляются операторами Гильберта-Шмидта на процессе нагружения. Результаты расчетов для титановых сплавов ВТ1-0, ВТ3-1, ВТ6, ВТ22, ПТ-3В, ТС17 при различных циклических процессах растяжения, сжатия и растяжения-сжатия, хорошо соответствуют известным экспериментальным данным.

Ключевые слова: масштабно-структурные уровни, хрупкое разрушение, кривые усталости по уровням дефектности, асимметрия цикла нагружения, титановые сплавы, многоцикловая усталость, гигацикловая усталость.

Введение. Данная работа посвящена методу исследования вероятности хрупкого разрушения и построению кривых усталости по уровням дефектности в зависимости от коэффициента асимметрии цикла в областях много- и гигацикловой усталости титановых сплавов. Рассматривается циклическое нагружение следующего вида:

$$\sigma(\tau) = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega \tau, \quad \tau \in [0, t], \quad \alpha = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}, \quad (1)$$

где σ_m – постоянная компонента напряжения, σ_a – амплитуда, ω – круговая частота, ν – частота, $\omega = 2\pi\nu$, N – число циклов нагружения, $N = \nu t$, α – параметр асимметрии цикла, R – коэффициент асимметрии цикла, $R = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$, $\alpha = (1 + R)/(1 - R)$.

Исторически первым, применяемым для дисков и лопаток компрессоров и турбин при температурах до 450°C, являлся титановый сплав ВТ3-1, имеющий

¹Завойчинская Элеонора Борисовна – докт. физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, e-mail: elen@velesgroup.com.

Eleonora Borisovna Zavoychinskaya – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

²Лавриков Георгий Евгеньевич – студ. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, e-mail: george.lavrikov@yandex.ru.

Georgii Evgenievich Lavrikov – Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

глобулярно-пластиначатую ($\alpha + \beta$)-структуру. Для более высоких температур до 550°C разработаны сплавы BT6 (зарубежный аналог Ti-6Al-4V), BT-8 (BT8-1, BT8M-1), BT-9, BT25, BT25У. Современным динамически развивающимся направлением применения титановых сплавов является медицина: в частности, в элементах дентальных имплантов, при эндопротезировании коленных и тазобедренных суставов и фиксации позвоночников широко используется титановый сплав BT6. Новые группы титановых сплавов были созданы для гидравлических труб (Ti-3Al-2.5V), воздуховодов (Ti-15V-3Cr-3Sn-3Al), шасси (Ti-10V-2Fe-3Al) и хвостовых конусов (Ti-6Al-2Sn-4Zr-2Mo) летательных аппаратов и др. В авиационной и автомобильной промышленности находят применение псевдо α -сплавы: OT-4, BT18У (зарубежные аналоги IMI834, Ti1100), BT41. Одной из основных задач повышения ресурса является создание регламентированной структуры сплава.

По результатам известных исследований [1–20], процесс разрушения в титановых сплавах с смешанной глобулярно-пластиначатой двухфазной ($\alpha + \beta$)-структурой (например, для BT3-1, BT6, BT22 и TC17) состоит в последовательном прохождении следующих стадий: развитие нанодефектов в областях структурных неоднородностей сплава с образованием наноструктурных частиц сферической формы, по границам которых имеет место разупрочнение с формированием свободной поверхности (первый уровень), зарождение микротрешин, раскальзывающих пластиначатую α -фазу с формированием гладких фасеток скола (второй уровень), рост и слияние микротрешин в результате достижения их предельной концентрации с образованием мезотрешин (третий уровень) и разрушению β -фазы с формированием речного узора (четвертый уровень), дальнейшему слиянию мезотрешин с образованием хрупких транскристаллитных и зернограничных макротрешин размеров ансамблей β -фаз (пятый уровень) и макротрешины-лидера некоторой характерной длины (шестой уровень) при упругом макродеформировании.

По данным [13–15] процесс разрушения титановых сплавов ПТ-3В с псевдо α -структурой и BT1-0 с α -структурой также включает: последовательное развитие нанодефектов структуры, зарождение микротрешин, их рост и слияние с образованием мезотрешин и их дальнейшими слияниями с формированием макротрешины-лидера. При этом в процессе разрушения «рыбьего глаза» для сплава ПТ-3В не обнаруживается. Также стоит отметить, что усталостные свойства титановых сплавов определяются состоянием поверхности образцов и их структурой. Например, по данным [13, 14], пределы усталости сплава BT1-0 в ультрамелкозернистом состоянии, могут быть, в среднем, в 1.3 раза больше, чем в крупнокристаллическом состоянии при одинаковых долговечностях.

В титановых сплавах многоцикловой области ($N_f \in (5 \cdot 10^4, 10^6)$ циклов до макроразрушения) микродефекты зарождаются, как правило, на поверхности тела, в гигацикловой области ($N_f \in (10^6, 10^{11})$ циклов) – в основном, от геометрических концентраторов в объеме тела: в матрице, на границах зерен, от включения и др., с формированием области мелкогранулированной зернистой

структурой (т.н. «рыбий глаз»). Анализ изломов при разрушении сплава ВТ22 [12] показывает, что при $N_f \geq 10^7$ циклов зарождение микротрещин происходит в объеме тела, очаг микроразрушения однотипен для всех долговечностей. Интересным является тот факт, что перемещение очага микроразрушения внутрь тела зависит от коэффициента асимметрии цикла. Например, для ВТ6 (Ti-6Al-4V) в диапазоне до $N_f \leq 10^8$ циклов при симметричном нагружении разрушение начинается на поверхности, при циклических растяжениях с увеличением R в диапазоне $R \in [0, 0.8]$ очаг микроразрушения уходит вглубь тела (до 0.25–0.45 мм) [4].

Большинство элементов конструкций испытывают асимметричные нагрузления, поэтому одним из актуальных вопросов является установление закономерностей развития усталостного разрушения с учетом асимметрии цикла.

Экспериментальное построение кривых усталости при различных асимметриях цикла сопряжено с большими финансовыми и трудовыми затратами; при этом практически невозможно охватить все режимы нагружений. Вследствие этого, для формирования синтетических данных при использовании технологий искусственного интеллекта как для обучения, так и для тестирования, необходимо применять математическое моделирование развития процессов разрушения. Известные данные для титановых сплавов относятся, в основном, к кривым усталости по макроразрушению при симметричных и пульсирующих циклах определенных частот и при некоторых температурах [1–20]. Необходимость в продлении ресурса конструкций требует определение зависимости усталостных свойств материала от коэффициента асимметрии цикла в областях длительных сроков службы и назначения остаточной долговечности в гигацикловой области.

На основе обработки накопленного обширного экспериментального материала в литературе формулируется ряд эмпирических зависимостей для кривых многоцикловой усталости при нагружениях (1). К ним относятся следующие хорошо известные соотношения:

- Гудмана-Гербера (N. Gerber, 1874 г., J. Goodman, 1919 г.) и Содерберга (C.R. Soderberg, 1930 г.):

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}(\omega, N_f)} + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} = 1,$$

где N_f – число циклов до разрушения, σ_b – временное сопротивление, $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(\omega, N_f)$ – кривая усталости при симметричном одночастотном нагружении;

- Гербера (W. Gerber, 1874 г.):

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}(\omega, N_f)} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)^2 = 1;$$

- Гербера-Марина (W. Gerber, 1874 г., J. Marin, 1942 г.):

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}(\omega, N_f)} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)^2 = 1;$$

- Дж. Х. Смита (J.H. Smith, 1910 г.):

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}(\omega, N_f)} \right) \left(1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right) = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b};$$

- Одинга (И.А. Одинг, 1947 г.):

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}(\omega, N_f)} \right)^2 + \frac{\sigma_a \sigma_m}{\sigma_{-1}^2(\omega, N_f)} = 1;$$

- Серенсена-Кинашвили (С.В. Серенсен, Р.С. Кинашвили, 1975 г.):

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}(\omega, N_f)} = 1 - \frac{|\sigma_m| (\sigma_{-1}(\omega, N_f) - \sigma_{-1}^0(\omega, N_f))}{\sigma_{-1}^0(\omega, N_f) \sigma_{-1}(\omega, N_f)},$$

где $\sigma_{-1}^0 = \sigma_{-1}^0(\omega, N_f)$ – кривая усталости при пульсирующем цикле;

- Хейвуда (R.W. Haywood, 1979 г.):

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right) \left(\frac{\sigma_{-1}(\omega, N_f)}{\sigma_b} + \frac{\sigma_m}{3\sigma_b} \left(2 + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right) \left(1 - \frac{\sigma_{-1}(\omega, N_f)}{\sigma_b} \right) \right).$$

Известные критерии усталости строятся на характеристиках статической прочности и циклической прочности при симметричном и пульсирующем циклах.

Для кривых усталости при симметричном одночастотном нагружении $\sigma_{-1} = \sigma_{-1}(\omega, N_f)$ применяется уравнение Баскина (O.H. Basquin, 1910 г.):

$$\sigma_{-1}(\omega, N_f) = C(\omega) N^{-\alpha(\omega)},$$

где $C = C(\omega)$, $\alpha = \alpha(\omega)$ – материальные функции, зависящие от частоты. Для титановых сплавов известные значения α лежат в интервале $\alpha \in [0.05 - 0.17]$.

В современной литературе характеристики усталости рассматриваются как случайные величины. Для построения кривых усталости равной вероятности разрушения используются логарифмически нормальное распределение и распределение Вейбулла (W. Weibull, 1939 г.) [21].

В данной работе процесс усталостного разрушения рассматривается как иерархический случайный процесс на микро-, мезо-, макроуровне, и строятся кривые усталости равной вероятности разрушения по уровням дефектности во всем диапазоне асимметрии цикла, кроме $R \in [0.5, 1]$. Анализ опытных данных по циклическому растяжению с коэффициентами $R \in [0.5, 1)$, например, для титанового сплава BT6 (Ti-6Al-4V) [4], показывает, что в диапазоне $R \in [0.5, 0.8]$ максимальная деформация достигает 4% (против, в среднем, 0.2% в диапазоне $R \in [0, 0.5]$) и наблюдается удлинение образца. При этом максимальное напряжение цикла практически не зависит от числа циклов и становится близким к

пределу текучести сплава. Имеет место явление, называемое циклической ползучестью – возникновение и развитие неупругих деформаций и вязкого разрушения. При $R \in [0.5, 0.7]$ наблюдается ползучесть и усталостные бороздки, а при $R \geq 0.7$ имеет место развитая циклическая ползучесть при отсутствии усталостных бороздок. Изменяется характер процесса: определяющим становится развитие процесса вязкого разрушения, характерного для процесса ползучести.

Широкое использование ускоренных испытаний требует изучения зависимости усталостных свойств материала от частоты нагружения. Циклы исследований, посвященные этой проблеме, проводятся на титановых сплавах ВТ6 и ВТ22, в том числе при нагружениях с несимметричными циклами [6–9, 11, 20]. Для сплава ВТ6 наблюдается как монотонная зависимость усталостных свойств от частоты [7], так и немонотонная зависимость от частоты [8, 9], а также отсутствие влияния частоты на усталостные свойства [7]. Зависимость усталостных свойств материала от частоты связана с различной подготовкой его структуры и поверхности образцов.

1. Масштабно-структурные уровни разрушения. При описании хрупкого разрушения предлагается выделять шесть масштабно-структурных уровней с определением понятия дефекта j -го масштабного уровня в некотором представительном объеме V_c ($V_c = L^3$ – объем твердого тела, в котором возможно зарождение начальной макротрешины-лидера длины L) [1, 22]. Дефект j -го уровня характеризуется линейным размером $l_j = l_j(\tau)$ на интервале времени $\tau \in [0, t]$ и плотностью дефектов $q_j = q_j(\tau)$ в объеме V_c , задаваемой формулой: $q_j(\tau) = \lim_{\Delta V \rightarrow V_c} \Delta q_j(\tau) / \Delta V$, где $\Delta q_j = \Delta q_j(\tau)$ – среднее количество дефектов в объеме ΔV в момент времени $\tau \in [0, t]$, $j = 1, \dots, 6$. Вводится непрерывная возрастающая функция j -го уровня $l_j^* = l_j^*(\tau)$ от линейного размера $l_j = l_j(\tau)$ и плотности $q_j = q_j(\tau)$, например, в таком виде: $l_j^*(\tau) = l_j(\tau) (q_j(\tau) V_c)^\gamma$, $\gamma = const$, $j = 1, \dots, 6$, $\tau \in [0, t]$, которая имеет размерность длины. Образование дефекта j -го масштабного уровня начинается с достижения функцией $l_{j-1}^* = l_{j-1}^*(\tau)$ предельного значения $l_{f,j-1}^*$ в момент времени τ_{j-1} , $j = 1, \dots, 6$, $\tau_0 = 0$ (в момент времени τ_j дефекты j -го уровня достигают своего предельного состояния). Образование дефектов каждого масштабного уровня происходит в результате последовательного зарождения, развития и слияния дефектов предыдущих уровней. Вследствие случайного распределения дефектов по объему V_c процесс усталостного разрушения является стохастическим, а значения $l_{j-1}^* = l_{j-1}^*(\tau)$ для каждого момента времени τ , $\tau \in [0, t]$ – случайными величинами.

Эволюция дефектов типа микро-, мезо- и макротрешин изучается различными физическими методами: по изменению плотности, по измерению магнитных и электрических свойств, акустических, тепловых и рентгеновских полей и др. [23–27]. На практике для контроля за процессом разрушения конструкций применяются методы неразрушающего контроля, основанные на различных физических принципах, в том числе электронная дефектоскопия, ультразвуковой анализ, вихревоковый контроль, магнитная дефектоскопия, рентгеноструктур-

ный анализ, акусто-эмисионный анализ, радиационная дефектоскопия, цифровая спектр-интерферометрия и др., которым посвящена обширная литература [24, 28–30].

2. Модель усталостного масштабно-структурного разрушения. Вследствие случайного распределения дефектов по объему V_c процесс усталостного разрушения является стохастическим, а значения l_j^* для каждого момента времени τ , $\tau \in [0, t]$ – случайными величинами. Функция распределения вероятности неразрушения (функция надежности) на j -ом уровне $F_j = F_j(\tau)$ определяет вероятность, с которой случайное значение усредняющей функции l_j^* в момент времени τ принимает значения меньше своего предельного значения, а именно $F_j = P(l_j^* < l_{f,j}^*)$, $j = 1, \dots, 6$. Вероятность разрушения j -го уровня определяется как: $Q_j(\tau) = 1 - F_j(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, $j = 1, \dots, 6$. Формирование дефекта каждого уровня происходит вследствие последовательного образования, роста и слияния дефектов всех предыдущих уровней. Это должно отражаться при построении определяющих соотношений для $Q_j = Q_j(\tau)$, $j = 1, \dots, 6$.

Функция распределения вероятности макроразрушения $Q = Q(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, $0 \leq Q(\tau) \leq 1$, определяется таким образом:

$$Q(\tau) = Q_5(\tau) + Q_4^*(\tau) + Q_5^*(\tau) + Q_6(\tau), \quad (2)$$

где функция $Q_4^* = Q_4^*(\tau)$ – вероятность разрушения по дефектам четвертого уровня при формировании и развитии дефектов пятого уровня, и, аналогично, функция $Q_5^* = Q_5^*(\tau)$ – вероятность разрушения по дефектам пятого уровня при формировании и развитии дефектов шестого уровня. Кривые усталости по уровням дефектности определяются следующими уравнениями:

$$Q_j(\tau_j) = Q_{j,th}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (3)$$

$$Q_j^*(\tau_{j+1}) = 1 - Q_{j+1,th}, \quad Q_j^*(\tau_j) = Q_{j,th}, \quad j = 4, 5, \quad (4)$$

где τ_j – долговечность на j -ом уровне, $Q_{j,th} \in [0, 1]$ – некоторое заданное значение вероятности (в данной работе принимается $Q_{j,th} = 1$). На макроуровне функция $Q = Q(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, $0 \leq Q(\tau) \leq 1$, определяет кривую усталости по образованию одной или нескольких макротрещин-лидеров конечной длины в виде:

$$Q(t_f) = Q_{th}, \quad (5)$$

где t_f – долговечность по образованию макротрещины конечной длины с некоторой заданной вероятностью Q_{th} (в этой работе $Q_{th} = 1$). Дальнейшее развитие макротрещины-лидера описывается методами и подходами механики разрушения. Функции $Q_j = Q_j(\tau)$, $j = 1, \dots, 6$, $\tau \in [0, t]$ при нагружении (1) определяются так:

$$Q_j(\tau) = \mu_j(\tau) \max_{z \in [0, t]} |\varphi_j(z)|, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (6)$$

а функции $Q_j^* = Q_j^*(\tau)$, $j = 4, 5$, $\tau \in [0, t]$ в (2) – в виде:

$$Q_j^*(\tau) = \mu_j^*(\tau) \max_{z \in [0, t]} |\varphi_j^*(z)|, \quad j = 4, 5, \quad (7)$$

где $\mu_j = \mu_j(\tau)$, $\mu_j^* = \mu_j^*(\tau)$ – материальные функции, определяемые ниже. В модели полагается, что функции $\varphi_j = \varphi_j(z)$ и $\varphi_j^* = \varphi_j^*(z)$, $z \in [0, t]$ в (6), (7) представляются через интегральный оператор Гильберта-Шмидта в виде:

$$\varphi_j(z) = \int_0^t K_j(z, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (8)$$

$$\varphi_j^*(z) = \left(\frac{C_j}{\langle \sigma(\tau) \rangle} - 1 \right) \int_0^t K_j^*(z, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad j = 4, 5, \quad (9)$$

$$\langle \sigma(\tau) \rangle = \max_{\tau \in [0, t]} |\sigma(\tau)| - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

где $K_j = K_j(z, \tau)$ и $K_j^* = K_j^*(z, \tau)$ – положительно определенные симметрические ядра интегральных операторов, $\sigma = \sigma(\tau) \in L_2[0, t]$, $K_j, K_j^* \in L_2[0, t]^2$, C_j – константы материала. Вероятности разрушения j -го уровня $Q_j = Q_j(\tau)$ в (8) и $Q_j^* = Q_j^*(\tau)$ в (9) записываются в следующем виде:

$$Q_j(\tau) = \mu_j(\tau) \max_{z \in [0, t]} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k \Omega_k(z)}{\lambda_k^j} \right|, \quad D_k = \frac{\int_0^t \sigma(\tau) \Omega_k(\tau) d\tau}{\int_0^t \Omega_k^2(\tau) d\tau}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (10)$$

$$Q_j^*(\tau) = \mu_j^*(\tau) \max_{z \in [0, t]} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k^* \Omega_k(z)}{\lambda_k^{*j}} \right|, \quad D_k^* = \left(\frac{C_j}{\langle \sigma(\tau) \rangle} - 1 \right) D_k, \quad j = 4, 5, \quad (11)$$

где $\{\lambda_k^j\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\lambda_k^{*j}\}_{k=0}^{\infty}$ – собственные числа операторов, $\{\Omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ – соответствующие собственные функции. В соотношениях (10), (11) ряды сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $[0, t]$. По теореме Гильберта-Шмидта функции $\varphi_j = \varphi_j(z)$ и $\varphi_j^* = \varphi_j^*(z)$ можно представить в виде рядов по собственным функциям ядер $K_j = K_j(z, t)$ и $K_j^* = K_j^*(z, t)$ соответственно, которые сходятся к ним абсолютно и равномерно на $[0, t]$ (§ 14 [31]). В качестве собственных функций $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ выбирается полная замкнутая ортогональная система функций в $L_2[0, t]$. Процесс нагружения (1) можно разложить по системе функций $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \Omega_k(\tau), \quad \Omega_k = \frac{\int_0^t \sigma(\tau) \Omega(\tau) d\tau}{\int_0^t \Omega_k^2(\tau) d\tau}. \quad (12)$$

Выражение (12) является рядом Фурье функции $\sigma = \sigma(\tau)$. В настоящей работе рассматриваются ядра интегральных операторов, для которых система собственных функций $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ является системой тригонометрических функций следующего вида:

$$\Omega_0 = 1, \quad \Omega_1 = \sin \frac{2\pi\tau}{t}, \quad \Omega_2 = \cos \frac{2\pi\tau}{t}, \quad \dots, \quad (13)$$

$$\Omega_{2k-1} = \sin \frac{2\pi k \tau}{t}, \quad \Omega_{2k} = \cos \frac{2\pi k \tau}{t}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Разложение процесса нагружения (1) в ряд Фурье на отрезке $[0, t]$ по собственным функциям (13) имеет следующий вид:

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \Omega_k(\tau), \quad (14)$$

$$D_0 = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau, \quad D_m = \frac{2}{t} \int_0^t \Omega_m(\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad m \in \mathbb{N}.$$

3. Определение собственных чисел при симметричном нагружении.

Для одночастотного симметричного нагружения такого вида:

$$\sigma(\tau) = \sigma_a \Omega_k(\tau), \quad \tau \in [0, t], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

где σ_a – амплитуда нагружения, $\omega = 2\pi k/t$ – круговая частота нагружения, функции $\mu_j = \mu_j(n)$ в (6), (7) определяются в виде:

$$\mu_j(n) = \left(\lg \frac{n}{n_{j-1}} \right)^{\chi}, \quad \lg n > \lg n_{j-1}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (16)$$

$$\mu_j^*(n) = \left(\lg \frac{n}{n_{j-1}} \right)^{\chi^*}, \quad \lg n > \lg n_j, \quad j = 4, 5, \quad (17)$$

где n – число циклов нагружения (15), $n_{j-1} = n_{j-1}(\sigma_a)$ – долговечность на $(j-1)$ -ом уровне, выраженная в числах циклов, χ, χ^* – материальные константы модели. Рассматривается собственная функция $\Omega_k = \Omega_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, (13) и записываются следующие вероятности разрушения $Q_j(n)$ и $Q_j^*(n)$ при нагружении (15):

$$Q_j(n) = \mu_j(n) \max_{z \in [0, t]} \left| \frac{\sigma_a \Omega_k(z)}{\lambda_k^j} \right| = \mu_j(n) \frac{\sigma_a}{\lambda_k^j}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (18)$$

$$Q_j^*(n) = \mu_j^*(n) \left(\frac{C_j}{\sigma_a} - 1 \right) \max_{z \in [0, t]} \left| \frac{\sigma_a \Omega_k(z)}{\lambda_k^{*j}} \right| = \mu_j^*(n) \frac{C_j - \sigma_a}{\lambda_k^{*j}}, \quad j = 4, 5, \quad (19)$$

где n – число циклов нагружения. По уравнениям (3) находятся собственные числа $\{\lambda_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ в виде:

$$\lambda_k^j = \sigma_j(\omega_k, N_j) \left(\lg \frac{N_j}{n_{j-1}(\sigma_j)} \right)^{\chi}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (20)$$

$$\omega_k = 2\pi [(k+1)/2]/t,$$

где квадратные скобки означают целую часть числа; $\sigma_j = \sigma_j(\omega_k, N_j)$, $j = 1, \dots, 6$ – функции материала, при которых дефект j -го уровня достигает предельного состояния, а функция $l_j^* = l_j^*(\tau)$ – предельного значения $l_{f,j}^*$ при нагружении (15).

Для нахождения материальных функций $\sigma_j = \sigma_j(\omega_k, N_j)$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, 6$, необходимо проводить серию макроэкспериментов по усталостной прочности при достижении соответствующих предельных состояний на каждом уровне с обработкой шлифов методами анализа микроструктуры. При заданной частоте ω в известных работах, справочниках и других источниках содержится ограниченный объем информации. В некоторых частных случаях для материалов могут быть известны зависимости плотности дефектов и их размеров от амплитуды напряжения. В целом, в силу сложности проведения таких экспериментов, возникает задача определения усталостных характеристик на микроуровне по данным испытаний на макроуровне. Предложен некоторый метод их нахождения [1, 22]. По опытным данным определяется пара (σ_4, N_4) и величина σ_4 принимается равной условному пределу выносливости или пределу усталости материала σ_{-1} при числе циклов N_4 , при котором наблюдается макроразрушение по коротким трещинам. Заметное изменение микро- и макроструктуры наблюдается при изменении числа циклов нагружения на десятичные порядки, поэтому можно положить: $\lg N_j = \lg N_4 + 4 - j$, $j = 1, 2, 3$ и $\lg N_j = \lg N_4 + 3 - j$, $j = 5, 6$. В данной работе амплитуды σ_j , $j = 1, 2, 3$, при которых достигаются предельные состояния микроуровня, определяются через величину σ_4 следующим образом: $\sigma_1 = 0.65\sigma_4$, $\sigma_2 = 0.76\sigma_4$, $\sigma_3 = 0.86\sigma_4$. Отметим, что при наличии соответствующих опытных данных в качестве материальных констант можно рассматривать и другие значения. Например, если известен предел чувствительности материала σ_{th} , то полагается $\sigma_1 = \sigma_{th}$. Для многих исследованных материалов, в среднем, $\sigma_{th} \approx 0.5 \sigma_{pr}$ (σ_{pr} – предел пропорциональности материала). Амплитуду напряжений σ_5 можно определять по кривой усталости по образованию единичных макротрещин (по макроразрушению) при N_5 . При отсутствии данных полагается: $\sigma_6 = \sigma_s$, где σ_s – предел текучести материала.

Из условия (4) записываются следующие выражения для собственных чисел $\{\lambda_k^{*j}\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\lambda_k^{*j} = (C_j - \sigma_j(\omega_k, N_j)) \left(\lg \frac{N_j}{n_{j-1}(\sigma_j)} \right)^{\chi^*}, \quad j = 4, 5, \quad (21)$$

где C_j в данном случае определяются по материальными функциям модели $C_j = \sigma_{j+1}(\omega_k, N_{j+1})$.

Таким образом для нагружения (15) вероятности разрушения j -го уровня $Q_j = Q_j(n)$ и $Q_j^* = Q_j^*(n)$ записываются в следующем виде:

$$Q_j(n) = \frac{\sigma_a}{\sigma_j(\omega, N_j)} \left(\frac{\lg n - \lg n_{j-1}(\sigma_a)}{\lg N_j - \lg n_{j-1}(\sigma_j)} \right)^{\chi}, \quad (22)$$

$$\lg n \geq \lg n_{j-1}, \quad \sigma_a > \sigma_{j-1}, \quad n_0 = 1, \quad j = 1, \dots, 6,$$

$$Q_j^*(n) = \frac{\sigma_{j+1}(\omega, N_{j+1}) - \sigma_a}{\sigma_{j+1}(\omega, N_{j+1}) - \sigma_j(\omega, N_j)} \left(\frac{\lg n - \lg n_{j-1}(\sigma_a)}{\lg N_j - \lg n_{j-1}(\sigma_j)} \right)^{\chi^*}, \quad (23)$$

$$\lg n \geq \lg n_j, \quad \sigma_j \leq \sigma_a \leq \sigma_{j+1}, \quad j = 4, 5.$$

Критерии для кривых усталости равной вероятности разрушения по уровням дефектности определяются уравнениями (3)–(5).

4. Определение собственных чисел при пульсирующем нагружении. Вероятности разрушения $Q_j = Q_j(n)$ и $Q_j^* = Q_j^*(n)$, $j = 1, \dots, 6$, при нагружении следующего вида:

$$\sigma(\tau) = \sigma_a(1 + \sin \omega \tau), \quad \tau \in [0, t], \quad \omega = 2\pi k/t, \quad (24)$$

представляются таким образом:

$$Q_j(n) = \mu_j(n) \max_{z \in [0, t]} \left| \frac{\sigma_a}{\lambda_0^j} + \frac{\sigma_a \sin \omega z}{\lambda_k^j} \right| = \mu_j(n) \sigma_a \left(\frac{1}{\lambda_0^j} + \frac{1}{\lambda_k^j} \right), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Q_j^*(n) &= \mu_j^*(n) \left(\frac{C_j}{\sigma_a} - 1 \right) \max_{z \in [0, t]} \left| \frac{\sigma_a}{\lambda_0^{*j}} + \frac{\sigma_a \sin \omega z}{\lambda_k^{*j}} \right| = \\ &= \mu_j(n) (C_j - \sigma_a) \left(\frac{1}{\lambda_0^{*j}} + \frac{1}{\lambda_k^{*j}} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

По уравнениям (3) находятся собственные числа λ_0^j в виде:

$$\lambda_0^j = \frac{\sigma_j(\omega, N_j) \sigma_j^0(\omega, N_j^0) ((lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j)) (lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j^0)))^{\chi}}{\sigma_j(\omega, N_j) (lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j))^{\chi} - \sigma_j^0(lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j^0))^{\chi}}, \quad (27)$$

где $\sigma_j^0 = \sigma_j^0(\omega, N_j)$, $j = 1, \dots, 6$ – функции материала, при которых дефект j -го уровня достигает предельного состояния, а функции $l_j^* = l_j^*(\tau)$ – предельных значений $l_{f,j}^*$ при нагружении (24).

Из условия (4) выписываются следующие выражения для собственных чисел $\{\lambda_k^{*j}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, \dots, 6$:

$$\lambda_0^{*j} = \quad (28)$$

$$= \frac{(\sigma_{j+1}(\omega, N_{j+1}) - \sigma_j(\omega, N_j)) (C_j - \sigma_j^0(\omega, N_j^0)) ((lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j)) (lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j^0)))^{\chi^*}}{(\sigma_{j+1}(\omega, N_{j+1}) - \sigma_j(\omega, N_j)) (lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j))^{\chi^*} - (C_j - \sigma_j^0(\omega, N_j^0)) (lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j^0))^{\chi^*}},$$

где C_j определяются по материальными функциями модели, $C_j = \sigma_{j+1}^0(\omega, N_{j+1})$. При нагружении (24) вероятности разрушения j -го уровня $Q_j = Q_j(n)$ принимают следующий вид:

$$Q_j(n) = \frac{\sigma_a}{\sigma_j^0(\omega, N_j)} \left(\frac{lgn - lgn_{j-1}(\sigma_a)}{lgN_j - lgn_{j-1}(\sigma_j^0)} \right)^{\chi}, \quad (29)$$

$$lgn \geq lgn_{j-1}, \quad \sigma_a > \sigma_{j-1}, \quad j = 1, \dots, 6,$$

$$Q_j^*(n) = \frac{\sigma_{j+1}^0(\omega, N_{j+1}) - \sigma_a}{\sigma_{j+1}^0(\omega, N_{j+1}) - \sigma_j^0(\omega, N_j)} \left(\frac{\lg n - \lg n_{j-1}(\sigma_a)}{\lg N_j - \lg n_{j-1}(\sigma_j^0)} \right)^{\chi^*}, \quad (30)$$

$$\lg n \geq \lg n_j, \quad \sigma_j \leq \sigma_a \leq \sigma_{j+1}, \quad n_0 = 1, \quad j = 4, 5.$$

Кривые усталости равной вероятности разрушения по уровням дефектности задаются уравнениями (3)–(5).

5. Вероятность разрушения при нагружении с несимметричным циклом. В случае нагружения вида (1) во всем диапазоне асимметрии цикла R , кроме $R \notin [0.5, 1]$, модель усталостного масштабно-структурного разрушения представляется следующим образом:

$$Q_j(n) = (\lg n - \lg n_{j-1})^\chi \times \quad (31)$$

$$\times \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_j^0(\omega, N_j)(\lg N_j - \lg n_{j-1}(\sigma_j^0))^\chi} + \frac{\sigma_a - \sigma_m}{\sigma_j(\omega, N_j)(\lg N_j - \lg n_{j-1}(\sigma_j))^\chi} \right),$$

$$\lg n \geq \lg n_{j-1}, \quad \sigma_a > \sigma_{j-1}, \quad n_0 = 1, \quad j = 1, \dots, 6,$$

$$Q_j^*(n) = (\lg n - \lg n_{j-1})^{\chi^*} \left(\frac{C_j}{\sigma_a} - 1 \right) \times \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\sigma_m}{(\sigma_{j+1}^0(\omega, N_{j+1}) - \sigma_j^0(\omega, N_j))(\lg N_j - \lg n_{j-1}(\sigma_j^0))^{\chi^*}} + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_a - \sigma_m}{(\sigma_{j+1}(\omega, N_{j+1}) - \sigma_j(\omega, N_j))(\lg N_j - \lg n_{j-1}(\sigma_j))^{\chi^*}} \right), \end{aligned}$$

$$\lg n \geq \lg n_j, \quad \sigma_j \leq \sigma_a \leq \sigma_{j+1}, \quad j = 4, 5, \quad R = \frac{\sigma_m + \sigma_a}{\sigma_m - \sigma_a},$$

$$Q_j(\tau_j) = Q_{j,th}, \quad j = 1, \dots, 6,$$

$$Q_j^*(\tau_{j+1}) = 1 - Q_{j+1,th}, \quad Q_j^*(\tau_j) = Q_{j,th}, \quad j = 4, 5, \quad (33)$$

$$Q(\tau) = Q_5(\tau) + Q_4^*(\tau) + Q_5^*(\tau) + Q_6(\tau), \quad Q(t_f) = Q_{th},$$

где C_j – амплитуда нагружения с асимметричным циклом (1), при которой дефекты $(j+1)$ -го уровня достигают предельного состояния.

6. Анализ процесса разрушения для титановых сплавов. 6.1 Результаты анализа для сплава ВТ3-1. Для неполированных образцов титанового сплава ВТ3-1 ($\sigma_b = 1100$ МПа, $\sigma_s = 960$ МПа, σ_b – временное сопротивление, σ_s – предел текучести), имеющего смешанную глобулярно-пластинчатую двухфазную $(\alpha + \beta)$ -структуру, выбираются следующие значения показателей функций в выражениях (16), (17):

$$\chi = \chi^* = \frac{1}{3}. \quad (34)$$

По данным [2] определяется значение $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 325$ МПа при числе $N_4 = N_{-1} = 10^9$ циклов, $\sigma_5 = 350$ МПа при $N_5 = 4 \cdot 10^5$ циклов и частоте $\nu = 20$ кГц (σ_{-1} – условный предел выносливости для неполированных образцов). В работе [2] также представлены опытные данные для полированных образцов из сплава ВТЗ-1, согласно которым: $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 385$ МПа при $N_{-1} = 10^{10}$ циклов, $\sigma_5 = 425$ МПа при $N_5 = 7 \cdot 10^5$ циклов и $\nu = 20$ кГц.

На рисунке 1 представлены области развития дефектов (22), (23) и кривые усталости по уровням дефектности (3) для неполированных образцов (пунктиром) и для полированных образцов (точками) соответственно при симметричном нагружении. Кривые усталости по макроразрушению (2), (5) обозначены сплошными линиями и буквами $f_t\text{H}$ и $f_t\Pi$ для неполированного и полированного образцов соответственно, кружочками обозначены опытные данные для неполированного образца, крестиками – для полированного образца. Получено хорошее соответствие опытным данным [2]. На рисунке 1 также представлены фотографии структуры сплава, которая наблюдается на соответствующих уровнях развития процесса разрушения. Исходная структура представлена на фотографии (а) (первый уровень), на фото (б) – структура с микродефектами на границах и внутри пластинчатой α -фазы в виде черных пятен (второй микрорядень), на фото (в) – гладкие фасетки от раскалывания охрупченных волокон α -фазы (третий микрорядень), на фото (г) – выход процесса разрушения на мезоуровень и образование мезотрещин размера β -фазы на одной стороне излома по α -фазе в виде уступов, на другой половине – в виде впадин, и фото (д) – разрушение по пластинчатой структуре β -фазы (четвертый мезоуровень). Анализ фрактографии излома на рисунке 1 (ж) показывает, что очаг разрушения находится в объеме тела внутри отмеченного круга (пунктирные линии указывают на границы двух кластеров $(\alpha + \beta)$ пластинчатой структуры), что является характерным для разрушения титановых сплавов в областях гигиенической усталости (в среднем, $N_f \in (10^6, 10^{11})$ циклов до разрушения). На фото (е) приведена фрактография излома в области многоцикловой усталости при очаге микроразрушения на поверхности.

Результаты исследования зависимости от частоты нагружения сплава ВТЗ-1 представлены на рисунке 2 а (для неполированных образцов). Построены кривые усталости по уровням дефектности с частотой $\nu = 20$ кГц (опытные данные на рисунке 2 а обозначены кружками) и $\nu = 35$ Гц (опытные данные обозначены крестами). Материальные константы при $\nu = 35$ Гц выбирались следующими: $\sigma_4 = 500$ МПа, $N_4 = 2 \cdot 10^5$ циклов, $\sigma_5 = 730$ МПа, $N_5 = 10^4$ циклов. Наблюдается зависимость – усталостные свойства сплава ВТЗ-1 зависят от частоты нагружения. Пределы усталости увеличиваются, в среднем на 40% при равных долговечностях.

Также с достаточной инженерной точностью можно построить уровни дефектности для образцов с надрезом (рис. 2 б); базовые характеристики модели предлагается также определять по экспериментальным данным для образцов с надрезом [3]: $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 280$ МПа при $N_4 = 10^7$ циклов, $\sigma_5 = 380$ МПа при

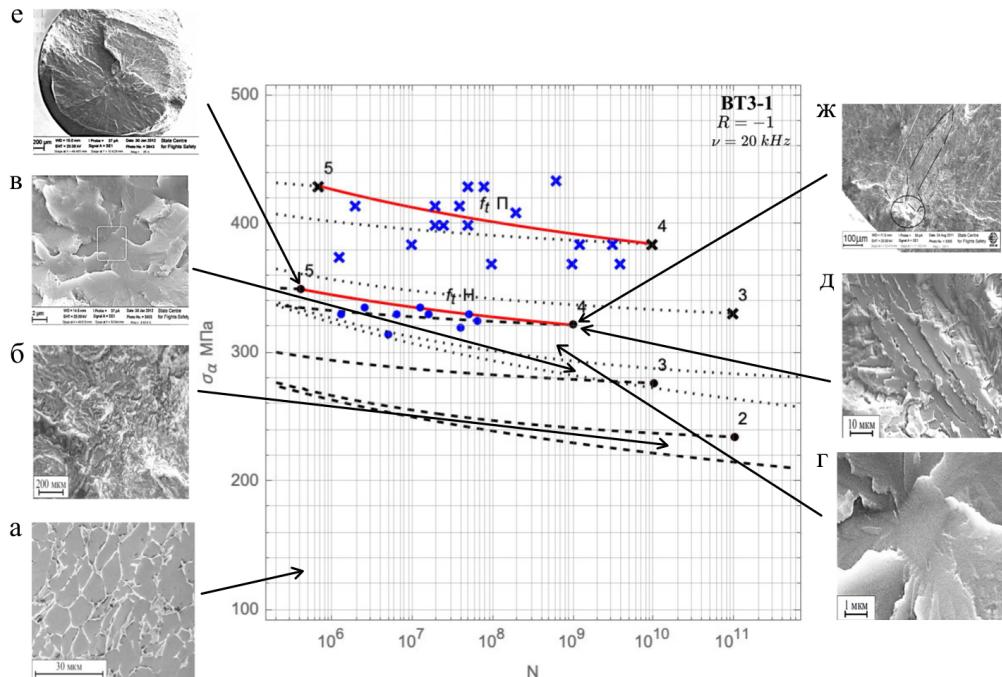


Рис. 1. Кривые усталости для неполированных и полированных образцов из титанового сплава BT3-1 при одноосном симметричном нагружении; а-ж – фотографии микроструктуры [2]

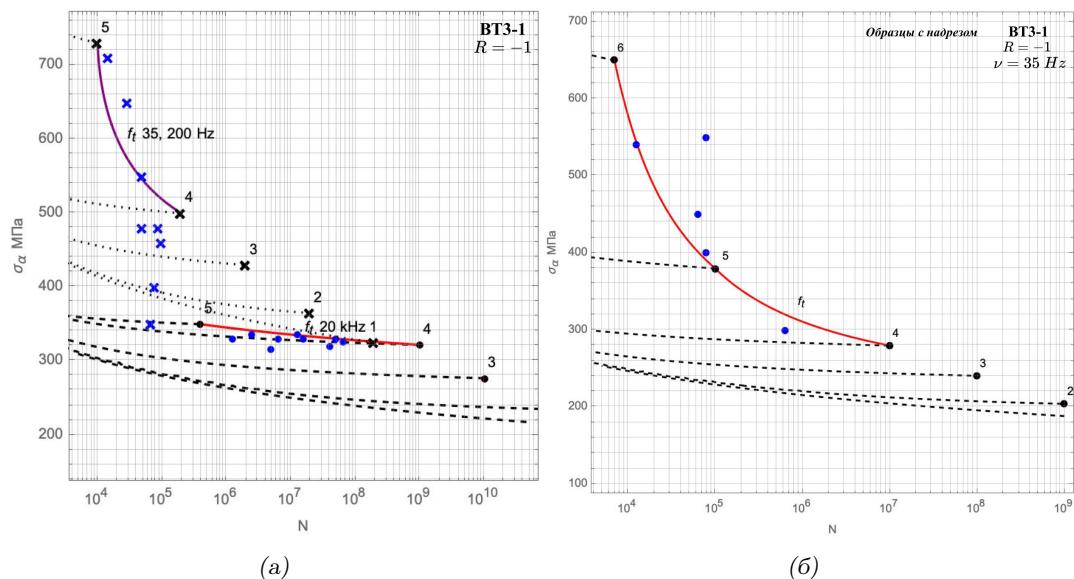


Рис. 2. Кривые усталости по уровням дефектности для титанового сплава BT3-1 при одноосном симметричном нагружении: (а) – для гладких образцов при разных частотах, (б) – для образцов с надрезом

$N_5 = 10^5$ циклов, $\sigma_6 = 650$ МПа при $N_6 = 7 \cdot 10^3$ циклов, $\nu = 35$ Гц. На рисунке 2 б сплошной линией изображена кривая усталости по макроразрушению при симметричном нагружении, точками — опытные данные. Получено удовлетворительное соответствие с имеющимися опытными данными.

На рисунке 3 представлены усталостные кривые по четырем уровням дефектности по соотношениям (31)–(33) для сплава ВТ3-1 при $\nu = 100$ Гц и коэффициентах асимметрии цикла $R = -1, 3, \infty$ (в областях циклического сжатия). На основании экспериментальных данных [5] выбираются следующие амплитуды напряжений: $\sigma_4 = 402$ МПа, $\sigma_4^0 = 301,5$ МПа при числе $N_4 = 10^6$ циклов. В рассматриваемом диапазоне значений коэффициентов асимметрии цикла при увеличении R наблюдается увеличение амплитуды нагрузления. Например, при $R = 3$ пределы усталости увеличиваются, в среднем, в два раза по сравнению с симметричным циклом при разных долговечностях, а при $R = \infty$ — в 1.5 раза.

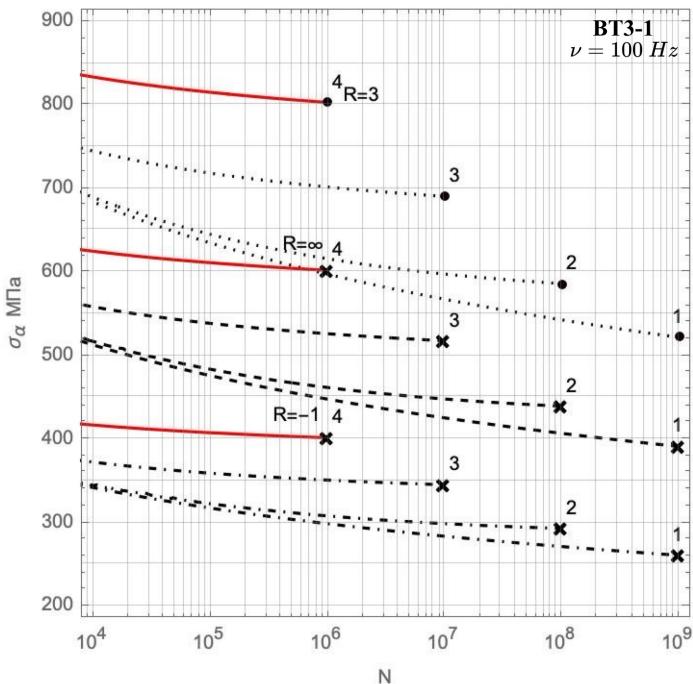


Рис. 3. Кривые усталости в координатах $\sigma_a \sim N$ титанового сплава ВТ3-1 по уровням дефектности при разных R

6.2 Результаты анализа для сплава ВТ6 (Ti-6Al-4V). Результаты расчетов по модели для титанового сплава ВТ6 ($\sigma_b = 1050$ МПа, $\sigma_s = 950$ МПа) [6], имеющего двухфазную ($\alpha + \beta$)-структуру, при симметричном нагружении, для которого выбираются следующие значения показателей в выражениях (16), (17):

$$\chi = \chi^* = \frac{1}{2}, \quad (35)$$

и базовые константы: при частоте $\nu = 20$ кГц – $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 450$ МПа при $N_4 = 9 \cdot 10^9$ циклов, $\sigma_5 = 475$ МПа при $N_5 = 8 \cdot 10^7$ циклов, $\sigma_6 = 500$ МПа при $N_6 = 7 \cdot 10^6$ циклов, а при частоте $\nu = 30$ Гц (в условиях изгиба с вращением) – $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 495$ МПа при $N_4 = 10^7$ циклов, $\sigma_5 = 600$ МПа при $N_5 = 10^5$ циклов, $\sigma_6 = 840$ МПа при $N_6 = 6 \cdot 10^3$ циклов, представлены на рисунке 4 (кривая усталости по макроразрушению при $\nu = 20$ кГц обозначена $f_t 20\text{ kHz}$, а при $\nu = 30$ Гц – $f_t 30\text{ Hz}$). Получено удовлетворительное соответствие опытным данным. Из рисунка 4 видно, что усталостные свойства этого сплава не зависят от частоты нагружения. При этом анализ поверхностей усталостного излома сплава с помощью сканирующего электронного микроскопа выявил небольшие различия при разрушении в много- и гигацикловой областях; во всех случаях очаг микроразрушения находился на поверхности (рис. 4 а и б) [6].

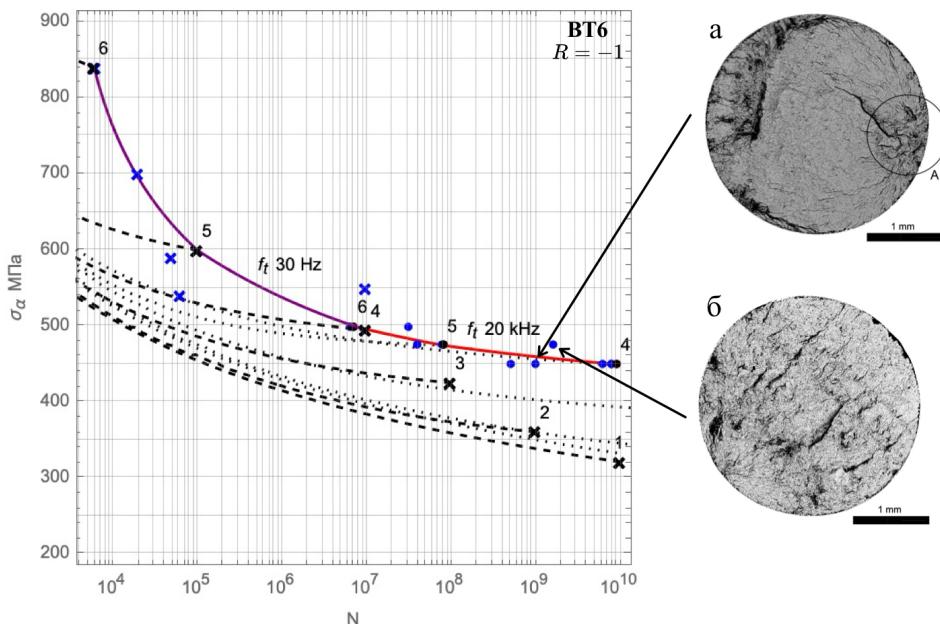


Рис. 4. Кривые усталости по уровням дефектности для титанового сплава ВТ6 при разных частотах симметричного нагружения; фрактографии: а – $\sigma_a = 450$ МПа, $N_f = 1.17 \cdot 10^9$ циклов; б – $\sigma_a = 475$ МПа, $N_f = 1.74 \cdot 10^9$ циклов [6]

В результате анализа усталостных свойств сплава ВТ6 от частоты сделаны следующие выводы. В [6] для серии образцов ($\nu = 30$ Гц, 20 кГц) наблюдается отсутствие зависимости от частоты (рис. 4). Анализ поверхностей усталостного излома сплава с помощью сканирующего электронного микроскопа выявил, что у большинства образцов наблюдались поверхностные трещины (рис. 4 а); в исключительных случаях трещина развивалась под поверхностью (рис. 4 б) [6]. В работах [7, 11] рассматриваются три группы образцов А, В, С с различной структурой и обработкой поверхности при частотах $\nu = 120$ Гц, 600 Гц и 20 кГц. Для образцов из группы А ($\sigma_s = 916$ МПа, $\sigma_b = 960$ МПа) с размером

зерна 0.007 мм и группы В ($\sigma_s = 897$ МПа, $\sigma_b = 967$ МПа) с размером зерна 0.02 мм не наблюдается влияние частоты. При этом анализ для образцов из группы С ($\sigma_s = 866$ МПа, $\sigma_b = 906$ МПа) со структурой, близкой к группе А, и пределами усталости в среднем меньше до 15%, показал зависимость усталостных свойств от частоты, что, по-видимому, связано с обработкой поверхности. Предел усталости при $N_f = 10^6$ циклов и $\nu = 20$ кГц оказался на 20% выше, чем при $\nu = 120$ Гц. В образцах группы С очаг микроразрушения наблюдался на поверхности во всех опытах, в образцах групп А и В – на поверхности только до $N_f = 5 \cdot 10^6$ циклов. В [8, 9] для серий образцов получена немонотонная зависимость от частоты.

По нашему мнению, зависимость усталостных свойств от частоты связана со структурой и подготовкой поверхности образцов. В случае подготовленной мелкозернистой структуры сплава и качественной обработки поверхности зависимость от частоты не фиксируется. У сплава в состоянии поставки наблюдается, в ряде случаев, немонотонная зависимость от частоты. В других случаях наблюдается различное влияние частоты на усталостные свойства. Например, для серии образцов С [7] с подготовленной структурой выявляется зависимость от частоты, что, по-видимому, связано с обработкой поверхности, в то время как для серии образцов В [7] с обработанной поверхностью не наблюдается зависимость усталостных свойств от частоты.

На рисунке 5 по данным [11] представляются кривые усталости по уровням дефектности для сплава ВТ6 при частотах нагружения $\nu = 120$ Гц и 20 кГц с

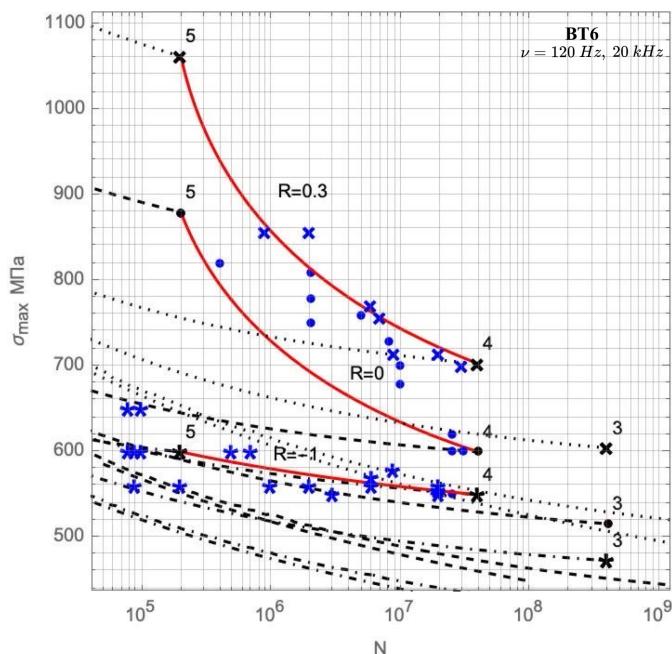


Рис. 5. Кривые усталости по уровням дефектности и по макроразрушению для титанового сплава ВТ6 в координатах $\sigma_{max} \sim N$ при разных коэффициентах асимметрии R

асимметриями $R = -1, 0, 0.3$ по соотношениям (31)–(33). Выбираются такие базовые амплитуды напряжения: $\sigma_4 = 550$ МПа и $\sigma_4^0 = 300$ МПа при $N_4 = 4 \cdot 10^8$ циклов, $\sigma_5 = 600$ МПа, $\sigma_5^0 = 600$ МПа при $N_5 = 2 \cdot 10^5$ циклов. Точками обозначаются опытные данные при $R = 0$, крестиками – при $R = 0.3$ и звездочками – при $R = -1$. Получено удовлетворительное соответствие опытным данным. В рассматриваемом диапазоне коэффициентов асимметрии цикла при увеличении R наблюдается увеличение максимального значения напряжений. Например, максимальное значение напряжения при $R = 0.3$, в среднем, увеличивается на 15% по сравнению с симметричным циклом при одинаковых долговечностях. В результате исследований сделан вывод, что асимметрия цикла нагружения не оказывает влияния на зависимость усталостных свойств от частоты.

6.3 Результаты анализа для сплава BT22. Для сплава BT22 ($\sigma_b = 1700$ МПа, $\sigma_s = 1600$ МПа), имеющего $(\alpha + \beta)$ -структуру, выбираются значения (35) показателей функций в выражениях (16), (17). Исходя из данных [12] при симметричном цикле и частоте $\nu = 20$ кГц, базовая амплитуда $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 635$ МПа при $N_4 = 1.3 \cdot 10^9$ циклов, $\sigma_5 = 850$ МПа при $N_5 = 2 \cdot 10^7$ циклов. После определения всех базовых констант строятся расчетные кривые усталости по пяти уровням дефектности (рис. 6) и по макроразрушению f_t (изображена сплошной линией на рис. 6). Получено хорошее соответствие опытным данным (кружки на рис. 6). Анализ изломов [12] с использованием сканирующей электронной микроскопии показал, что зарождение усталостных трещин при $N_f \geq 10^7$ циклов

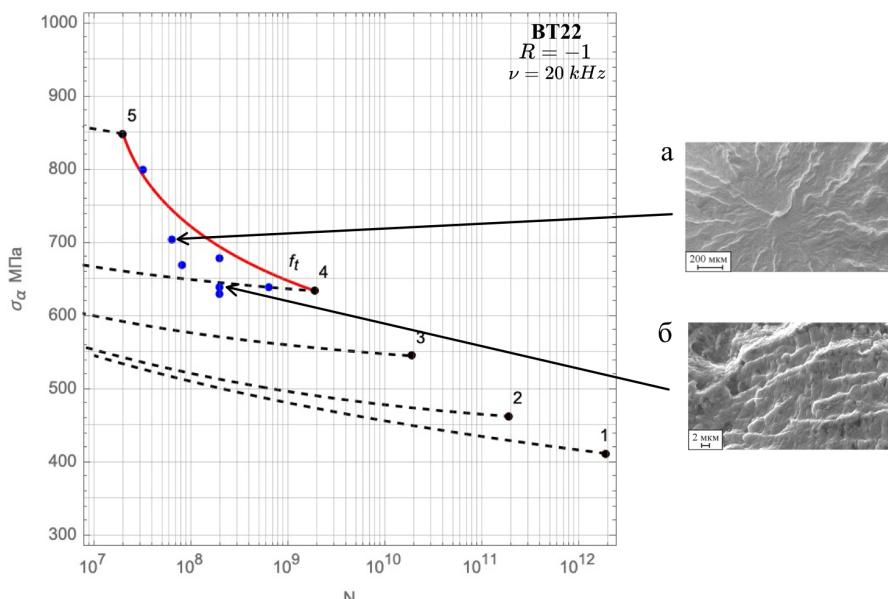


Рис. 6. Кривые усталости титанового сплава BT22 при симметричном нагружении; а – вид излома с очагами зарождения микротрещин под поверхностью при $\sigma_a = 702$ МПа, $N_f = 7.1 \cdot 10^7$ циклов; б – вид излома с растрескиванием материала на стадии развития коротких мезотрещин при $\sigma_a = 640$ МПа, $N_f = 1.9 \cdot 10^8$ циклов [12]

имеет место в объеме тела (рис. 6 а). При росте трещины формируется развитый волнистый рельеф с растрескиванием материала (рис. 6 б).

6.4 Результаты анализа для сплава ВТ1-0. На рисунке 7 а представлены результаты расчетов для сплава ВТ1-0 ($\sigma_b = 490$ МПа, $\sigma_s = 376$ МПа), который имеет α -структурную, рассматривается в ультрамелкозернистом (УМЗ) ($\sigma_4 = \sigma_{-1} = 200$ МПа при $N_4 = 1.9 \cdot 10^9$ циклов, $\sigma_5 = 250$ МПа при $N_5 = 5 \cdot 10^6$ циклов, $\sigma_6 = 300$ МПа при $N_6 = 5 \cdot 10^5$ циклов) и крупнокристаллическом (КК) ($\sigma_4 = \sigma_{-1} = 155$ МПа при $N_4 = 1.9 \cdot 10^9$ циклов, $\sigma_5 = 180$ МПа при $N_5 = 9 \cdot 10^5$ циклов) состояниях [13] при симметричном нагружении с частотой $\nu = 20$ кГц. Для показателей функций в (16), (17) также выбираются значения (35). Кривые усталости по макроразрушению обозначены f_t УМЗ и f_t КК для сплава ВТ1-0 в УМЗ и КК состояниях соответственно. Получено удовлетворительное соответствие опытным данным (представлены точками и крестами для УМЗ и КК состояний соответственно). В работах [13, 14] отмечается, что переход от КК к УМЗ структуре повышает выносливость сплава в области гигацикловой усталости (пределы усталости могут увеличиваться, в среднем, в 1.3 раза).

6.5 Результаты анализа для сплава ПТ-3В. На рисунке 7 б представлены результаты расчетов для сплава ПТ-3В, имеющего псевдо α -структурную ($\sigma_b = 736$ МПа, $\sigma_s = 667$ МПа) при $\nu = 5$ Гц. Базовые константы по данным [15] следующие: амплитуды $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 370$ МПа и $\sigma_4^0 = 250$ МПа при $N_4 = 10^6$ циклов, $\sigma_5 = 470$ МПа при $N_5 = 10^4$ циклов, $\sigma_6 = 660$ МПа при $N_6 = 500$ циклов.

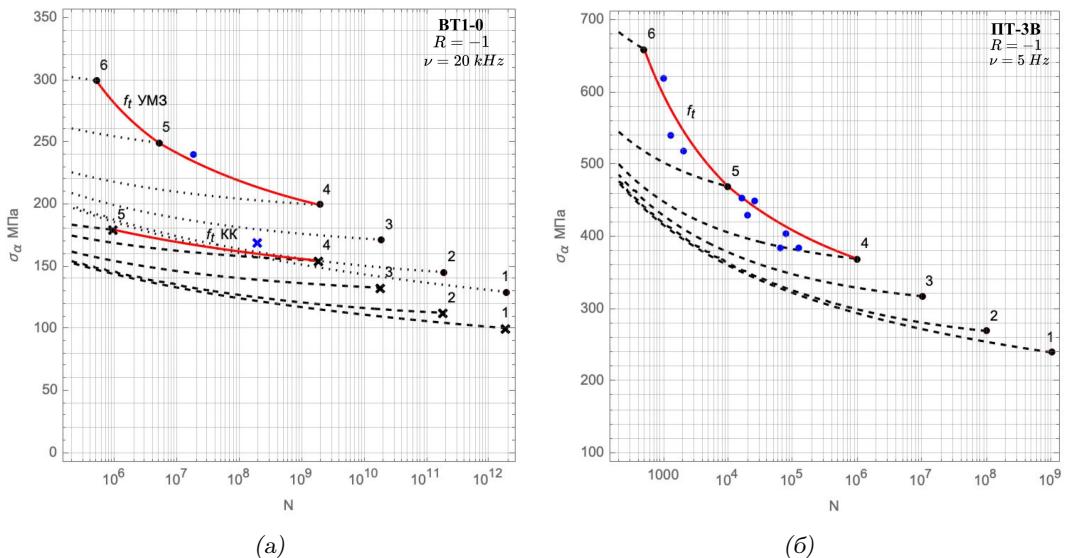


Рис. 7. Кривые усталости по уровням дефектности и по макроразрушению: (а) – для титанового сплава ВТ1-0 в УМЗ и КК состояниях, (б) – для титанового сплава ПТ-3В

Для показателей функций (16), (17) выбираются значения (35). Получено хорошее соответствие опытным данным (кружки на рис. 7 б). Проводятся расчеты

при коэффициентах асимметрии цикла: $R = -5, -2, 0$. На рисунке 8 представлены кривые усталости по уровням дефектности при следующих асимметриях цикла: $R = -5, -2, -1, 0$. Кривые усталости по хрупкому макроразрушению изображены сплошными линиями, точками обозначены опытные данные при $R = -2$, треугольниками – при $R = -1$, крестиками – при $R = -5$, звездочками – $R = 0$ [15]. Расчетные кривые удовлетворительно описывают опытные данные. В рассматриваемом диапазоне коэффициентов асимметрии цикла при уменьшении R наблюдается уменьшение максимального значения напряжений. На рисунке 9а представлен график зависимости максимального напряжения цикла

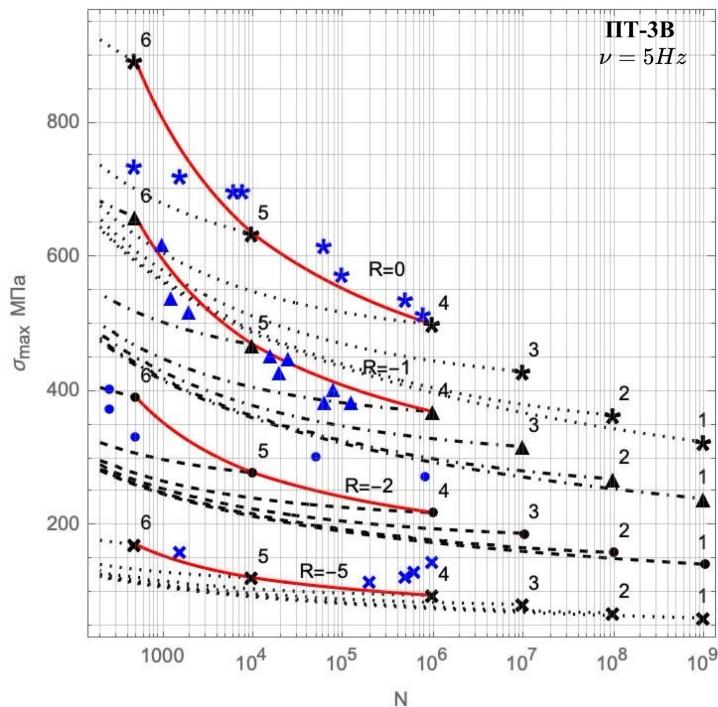


Рис. 8. Кривые усталости $\sigma_{max} \sim N$ по уровням дефектности и по макроразрушению для сплава ПТ-3В при разных коэффициентах асимметрии цикла R

σ_{max} от коэффициента асимметрии R при $N_f = 10^6$ циклов при разрушении по дефектам мезоуровня (диаграмма Хея-Смита), крестиками обозначены опытные данные. На рисунке 9б изображены поверхности по мезоразрушению и макроразрушению соответственно в координатах $(\sigma_{max}, \lg N, R)$. Точками отмечены опытные данные по макроразрушению.

6.6 Результаты анализа для сплава ТС17. На рисунке 10 представлены результаты расчетов для сплава ТС17, имеющего $(\alpha + \beta)$ -структурную ($\sigma_b = 1140$ МПа, $\sigma_s = 1094$ МПа) при ультразвуковом симметричном нагружении ($\nu = 20$ кГц) и следующих базовых константах [16]: $\sigma_4 = \sigma_{-1} = 570$ МПа при $N_4 = 9.45 \cdot 10^9$ циклов, $\sigma_5 = 750$ МПа при $N_5 = 7.56 \cdot 10^6$ циклов, $\sigma_6 = 850$ МПа при

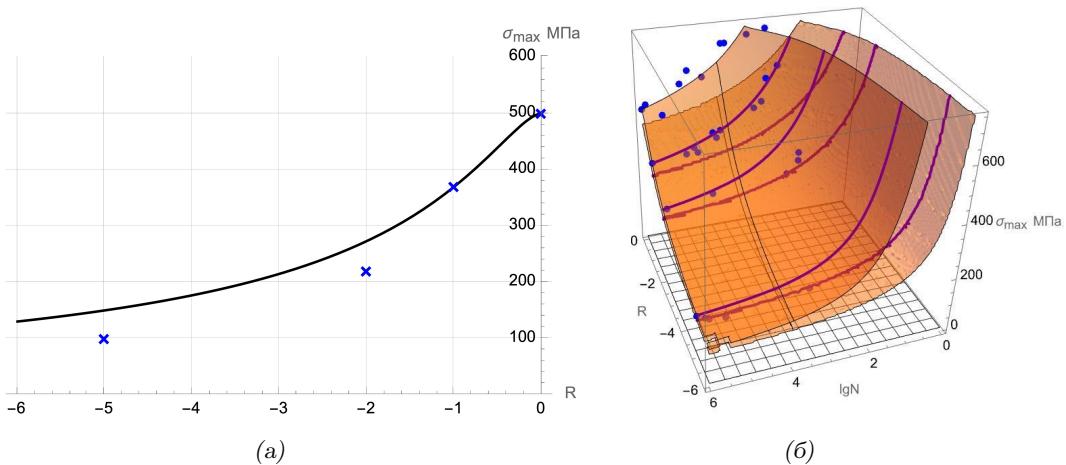


Рис. 9. Для титанового сплава ПТ-3В: (а) – диаграмма Хея-Смита при $N_f = 10^6$ циклов; (б) – поверхности мезо- и макроразрушения

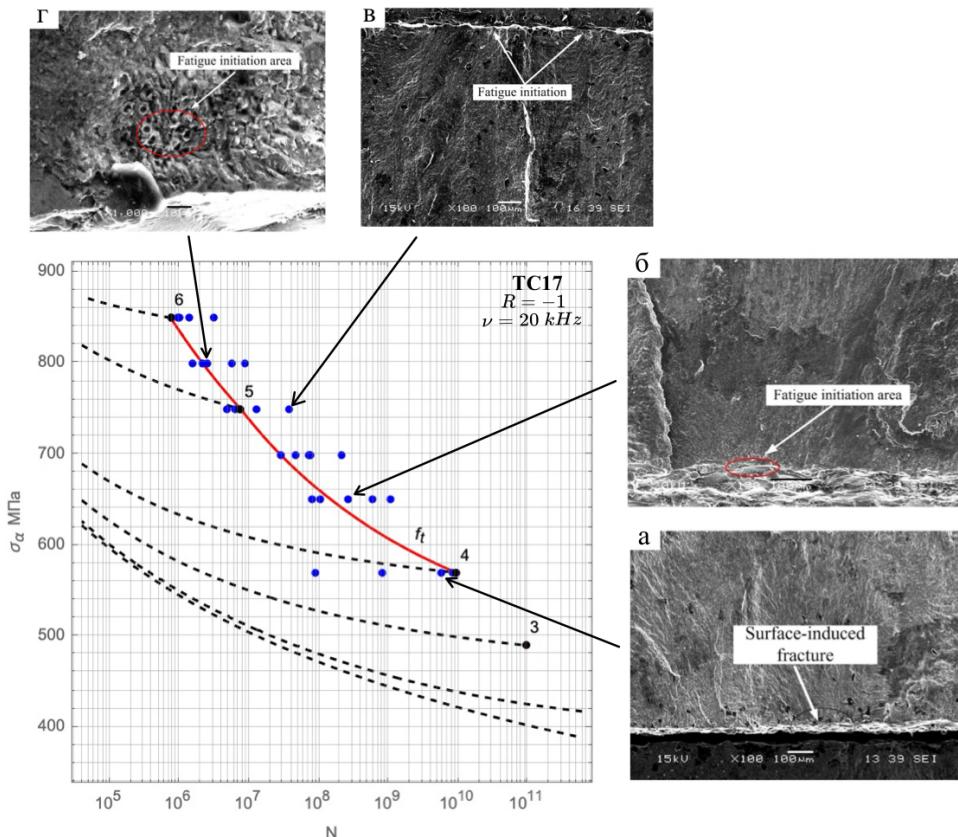


Рис. 10. Кривые усталости по уровням дефектности и макроразрушению для титанового сплава TC17 и фрактографии поверхностей излома [16]

$N_6 = 7.53 \cdot 10^5$ циклов. Для показателей функций в (16), (17) выбираются значения (33). Получено хорошее соответствие опытным данным (обозначены кружками). На рисунке 10 а и б представлены фрактографии с очагом на поверхности образца при (σ_4, N_4) и $\sigma_a = 650$ МПа, $N_f = 2.67 \cdot 10^8$ циклов соответственно; на рисунке 10 в изображено место образования множественных трещин при амплитуде σ_5 ; на рисунке 10 г показан очаг микротрешины под поверхностью образца при амплитуде σ_6 .

Заключение. Современное состояние проблемы прогнозирования долговечности связано с построением многоуровневых вероятностных моделей усталостного разрушения, которые должны основываться на физических закономерностях развития процесса. В этой работе предлагается одна из таких моделей. Записываются определяющие соотношения для функций распределения вероятностей разрушения и критерии усталостной прочности на микро-, мезо- и макроуровне для осевого нагружения во всем диапазоне асимметрии цикла, кроме $R \in [0.5, 1]$. Представляются расчетные кривые усталости по уровням дефектности для титановых сплавов BT1-0, BT3-1, BT6, BT22, PT-3B, TC17 при различных коэффициентах асимметрии цикла и частотах нагружения, включая циклические растяжение, сжатие и растяжение-сжатие, хорошо описывающие имеющиеся опытные данные. Зависимость усталостных свойств от частоты связывается с подготовкой структуры сплава и обработкой поверхности.

Для сплава BT6 максимальное значение напряжения циклического растяжения при $R = 0.3$, в среднем, увеличивается на 15% по сравнению с симметричным циклом при одинаковых долговечностях. При этом амплитуда напряжения уменьшается, в среднем, на 60% по сравнению с симметричным циклом при одинаковых долговечностях, а долговечность при постоянной амплитуде уменьшается более, чем на два порядка. Это необходимо учитывать, если в теле могут иметь место остаточные растягивающие напряжения, например, после обработки резанием (точения) поверхности они могут составлять до 70 МПа на глубине, в среднем, 0.05-0.2 мм.

При циклическом сжатии наблюдается увеличение амплитуды напряжений по сравнению с симметричным циклом при равных долговечностях. Например, для сплава BT3-1 при $R = 3$ она увеличивается, в среднем, в два раза. На этом основаны технологии упрочнения, создающие остаточные сжимающие напряжения в поверхностных слоях элементов конструкций (обработка дробью, шариками и т.п.), что имеет место, например, при обработке деталей шасси из титановых сплавов. Лазерная ударная обработка титанового сплава BT6 (ударной волной при давлении порядка 1 ГПа, скорости деформирования порядка 10^{-6} с⁻¹ и продолжительностью 10 Нс) приводит к значительному остаточному сжатию поверхностного слоя (до 1.5 мм). Вместе с тем отметим, что т.к. остаточные напряжения взаимно уравновешиваются внутри тела, в том числе в областях их локализации, то поверхностные сжимающие напряжения уравновешиваются растягивающими в объеме тела, что может ухудшать характеристики гигацикловой усталости, развивающейся в объеме тела.

В результате расчета при ультразвуковом симметричном нагружении получено увеличение пределов усталости при равных долговечностях: для сплава ВТ3-1, в среднем, до 40% и в гигацикловой области очаг разрушения находится в объеме тела, для сплава ВТ6 – до 20% и очаг разрушения наблюдается как на поверхности тела, так и объеме тела.

1. *Завойчинская Э.Б.* Определение долговечности по уровням дефектности при одноосном нагружении титановых сплавов различных классов во всем диапазоне коэффициентов асимметрии цикла / Э.Б. Завойчинская , Г.Е. Лавриков // Современные методы и технологии создания и обработки материалов. – 2024. – Т.1. – С. 50–62.
2. *Шанявский А.А.* Масштабная иерархия процессов малоцикловой, многоцикловой и сверхмногоциклической усталости разрушения титанового сплава ВТ3-1 / А.А. Шанявский, А.Л. Никитин и др. // Физическая мезомеханика. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 59–68.
3. *Шанявский А.А.* Бифуркационный переход от мезо к наномиру усталости титанового сплава ВТ3-1 как частично замкнутой системы / А.А. Шанявский, Т.П. Захарова, Ю.А. Потапенко // Физическая мезомеханика. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 33–44.
4. *Peters J.O.* On the application of the Kitagawa–Takahashi diagram to foreign-object damage and high-cycle fatigue / J.O. Peters, B.L. Boyce, X. Chen, J.M. McNaney, J.W. Hutchinson, R.O. Ritchie // Eng. Fract. Mechanics. – 2002. – Vol. 69, iss. 13. – P. 1425–1446. – DOI:10.1016/S0013-7944(01)00152-7
5. *Оспенникова О.Г.* Влияние морской воды на сопротивление многоциклической усталости сплава ВТ3-1 при различных коэффициентах асимметрии / О.Г. Оспенникова, С.А. Наприенко, В.В. Автаев // Труды ВИАМ. – 2019. – № 1 (73). – С. 116–124.
6. *Janecek M.* The Very High Cycle Fatigue Behaviour of Ti-6Al-4V Alloy / M. Janecek, F. Novy, P. Harcuba, J. Strasky, L. Trsko, M. Nhade, L. Wagner // Acta Physica Polonica A. – 2015. – V. 128. – P. 497–502.
7. *Takeuchi E.* The effect of frequency on the gigacycle fatigue properties of a Ti-6Al-4V alloy / E. Takeuchi, Y. Furuya, N. Nagashima, S. Matsuoka // Fatigue Fract. of Eng. Mater. Struct. – 2008. – 31. – P. 599–605.
8. *Bathias C.* Gigacycle fatigue in mechanical practice / C. Bathias, P.C. Paris. – New York: Dekker Publisher, 2005. – 304 р.
9. *Нгуен Нгок Т.* Влияние частоты нагружения на сопротивление усталости материала / Т. Нгуен Нгок, В.М. Капралов, Г.С. Коленъко // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. – 2019. – Т. 25, № 2. – С. 68–77.
10. *Бетехтин В.И.* Экспериментально и теоретическое исследование многомасштабных закономерностей разрушения при сверхмногоциклической усталости / В.И. Бетехтин, А.Г. Кадомцев, М.В. Нарыкова [и др.]. // Физическая мезомеханика. – 2017. – Т. 20, № 1. – С. 82–93.
11. *Furuya Y.* Catalogue of NIMS fatigue data sheets / Y. Furuya, H. Nishikawa, H. Hirukawa, N. Nagashima, E. Takeuchi // Sci. and Tech. of advanced mater. – 2019. – Vol. 20 (1). – P. 1055–1072.
12. *Найденкин Е.В.* Закономерности сверхмногоциклической усталостного разрушения титанового сплава ВТ22 / Е.В. Найденкин, А.П. Солдатенков, И.П. Мишин, В.А. Оборин, А.А. Шанявский // Физическая мезомеханика. – 2021. – Т. 24, № 2. – С. 23–33.
13. *Наймарк О.Б.* Закономерности разрушения титана ВТ1-0 и сплава циркония Э110 в ультратрамелкозернистом, мелкозернистом и крупнокристаллическом состояниях при циклическом нагружении в гигацикловом режиме / О.Б. Наймарк, Ю.П. Шаркеев, А.М. Майрамбекова [и др.]. // Письма о материалах. – 2018. – Т. 8, № 3. – Р. 317–322.
14. *Нарыкова М.В.* Долговечность титана ВТ1-0 в различных структурных состояниях / М.В. Нарыкова, А.Г. Кадомцев, В.И. Бетехтин // Актуальные вопросы прочности: сб. тезисов LXIV Междунар. Конф. – Екатеринбург: Уральский гос. горный университет, 2022. – С. 101–102.

15. Багмутов В.П. Усталостная прочность при отрицательных значениях коэффициента асимметрии стали 45 и титанового сплава ПТ-3В / В.П. Багмутов, В.И. Водопьянов, О.В. Кондратьев, К.А. Бадиков // Известия ВолгГТУ. – 2015. – № 5 (160). – С. 69–73.
16. Jiao S. A Very High-Cycle Fatigue Test and Fatigue Properties of TC17 Titanium Alloy / S. Jiao, C. Gao, L. Cheng, X. Li, Y. Feng // J. of Mater. Eng. and Performance. – 2016. – Vol. 25 (3). – P. 1085–1093.
17. Шанявский А.А. Масштабные уровни предела усталости металлов / А.А. Шанявский, А.П. Солдатенков // Физическая мезомеханика. – 2019. – Т. 22, № 1. – С. 44–53.
18. Шанявский А.А. Новые парадигмы в описании усталости металлов / А.А. Шанявский, А.П. Солдатенков // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 1. – С. 196–207. – DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.17.
19. Найденкин Е.В. Закономерности сверхмногоциклового усталостного разрушения титанового сплава ВТ22 / Е.В. Найденкин, А.П. Солдатенков, И.П. Мишин, В.А. Оборин, А.А. Шанявский // Физическая мезомеханика. – 2021. – Т. 24, № 2. – С. 23–33.
20. Солдатенков А.П. Мезомасштабный уровень усталостного разрушения титанового сплава ВТ22 после радиально-сдвиговой прокатки с последующим старением / А.П. Солдатенков, Е.В. Найденкин, А.А. Шанявский, И.П. Мишин, А.В. Еремин, А.А. Богданов, С.В. Панин // Физическая мезомеханика. – 2022. – Т 25, № 4. – С. 70–83.
21. Tridello A. Statistical models for estimating the fatigue life, the stress–life relation, and the P–S–N curves of metallic materials in Very High Cycle Fatigue: A review / A. Tridello, C.A. Niutta, M. Rossetto, F. Berto, D.S. Paolino // Fatigue Fract Eng Mater Struct. – 2022. – Vol. 45, № 2. – P. 332–370. – DOI: 10.1111/fre.13610.
22. Завойчинская Э.Б. Общие закономерности и критерии разрушения твердых тел на разных масштабно-структурных уровнях при длительном нагружении (обобщающая статья) / Э.Б.Завойчинская // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2022. – Т. 88, № 7. – С. 48–62. – DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-7-48-62.
23. Kobayashi A.S. Handbook on Experimental Mechanics / A.S. Kobayashi. – Prentice-Hall: Society for Experimental Mechanics, 1987. – 1002 p.
24. Махутов Н.А. Прочность, ресурс, живучесть и безопасность машин / Н.А. Махутов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2019. – 576 с.
25. Иванова В.С. Количественная фрактография. Усталостное разрушение / В.С. Иванова, А.А. Шанявский. – Челябинск: Металлургия, 1988. – 397 с.
26. Ботвина Л.Р. Разрушение. Кинетика, механизмы, общие закономерности / Л.Р. Ботвина. – М.: Наука, 2008. – 334 с.
27. Murakami Y. Metal fatigue: effect of small defects and non-metallic inclusions / Y. Murakami. – Oxford: Elsevier, 2019. – 735 p.
28. Клюев В.В. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник / В.В. Клюев. – М.: Машиностроение, 2003. – 656 с.
29. Czichos H. Handbook of technical diagnostics / H. Czichos. – Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 2013. – 560 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-25850-3.
30. Ефимов А.Г. Электромагнитные и магнитные методы неразрушающего контроля для контроля накопления поврежденности в конструкционных сталях и сплавах (обзор) / А.Г. Ефимов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2020. – Т. 86, № 8. – С. 49–57. – DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-8-49-57.
31. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Физматлит, 2009. – 136 с.

E.B. Zavoychinskaya, G.E. Lavrikov

Mathematical modeling of scale-structural failure at uniaxial loading of titanium alloys with cycle asymmetry.

The curves of equal fracture probability high-cycle fatigue on micro-, meso-, and macrodefect levels

at asymmetric axial loading are proposed. The constitutive relations for the failure probability distribution function are represented by Hilbert-Schmidt operators on the loading process. The calculation results for titanium alloys VT1-0, VT3-1, VT6, VT22, PT-3V and TC17 at various cyclic processes, including cyclic tension, compression, and tension-compression, are in good agreement with known experimental data.

Keywords: scale-structural levels, brittle failure, fatigue curves by defect levels, loading cycle asymmetry, titanium alloys, high cycle fatigue, very high cycle fatigue.

*Статья поступила в редакцию 10.12.2025;
доработана 22.12.2025;
рекомендована к печати 24.12.2025.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3
doi:10.24412/0136-4545-2025-4-131-139
EDN:LHTXVS



©2025. Е.В. Авдюшина¹, Д.Д. Полянский², С.В. Сторожев³

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЗАКРЕПЛЕННЫХ ПО ГРАНЯМ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

Представлен нечетко-множественный вариант расчетной методики определения прочностных характеристик конструкционных элементов в виде тонких закрепленных по плоским граням пластин из электропроводящих материалов при индукционном разогреве с учетом факторов неопределенности рассматриваемой модели в виде разбросов значений исходных физико-механических и геометрических характеристик пластин и технологических параметров процесса разогрева. Рассмотрены альтернативные варианты задания тепловых граничных условий на плоских гранях пластин. В рамках разработанной методики предполагается введение нечетко-множественных описаний для неконтрастных экзогенных характеристик рассматриваемых моделей на базе фазификации имеющихся данных о разбросах их значений и ис-

¹Авдюшина Елена Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: elena.v.a.2023@mail.ru.

Avdyushina Elena Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Полянский Дмитрий Дмитриевич – асп. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА – филиал НИУ МГСУ, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture – Branch of the National Research Moscow State University of Civil Engineering, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Сторожев Сергей Валерьевич – докт. техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА – филиал НИУ МГСУ, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture – Branch of the National Research Moscow State University of Civil Engineering, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

пользование получаемых нечетко-множественных величин в качестве аргументов в расчетных выражениях детерминистических версий моделей, расширяемых на данный тип переменных путем применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения. Приведены отдельные результаты численной реализации разработанной методики.

Ключевые слова: *тонкие упругие пластины, электропроводящие материалы, жестко закрепленные грани, индукционный разогрев, модели температурного деформирования, разбросы физико-механических параметров, оценки неопределенности результирующих характеристик, нечетко-множественная методика, модифицированный эвристический принцип обобщения.*

Введение и постановка задачи. Исследования различных вариантов расчетных моделей определения прочностных характеристик тонких пластин из электропроводящих материалов при индукционном разогреве обусловлены весьма широким кругом их востребованности во многих научно-технических отраслях и возрастанием требований к мере адекватности результатов проектных расчетов, в то время как исходные физико-механические параметры материалов пластин и характеристики производственных процессов их индукционного нагрева в реальных ситуациях обладают весьма высокой степенью количественной параметрической неопределенности в виде разбросов количественных данных экспериментальных измерений, принимаемых технологических допусков в процессах изготовления пластин и задании параметров внешних воздействий, а также вариации значений их характеристик, вводимых в расчетные модели на базе субъективных экспертных оценок [1–4]. Сложность полномасштабного изучения меры влияния разбросов значений исходных параметров при анализе моделей рассматриваемого типа на основе методов вероятностно-стохастического анализа вызвана отсутствием, в большинстве случаев, реальной информации корректной статистической природы об указанных показателях неконтрастности исходных данных в форме однородных частотных выборок большой мощности и природой других указанных выше факторов неопределенности. При отсутствии отвечающей требованиям статистической корректности исходной информации о разбросах исходных параметров данных моделей, расчетный анализ их параметрической неопределенности может быть реализован путем применения нечетко-множественных методов [5–8] с менее строгими требованиями к природе неконтрастной количественной исходной информации. В данном контексте, целью представляемого в настоящей работе исследования является разработка и апробация нечетко-множественного варианта расчетной методики определения прочностных характеристик тонких закрепленных по плоским граням пластин из электропроводящих материалов при индукционном разогреве с учетом параметрической неопределенности в виде разбросов значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров, базирующейся на введении описаний этих параметров нечетко-множественными величинами и использовании их в качестве аргументов в функциональных расчетных выражениях детерминистических версий моделей, расширяемых на данный тип аргументов путем применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического прин-

Нечетко-множественный анализ параметрически неопределенных моделей деформирования
ципа обобщения.

1. Расчетные соотношения детерминистических вариантов рассматриваемых моделей. Вариантами моделей исследуемого в данной работе типа являются рассмотренные в детерминистической постановке в работе [4] расчетные модели обусловленного индукционным разогревом термонапряженного состояния тонкой изотропной электропроводящей пластины (слоя) с жестко закрепленными граничными плоскостями, которые являются теплоизолированными, либо на которых выполняются идеальные условия теплоотдачи, при задании в окрестности одной из граней периодической во времени касательной компоненты вектора напряженности осциллирующего внешнего электрического поля.

Рассматриваемая пластина имеет толщину h , занимает в нормированных пространственных декартовых координатах Ox_1x_2z область $V = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq z \leq 1\}$; изготовлена из материала с параметром магнитной проницаемости μ , коэффициентом электропроводности σ , коэффициентом теплопроводности λ , коэффициентом температуропроводности a , коэффициентом линейного теплового расширения α_T , модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν . Плоские грани пластины жестко закреплены. Характеристиками внешнего электромагнитного воздействия являются амплитуда E_0 и частота ω осциллирующего электрического поля.

При исследовании детерминистического варианта рассматриваемой модели в случае задания условий свободного теплообмена на гранях для температурного поля в пластине $T(z, \tau)$ получено представление [4]

$$\begin{aligned} T(z, \tau) &= \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, \alpha_T, E_0, \omega) = \\ &= T_* \delta_0^2 (1 - z - 2(ch((1 - z)\delta_0^{-1} - \cos((1 - z)\delta_0^{-1})))e^{-\gamma_*} - \\ &- 2\gamma_* \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^2 \pi^2 (n^2 \pi^2 + \gamma_*^2))^{-1} (\sin n^2 \pi^2 (1 - z) - 4n^2 \pi^2 e^{-\gamma_*} \sin n^2 \pi^2 z) \times \\ &\quad \times \exp(-n^2 \pi^2 \tau)), \end{aligned} \quad (1)$$

в котором

$$T_* = \sigma E_0^2 h^2 (2\lambda)^{-1}, \quad \delta_0 = \delta/h = (2\mu\omega \sigma h^2)^{-1/2}, \quad \gamma_* = 1/\delta_0, \quad \tau = a t h^{-2}, \quad (2)$$

а поля напряжений соответственно описываются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(z, \tau) &= \sigma_{22}(z, \tau) = \Phi_\sigma(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, \alpha_T, E, \nu, E_0, \omega) = \\ &= -\alpha_T E (1 - \nu)^{-1} T(z, \tau), \quad \sigma_{zz}(z, \tau) = \sigma_{z1}(z, \tau) = \sigma_{z2}(z, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для случая пластины с теплоизолированными гранями эндогенные характеристики детерминистического варианта модели [4] имеют представления

$$T(z, \tau) = \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, \alpha_T, E_0, \omega) = \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 &= T_*(\delta_0(\tau + (1/2)(1-z)^2 - 1/6) + \delta_0^3 - \delta_0^2 \exp(-z/\delta_0) + \\
 &+ 2\gamma_* \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^2 \pi^2 (n^2 \pi^2 + \gamma_*^2))^{-1} \cos n\pi(1-z) \exp(-n^2 \pi^2 \tau)), \\
 \sigma_{11}(z, \tau) &= \sigma_{22}(z, \tau) = \Phi_{\sigma}(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, \alpha_T, E, \nu, E_0, \omega) = \quad (5) \\
 &= -\alpha_T E(1-\nu)^{-1} T(z, \tau), \quad \sigma_{ss}(z, \tau) = \sigma_{s1}(z, \tau) = \sigma_{s2}(z, \tau) = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$T_* = \sigma E_0^2 h^2 (2\lambda)^{-1}, \quad \delta_0 = \delta/h = (2\mu\omega \sigma h^2)^{-1/2}, \quad \gamma_* = 1/\delta_0, \quad \tau = ath^{-2}. \quad (6)$$

2. Нечетко-множественные обобщения расчетных моделей рассматриваемого типа. Проблема учета параметрической неопределенности в представленных моделях термоанпряженного состояния тонких пластин при индукционном нагреве, обусловленной разбросами значений неконтрастных исходных параметров, решается на основе применения методов нечетко-множественного количественного анализа [5, 6] путем перехода к нечетко-множественным аргументам в распространяемых на этот тип переменных функциональных расчетных соотношениях (1)–(6) детерминистических версий данных моделей. В рамках предположения об учете неконтрастности для всех исходных физико-механических и геометрических параметров модели $h, \mu, \sigma, \lambda, a, \alpha_T, E, \nu, E_0, \omega$ вводятся их описания нечетко-множественными величинами $\tilde{h}, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}, \tilde{a}, \tilde{\alpha}_T, \tilde{E}, \tilde{\nu}, \tilde{E}_0, \tilde{\omega}$ нескольких типов в зависимости от имеющихся массивов экспериментальных и экспертных данных. Рассматриваемыми вариантами нечетко-множественного описания параметров с разбросами значений является их описание нормальными треугольными нечеткими числами с представлениями в виде разложений по множествам α – срезов [5, 6], записываемых с использованием соответствующих реперных значений из кортежей $\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3)$, $\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \dots, \tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{\alpha}, \bar{h}_{\alpha}], \quad \underline{h}_{\alpha} = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_{\alpha} = \alpha h_2 + (1-\alpha)h_3; \quad (7)$$

$$\tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{\alpha}, \bar{\mu}_{\alpha}], \quad \underline{\mu}_{\alpha} = (1-\alpha)\mu_1 + \alpha \mu_2, \quad \bar{\mu}_{\alpha} = \alpha \mu_2 + (1-\alpha)\mu_3; \dots;$$

$$\tilde{\omega} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_{\alpha}, \bar{\omega}_{\alpha}], \quad \underline{\omega}_{\alpha} = (1-\alpha)\omega_1 + \alpha \omega_2, \quad \bar{\omega}_{\alpha} = \alpha \omega_2 + (1-\alpha)\omega_3;$$

описание неконтрастных параметров нормальными трапецидальными нечеткими интервалами с кортежами реперных значений $\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, $\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \dots, \tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ и разложениями по множествам α – срезов с граничными значениями:

$$\underline{h}_{\alpha} = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_{\alpha} = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_\alpha &= (1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, \quad \bar{\mu}_\alpha = \alpha\mu_3 + (1 - \alpha)\mu_4; \dots; \\ \underline{\omega}_\alpha &= (1 - \alpha)\omega_1 + \alpha\omega_2, \quad \bar{\omega}_\alpha = \alpha\omega_3 + (1 - \alpha)\omega_4;\end{aligned}$$

описание неконтрастных параметров нормальными квазигауссовыми нечеткими числами [5, 6], величины границ интервалов α – уровней которых имеют вид:

$$\begin{aligned}h_\alpha &= m_{*h} - \sigma_{*lh}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{h}_\alpha = m_{*h} + \sigma_{*rh}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\mu}_\alpha &= m_{*\mu} - \sigma_{*l\mu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{\mu}_\alpha = m_{*\mu} + \sigma_{*r\mu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \dots; \\ \underline{\omega}_\alpha &= m_{*\omega} - \sigma_{*l\omega}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{\omega}_\alpha = m_{*\omega} + \sigma_{*r\omega}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.\end{aligned}\quad (9)$$

Эндогенные нечетко-множественные параметрические зависимости $\tilde{T}(z, \tau)$, $\tilde{\sigma}_{11}(z, \tau)$, $\tilde{\sigma}_{22}(z, \tau)$ для рассматриваемых моделей в рамках применения модифицированной формы эвристического принципа расширения также определяются в форме разложений по α – срезам

$$\tilde{T}(z, \tau) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_\alpha(z, \tau), \bar{T}_\alpha(z, \tau)], \quad (10)$$

$$\tilde{\sigma}_{11}(z, \tau) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{11\alpha}(z, \tau), \bar{\sigma}_{11\alpha}(z, \tau)], \quad \tilde{\sigma}_{22}(z, \tau) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{22\alpha}(z, \tau), \bar{\sigma}_{22\alpha}(z, \tau)].$$

В процессе получения представлений для границ интервалов α – срезов в представлениях (10) осуществляется анализ свойств знакопределенности частных производных от функциональных зависимостей

$$\begin{aligned}T(z, \tau) &= \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, E_0, \omega), \\ \sigma_{11}(z, \tau) &= \sigma_{22}(z, \tau) = \Phi_\sigma(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda, a, \alpha_T, E, \nu, E_0, \omega)\end{aligned}$$

для обеих рассматриваемых моделей по их аргументам в полных областях определения, в результате которого записываются оценки

$$\partial\Phi_T/\partial E_0 \geq 0, \quad \partial\Phi_T/\partial\lambda \leq 0, \quad (11)$$

С учетом оценок (11) расчетные соотношения для величин границ интервалов α – срезов в представлениях эндогенных параметров для обеих рассматриваемых моделей могут быть записаны в виде:

$$\partial\Phi_\sigma/\partial E_0 \geq 0, \quad \partial\Phi_\sigma/\partial\lambda \leq 0, \quad \partial\Phi_\sigma/\partial\alpha_T \leq 0, \quad \partial\Phi_\sigma/\partial E \leq 0, \quad \partial\Phi_\sigma/\partial\nu \leq 0.$$

$$\begin{aligned}\underline{T}_\alpha(z, \tau) &= \inf_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \bar{\lambda}_\alpha, a, \bar{\alpha}_{T\alpha}, \underline{E}_{0\alpha}, \omega), \\ \bar{T}_\alpha(z, \tau) &= \sup_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \bar{\lambda}_\alpha, a, \bar{\alpha}_{T\alpha}, \bar{E}_{0\alpha}, \omega),\end{aligned}\quad (12)$$

$$\bar{T}_\alpha(z, \tau) = \sup_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \Phi_T(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda_\alpha, a, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \bar{E}_{0\alpha}, \omega);$$

$$\underline{\sigma}_{\alpha jj}(z, \tau) = \inf_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \Phi_\sigma(z, \tau, h, \mu, \sigma, \bar{\lambda}_\alpha, a, \bar{\alpha}_{T\alpha}, \bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, \underline{E}_{0\alpha}, \omega), \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha jj}(z, \tau) = \sup_{\substack{\omega \in [\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \Phi_\sigma(z, \tau, h, \mu, \sigma, \lambda_\alpha, a, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{E}_\alpha, \nu_\alpha, \bar{E}_{0\alpha}, \omega).$$

Соотношения (12), (13) позволяют дать описания функций принадлежности для нечетко-множественных эндогенных характеристик рассматриваемых моделей, и в терминах получения оценок возможностей достижения этими характеристиками определенных значений из интервалов носителей дать описания меры неопределенности для эндогенных параметров моделей при задаваемых возможных разбросах в значениях исходных параметров.

3. Пример вычислительных экспериментов. На базе разработанной методики и реализующего ее программного приложения осуществлен расчетный анализ параметрически неопределенной модели описания термонапряженного состояния при индукционном разогреве для частного случая жестко закрепленной и теплоизолированной по граням пластины из хромоникелевой стали 49НХ со следующими значениями неконтрастных характеристик, задаваемых нечетко-интервальными представлениями параметров модуля Юнга $\bar{E} = (1.38E_*, 1.40E_*, 1.42E_*, 1.44E_*)$, коэффициента линейного теплового расширения $\tilde{\alpha}_T = (8.5\alpha_*, 8.8\alpha_*, 9.0\alpha_*, 9.5\alpha_*)$, толщины $\tilde{h} = (3.87l_*, 3.95l_*, 3.98l_*, 4.04l_*)$, где $E_* = 10^{11}$ Па, $\alpha_* = 10^{-6}\text{K}^{-1}$, $l_* = 10^{-2}$ м, а также с параметрами, описываемыми треугольными нечеткими числами, – магнитной проницаемостью $\tilde{\mu} = (3.2\mu_*, 3.8\mu_*, 4.7\mu_*)$, коэффициентом электропроводности $\tilde{\sigma} = (6.25\sigma_*, 6.9\sigma_*, 7.6\sigma_*)$, коэффициентом теплопроводности $\tilde{\lambda} = (1.2\lambda_*, 1.4\lambda_*, 1.5\lambda_*)$, коэффициентом температуропроводности $\tilde{a} = (3.42a_*, 3.68a_*, 4.26a_*)$, коэффициентом Пуассона $\tilde{\nu} = (0.28, 0.3_*, 0.31)$, где $\mu_* = 10^4 \text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}$, $\sigma_* = 10^6 \text{См} \cdot \text{м}^{-1}$, $\lambda_* = 1 \text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$, $a_* = 10^{-7} \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Характеристиками внешнего электромагнитного воздействия являются неконтрастные параметры амплитуды напаряженности и циклической частоты осциллирующего внешнего электрического поля, также

описываемые треугольными нечеткими числами $\tilde{E}_0 = (0.85E_{0*}, 0.9E_{0*}, 0.95E_{0*})$, $\tilde{\omega} = (290f_*, 295f_*, 300f_*)$, где $E_{0*} = 10^{-1}$ в \cdot м $^{-1}$, $f_* = 10^7$ с $^{-1}$. Результаты расчета нечетких эндогенных параметров температуры и темомеханических напряжений в рассматриваемой модели в виде профилей соответствующих функций принадлежности при значении нормированной поперечной координаты $z = 0.5$ и для момента времени $t = 120$ с приведены на рисунках 1 и 2.

Можно отметить, что предельные разбросы для эндогенных характеристик модели на интервалах носителей относительно модальных значений при учете совокупного влияния неконтрастности всех исходных физико-механических параметров разогреваемой пластины и параметров внешнего воздействия в данном случае имеют величину 35.6 % для параметра температуры разогрева и 12.4 % – для термических напряжений.

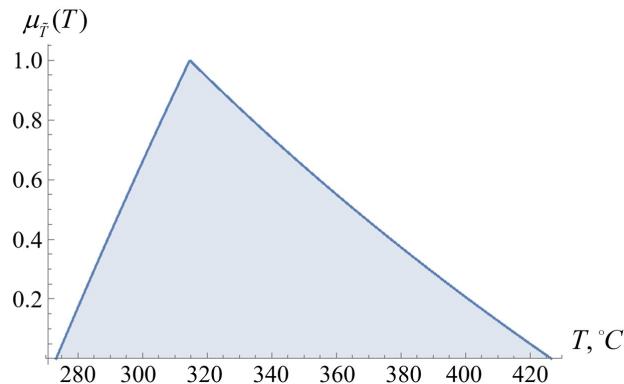


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\bar{T}}(T)$ при $z = 0.5$, $t = 120$ с

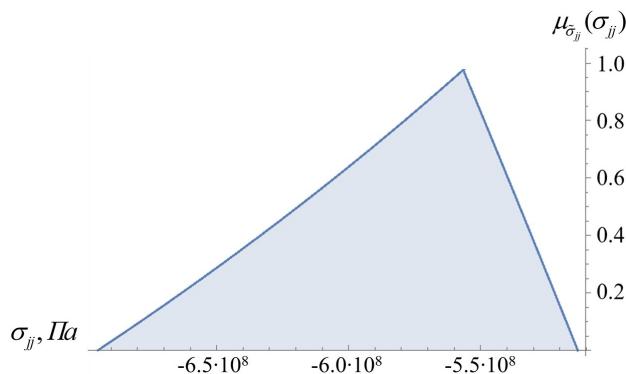


Рис. 2. Профиль функции принадлежности $\mu_{\bar{\sigma}_{jj}}(\sigma_{jj})$ при $z = 0.5$, $t = 120$ с

Выводы. В результате проведенных исследований разработана нечетко-множественная методика учета разбросов значений исходных геометрических и физико-механических параметров в расчетных соотношениях модели определения термомеханических полей при индукционном разогреве тонких пластин из элек-

тропроводящих материалов с жестко закрепленными теплоизолированными плоскими гранями, либо с жестко закрепленными плоскими гранями, на которых выполняются условия свободного теплообмена, при учете разбросов значений всей совокупности исходных физико-механических и геометрических характеристик пластин и технологических параметров процесса разогрева. В рамках разработанной методики предполагается введение нечетко-множественных описаний для неконтрастных экзогенных характеристик рассматриваемых моделей на базе фазификации имеющихся данных о разбросах их значений, и использование получаемых нечетко-множественных величин в качестве аргументов в функциональных расчетных соотношениях детерминистических версий моделей, расширяемых на данный тип аргументов путем применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения. Приведены отдельные результаты численной реализации разработанной методики.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Зимин Л.С. Оптимальные технологии «индукционный нагрев – деформация» / Л.С. Зимин, А.Л. Головачев, А.С. Егиазарян // Вопросы электротехнологии. Научно-технический журнал Саратовского государственного технического университета. – 2014. – № 2 (3). – С. 5–10.
2. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева / Э.Я. Рапопорт, Ю.Э. Плещивцева. – М.: Наука, 2012. – 309 с.
3. Немков В.С. Индукционный нагрев алюминиевых заготовок: состояние и перспективы // В.С. Немков, В.Б. Демидович, И.И. Растворова, П.А. Ситько // Электрометаллургия. – 2013. – № 2. – С. 12–21.
4. Подстригач Я.С. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. – К.: Наукова думка, 1977. – 277 с.
5. Нгуен Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
6. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 р.
7. Сторожев С.В. Нечетко-множественный алгоритм учета параметрической неопределенности в модели термоапряженного состояния тонких пластин при индукционном нагреве / С.В. Сторожев, Н.Б. Номбре, Д.Д. Полянский // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XVIII Всероссийской школы (пос. Дивноморское, 27–30 мая 2024 г.) / ред.: А.О. Ватульян, М.И. Калякин, А.В. Попов, Р.Д. Недин, Р.М. Мнухин; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2024. – С. 106. – EDN: IPQFII
8. Малютина Т.П. Учет параметрической неопределенности в модели термоупругого деформирования слоя со свободным теплообменом на гранях при индукционном нагреве / Т.П. Малютина, В.Н. Павлыш, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Актуальные математические проблемы механики деформируемого твердого тела :Материалы VIII Всероссийской с международным участием научной конференции, посвященной 60-летию создания Донецкого научного центра, Донецкого государственного университета и научной школы академика Александра Сергеевича Космодамианского (Донецк–Севастополь, 18–21 сентября 2025 г.). – Донецк: ДонГУ, 2025. – С. 99–102. – URL: <http://repo.donnu.ru:8080/jspui/handle/123456789/5126> – [Электронный ресурс]. ISBN 978-5-00262-014-2.

E.V. Avdyushina, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev

Fuzzy-set computational analysis of parametrically uncertain models of thermoelastic deformation of electrically conductive plates fixed along the edges under inductive heating.

A fuzzy-set version of a calculation method for determining the strength characteristics of structural elements in the form of thin plates made of electrically conductive materials fixed along their flat edges during induction heating is presented. This method takes into account the uncertainty factors of the model under consideration, such as the spread of values of the initial physical, mechanical, and geometric characteristics of the plates and the process parameters of the heating process. Alternative options for specifying thermal boundary conditions on the flat edges of the plates are considered. The developed method involves introducing fuzzy-set descriptions for non-contrasting exogenous characteristics of the models under consideration based on fuzzification of available data on the spread of their values, and using the resulting fuzzy-set quantities as arguments in calculation expressions of deterministic versions of models, extended to this type of variable by applying a modified alpha-level version of the heuristic generalization principle. Selected results of the numerical implementation of the developed method are presented.

Keywords: *thin elastic plates, electrically conductive materials, rigidly fixed edges, induction heating, temperature deformation models, spread of physical and mechanical parameters, uncertainty assessment of resulting characteristics, fuzzy-set method, modified heuristic generalization principle.*

*Статья поступила в редакцию 21.11.2025;
доработана 15.12.2025;
рекомендована к печати 19.12.2025.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831, 622.23.02

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-140-147

EDN:KDLMJH



©2025. Н.Н. Грищенков¹, Е.А. Бардакова², В.Б. Скаженик³

МЕТОДИКА ПРОГНОЗА ПАРАМЕТРОВ АКТИВИЗАЦИИ ЗАТОПЛЕНИЯ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК С УЧЕТОМ ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ И ГОРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

В статье описан новый подход к прогнозу параметров активизации процесса сдвижения, заключающийся в погоризонтном формировании контуров затопления на основании морфологических особенностей пласта. Данный подход позволяет повысить достоверность прогноза активизации геомеханических процессов при затоплении горных выработок и физически обосновать нелинейный характер проявления процессов сдвижения во времени.

Ключевые слова: активизация процесса сдвижения, земная поверхность, оконтуривания выработок, объем выработанного пространства, скорость затопления, горизонт, геомеханические процессы.

Введение. В связи с массовым закрытием и затоплением угольных шахт гидрогеомеханическая обстановка в угледобывающих регионах претерпевает постоянные изменения. Затопление горных выработок при ликвидации угольных

¹Грищенков Николай Николаевич – докт. техн. наук, зав. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: gringm104@gmail.com.

Grishchenkov Nikolai Nikolaevich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

²Бардакова Елена Александровна – мл. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: bardakova-kgr@mail.ru.

Bardakova Elena Aleksandrovna – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

³Скаженик Владимир Борисович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНИМИ, Донецк, e-mail: geosoft.svb@gmail.com.

Skazhenik Vladimir Borisovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

шахт, согласно [1–2], должны сопровождаться техническими мероприятиями, обеспечивающими безопасность горных работ, охрану природных и инженерных объектов. Указанные мероприятия подразумевают управление геомеханическими и гидрогеологическими процессами. Примеры таких мероприятий описаны в работе [3]. При частичном или полном затоплении происходит активное развитие гидрогеомеханических процессов, прогноз которых необходим для обоснования инженерных решений.

Для обеспечения безопасности объектов поверхности при затоплении горных выработок одним из основных требований ряда нормативных документов [4–7] является адекватный прогноз параметров сдвижений земной поверхности, вызванных активацией геомеханических процессов при затоплении горных выработок.

Практика расчетов прогнозируемых сдвижений земной поверхности при затоплении горных выработок различных шахт, согласно методике [5], показывает, что существующая методика далеко не всегда позволяет определять с необходимой достоверностью как величины деформаций земной поверхности, так и время их проявления. Анализ приведенных литературных источников позволяет сделать вывод, что основной причиной погрешностей при расчетах деформаций земной поверхности, вызванных затоплением горных выработок, является подход к прогнозу деформаций от затопления горных выработок, основанный на методах, разработанных для прогноза сдвижений в процессе подземной добычи угля. Целью данной работы является формирование нового подхода к прогнозу сдвижений земной поверхности, вызванных затоплением горных выработок, основанного на геотехнических особенностях процесса затопления угольных шахт.

1. Метод определения параметров активизации затопления. При совершенствовании методики расчета следует учитывать, что при проведении любой подземной выработки вокруг нее формируется зона нарушенного массива (зона повышенных напряжений, зона обрушения).

На глубине H горная порода испытывает давление (вертикальное напряжение в массиве), приблизительно равное:

$$\sigma = \gamma \cdot H, \quad (1)$$

где γ — средний удельный вес горных пород, $\text{т}/\text{м}^3$.

Когда ведется очистная выемка, давление, которое ранее держал вынутый уголь, перераспределяется на окружающий массив и, в частности, на оставленные целики. Часть нагрузки воспринимается выработанным пространством и породами кровли. Взаимное наложение зон влияния, когда две выработки расположены близко друг к другу, приводит к тому, что эти зоны начинают объединяться.

Если целик между выработками очень узкий ($l_{\text{мц}} < 0,1H$, $l_{\text{мц}}$ — длина межлавного целика, м; H — глубина, м.), то напряжения в целике многократно возрастают (происходит их концентрация), целик теряет свою несущую способность

и разрушается. Кровля над обеими выработками целиком деформируется как единый объект.

Данные процессы нашли своё отражение в критериях совместного оконтуривания выработок при добыче угля подземным способом, приведенных в нормативных документах [6–7]. Однако учет данных критериев требует отдельного разъяснения в условиях затопления очистных горных работ. В существующих методах прогноза сдвигений земной поверхности при затоплении выработок [5, 8], вопрос правильного обобщения зон оконтуривания не освещен. Данное упущение в определенных геотехнических условиях (например при диагональном расположении лав) часто приводит к неправильному формированию контуров сдвига и игнорированию морфологического фактора, который при затоплении может оказывать существенное влияние на параметры локализации деформаций горного массива.

Для определения характера влияния морфологических особенностей пласта на параметры сдвига было проведено сравнение ориентирования мульд сдвига при оконтуривании очистных выработок по штрекам и при создании контуров выработок по изолиниям. Оконтуривание выработок по изолиниям пласта можно считать правомерным, основываясь на приведенном выше условии разрушения угольных целиков и считая, что в подобных условиях все очистные выработки объединяются в единое выработанное пространство.

Как видно из представленных на рисунке 1 результатов расчетов, при оконтурировании выработанного пространства общепринятой методикой «по штрекам» наблюдается картина распределения сдвигений, не учитывающая порядок затопления, который, согласно базовым физическим законам, должен происходить по изолиниям пласта. В ряде горнотехнических условий применение традиционных подходов будет приводить к неправильному определению участков локализации максимальных деформаций.

Стоит отметить, что при определении продолжительности процесса сдвига характер оконтуривания выработанного пространства также имеет ключевое значение.

Анализ результатов пространственного моделирования затопления горных выработок по горизонтам с шагом подъема шахтных вод 10 метров позволяет констатировать наличие прямой зависимости скорости затопления угледобывающего предприятия от объема выработанного пространства [9]. Приведенные закономерности подтверждаются исследованиями взаимосвязи среднесуточного подъема воды с техногенной пустотностью на примере шахты Моспинская.

Анализ приведенной работы позволяет сделать вывод, что на большинстве временных периодов визуально наблюдается корреляция между объемом затапливаемых горных выработок на горизонте и скоростью затопления этого горизонта – при возрастании объемов горных выработок скорость затопления горизонтов уменьшается, и наоборот. В то же время, на определенных участках затопления такая зависимость наблюдается менее выражено, что может свидетельствовать о значимом влиянии на скорость затопления в эти временные

Методика прогноза параметров активизации затопления горных выработок

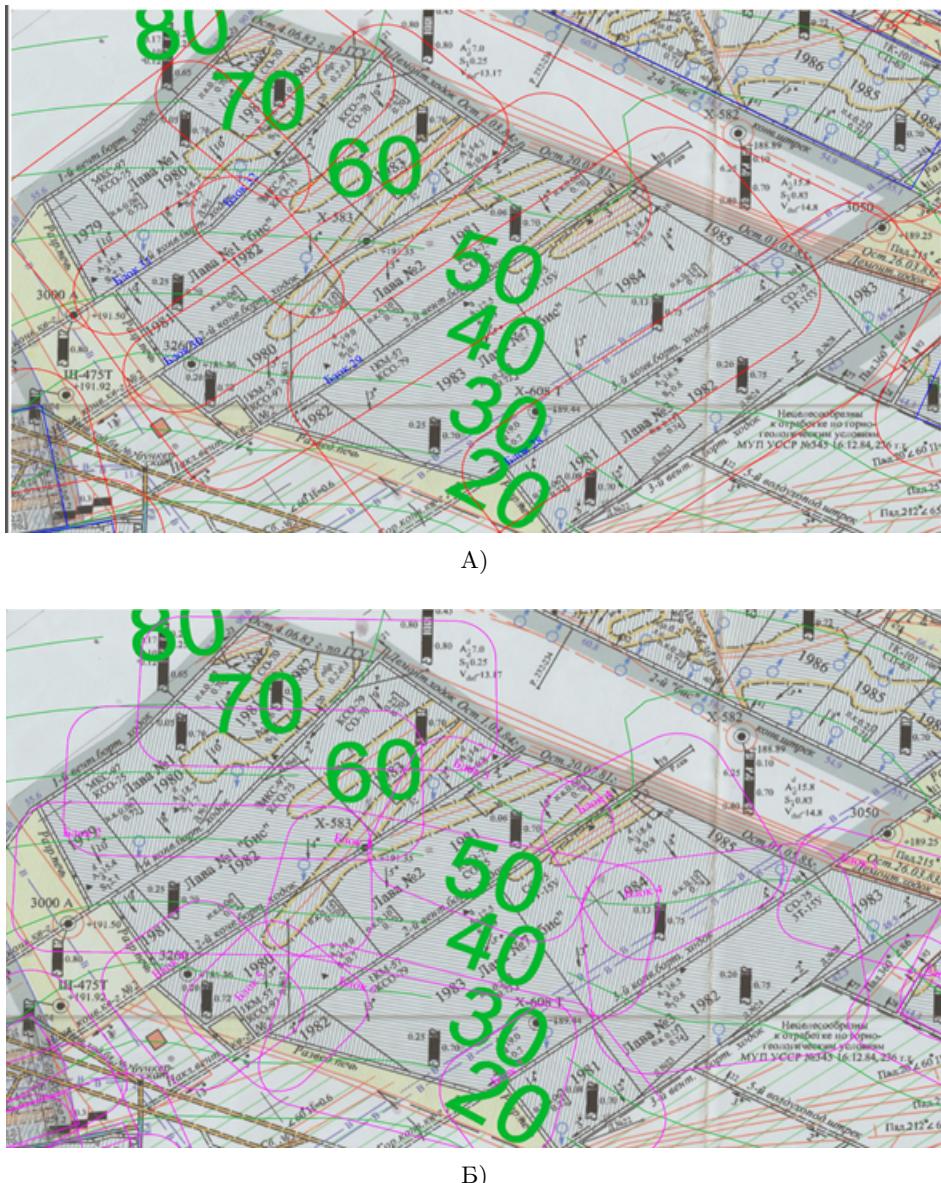


Рис. 1. Мульды сдвижений при задании контуров различными методами (А – по штрекам, Б – по изолиниям)

периоды других факторов. В этой связи, с целью совершенствования методики прогноза изменения уровня затопления необходима разработка методов установления зависимости скорости затопления от влияющих факторов на основании статистических данных для конкретной шахты.

Стоит отметить, что активизация процесса сдвижения от затопления, как и при подработке земной поверхности, происходит не мгновенно. Учитывая ги-

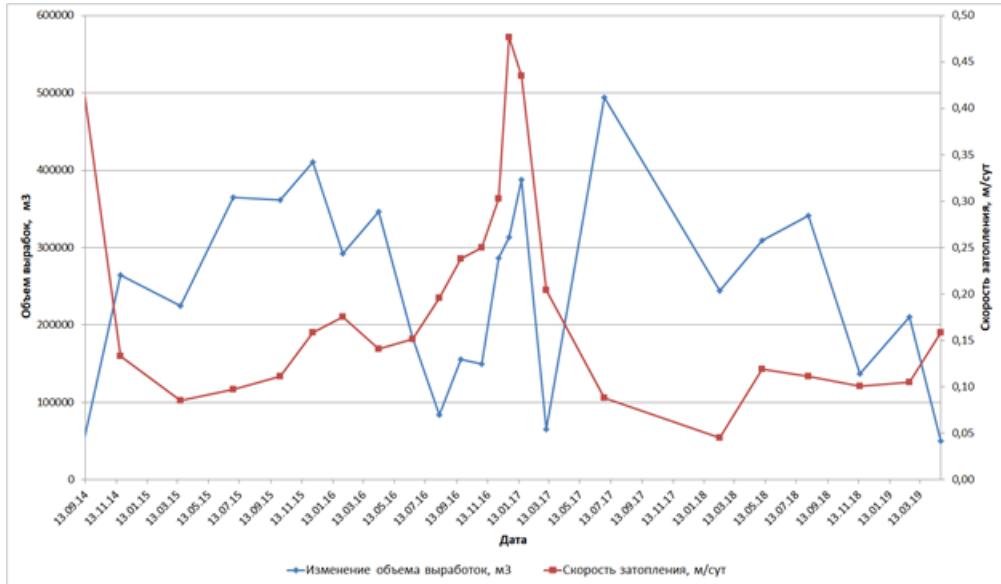


Рис. 2. Изменение объема выработанного пространства и скорости затопления горизонтов

потезу об идентичности базовых параметров процессов сдвижения при добыче угля и при затоплении горных работ, следует считать, что начало активизации геомеханических процессов от затопления горных выработок, имеет определенные условия формирования объема затопления, который может определяться согласно приведенной формуле

$$C = A_0 \cdot H_{cp}, \quad (2)$$

где A_0 – коэффициент, определяемый по таблице 5.4 работы [6] в зависимости от угла δ .

Стоит отметить, что применение описанной в [5] методики определения продолжительности процесса сдвижения позволяет получать значения, не превышающие 12 месяцев. Однако, согласно результатам анализа ряда натурных исследований, проведенных на горных отводах шахт «Заперевальная», «Замковская», им. В.И. Ильича, «Брянковская», им. Чеснокова и др., срок проявления деформаций может превышать несколько лет. Решение описанной проблемы возможно при прогнозе продолжительности процесса сдвижения вызванного затоплением горных выработок с применением формулы:

$$T = 1,1 \cdot \frac{H}{C} \cdot \left(\frac{\cos \gamma_0}{\sin (\gamma_0 - \alpha)} + \frac{\cos (\psi_2 - \alpha)}{\sin \psi_2} \right), \quad (3)$$

где H – глубина залегания пласта под рассматриваемой точкой, м; C – скорость поднятия воды, м/с; α – угол падения пласта; γ_0 – граничный угол, определяемый по рекомендациям разд. 7 работы [7]; ψ_2 – угол полных сдвигений, также определяемый по рекомендациям разд. 7 работы [7].

Данный подход основан на формуле (3), приведенной в [7] для выработок, отрабатываемых по восстанию, и может применяться в рамках предположения о том, что подъем воды провоцирует геомеханические процессы, сходные по своей природе с движением забоя по восстанию.

Как показывает практика, при реализации такого подхода продолжительность процесса сдвижения при глубине 500 метров может превышать в некоторых условиях 40 месяцев (рис. 3).



Рис. 3. Влияние скорости подъема воды на продолжительность процесса сдвижения

Комплексирование формулы (3) и зависимостей, приведенных на рисунке 3, позволяет установить взаимосвязь продолжительности процесса сдвижения с объемами выработанного пространства, графическое представление которой приведено на рисунке 4.



Рис. 4. Связь продолжительности процесса сдвижения с объемами выработанного пространства

2. Анализ результатов. Учет морфологии пласта при оконтуривании затапливаемых горизонтов позволяет установить взаимосвязь величины оседаний, максимальной продолжительности процесса сдвижения и уточнить скорость затопления горных работ.

По результатам расчетов для выработок шахты Моспинская наибольшая продолжительность процесса сдвижения реализовывалась на участке глубиной 320–310 метров и достигала более 49 месяцев. Минимальная продолжительность процесса сдвижения составляла 5,6 месяцев и прогнозировалась при затоплении выработок на глубинах 200–210 метров. Результаты расчетов показывают, что продолжительность процесса сдвижения может превышать 4 года с момента затопления горных выработок, однако проявляется в пределах горного отвода нелинейно, с формированием участков ускоренного протекания геомеханических процессов.

Решение задачи по совершенствованию методики прогноза деформаций земной поверхности в результате затопления горных выработок подразумевает установление зависимости скорости затопления от объема выработанного пространства, а последовательность её решения можно описать следующим образом: определяется объем выработанного пространства каждой лавы в пределах j -го уровня V_{ij} ; по формуле 2 определяется минимальная «высота» оконтуриваемого горизонта; для каждого горизонта определяется суммарный объем выработанного пространства; с использованием подхода, описанного в [9–11], определяются начальная ($T_{j\text{нач}}$) и конечная ($T_{j\text{кон}}$) дата затопления j -го горизонта, что позволяет определить среднесуточный подъем воды для формулы (3).

Выводы. В результате проведенного исследования разработана новая методика прогноза активизации деформаций земной поверхности, учитывающая базовые геотехнические параметры отработки и позволяющая прогнозировать продолжительность процесса сдвижения с учетом фактических наблюдений за среднесуточным подъемом воды. Явная взаимосвязь продолжительности процесса сдвижения с фактическими параметрами техногенной пустотности позволяет утверждать об обоснованности представленных выводов. Дополнительная калибровка данного подхода возможна при наличии длительного площадного мониторинга за сдвижением земной поверхности при затоплении горных выработок ликвидируемых шахт от момента прекращения работы водоотливного комплекса до достижения водой проектной отметки.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ FRSR-2023-0002).

1. Инструкция о порядке ведения работ по ликвидации и консервации опасных производственных объектов, связанных с использованием недрами. – Утв. постановлением Госгортехнадзора России от 02.06.99 № 33. – 17 с.
2. Технология закрытия (ликвидации) угольных шахт /под ред. докт. техн. наук проф. Ярембаша И.Ф. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – 238 с.
3. Шубин А.А. Исследование процесса активизации сдвижения горных пород и земной поверхности вследствие затопления горных выработок / А.А. Шубин, П.А. Деменков //

- Проблемы современной науки и образования. – 2016. – № 8. – С. 177–179.
4. СП 21.13330.2012. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах. – М.: Стандартинформ, 2012. – 66 с.
 5. КД 12-12.004-98. Ликвидация угольных шахт, защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации. – Донецк: УкрНИМИ, 1998. – 46 с.
 6. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Киев, 2004. – 127 с.
 7. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях: ПБ 07-269-98: утв. Госгортехнадзором России 16.03.1998: ввод в действие с 01.10.1998. – М., 1998. – 203 с.
 8. Техногенные последствия закрытия угольных шахт: Монография / Под ред. Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермакова. – Донецк, 2004. – 631 с.
 9. Скаженик В.Б. Пространственное и нейросетевое моделирование влияния затопления угольных шахт на активизацию процесса сдвижения земной поверхности / В.Б. Скаженик, Н.Н. Грищенков, Е.А. Бардакова // Труды РАНИМИ. – 2025. – № 7 (45). – С. 121–135. – DOI: 10.24412/2519-2418-2025-745-121-135.
 10. Скаженик В.Б. Совершенствование методики прогноза последствий подработки территории угольными шахтами на основе цифровых моделей / В.Б. Скаженик, Н.Н. Грищенков, Ф.М. Голубев, Л.А. Иванова // Труды РАНИМИ. – 2024. – № 3 (41). – С. 35–48. – DOI: 10.24412/2519-2418-2024-341-35-48. – EDN: IQIИНJ.
 11. Грищенков Н.Н. Геомеханический прогноз сдвижения земной поверхности при затоплении горных выработок ликвидируемых угольных шахт с помощью гидрогеомеханического моделирования / Н.Н. Грищенков, Л.А. Камбурова, Е.А. Бардакова // Экологическая геология: теория, практика и региональные проблемы: Материалы девятой международной научно-практической конференции, посвященной 80-летию Победы в Великой Отечественной войне (Севастополь – Воронеж, 10–13 сентября 2025 года.). – Воронеж: Квarta, 2025. – С. 131–135.

N.N. Grishchenkov, E.A. Bardakova, V.B. Skazhenik

Methodology for predicting the parameters of activation of flooding of mine workings taking into account geotechnical and mining-geological factors.

This article describes a new approach to predicting the activation parameters of shear processes. This approach involves the horizontal formation of flooding contours based on the morphological features of the formation. This approach improves the reliability of predicting the activation of geomechanical processes during mine flooding and provides a physical justification for the nonlinear nature of shear processes over time.

Keywords: activation of the displacement process, earth's surface, contours of workings, volume of mined-out space, rate of flooding, horizon, geomechanical processes.

Статья поступила в редакцию 07.11.2025;
доработана 12.12.2025;
рекомендована к печати 24.12.2025.

УДК 622.861

doi:10.24412/0136-4545-2025-4-148-157

EDN:KLEHDX



©2025. В.М. Аленичев¹, Р.В. Криницын²

МЕТОДОЛОГИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОСТОВЕРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТУРЕ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ МЕТОДОМ ЩЕЛЕВОЙ РАЗГРУЗКИ

Изложена методология определения достоверного напряжения на контуре подземной горной выработки методом щелевой разгрузки. Величина напряжений, вычисленная по многофакторной функциональной зависимости, корректируется с учетом вероятностных характеристик учитываемых аргументов и доверительной вероятности, задаваемой пользователем. Существенными факторами, влияющими на результат измерений, являются ошибки определения смещений между реперами после образования щели, протяженности разгрузочной щели и модуля упругости горных пород. Ошибки определения расстояния между реперами до образования щели и коэффициента Пуассона практически не оказывает влияние на величину среднеквадратических отклонений.

Ключевые слова: напряжения, горная выработка, физико-механические свойства, щелевая разгрузка, числовые характеристики, достоверность.

Введение. Для изучения деформационных процессов в массиве горных пород в настоящее время используются различные методы: деформационные, структурные и геофизические. Деформационные методы измерений основаны на частичной или полной разгрузке массива горных пород в зоне техногенных пространств различного типа: щели, скважины, шпуры, подготовительные выработки. Структурные и геофизические методы позволяют выявить только качественную картину напряженного состояния горного массива [1, 2].

Достаточно широко используемым является метод щелевой разгрузки горного массива, основанный на измерении деформаций, обусловленных наличием выбуренной в стенке выработки щели в виде полудиска; при этом полностью исключаются действия остаточных напряжений, разноупругость пород на отдельных участках и, частично, влияние структуры трещиноватости. Применение описанного метода позволяет получить информацию о напряжениях в мас-

¹Аленичев Виктор Михайлович – докт. техн. наук, проф., гл. науч. сотр. института горного дела Уральского отделения РАН, Екатеринбург, e-mail: alenichev@igduran.ru.

Alenichev Viktor Mikhaylovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Institute of Mining of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg.

²Криницын Роман Владимирович – канд. техн. наук, зав. лаб. геодинамики и горного давления института горного дела Уральского отделения РАН, Екатеринбург, e-mail: krin@igduran.ru.

Krinitsyn Roman Vladimirovich – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Institute of Mining of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Laboratory of Geodynamics and Rock Pressure.

сиве при относительно низкой трудоёмкости и достаточно высокой точности в различных горно-геологических условиях. Метод эффективен при исследовании поля напряжений в структурных блоках, зонах контактов пород и тектонических трещин, определении гравитационно-тектонических напряжений в зоне горных выработок и оценки напряженного состояния в окружающем пространстве [2].

1. Методика анализа многофакторной зависимости для напряжения на контуре выработки. Метод щелевой разгрузки горного массива реализуется в следующей последовательности: на контуре выработки устанавливаются репера, создается на поверхности обнажения разгрузочная щель в форме полудиска определенного радиуса и длины. По показаниям деформометра и параметрам разгрузочной щели определяются напряжения на контуре горной выработки в направлениях, соответственно перпендикулярных и параллельных оси щели [3, 4].

Напряжение на контуре выработки (МПа), действующее перпендикулярно к плоскости щели, определяют по формуле [5–7]:

$$\sigma_{\perp} = \frac{U \cdot E}{2,12 \cdot L - l \cdot (1 - K_{\perp(\perp)} + \mu_0 K_{\parallel(\parallel)})}, \quad (1)$$

где U – деформация пород после образования разгрузочной щели, м; E – модуль упругости горных пород, МПа; μ – коэффициент Пуассона; L – длина щели, м; l – расстояние между реперами, м; $K_{\perp(\perp)cp}$, $K_{\parallel(\parallel)cp}$ – коэффициенты концентрации напряжений $\sigma_{\perp(\perp)}$ и $\sigma_{\parallel(\parallel)}$ в направлениях соответственно перпендикулярно и параллельно щели [2, рис. 1.10].

Формула (1) является многофакторной статистической зависимостью. Поэтому при определении физико-механических свойств горных пород и углубленном изучении процессов (явлений), происходящих в горном массиве, требуется не только выявление основных закономерностей, но и анализ возможных отклонений. Характерной особенностью современного этапа развития естественных и технических наук является достаточно широкое и плодотворное применение вероятностных или статистических методов. Эти методы не противоречат классическим методам точных наук. Они обеспечивают более глубокий анализ результатов с учетом присущих ему элементов случайности. Методы теории вероятностей правомерны только для исследования массовых случайных явлений. Однако они позволяют предсказать средний суммарный результат исходя из совокупности аналогичных измерений (опытов), конкретные данные каждого из которых являются случайными. На основе косвенных способов исследований правомерно использование экспериментальных данных, от качества и количества которых зависит надежность и объективная ценность практических расчетов, выполненных на основе многофакторных зависимостей, широко применяемых при недропользовании. При определении конкретных значений показателей и горнотехнических параметров необходимо учитывать вероятностный характер изменения аргументов, используемых в многофакторной статистической

зависимости. Установить закон распределения этих аргументов, как правило, не представляется возможным из-за ограниченного числа экспериментальных данных. В этом случае, исходя из теории вероятностей, вместо законов распределения применяют неполное, приближенное описание системы случайных величин с использованием минимального количества числовых характеристик. В качестве числовых характеристик случайных величин привлекаются математическое ожидание, мода, медиана, начальные и центральные моменты в виде дисперсии и среднеквадратического отклонения. Объективность полученных результатов при решении подобных задач базируется на использовании аппарата теории вероятностей в виде числовых характеристик, основными из которых являются математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение [12–14].

Задача определения погрешности рассчитываемых параметров (показателей) по многофакторным зависимостям достаточно успешно решается методом линеаризации функций путем разложения функции в ряд Тейлора около точки, сохранением членов первого порядка и отбрасыванием всех членов высших порядков [12, 13].

Использование вероятностно-статистических характеристик аргументов, входящих в многофакторную нелинейную зависимость, позволяет по величине слагаемых дисперсии, сделать заключение о влиянии ошибок определения конкретного учитываемого аргумента на результат расчета. С учетом влияния величины ошибок каждого аргумента представляется возможность совершенствовать приемы увеличения точности экспериментальных данных [15, 16].

Интегральной оценкой вероятностно-статистического напряжения на контуре горной выработки служит доверительный интервал:

$$\sigma_{\text{cp}} - t \cdot \sigma_m < \sigma_{\perp p_t}^k < \sigma_{\text{cp}} + t \cdot \sigma_m, \quad (2)$$

где t – число стандартных отклонений (число сигм); $t = 1, 2, 3$; σ_{cp} – напряжение, вычисленное при средних значениях аргументов; σ_m – стандартное отклонение напряжения; p_t – вероятность оценки параметра, $p_t = 0, 68$ при $t = 1$; $p_t = 0, 95$ при $t = 2$; $p_t = 0, 99$ при $t = 3$.

Для вычисления дисперсии (среднеквадратического отклонения) величины напряжений, рассчитываемой по многофакторной статистической нелинейной зависимости, включающей независимые случайные величины учитываемых аргументов, меняющихся в небольшом интервале, и отсутствии между ними корреляционной связи ($r_{ij} = 0$ при $i \neq j$) целесообразно использование вышеизложенного подхода, изложенного в работах [12, 13, 14].

Математическое выражение вероятностно-статистической зависимости для использования в расчетах технологических параметров конструктивных элементов системы разработки, отражающее одновременное изменение учитываемых аргументов вычисляется как сумма частных производных по каждой переменной, умноженной на соответствующие ошибки определения этих аргументов:

$$\begin{aligned}
 D_{m\perp} &= \sigma_{m\perp}^2 = \\
 &= \left(\frac{E}{2,12 \cdot L - l \cdot (1 - K_{\perp(\perp)} + \mu_0 K_{\parallel(\perp)})} \right)^2 \times (\sigma_U)^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{U}{2,12 \cdot L - l \cdot (1 - K_{\perp(\perp)} + \mu_0 K_{\parallel(\perp)})} \right)^2 \times (\sigma_E)^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{2,12 \cdot U \cdot E}{[2,12 \cdot L - l \cdot (1 - K_{\perp(\perp)} + \mu_0 K_{\parallel(\perp)})]^2} \right)^2 \times (\sigma_L)^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{2,12 \cdot U \cdot E \cdot (1 - K_{\perp(\perp)cp} + \mu_0 K_{\parallel(\parallel)cp} - 1)}{[2,12 \cdot L - l \cdot (1 - K_{\perp(\perp)} + \mu_0 K_{\parallel(\perp)})]^2} \right)^2 \times (\sigma_l)^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{U \cdot E \cdot l \cdot K_{\parallel(\parallel)cp}}{[2,12 \cdot L - l \cdot (1 - K_{\perp(\perp)} + \mu_0 K_{\parallel(\perp)})]^2} \right)^2 \times (\sigma_{\mu_0})^2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где σ_{UAB} , σ_E , σ_L , σ_l , σ_μ – среднеквадратическое отклонение соответственно деформации массива между реперами, модуля упругости, протяженности (длины) щели, деформации массива горных пород после образования щели и коэффициента Пуассона.

2. Численная реализация методики. Оценки вероятностно-статистических величин напряжений на контурах горных выработок проведены для условий характерного месторождения Урала. Месторождение представлено породами, физико-механические и прочностные свойства которых приведены в таблице 1.

Таблица 1.
Физико-механические и прочностные свойства основных пород и руд

Породы и руды	Коэф- фициент крепости	Удельный вес пород, МН/м ³	Коэффи- циент Пуассона μ	Прочностные и упругие свойства пород в куске	
				Предел прочности на одноосное сжатие, МПа	Модуль упругости, МПа × 10 ⁻⁵
порфириты	10–12	0,027	0,27	98	1,12
диориты	10–11	0,026	0,23	87	1,05
скарны	5–6	0,027	0,26	50	0,92
известняки	7–8	0,026	0,25	65	0,95
магнетиты	9–10	0,038	0,32	86	1,1

В качестве исходных данных использованы результаты опытно-промышленных измерений напряжений методом щелевой разгрузки на базе 70 мм (табл. 2) [3–5].

Значения дисперсий напряжения на контуре горной выработки в зависимости от ошибок определения аргументов, учитываемых в формуле (1), рассчитаны при среднеквадратических ошибках определения: модуля упругости горных пород $\sigma_E = 0,2^*E$, $\sigma_E = 0,3^*E$, $\sigma_E = 0,4^*E$ и коэффициента Пуассона равного $\sigma_\mu = 0,05\mu$ (табл. 3). Из таблицы видно, что при уменьшении модуля упругости с 130 МПа до 35 МПа дисперсия напряжений на контуре выработки сокращается. При ошибках определения модуля упругости $\sigma_E = 0,2^*E$ дисперсия уменьшается с $9,7E + 14$ до $7E + 13$, при $\sigma_E = 0,3^*E$ с $1,1E + 15$ до $8,3E + 13$ и при $\sigma_E = 0,4^*E$ с $1,4E + 15$ до $1E + 14$. В общем случае дисперсия напряжений снижается.

Таблица 2.

Результаты замера параметров при методе щелевой разгрузки

Наименование	U , м	L , м	l , м	$K_{\perp(\perp)}$	$K_{\parallel(\parallel)}$
горизонт 1					
1 гор	0,00022	0,32	0,104	-0,03	-0,33
3 верт	0,00029	0,32	0,098	-0,03	-0,33
4 верт	0,00024	0,32	0,107	-0,03	-0,33
5 верт	0,00037	0,32	0,108	-0,03	-0,33
6 верт	0,00019	0,33	0,107	-0,03	-0,33
7 верт	0,00029	0,32	0,112	-0,03	-0,33
горизонт 2					
1 верт	0,00022	0,34	0,18	-0,03	-0,33
2 гор	0,00011	0,345	0,116	-0,03	-0,33
3 верт	0,00015	0,33	0,15	-0,03	-0,33
горизонт 3					
1 верт	0,00027	0,32	0,108	-0,03	-0,33
2 гор	0,00016	0,32	0,103	-0,03	-0,33
3 верт	0,00017	0,34	0,121	-0,03	-0,33
среднее	0,0002315	0,301792	0,116923		
D	5,3515E-09	0,007503	0,000485		
σ	7,3154E-05	0,08662	0,02203		

Среднеквадратические отклонения напряжений на контуре горной выработки при вышеуказанных ошибках определения модуля упругости и при ошибке коэффициента Пуассона, равной $\sigma_\mu = 0,05\mu$, представлены в таблице 4 и на рисунке 1.

Установлено, что при снижении точности определения модуля упругости с $\sigma_E = 0,2 \cdot E$ до $\sigma_E = 0,4 \cdot E$ наблюдается увеличение среднеквадратической ошибки.

Анализ результатов расчета компонентов, составляющих дисперсию (3), позволяет определить влияние ошибок определения учитываемых аргументов (1) на общую дисперсию (табл. 5).

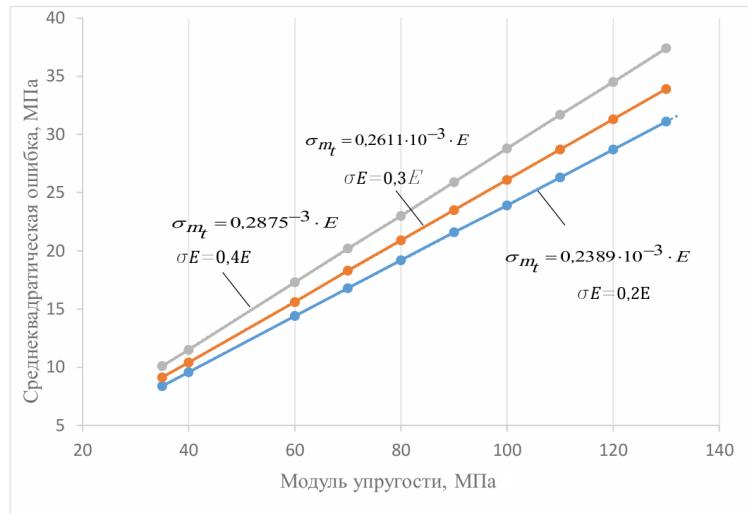


Рис. 1. Зависимость среднеквадратических отклонений напряжений на контуре горной выработки от модуля упругости

Сравнение слагаемых, образующих общую дисперсию, указывает, что наибольшие из них $3,59E+14$, $3,24E+14$ и $4,58E+14$ при $E = 130$ МПа и $2,60E+13$, $2,35E+13$ и $39,9$ при $E = 35$ МПа обусловлены результатами экспериментальных работ. Доля ошибок определения аргументов в общей дисперсии не превышает 0,006%. Для более детального анализа влияния ошибок определения модуля упругости горных пород на среднеквадратические отклонения напряжения на контуре выработки проведены расчеты при различных их значениях (табл. 6).

Проведенные расчеты показывают, что при применении метода щелевой разгрузки для обеспечения безопасных условий при подземной разработке месторождений необходимо учитывать вероятностные характеристики аргументов, входящие в многофакторные статистические зависимости, используемые для определения напряженного состояния горного массива.

Исходя из требований техники безопасности и устойчивого состояния горнотехнических конструкций и сооружений, отрицательные напряжения сжатия необходимо принимать по верхней границе доверительного интервала, рассчитанного по многофакторной статистической функции (1) с учетом вероятностных характеристик учитываемых аргументов и доверительной вероятности p_t , задаваемой числом стандартных отклонений t :

$$-\sigma_{\perp p_t}^k = -(\sigma_{(\perp)} + t \cdot \sigma_m). \quad (4)$$

Выражение (4) позволяет по экспериментальным данным, полученным при использовании метода щелевой разгрузки, определить с заданной достоверностью напряжения на контуре горных выработок.

Таблица 3. Значения дисперсии напряжения и ее составляющих на контуре горной выработки

Показатели	Модуль упругости, МПа						
	130	120	110	100	90	80	70
$\partial\sigma_{\perp}/\partial U$	2,6E+11	2,4E+11	2,2E+11	2E+11	1,8E+11	1,6E+11	1,4E+11
$\sigma_{\perp}/\partial E$					4,6E-4		
$\sigma_E = 0,2E$	26	24	22	20	18	16	14
$\sigma_E = 0,3E$	39	36	33	30	27	24	21
$\sigma_E = 0,4E$	52	48	44	40	36	32	28
$\partial\sigma_{\perp}/\partial L$	2,5E+08	2,3E+08	2,1E+08	1,9E+08	1,7E+08	1,5E+08	1,3E+08
$\sigma_{\perp}/\partial l$	1,3E+08	1,2E+08	1,1E+08	9,6E+07	8,7E+07	7,7E+07	6,7E+07
$\partial\sigma_{\perp}/\partial \mu$	4,6E+06	4,3E+06	3,9E+06	3,5E+06	3,2E+06	2,8E+06	2,5E+06
						$\sigma_E = 0,2E$	
$D_{m_{\perp}}$	9,7E+14	8,3E+14	6,9E+14	5,7E+14	4,6E+14	3,7E+14	2,8E+14
						$\sigma_E = 0,3E$	
$D_{m_{\perp}}$	1,1E+15	9,8E+14	8,2E+14	6,8E+14	5,5E+14	4,4E+14	3,3E+14
						$\sigma_E = 0,4E$	
$D_{m_{\perp}}$	1,4E+15	1,2E+15	1E+15	8,3E+14	6,7E+14	5,3E+14	4,1E+14
						$3E+14$	$1,3E+14$
							$1E+14$

Таблица 4. Результат расчета среднеквадратических отклонений при различных ошибках определения модуля упругости

E , МПа	35	40	60	70	80	90	100	110	120	130
σ_1 , МПа	8,38	9,58	14,4	16,8	19,2	21,6	23,9	26,3	28,7	31,1
σ_2 , МПа	9,13	10,4	15,6	18,3	20,9	23,5	26,1	28,7	31,3	33,9
σ_3 , МПа	10,1	11,5	17,3	20,2	23	25,9	28,8	31,7	34,5	37,4

Таблица 5. Величина составляющих дисперсию напряжений

Производные по:	∂U	∂E	∂L	∂l	$\partial \mu$	$D\sigma_{\perp}$
$E = 130$ МПа						
	3,59E+14	3,24E+14	4,58E+14	7,59E+12	2,81E+09	1,15E+15
Доля, %	31,3	28,2	39,9	0,01	2,45E-06	99,41
$E = 35$ МПа						
	2,60E+13	2,35E+13	3.32E+13	5,50E+11	2,04E+06	8,33E+13
Доля, %	31,3	28,2	39,9	0,006	2,45E-06	100

Таблица 6. Значения среднеквадратических отклонений напряжений на контуре горной выработки, МПа

Ошибки определения коэффициента Пуассона	Модуль упругости, E , МПа				
	35,0	60,0	80,0	100,0	130,0
$\sigma_{\mu} = 0,05\mu$, $\mu = 0,34$	9,24	15,80	21,10	26,40	34,30
$\sigma_{\mu} = 0,05\mu$, $\mu = 0,28$	9,15	15,70	20,90	26,10	34,00
$\sigma_{\mu} = 0,05\mu$, $\mu = 0,23$	9,13	15,6	20,90	26,10	33,90

Выводы. Возникновение негативных явлений при недропользовании обусловлены несоответствием параметров техногенных образований, определенных с использованием многофакторных статистических зависимостей, реальным условиям. Это обусловлено тем, что аргументы, учитываемые в этих зависимостях, характеризуются вероятностным изменением.

Напряжение на контуре горной выработки необходимо определять по верхней границе доверительного интервала, рассчитанного по многофакторной статистической функции (1) с учетом вероятностных характеристик учитываемых аргументов и доверительной вероятности p_t , задаваемой числом стандартных отклонений t .

Исследование выполнено в соответствии с государственным заданием №075-00410-25-00. № гос. рег. 123012300007-7. Тема 3 (2025-2027).

1. Влох Н.П. Управление горным давлением на подземных рудниках / Н.П. Влох. – М.: Недра, 1994. – 208 с.
2. Зубков А.В. Геомеханика и геотехнология / А.В. Зубков. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – 335 с.

3. Деформационные методы определения напряженного состояния пород на объектах недропользования / А.В. Зубков, Ю.Г. Феклистов, Я.И. Липин [и др.] // Проблемы недропользования. – 2016. – № 4(11). – С. 41–49.
4. Криницын Р.В. Геодеформационный полигон и геомеханические исследования на шахте Магнезитовая / Р.В. Криницын // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2020. – № 3–1. – С. 105–115. – DOI: 10.25018/0236-1493-2020-31-0-105-115.
5. Исследования по снижению риска геодинамических явлений при ведении горных работ на нижних горизонтах шахты «Северопесчанская» в 2017 году: отчет о НИР (заключит.) по Х.Д. 69/16 / науч. рук. Я.И. Липин; отв. исполн. Р.В. Криницын; ИГД УрО РАН. – Екатеринбург, 2017. – 40 с.
6. Геомеханические исследования изменения напряженно-деформированного состояния массива пород при ведении горных работ на ш. Северопесчанская в 2019 году: отчет о НИР (заключит.) по Х.Д. 9/19 / ИГД УрО РАН; рук. работы Я.И. Липин; отв. исполн. Р.В. Криницын. – Екатеринбург, 2019. – 47 с.
7. Геомеханические исследования по прогнозу и профилактике горных ударов при ведении горных работ на шахте «Северопесчанская» в 2022 году: отчет о НИР (заключит.) по Х.Д. 01/22 / ИГД УрО РАН; науч. рук. Р.В. Криницын; исполн. С.В. Сентябов. - Екатеринбург, 2022. – 62 с.
8. Цветкова А.Ю. Обзор основных рисков предприятий горнодобывающей и металлургической отраслей / А.Ю. Цветкова // Записки Санкт-Петербургского горного университета. – 2011. – Т. 194. – С 132–136.
9. Спирин В.И. Оптимизация конструкций бортов карьеров на основе оценки рисков / В.И. Спирин, И.С. Ливинский, Э. Хормазабаль // Известия ТулГУ. Науки о Земле. – 2019.– Вып. 3. – С. 317–332.
10. Руководство по проектированию бортов карьера / Под ред.: Д. Рид, П. Стейси. – Екатеринбург: Правовед, 2015. – 527 с.
11. Талеб Н.Н. Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. – М.: КоЛибри. – 2021. – 736 с.
12. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М: Наука, 1969. – 576 с.
13. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1979. – 400 с.
14. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
15. Аленичев В.М. Методический подход к оценке рисков возникновения негативных техногенных явлений при недропользовании / В.М. Аленичев // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2023. – Вып. 3. – С. 90–100.
16. Аленичев В.М. Вероятностно-статистическая оценка высоты уступа / В.М. Аленичев // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2025. – № 1. – С. 344–353.
17. Чанышев А.И. Применение щелевой разгрузки для определения смещений контура выработки / А.И. Чанышев, И.М. Абдулин, Д.О. Чечин, В.В. Плохих // Интерэкспо ГеоСибирь. – 2024. – Т. 2, № 3. – С. 181–188. – DOI 10.33764/2618-981X-2024-2-3-181-188.
18. Потапчук М.И. Оценка природно-техногенного поля напряжений при разработке глубоких горизонтов месторождения "Айхал"/ М.И. Потапчук, И.Ю. Рассказов, А.В. Сидляр [и др.] // Проблемы недропользования. – 2019. – № 4 (23). – С. 91–97. – DOI 10.25635/2313-1586.2019.04.091.

V.M. Alenichev, R.V. Krinitsyn

Assessment of the accuracy of determining stresses on the contour of a mining working by the slit loading method.

The article presents a methodology for determining reliable stress on the contour of an underground

mine workings using the slot unloading method. The stress value calculated using a multifactor functional dependence is adjusted taking into account the probabilistic characteristics of the considered arguments and the confidence probability set by the user. The significant factors affecting the measurement results include errors in determining the deformation between the collets, the length of the unloading slot, and the elastic modulus of the rock. Errors in determining the distance between the collet reference points and the Poisson coefficient have almost no effect on the magnitude of the standard deviations.

Keywords: *stresses, mine workings, physical and mechanical properties, slot unloading, numerical characteristics, reliability.*

*Статья поступила в редакцию 11.11.2025;
доработана 16.12.2025;
рекомендована к печати 24.12.2025.*