

---

---

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Хома И. Ю., Дашко О. Г., Стрыгина О. А., Коваленко И. Г.</i> О решении третьей краевой задачи деформирования трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью.....	7
<i>Скородинский И. С., Максимук А. В.</i> Действие нормальной распределенной нагрузки на вязкоупругий слой, сцепленный с жестким основанием .....	15
<i>Кит Г. С., Сушко О. П.</i> Термоупругое состояние тела с теплонепроницаемым тонким жестким дисковым включением.....	25
<i>Богданов В. Р., Сулим Г. Т.</i> Продвижение пространственной трещины в компактном образце с учетом процесса разгрузки материала	37
<i>Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Сошина Е. И.</i> Кручение анизотропного цилиндра с отверстиями и трещинами .....	45
<i>Николишин М. М., Опанасович В. К., Слободян М. С., Куротчин Л. Р.</i> Растяжение кусочно-однородной пластины с двумя межфазными трещинами на прямолинейной границе раздела материалов с учетом пластических зон возле их вершин.....	52
<i>Прокопало Е. Ф., Дзюба А. П., Дзюба П. А.</i> Устойчивость цилиндрических оболочек с квадратными отверстиями при неоднородном осевом сжатии.....	59
<i>Фильштинский Л. А., Ковалев Ю. Д., Шрамко Ю. В., Киричек Т. А.</i> Установившиеся колебания слоя, ослабленного двумя отверстиями, при скользящей заделке его торцов (кососимметричный случай) .....	67
<i>Гачкевич А. Р., Терлецкий Р. Ф., Солодяк М. Т.</i> Математическое моделирование электромагнитоупругих и тепловых процессов в магнитных средах.....	76
<i>Мусий Р. С., Мельник Н. Б., Терлецкий Р. Ф., Шимчак И.</i> Термонапряженное состояние и несущая способность биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях .....	89

<i>Кириллюк В. С.</i> Термоэлектродупругое состояние пьезоэлектрического тела с внешней круговой трещиной при силовых, электрических и температурных воздействиях .....	99
<i>Левчук О. И.</i> Контактная задача электродупругости о вдавливании вогнутого конического жесткого штампа в пьезоэлектрическое полупространство .....	107
<i>Альтенбах Х., Еремеев В. А., Наседкин А. В.</i> Нестационарные задачи для пьезоэлектрических тел с поверхностными пленками .....	115
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В., Петренко Н. В.</i> О применении одной аналогии между задачами термомеханики и термоэлектродупругости неупругих тонкостенных элементов ..	125
<i>Середницкая Х. И., Мартыняк Р. М., Слободян Б. С.</i> Плоская задача термодупругости для тела с теплопроницаемой щелью переменной высоты .....	135

---

---

З М І С Т

<i>Хома І. Ю., Дашко О. Г., Стригіна О. А., Коваленко І. Г.</i> Про розв'язок третьої крайової задачі деформування трансверсально-ізотропної пластини з круговою циліндричною порожниною.....	7
<i>Сгородинський І. С., Максимук О. В.</i> Дія нормального розподіленого навантаження на в'язкопружний шар, зчеплений з жорсткою основою .....	15
<i>Кіт Г. С., Сушко О. П.</i> Термопружний стан тіла з теплонепроникним жорстким дисковим включенням .....	25
<i>Богданов В. Р., Сулим Г. Т.</i> Просування просторової тріщини у компактному зразку із урахуванням процесу розвантаження матеріалу.....	37
<i>Калоєров С. О., Авдюшина О. В., Сошина Є. І.</i> Крутіння анізотропного циліндру з отворами і тріщинами.....	45
<i>Николишин М. М., Опанасович В. К., Слободян М. С., Куротчин Л. Р.</i> Розтяг кусково-однорідної пластини з двома міжфазними тріщинами на прямолінійній межі розділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин.....	52
<i>Прокопало Є. Ф., Дзюба А. П., Дзюба П. А.</i> Стійкість циліндричних оболонок з квадратними отворами при неоднорідному осьовому стисненні.....	59
<i>Фильштинський Л. А., Ковальов Ю. Д., Шрамко Ю. В., Кірічок Т. А.</i> Сталі коливання шару, послабленого двома отворами, при ковзному закріпленні його торців (кососиметричний випадок).....	67
<i>Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Солодяк М. Т.</i> Математичне моделювання електромагнітопружних і теплових процесів в магнітних середовищах .....	76
<i>Мусій Р. С., Мельник Н. Б., Терлецький Р. Ф., Шимчак Й.</i> Термонапружений стан і несуча здатність біметалевих циліндрів за імпульсних електромагнітних дій .....	89

<i>Кирилюк В. С.</i> Термоелектропружний стан п'єзоелектричного тіла із зовнішньою круговою тріщиною при силових, електричних та температурних навантаженнях .....	99
<i>Левчук О. І.</i> Контактна задача електропружності про вдавлення вигнутого кінцевого жорсткого штампу в п'єзоелектричний півпростір .....	107
<i>Альтенбах Х., Еремеев В. А., Насєдкін А. В.</i> Нестационарні задачі для п'єзоелектричних тіл з поверхневими плівками .....	115
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Петренко Н. В., Пересунько М. В.</i> Про застосування однієї аналогії між задачами термомеханіки й термоелектромеханіки непружних тонкостінних елементів.....	125
<i>Середницька Х. І., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.</i> Плоска задача термопружності для тіла з теплопроникною щілиною змінної висоти .....	135

**THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**

*Scientific journal*  
№ 6 (52)

Founded in 1970  
Donetsk 2013

---

**CONTENTS**

<i>Khoma I. Yu., Dashko O. G., Strigina O. A., Kovalenko I. G.</i> About the solution of the third boundary value problem on the deformation for a transversely isotropic plate with a circular cylindrical hole .....	7
<i>Skorodyn'skyi I. S., Maksymuk O. V.</i> Effect of normal distributed load on viscoelastic layer bonded with the rigid foundation .....	15
<i>Kit H. S., Sushko O. P.</i> The thermoelastic state of a body with heat-proof thin rigid disk inclusion .....	25
<i>Bogdanov V. R., Sulim G. T.</i> The growing of a three dimension crack in a compact specimen, taking into account the process of unloading the material.....	37
<i>Kaloerov S. A., Avdyushina E. V., Soshyna E. I.</i> Torsion of anisotropic cylinder with holes and cracks .....	45
<i>Nykolyshyn M. M., Opanasovich V. K., Slobodyan M. S., Kurotchyn L. R.</i> Stretching piecewise homogeneous plate with two interfacial cracks on a straight-line interface of materials including plastic zones near their peaks .....	52
<i>Prokopalo Y. F., Dzyaba A. P., Dzyuba P. A.</i> Stability of cylindrical shells with square holes in a non-uniform axial compression.....	59
<i>Fil'shtinskii L. A., Kovalev Yu. D., Shramko Yu. V., Kirichok T. A.</i> Time harmonic oscillations of weakened by two holes layer with sliding seal of its end faces (skew-symmetric case).....	67
<i>Hachkevych O. R., Terletskii R. F., Solodyak M. T.</i> Mathematical modelling of electromagnetoelastic and heat processes in magnetic media .....	76
<i>Musij R. S., Melnyk N. B., Terletskii R. F., Shymchak J.</i> Thermostressed state and bearing capacity of bimetallic cylinders by pulsed electromagnetic actions .....	89
<i>Kirilyuk V. S.</i> Thermo-electroelastic state of the piezoelectric body with an external circular crack under force, electric and thermal influences .....	99

<i>Levchuk O. I.</i> Contact problem of electroelasticity on pressure of the concave conic rigid punch on the piezoelectric half-space.....	107
<i>Altenbach H., Eremeyev V. A., Nasedkin A. V.</i> Transient problems for piezoelectric bodies with surface films .....	115
<i>Karnaukhov V. G., Karnaukhov T. V., Peresun'ko N. V., Petrenko N. V.</i> On application of one analogy between of the problems of thermomechanics and thermoelectromechanics of nonelastic thin-walled elements.....	125
<i>Serednytska Kh. I., Martynyak R. M., Slobodyan B. S.</i> Plane thermoelastic problem for a body with a heat-permeable crack of a variable height.....	135

УДК 539.3

*И. Ю. ХОМА*, д-р физ.-мат. наук,  
*О. Г. ДАШКО*, канд. физ.-мат. наук,  
*О. А. СТРЫГИНА*, канд. физ.-мат. наук,  
*И. Г. КОВАЛЕНКО*

### О РЕШЕНИИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

*Методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра найдено решение задачи о распределении напряжений около круговой цилиндрической полости в нетонкой трансверсально-изотропной пластине, находящейся под действием постоянных растягивающих и сдвигающих усилий, приложенных на бесконечности. На поверхности полости предполагаются заданными однородные граничные условия для нормальной составляющей вектора перемещения и касательных составляющих внешнего напряжения. Исследовано влияние упругих свойств материалов и геометрических параметров пластины на напряженное состояние.*

**Ключевые слова:** трансверсально-изотропная пластина, круговая цилиндрическая полость, напряженное состояние.

Исследованию концентрации напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах посвящено много публикаций [1, 2, 4, 5]. На этом классе задач апробируются разные методы: однородных решений [11, 12], интегральных уравнений [6, 10], разложения решения по толщине [7, 9] и др. Методом представления искомых функций в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины в [8] получены уравнения упругого равновесия нетонкой трансверсально-изотропной пластины и найдено их общее аналитическое решение. На этой основе в данной работе излагается решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины, ослабленной круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой выполняются однородные граничные условия для нормальной составляющей вектора перемещения и касательных составляющих внешнего напряжения, на бесконечности пластина находится под действием постоянных растягивающих и сдвигающих усилий.

**Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину постоянной толщины  $2h$  срединная плоскость  $S$  которой совпадает с плоскостью изотропии. Введем декартову систему координат  $Ox_1 x_2 x_3$  и будем считать, что координаты  $x_1, x_2$  принадлежат  $S$ , а  $x_3 \in [-h, h]$ . Пластина ослаблена круговой цилиндрической полостью радиуса  $R$  и находится под действием постоянных растягивающих и сдвигающих усилий, приложенных на бесконечности. На поверхности заданна нормальная составляющая вектора перемещения и касательные составляющие внешнего напряжения.

Для решения задачи воспользуемся методом разложения решения по толщине. Представим компоненты вектора перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3)$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_k(x_3/h)$  координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1)$$

где  $x=(x_1, x_2) \in S$ ,  $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$ ,  $u_j^{(k)}(x)$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$  – коэффициенты разложений, именуемые моментами,  $N$  – натуральное число, которое будем считать четным, т.е.  $N=2n$  ( $n=0, 1, 2, \dots < \infty$ ). Относительно составляющих данного разложения получим систему уравнений равновесия [7]

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} + X_j^{(k)} = 0 \quad (j=1, 2, 3; k=0, \overline{N}) \quad (2)$$

и соотношения упругости, связывающие моменты напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}. \quad (3)$$

Здесь  $c_{ijlm}$  – упругие постоянные материала, удовлетворяющие условиям симметрии  $c_{ijlm} = c_{jilm} = c_{lmij}$ ,  $\varepsilon_{lm}^{(k)}$  – моменты тензора деформаций, определяемые формулами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)}; \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2s+1)} \quad (\alpha=1, 2; j=1, 2, 3), \quad (4)$$

в которых  $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ ,  $N_k = (N-k-1)/2$ ,  $K = (k-1)/2$ , символ  $[E]$  обозначает целую часть числа  $E$ . Свободные члены в уравнениях (2) являются функциями вида

$$X_j^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \left[ \sigma_{3j}^+ - (-1)^k \sigma_{3j}^- \right], \quad (5)$$

в которых  $\sigma_{3j}^+$  и  $\sigma_{3j}^-$  – напряжения, заданные на плоских гранях  $x_3 = h$  и  $x_3 = -h$  соответственно.

Приведенные равенства образуют замкнутую систему уравнений относительно неизвестных функций моментов напряжений и перемещений. Для однозначного их определения данные уравнения необходимо дополнить граничными условиями, заданными на границе  $\partial S_v$  области  $S$ . Пусть  $\vec{v}$  – орт нормали,  $\vec{s}$  – орт касательной кривой  $\partial S_v$  и  $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{s}$ . Очевидно, что вектор  $\vec{n}$  направлен вдоль образующей цилиндрической по-

верхности  $\partial\Omega_v = \partial S_v \times [-h, h]$ . Предположим, что на поверхности  $\partial\Omega_v$  задан вектор напряжений  $\vec{p}_v = \sigma_{vv}\vec{v} + \sigma_{vs}\vec{s} + \sigma_{vn}\vec{n}$ . Отсюда, используя формулу разложения (1), получаем на  $\partial S_v$  граничные условия

$$\sigma_{vv}^{(k)} = f_1^{(k)}; \quad \sigma_{vs}^{(k)} = f_2^{(k)}; \quad \sigma_{vn}^{(k)} = f_3^{(k)} \quad (k = \overline{0, N}). \quad (6)$$

Если же на поверхности  $\partial\Omega_v$  задан вектор перемещений  $\vec{u} = u_v\vec{v} + u_s\vec{s} + u_n\vec{n}$ , то граничные условия на  $\partial S_v$  имеют вид

$$u_v^{(k)} = g_1^{(k)}; \quad u_s^{(k)} = g_2^{(k)}; \quad u_n^{(k)} = g_3^{(k)} \quad (k = \overline{0, N}). \quad (7)$$

Здесь  $f_j^{(k)} = f_j^{(k)}(x)$ ,  $g_j^{(k)} = g_j^{(k)}(x)$  ( $j=1, 2, 3$ ) – моменты заданных функций точек кривой, определяемые формулами

$$\{f_j^{(k)}(x), g_j^{(k)}(x)\} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \{f_j(x_1, x_2, x_3), g_j(x_1, x_2, x_3)\} P_k(x_3(h)) dx_3. \quad (8)$$

Для трансверсально-изотропного тела приведенные уравнения сводятся к двум группам уравнений, описывающим симметричное и косо-симметричное деформирование пластин. При симметричном деформировании однородная ( $X_j^{(k)} = 0$ ) система уравнений (2) в комплексной форме принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_z \left( \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right) + \partial_{\bar{z}} \left( \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} \right) - \\ - (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^k \sigma_+^{(2s-1)} = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \partial_z \sigma_+^{(2k-1)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(2k-1)} - (4k-1)h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{33}^{(2s)} = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (9)$$

а соотношения упругости (3) и (4) записываются таким образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4c_{66}\partial_{\bar{z}}u_+^{(2k)}, \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= c_{13}e^{(2k)} + (4k+1)c_{33}h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)}, \\ \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2 \left[ (c_{12} + c_{66})e^{(2k)} + (4k+1)c_{13}h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \right] \quad (k = \overline{0, n}); \\ \sigma_+^{(2k-1)} &= c_{44} \left[ 2\partial_{\bar{z}}u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \sum_{s=k}^n u_+^{(2s)} \right] \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$ ,  $\sigma_+^{(2k-1)} = \sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{23}^{(2k-1)}$ ,  $u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)}$ ,  $e^{(2k)} = \partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)}$ ;  $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$  – упругие постоянные.

Согласно (10) из равенств (9) получаем систему уравнений относительно вектора перемещений, общее аналитическое решение которой имеет вид [8]

$$\begin{aligned}
c_{66}u_+^{(0)} &= \kappa_1^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m, \\
c_{66}u_+^{(2)} &= \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s, \\
c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}), \\
c_{66}u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(1)} V_m, \\
c_{66}u_3^{(2k-1)} &= \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k-1)} V_m \quad (k = \overline{2, n}),
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – произвольные голоморфные функции,  $V_m$  и  $W_s$  – метгармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0, \tag{12}$$

$\kappa_1^*$ ,  $\kappa_2^*$ ,  $\kappa_3^*$  и  $a_m^{(2k)}$ ,  $b_s^{(2k)}$ ,  $c_m^{(2k-1)}$  – безразмерные величины.

Подставляя выражения (11) в соотношения упругости (10) и переходя к полярной системе координат  $r$ ,  $\vartheta$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(0)} &= 4 \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(0)} V_m, \quad \sigma_{33}^{(0)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_{3m}^{(0)} V_m, \\
\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(0)} &= 4 \left( -z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right) e^{-2i\vartheta}, \\
\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(2k)} V_m, \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_{3m}^{(2k)} V_m, \\
\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(2k)} &= 4h \left( \mu_*^{(2k)} h \overline{\varphi''(z)} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right) e^{-2i\vartheta}, \\
\sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\vartheta 3}^{(2k-1)} &= 2 \left( \sum_{m=1}^{2n} p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right) e^{-i\vartheta} \quad (k = \overline{1, n}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $\mu_*^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_*^{(2k)} = 0$  ( $k > 1$ );

$$d_m^{(2k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{2c_{66}} k_m a_m^{(2k)} + \frac{c_{13}}{c_{66}} \sum_{s=1}^n c_m^{(2s-1)},$$

$$\begin{aligned}
d_{3m}^{(2k)} &= \frac{c_{13}}{2c_{66}} k_m a_m^{(2k)} + \frac{c_{33}}{c_{66}} \sum_{s=1}^n c_m^{(2s-1)}, \\
p_m^{(2k-1)} &= \frac{c_{44}}{2c_{66}} \left[ 2c_m^{(2k-1)} + (4k-1) \sum_{s=k}^n a_m^{(2s)} \right], \\
q_s^{(2k-1)} &= (4k-1) \frac{c_{44}}{2c_{66}} \sum_{l=k}^n b_s^{(2l)}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Из соотношений (11), (13) получаем граничные условия для решения внутренней и внешней краевых задач.

Пусть неограниченная пластина с круговым отверстием радиуса  $R$  находится под действием постоянных растягивающих  $\sigma_{11}^{(0)\infty} = p_1$ ,  $\sigma_{22}^{(0)\infty} = p_2$  и сдвигающих  $\sigma_{12}^{(0)\infty} = \tau$  усилий, приложенных на бесконечности, а на контуре отверстия выполняются однородные граничные условия

$$\begin{aligned}
u_r^{(2k)}(r, \vartheta) \Big|_{r=R} &= 0, \quad \sigma_{r\vartheta}^{(2k)}(r, \vartheta) \Big|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{0, n}); \\
\sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \vartheta) \Big|_{r=R} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}). \tag{15}
\end{aligned}$$

Для решения задачи воспользуемся методом рядов. Представим голоморфные функции  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  в виде

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \tag{16}$$

где  $a_n$ ,  $b_n$  – произвольные постоянные;

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = \frac{1}{4} (\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty}), \quad \Gamma' = -\frac{1}{4} (\sigma_{11}^{(0)\infty} - \sigma_{22}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty}). \tag{17}$$

В зависимости от значений корней  $k_m$  характеристического уравнения, которые могут быть вещественными положительными ( $k_1$ ) и комплексно-сопряженными ( $k_2$ ,  $k_3 = \bar{k}_2$ ), метагармонические функции  $V_m$  представимы таким образом:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(\rho x_1) e^{in\vartheta}, \quad V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\rho x_2) e^{in\vartheta}, \\
V_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(\rho x_3) e^{in\vartheta}, \tag{18}
\end{aligned}$$

Здесь  $K_n(\rho x_1)$ ,  $H_n^{(1)}(\rho x_2)$ ,  $H_n^{(2)}(\rho x_3)$  – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода,  $\rho = r/R$ ,  $x_1 = Rh^{-1}\sqrt{k_1}$ ,  $x_2 = Rh^{-1}\sqrt{-k_2}$ ,  $x_3 = \bar{x}_2$ . Аналогичный вид имеют метагармонические функции  $W_s$ .

**Результаты численных исследований.** Исследования были проведены

для трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью при смешанных краевых условиях на граничной поверхности. Найдено решение задачи при равномерном всестороннем растяжении пластины ( $p_1 = p_2 = p$ ,  $\tau = 0$ ), растяжении пластины вдоль одной из координатных линий ( $p_1 \neq 0$ ,  $p_2 = \tau = 0$ ) и при задании на бесконечности постоянных касательных усилий ( $p_1 = p_2 = 0$ ,  $\tau \neq 0$ ).

При всестороннем растяжении напряженно-деформированное состояние пластины определяется формулами

$$\sigma_{rr} = \left(1 + \frac{a}{\rho^2}\right)p, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \left(1 - \frac{a}{\rho^2}\right)p, \quad c_{66}h^{-1}u_r = \frac{aR}{h}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)p. \quad (19)$$

Получены выражения для компонент тензора напряжений и вектора перемещений при одноосном растяжении и сдвиге пластины. Так, в частности, радиальные  $\sigma_{rr}$  и окружные  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  напряжения при однородном растяжении имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{a}{\rho^2} + \left[1 + \sum_{k=0}^n T_{rr}^{(2k)}(\rho)P_{2k}(\xi)\right]\cos 2\vartheta\right\}, \\ \frac{1}{p_1}\sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{a}{\rho^2} - \left[1 + \sum_{k=0}^n T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho)P_{2k}(\xi)\right]\cos 2\vartheta\right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

а при задании сдвигающих усилий они представляются равенствами

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}\left\{2 - \sum_{k=0}^n T_{rr}^{(2k)}(\rho)P_{2k}(\xi)\right\}\sin 2\vartheta, \\ \frac{1}{\tau}\sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{2}\left\{-2 + \sum_{k=0}^n T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho)P_{2k}(\xi)\right\}\sin 2\vartheta, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $a$  – константа,  $T_{rr}^{(2k)}(\rho)$ ,  $T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho)$  – составляющие, содержащие цилиндрические функции.

Численные исследования проведены для трансверсально-изотропной пластины с коэффициентами Пуассона  $\nu = 0,25$ ,  $\nu' = 0,2 \div 0,4$  и отноше-

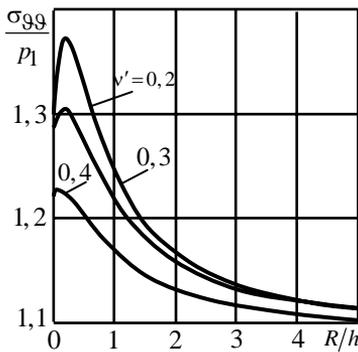


Рис. 1

ниями модулей упругости  $E/G' = 5,0$ ,  $E/E' = 1,5$ . На рис. 1 представлены кривые изменения окружных напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p_1$  на контуре отверстия ( $\rho = 1$ ) в точке на граничной плоскости ( $\zeta = 1$ ,  $\vartheta = \pi/2$ ) в зависимости от изменения относительной толщины пластины  $R/h$  при трех значениях коэффициента Пуассона  $\nu'$ . Кривые имеют немонотонный характер и достигают максимального значения в окрестности значения отношения  $R/h = 0,6$ .

При заданных на бесконечности сдвигающих усилиях доминирующими становятся радиальные напряжения. Графики на рис. 2, 3 иллюстрируют изменения радиальных  $\sigma_{rr}/\tau$  и поперечных  $\sigma_{33}/\tau$  напряжений на контуре отверстия ( $\rho = 1, \vartheta = \pi/4$ ) соответственно в точках на граничной (кривая 1) и серединной (кривая 2) плоскостях пластины. Как видно, наибольших значений напряжения достигают на серединной плоскости.

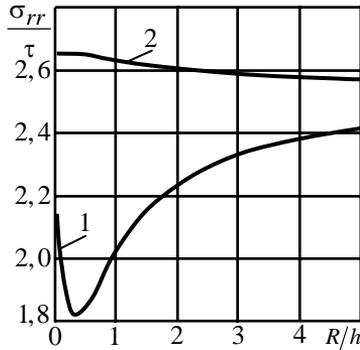


Рис.2

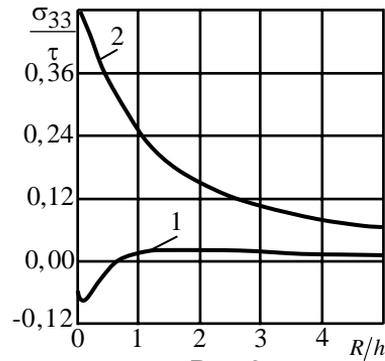


Рис.3

На граничной плоскости поперечные напряжения  $\sigma_{33}$  незначительно отличаются от нулевых значений.

Выявлено влияние отношения модулей  $E/E'$  на распределение напряжений в окрестности отверстия. С увеличением параметра  $e = E/E'$  существенно изменяются радиальные напряжения  $\sigma_{rr}$  на граничной

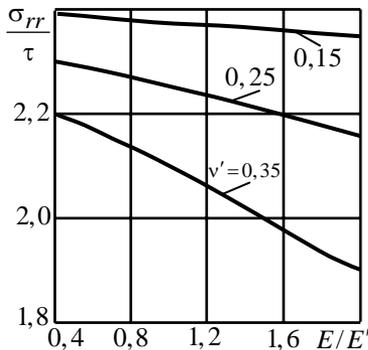


Рис. 4

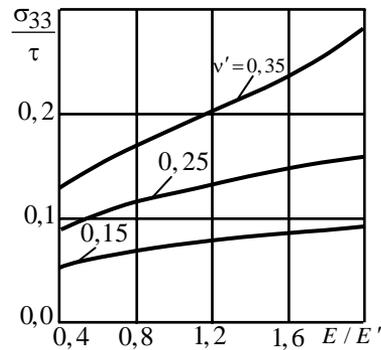


Рис. 5

плоскости ( $\zeta = 1$ ), а поперечные  $\sigma_{33}$  – на серединной ( $\zeta = 0$ ). Иллюстрация этих изменений при  $R/h=1$  представлена на рис. 4, 5.

**РЕЗЮМЕ.** Методом розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра знайдено розв'язок задачі про розподіл напружень біля кругової циліндричної порожнини в нетонкій трансверсально-ізотропній пластині, що знаходиться під дією постійних розтягуючих та зсувних зусиль, прикладених на нескінченності. На поверхні порожнини вважаються заданими однорідні крайові умови для нормальної складової вектора переміщень та дотичних складових зовнішнього напруження. Досліджено вплив пружних властивостей матеріалів та геометричних параметрів пластины на напружений стан.

**Ключові слова:** трансверсально-ізотропна пластина, кругова циліндрична порожнина, напружений стан.

**SUMMARY.** The problem on the stress-state near a circular cylindrical hole in a non-thin transversely isotropic plate subjected to the constant stretching and shearing forces at the infinity is solved using the method of expanding of unknown functions into Fourier series through Legendre polynomials. On the surface of the hole the homogeneous boundary conditions for a normal component of the vector of displacements and the tangential components of the exterior stresses are given. An effect of elastic properties of materials and geometrical parameters of a plate on the stress state is studied.

**Key words:** transversely isotropic plate, circular cylindrical hole, stress state.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Ворович И. И.* Некоторые проблемы концентрации напряжений // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1968. – Вып. 2. – С. 45–53.
2. *Космодамианский А. С., Милишевский И. Х., Шалдырван В. А.* О концентрации напряжений в трансропной пластине с цилиндрической полостью // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. 41, № 5. – С. 957–960.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1968. – 627 с.
4. *Меунаргия Т. В.* Исследование концентрации напряжений около отверстий в пластинах постоянной толщины // Исследование некоторых уравнений математической физики. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1974. – С. 107–120.
5. *Роменская Г. И., Шленёв М. А.* Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально-изотропной плиты. // Тр. Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Тбилиси, 1975. – С. 260–269.
6. *Фильштинский Л. А., Кушнир Д. В.* Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 90–99.
7. *Хома И. Ю.* Об одном способе построения общего решения уравнений равновесия нетонких пластин // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 4. – С. 68–75.
8. *Хома И. Ю.* О представлении решений уравнений равновесия нетонких трансверсально-изотропных пластин // Теорет. и прикладная механика. – 1999. – Вып. 30. – С. 3–12.
9. *Хома И. Ю., Стрыгина О. А.* О влиянии упругих свойств на напряженное состояние нетонкой трансверсально-изотропной пластины с круговым отверстием // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 85–97.
10. *Чехов В. Н., Королев К. А.* Исследование поля смещений в трехмерной задаче Кирша // Современные проблемы концентрации напряжений. Тр. междунар. научн. конференц., Донецк, 1998. – Донецк, 1998 – С. 253–257.
11. *Шалдырван В. А.* Пространственная задача Кирша для трансропной пластины // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 6. – С. 1066–1070.
12. *Шалдырван В. А., Сумцов А. А., Сорока В. А.* Исследование концентрации напряжений в полых коротких цилиндрах из трансверсально-изотропных материалов // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 43–48.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев  
Луганский национальный университет*

*Поступила 25.08.2013*

УДК 539.37

*И. С. СКОРОДИНСКИЙ,*  
*А. В. МАКСИМУК, д-р физ.-мат. наук*

### **ДЕЙСТВИЕ НОРМАЛЬНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ВЯЗКОУПРУГИЙ СЛОЙ, СЦЕПЛЕННЫЙ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ**

*В рамках обобщенной двухпараметрической модели решена задача о действии нормальной распределенной нагрузки на вязкоупругий слой на жестком основании. Детально изучен случай постоянной нагрузки. Проведено сравнение с результатами, полученными на основе модели Винклера, и установлены границы её применимости для разных материалов слоя.*

*Ключевые слова: вязкоупругий слой, обобщенная двухпараметрическая модель, нормальная распределенная нагрузка, область нагружения.*

Среди объектов современной инфраструктуры одними из наиболее распространенных являются такие, которые передают и воспринимают нормальную нагрузку. К таким объектам относятся различные сооружения, фундаменты, основания, автодорожные покрытия, взлетно-посадочные полосы, трубопроводы и т.д. Поэтому большое значение для инженерной практики имеют решения задач о действии нормальных нагрузок на основания и покрытия в различных условиях эксплуатации.

Одними из наиболее распространенных моделей оснований являются модели Фусса-Винклера [3, 4, 6, 7], Буссинеска-Фламана [4] и двухпараметрическая модель Пастернака-Власова [3, 6, 7, 9], а также их многочисленные модификации, обобщения и комбинации [1, 2, 6–8, 11–14]. Так в монографии [4] используются модели основания Буссинеска и Фламана, которые дают неограниченные напряжения в окрестностях угловых точек штампов как в плоском, так и в пространственном случаях. В работах [1, 2] решены контактные задачи о внедрении жестких штампов в упругие и вязкоупругие основания с винклеровскими покрытиями, причем в вязкоупругом случае используются операторные коэффициенты постели. Контактное давление при этом ограничено для штампа любой формы. Недостатком же построенных моделей является то, что они работают только для достаточно тонких покрытий, не способных распределять нагрузку. Для больших толщин модель Винклера дает завышенные значения вертикальных перемещений и заниженные значения контактного давления, а для массивных оснований она вообще неприменима [4]. Поэтому значительным шагом вперед стало появление моделей оснований, способных распределять нагрузку, в частности двухпараметрических [3, 9], а также их обобщение на вязкоупругий случай [8, 14]. Такие модели обеспечивают более правильное распределение вертикальных перемещений и контактного давления под штампами как для тонких покрытий, так и для массивных оснований.

Задачи о действии нормальной нагрузки на упругое двухпараметрическое основание в плоской и пространственной постановках решены и

исследованы в работах [3, 6, 9]. В этих же работах, а также в [11–14] рассмотрены случаи действия статических и динамических нормальных нагрузок на балки и плиты на винклеровских и двухпараметрических упругих и вязкоупругих основаниях.

В данной работе рассматривается действие нормальной распределенной нагрузки на вязкоупругий слой на жестком основании с использованием обобщенной двухпараметрической модели. При этом на основе предложенного критерия изучаются границы применимости модели Винклера в зависимости от отношения толщины слоя к длине области нагружения для разных материалов слоя.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечный вязкоупругий слой

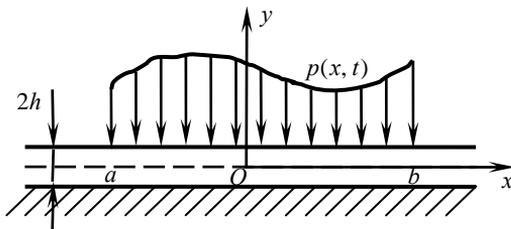


Рис. 1

толщины  $2h$  на жестком основании, на который действует зависящая от времени нормальная нагрузка интенсивности  $p(x, t)$ , распределенная на участке  $[a, b]$  (рис. 1). Материал слоя описывается моделью Кельвина-Фойгта. Задача рассматривается в рамках плоской деформации.

Дифференциальное уравнение для определения вертикального перемещения  $v$  нагруженной поверхности имеет вид

$$2t_e v'' + 2t_\eta \dot{v}'' - k_e v - k_\eta \dot{v} = p(x, t), \quad (1.1)$$

где  $k_e, \dots, t_\eta$  – комбинации вязкоупругих постоянных материала слоя и его толщины [10]. Штрихами обозначены производные по координате  $x$ , а точками – по времени. Граничное и начальное условия имеют вид

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t) = 0; \quad (1.2)$$

$$v(x, 0) = 0. \quad (1.3)$$

**2. Построение решения.** Используя результаты работы [10], решение задачи (1.1)–(1.3) запишем в виде

$$v(x, t) = - \int_0^t d\tau \int_a^b \Gamma(x - \xi, t - \tau) p(\xi, \tau) d\xi; \quad (2.1)$$

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{2\pi t_\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + h^{-2}}\right) \frac{\cos x\xi}{\xi^2 + h^{-2}} d\xi, \quad (2.2)$$

в котором  $\Gamma(x, t)$  – функция Грина;  $\tau_K$  – время запаздывания;  $\alpha_e^2 = k_e/2t_e$ .

Рассмотрим случай равномерно распределенной и постоянной во времени нагрузки, т.е.

$$p(\xi, \tau) = p_0 H_+(\tau) \quad (a \leq \xi \leq b), \quad (2.3)$$

где  $H_+(\tau)$  – асимметричная функция Хевисайда. Подставляя (2.2), (2.3) в (2.1) и используя значение интеграла [5]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\xi}{\xi(\alpha^2 + \xi^2)} d\xi = \frac{\pi \operatorname{sgn} x}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha|x|}\right) = \frac{\pi}{2\alpha^2} \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ e^{\alpha x} - 1, & x < 0 \end{cases},$$

представим решение задачи в виде

$$v(x, t) = -\frac{p_0}{2k_e} \begin{cases} e^{\alpha_e(x-a)} - e^{\alpha_e(x-b)}, & x < a \\ 2 - e^{-\alpha_e(x-a)} - e^{\alpha_e(x-b)}, & a \leq x \leq b + \frac{p_0}{2\pi t_e} \\ e^{-\alpha_e(x-b)} - e^{-\alpha_e(x-a)}, & x > b \end{cases} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + h^{-2}}\right) \frac{\sin \xi(x-a) - \sin \xi(x-b)}{\xi(\xi^2 + \alpha_e^2)} d\xi. \quad (2.4)$$

Из формулы (2.4) видно, что первое слагаемое представляет собой упругое решение [3], получающееся из (2.4) при  $t \rightarrow \infty$ . Второе слагаемое быстро убывает со временем и характеризует вязкоупругое запаздывание развития деформаций (перемещений).

Если область нагружения симметрична относительно начала координат, то формула (2.4) приобретает вид

$$v(x, t) = -\frac{p_0}{k_e} \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_e a} \operatorname{ch} \alpha_e x, & |x| \leq a \\ \operatorname{sh} \alpha_e a e^{-\alpha_e |x|}, & |x| > a \end{cases} + \\ + \frac{p_0}{\pi t_e} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + h^{-2}}\right) \frac{\sin a\xi \cos x\xi}{\xi(\xi^2 + \alpha_e^2)} d\xi, \quad (2.5)$$

где  $2a$  – длина области нагружения.

Введем безразмерные переменные и величины

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{\xi} = a\xi, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau_0}, \quad \bar{\tau}_K = \frac{\tau_K}{\tau_0}, \quad \alpha = \alpha_e a, \\ \lambda = \frac{h}{a}, \quad \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{E_0 v(x, t)}{ap_0}.$$

Здесь  $E_0 = E/(1-\nu^2)$ ;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала слоя. Тогда, опустив верхние черточки, для безразмерного вертикального перемещения будем иметь выражение

$$v(x, t) = -\frac{E_0}{ak_e} \begin{cases} 1 - e^{-\alpha} \operatorname{ch} \alpha x, & |x| \leq 1 \\ \operatorname{sh} \alpha e^{-\alpha|x|}, & |x| > 1 \end{cases} +$$

$$+ \frac{E_0 a}{\pi t_e} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + \lambda^{-2}}\right) \frac{\sin \xi \cos x \xi}{\xi(\xi^2 + \alpha^2)} d\xi. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) является рабочей формулой для определения безразмерного вертикального перемещения нагруженной поверхности слоя.

**3. Контактное давление между слоем и основанием.** В обобщенной двухпараметрической модели нормальное напряжение  $\sigma_{yy}(x, y, t)$  неоднородно по толщине слоя. Поэтому представляет интерес распределение контактного давления между слоем и основанием по координате  $x$  и во времени. Исходя из соотношений обобщенной двухпараметрической модели [10], можно получить следующую формулу для вышеупомянутого контактного давления  $q(x, t)$ :

$$q(x, t) = - \left[ \frac{p_0}{2} H_- \left( 1 - \frac{|x|}{a} \right) H_+(t) + Gh \left( \alpha_e^2 v(x, t) + \frac{\tau_K}{h^2} \dot{v}(x, t) \right) \right], \quad (3.1)$$

где  $H_-(\xi)$  – асимметричная функция Хевисайда, а  $G$  – модуль сдвига материала слоя. Подставляя в (3.1) выражение для  $v(x, t)$  из (2.5), для безразмерного контактного давления  $\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) = q(x, t)/p_0$  получим следующее выражение:

$$q(x, t) = -0,5 H_- (1 - |x|) H_+(t) + 1,5 \begin{cases} 1 - e^{-\alpha \operatorname{ch} \alpha x}, & |x| \leq 1 \\ \operatorname{sh} \alpha e^{-\alpha |x|}, & |x| > 1 \end{cases} - \\ - \frac{3(\alpha^2 - \lambda^{-2})}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + \lambda^{-2}}\right) \frac{\xi \sin \xi \cos x \xi}{(\xi^2 + \alpha^2)(\xi^2 + \lambda^{-2})} d\xi. \quad (3.2)$$

В формуле (3.2) верхние черточки над безразмерными величинами опущены.

**4. Анализ распределений вертикального перемещения нагруженной поверхности, критерий применимости модели Винклера.** На рис. 2, а–в для параметра  $\lambda$  равного 0,1; 0,5; 1 представлены графики распределе-

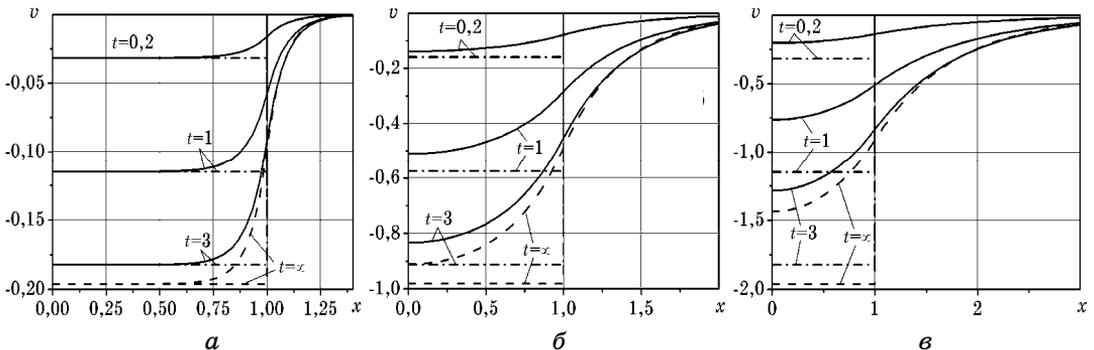


Рис. 2

ния безразмерного вертикального перемещения нагруженной поверхности слоя, полученные с помощью формулы (2.6). При построении использовались следующие значения вязкоупругих характеристик материала слоя:  $E=570 \text{ МПа}$ ,  $\nu=0,12$ ,  $\eta=5 \text{ ГПа} \cdot \text{с}$  ( $\eta$  – вязкость материала слоя),  $\tau_K=19,65 \text{ с}$ . Характерное время  $\tau_0=10 \text{ с}$ . Сплошные линии соответствуют решению, полученному на основе двухпараметрической модели для вязкоупругого материала в конечные моменты времени, штрихпунктирные линии соответствуют решению в рамках модели Винклера для вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта в те же моменты времени, а пунктирные линии соответствуют упругим решениям ( $t \rightarrow \infty$ ), полученным на основе двухпараметрической модели и модели Винклера (горизонтальные прямые линии). Как видно из рис. 2, вертикальное перемещение развивается во времени от нулевого до предельного упругого значения и в любой момент времени представляет собой монотонно возрастающую функцию  $x$ , стремящуюся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ . Для малых значений параметра  $\lambda$  ( $\lambda \leq 0,1$ ) в большей части области нагружения, составляющей не менее 70% её длины, решение, построенное на основе двухпараметрической модели, практически совпадает с решением в рамках модели Винклера. При подходе к границе области нагружения решение, построенное на основе двухпараметрической модели, убывает по абсолютной величине и стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , оставаясь непрерывным вместе со своей первой производной. Скорость этого убывания тем больше, чем меньше параметр  $\lambda$ . Концы области нагружения являются точками перегиба. Решение в рамках модели Винклера терпит скачок на границе области нагружения и вне этой области равно нулю. С ростом параметра  $\lambda$  скорость изменения решения, построенного на основе двухпараметрической модели, в окрестности концов области нагружения уменьшается, а его численные значения и разность между ним и решением в рамках модели Винклера растут. Последняя при  $\lambda \cong 1$  достигает существенных значений (рис. 2). Например, в упругом случае ( $t \rightarrow \infty$ ) вертикальное перемещение, полученное на основе двухпараметрической модели, в точке  $x=0$  составляет только 73% от соответствующего перемещения в рамках модели Винклера, а при  $x \rightarrow 1-0$  – всего 46,4%.

Исходя из анализа распределений вертикального перемещения нагруженной поверхности (рис. 2), можно предложить следующий критерий применимости модели Винклера для вязкоупругого слоя-покрытия:

$$\mu \{x : |x| < 1 \wedge |v(x, t) - v_w(x, t)| \leq \varepsilon\} \geq 2l \quad (\varepsilon > 0, 0 < l < 1, t > 0). \quad (4.1)$$

В (4.1)  $\mu$  означает меру Лебега на числовой прямой, а  $v_w(x, t)$  – безразмерное вертикальное перемещение в рамках модели Винклера

$$v_w(x, t) = -2\lambda(1 - \nu_0^2)(1 - e^{-mt})H_-(1 - |x|),$$

$$m = \frac{\alpha_0^2}{\tau_K}, \quad \alpha_0^2 = \frac{3}{2(1 - \nu_0)},$$

где  $v_0 = v/(1-v)$ . Неравенство (4.1) позволяет определить параметр тонкостенности  $\lambda$ , при котором для заданных  $\varepsilon$  и  $l$  неравенство  $|\nu(x, t) - \nu_w(x, t)| \leq \varepsilon$  имеет место при  $|x| \leq l$ . Можно показать, что уравнение

$$|\nu(x, t) - \nu_w(x, t)| = \varepsilon$$

задает немонотонную функцию времени  $x_\varepsilon = x_\varepsilon(t)$ , имеющую один минимум ( $\dot{x}_\varepsilon(t_{\min}) = 0$ ). Составляя условие минимума неявной функции и учитывая, что  $|\nu(x, t) - \nu_w(x, t)| = \nu(x, t) - \nu_w(x, t)$  для всех  $t > 0$  при  $|x| \leq 1$ , получаем следующую систему трансцендентных уравнений для определения момента времени  $t_{\min}$  и абсциссы  $x_{\varepsilon \min} = x_\varepsilon(t_{\min})$ :

$$\begin{aligned} \nu(x, t) - \nu_w(x, t) &= \varepsilon, \\ \frac{\partial \nu(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \nu_w(x, t)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В таблице представлены решения системы (4.2) при некоторых значениях параметра  $\lambda$ . Значения вязкоупругих характеристик соответствуют рис. 2;  $\varepsilon = 0,002$ . В четвертом столбце приведены значения абсцисс  $x_{\varepsilon e}$  для упругого случая ( $t \rightarrow \infty$ ). Наибольшая абсолютная и относительная разность между  $x_{\varepsilon e}$  и  $x_{\varepsilon \min}$  имеет место при  $\lambda = 0,1$  и составляет примерно 3% от  $x_{\varepsilon \min}$ . С уменьшением параметра  $\lambda$  эти разности уменьшаются, и для  $\lambda = 0,04$  относительная разность между  $x_{\varepsilon e}$  и  $x_{\varepsilon \min}$  составляет всего 0,6% от  $x_{\varepsilon \min}$ . Таким образом, при малых  $\lambda$  вязкостью мож-

Таблица

$\lambda$	$t_{\min}$	$x_{\varepsilon \min}$	$x_{\varepsilon e}$	$x_{\varepsilon e} - x_{\varepsilon \min}$	$x_{\varepsilon e} / x_{\varepsilon \min} - 1$
0,10	1,728	0,6834	0,7046	0,0212	0,0310
0,09	1,765	0,7232	0,7413	0,0181	0,0250
0,08	1,809	0,7620	0,7772	0,0152	0,0200
0,07	1,861	0,7997	0,8122	0,0125	0,0156
0,06	1,925	0,8362	0,8460	0,0098	0,0117
0,05	2,006	0,8712	0,8786	0,0074	0,0085
0,04	2,117	0,9045	0,9097	0,0052	0,0058

но пренебречь и использовать упругое решение, которое значительно проще. Заметим, что величины  $2x_{\varepsilon \min}$  и  $2x_{\varepsilon e}$  представляют левую часть неравенства (4.1) в вязкоупругом и упругом случаях соответственно. Таким образом, для того, чтобы длина подобласти, фигурирующей в (4.1), составляла не менее 70% длины области нагружения,  $\lambda$  должно быть не более 0,09, а чтобы длина соответствующей подобласти составляла не менее 90% длины области нагружения,  $\lambda$  должно быть не более 0,04.

В упругом случае ( $t \rightarrow \infty$ ) от системы (4.2) остается только первое

уравнение, решая которое получаем:

$$x_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\lambda}{\alpha_0} \operatorname{arcch} \frac{\varepsilon e^{\frac{\alpha_0}{\lambda}}}{2\lambda(1-\nu_0^2)} \approx 1 + \frac{\lambda}{\alpha_0} \ln \frac{\varepsilon}{\lambda(1-\nu_0^2)}. \quad (4.3)$$

Как видно из (4.3), единственным параметром в этой зависимости является коэффициент Пуассона материала слоя. Как и ранее, величина  $2x_{\varepsilon\varepsilon}$  представляет левую часть неравенства (4.1). На рис. 3 представлены графики зависимости  $x_{\varepsilon\varepsilon}$  от  $\lambda$  для разных значений коэффициента Пуассона ( $\varepsilon = 0,002$ ). Расчеты производились по приближенной формуле (4.3), которая для выбранного интервала изменения  $\lambda$  дает практически точный результат. Как видно из рис. 3, зависимость  $x_{\varepsilon\varepsilon}$  от  $\lambda$  является монотонно убывающей и близкой к линейной. Для  $\nu = 0,12$  в отношении величины подобласти, фигурирующей в критерии (4.1), можно повторить сказанное выше для вязкоупругого случая. С увеличением величины  $\nu$  область применимости модели Фусса-Винклера расширяется, и для  $\nu = 0,35$  при  $l = 0,7$  относительная толщина слоя составляет  $\lambda \approx 0,14$ , а при  $l = 0,9$  является чуть менее  $0,06$ .

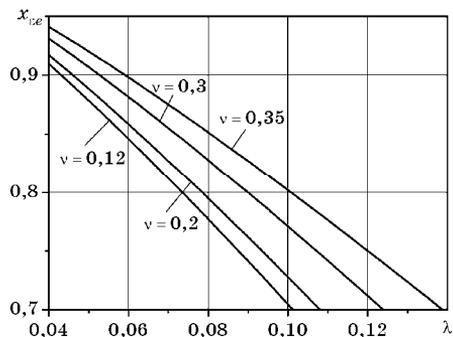


Рис. 3

Результаты, аналогичные вышеприведенным, были получены также для значений вязкости  $\eta = 22 \text{ ГПа} \cdot \text{с}$  ( $\tau_K = 86,46 \text{ с}$ ),  $\eta = 54 \text{ ГПа} \cdot \text{с}$  ( $\tau_K = 212,2 \text{ с}$ ) и для более мягкого материала со следующими вязкоупругими характеристиками:  $E = 300 \text{ МПа}$ ;  $\nu = 0,2$ ;  $\eta = 600 \text{ МПа} \cdot \text{с}$ ;  $\tau_K = 4,8 \text{ с}$ . Отметим, что в последнем случае вертикальное перемещение выходит примерно в  $1,8 \div 2$  раза большим, чем на рис. 2.

**5. Анализ контактного давления между слоем и основанием.** На рис. 4 а-в представлены графики распределения безразмерного контактного давления между слоем и основанием в те же моменты времени и для тех же значений параметра  $\lambda$ , для которых построены графики вертикального перемещения на рис. 2. Значения вязкоупругих постоянных и характерное время тоже соответствуют рис. 2. Поскольку внешняя нагрузка  $p(x, t)$  терпит скачок на концах области нагружения, то и давление  $q(x, t)$ , как показывают формулы (3.1), (3.2), будет в этих точках иметь скачок величины  $0,5 p_0$  (соответственно  $0,5$  для безразмерной величины). В области нагружения контактное давление  $q(x, t)$  монотонно убывает, причем при  $\lambda \leq 0,1$  на участке этой области, длина которого составляет не менее 60% её длины, оно очень мало отличается от постоянного, имеющего место в случае модели Винклера (штрихпунктирные линии на рис. 4); на концах области нагружения контактное давление скачкообразно возрастает на вышеуказанную величину и далее снова монотонно убывает,

асимптотически стремясь к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ . Это справедливо для любого момента времени  $t \in [0, \infty)$ . В случае тонкого слоя контактное давление изменяется в окрестности точек  $x = \pm 1$  резко и быстро затухает при удалении от области нагружения; в случае более толстого слоя величина  $q(x, t)$  изменяется вдоль координаты  $x$  медленнее (рис. 4). Зависимость контактного давления от времени, как видно из рис. 4, намного слабее, чем соответствующая зависимость вертикального перемещения (рис. 2), причем эта зависимость становится сильнее с ростом параметра  $\lambda$ . Из рис. 4 видно, что в области нагружения, за исключением окрестностей её концов, контактное давление со временем растет от начального значения

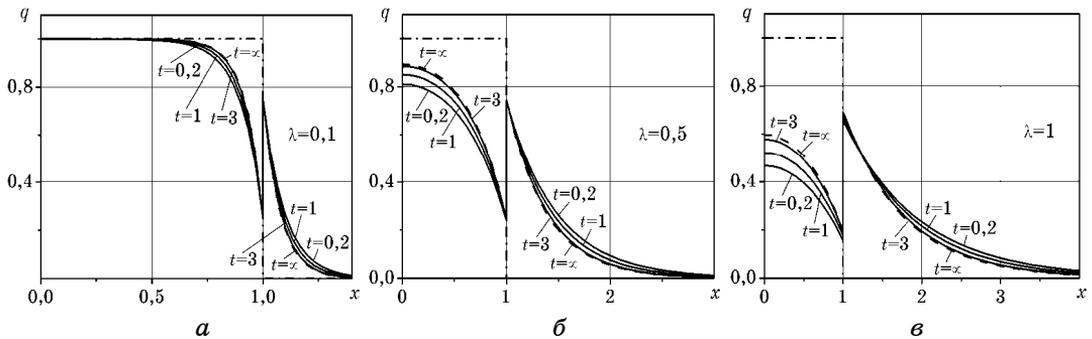


Рис. 4

$q(x, 0)$  до упругого значения при  $t \rightarrow \infty$  (пунктирные кривые), а вне области нагружения при достаточном удалении от точек  $x = \pm 1$  наоборот, релаксирует от величины  $q(x, 0)$  до  $q(x, \infty)$ . В окрестностях концов области нагружения при малых относительных толщинах слоя ( $\lambda \cong 0,1$  и менее) изменение во времени контактного давления немонотонно, однако этот эффект незначителен, поскольку в целом зависимость контактного давления от времени в случае тонкого слоя очень слаба. Отметим, что с ростом параметра  $\lambda$  распределение контактного давления по координате все более отклоняется от соответствующего распределения в случае модели Винклера или классической двухпараметрической модели [3]. Это хорошо иллюстрируют графики на рис. 4 при  $\lambda = 0,5$  и  $\lambda = 1$ . Численные значения контактного давления в области нагружения в случае обобщенной двухпараметрической модели всегда меньше соответствующих значений, получаемых при использовании классической двухпараметрической модели или модели Винклера. Аналогичные результаты получены и в случае более мягкого материала ( $E = 300 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $\eta = 600 \text{ МПа} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_K = 4,8 \text{ с}$ ).

Таким образом, в результате решения задачи о действии постоянной распределенной нагрузки на вязкоупругий слой на жестком основании с использованием обобщенной двухпараметрической модели получены распределения вертикального перемещения нагруженной поверхности и контактного давления между слоем и основанием по координате в разные моменты времени для различных относительных толщин слоя. При этом

выявлены основные закономерности изменения вышеуказанных величин по координате и во времени, а также проведены сравнения с соответствующими распределениями в случаях модели Фусса-Винклера и классической двухпараметрической модели. Предложен критерий применимости модели Винклера относительно вертикального перемещения и приведенной толщины слоя для разных материалов последнего. На основе предложенного критерия установлены точные верхние границы относительной толщины слоя, при которой хорошо работает модель Винклера для заданной близости решений (параметра  $\varepsilon$ ), полученных с использованием двух различных моделей, в вязкоупругом и упругом случаях. Как показал анализ упругого решения, границы применимости модели Винклера относительно толщины слоя шире для материалов с большим коэффициентом Пуассона ( $\nu \geq 0,35$ ). Для материалов с меньшим коэффициентом Пуассона ( $\nu < 0,3$ ) лучше работает двухпараметрическая модель.

**РЕЗЮМЕ.** В рамках узагальненої двопараметричної моделі розв'язано задачу про дію нормального розподіленого навантаження на в'язкопружний шар на жорсткій основі. Детально вивчено випадок сталого навантаження. Проведено порівняння з результатами, отриманими на основі моделі Вінклера, та встановлено межі її застосовності для різних матеріалів шару.

**Ключові слова:** в'язкопружний шар, узагальнена двопараметрична модель, нормальне розподілене навантаження, область навантаження.

**SUMMARY.** The problem on the action of normal distributed load on viscoelastic layer on the rigid foundation is solved in the frames of generalized two-parameter model. The case of constant loading is studied in details. The comparison with the results obtained on the base of the Winkler model is provided and the limits of its applicability have been established for different layer materials.

**Key words:** viscoelastic layer, generalized two-parameter model, normal distributed load, loading region.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 487 с.
2. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
4. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Гос. изд. литературы по строительству и архитектуре, 1953. – 516 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
6. Керр (A. D. Kerr) Упругие и вязкоупругие модели оснований // Тр. Америк. общ-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикладная механика. – 1964. – Т. 31, № 3. – С. 139–148.
7. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.
8. Муравский Г. Б. О модели упругого основания // Строит. механика и расчёт сооружений. – 1967. – № 6. – С. 14–17.
9. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.–Л.: Гос. изд. литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.
10. Скорodinский И. С., Максимул А. В. Обобщенная двухпараметрическая модель тер-

мвязкоупругого промежуточного слоя или покрытия // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3(49). – С. 59–69.

11. *Salim F. F.* Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2009. – Vol. 28, №. 3. – P. 469–476.

12. *Kim S. M., Won M. C., McCullough B. F.* Behavior of Plate on Viscoelastic Foundation under Moving Harmonic Loads // Trans. of the 15-th ASCE Engineering Mechanics Conference, June 2–5, 2002. – NY: Columbia University, 2002 – P. 1–8 (CD-ROM).

13. *Huang Z. Y., Lv C. F., Chen W. Q.* Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations // Compos. Struct. – 2008. – Vol. 85, №. 2. – P. 95–104.

14. *Reissner E.* A Note on Deflections of Plates on a Viscoelastic Foundation // Trans. ASME. J. of Appl. Mech. – 1958. – Vol. 25, №. 1. – P. 144–145.

*Институт прикладных проблем механики  
и математики НАН Украины, г. Львов*

*Поступила 20.08.2013*

УДК 539.3

Г. С. КИТ, д-р физ.-мат. наук,  
О. П. СУШКО, канд. физ.-мат. наук

### ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА С ТЕПЛОНЕПРОНИЦАЕМЫМ ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ДИСКОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

*Решена задача термоупругости для тела с абсолютно жестким теплонепроницаемым включением в форме тонкого диска при заданном вдали от него тепловом потоке. Диск при нагревании не деформируется. Задача сведена к решению двумерного интегрального уравнения, из которого определяются действующие на тело со стороны включения усилия. Для кругового включения указана методика точного решения уравнения, правая часть которого есть полином. Приведен пример, когда на включении задано линейное распределение теплового потока.*

**Ключевые слова:** тонкое жесткое теплонепроницаемое включение, теплопроводность, термоупругость.

Прочность и долговечность конструкций существенно зависит от структуры их материала, который может иметь в себе разных форм и размеров пустоты, наполнители или другие неоднородности, в окрестностях которых концентрируются напряжения высокого уровня, определяющие механизм разрушения. Во многих случаях процесс разрушения можно блокировать структурированием материала контрастными за жесткостью и с иными теплофизическими свойствами включениями. Изучение этих явлений предусматривает решение задач о термоупругом состоянии тел с неоднородностями типа жестких теплоактивных или теплонепроницаемых включений. Много работ посвящено решению плоских задач теории упругости для тела с жесткими линейными включениями [1, 7] и их значительно меньше в области пространственных задач [7].

В данной статье решаются задачи стационарной теплопроводности и термоупругости для тела с теплонепроницаемым жестким тонким включением. Решение строится в три этапа: а) определяется возмущенное теплонепроницаемым включением температурное поле; б) определяются обусловленные основным и возмущенным температурными полями перемещения на месте включения; в) определяются усилия, действующие на тело со стороны включения.

**Постановка и интегральные уравнения задачи.** Рассмотрим упругое изотропное тело с тонким абсолютно жестким плоским теплонепроницаемым включением  $\Omega$ . Вследствие малой толщины включения граничные условия из его поверхности перенесем на срединную область  $S$ . Выберем в центре этой области систему декартовых координат  $Ox_1 x_2 x_3$  с осью  $Ox_3$ , перпендикулярной к плоскости  $S$  ( $x_3 = 0$ ). Граничные условия на поверхностях включения запишем в виде

$$\lambda \frac{\partial T(x^*)}{\partial x_3} = 0, \quad x^* = x^*(x_1, x_2, x_3), \quad x = x^*(x_1, x_2, 0), \quad (1)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности тела;  $T(x^*)$  – температурное поле в теле с включением, которое представим так:

$$T(x^*) = t_0(x^*) + t(x^*), \quad (2)$$

где  $t_0(x^*)$  – температурное поле в теле без включения;  $t(x^*)$  – возмущенное температурное поле, характеризующее вызванное включением изменение температуры  $t_0(x^*)$ . Подставляя (2) в условие (1), получим

$$\lambda \frac{\partial t(x^*)}{\partial x_3} = -\lambda \frac{\partial t_0(x^*)}{\partial x_3}, \quad x_3 = 0. \quad (3)$$

Температурное поле  $t(x^*)$  представим через ньютоновский потенциал двойного слоя с плотностью  $\gamma(\xi)$  в виде [3]

$$t(x^*) = -\frac{1}{4\pi\lambda} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S = \frac{x_3}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S, \\ R(x^*, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}. \quad (4)$$

Для  $t(x^*)$  найдем производную по нормали к области  $S$

$$\frac{\partial t(x^*)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = -\frac{1}{4\pi\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \iint_S \frac{\gamma(\xi) d_\xi S}{R(x^*, \xi)} \Big|_{x_3=0} = \frac{1}{4\pi\lambda} \Delta_x \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S,$$

где  $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа, внеся который под интеграл получим

$$\frac{\partial t(x^*)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x, \xi)} d_\xi S. \quad (5)$$

Подставляя (5) в условие (3) и умножая обе его стороны на  $4/\pi$ , приходим к сингулярному интегральному уравнению для определения плотности потенциала двойного слоя  $\gamma(\xi)$

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x, \xi)} d_\xi S = q(x), \quad q(x) = -\frac{4\lambda}{\pi} \frac{\partial t_0(x^*)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет ограниченное на контуре области  $S$  решение, которое для круга радиуса  $a$  запишем так:

$$\gamma(x) = \sqrt{L(x)} \varphi(x), \quad L(x) = a^2 - x_1^2 - x_2^2. \quad (7)$$

Подставив (7) в уравнение (6), получим

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_S \frac{\sqrt{L(\xi)} \varphi(\xi)}{R^3(x, \xi)} d_\xi S = q(x). \quad (8)$$

Если функция  $q(x)$  есть полином степени  $n$ , то  $\varphi(\xi)$  также есть полином такой же степени и тогда можно получить точное решение уравнения (8).

Приведем такое решение, когда  $q(x)$  и  $\varphi(\xi)$  представлены полиномами третьей степени:

$$q(x) = \sum_{i,j=0}^3 q_{ij} x_1^i x_2^j, \quad \varphi(\xi) = \sum_{i,j=0}^3 c_{ij} \xi_1^i \xi_2^j \quad (i+j \leq 3). \quad (9)$$

Подставим выражения (9) в уравнение (8) и вычислим интегралы

$$J_{ij}(x) = \frac{1}{\pi^2} \iint_S \frac{\sqrt{L(\xi)} \xi_1^i \xi_2^j}{R^3(x, \xi)} d_\xi S \quad (i, j=0, 1, 2, 3), \quad (10)$$

найдем

$$\begin{aligned} J_{00} &= -1, & J_{11}(x) &= -\frac{15x_1 x_2}{8}, & J_{10}(x) &= \frac{-3x_1}{2}, \\ J_{20}(x) &= \frac{1}{16} (4a^2 - 33x_1^2 - 3x_2^2), \\ J_{21}(x) &= \frac{x_2}{32} (6a^2 - 75x_1^2 - 5x_2^2), \\ J_{30}(x) &= \frac{x_1}{32} (18a^2 - 85x_1^2 - 15x_2^2). \end{aligned}$$

Выражения для  $J_{01}(x)$ ,  $J_{02}(x)$ ,  $J_{12}(x)$  и  $J_{03}(x)$  получим из приведенных выше перестановкой индексов.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x_1$  и  $x_2$ , получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $c_{ij}$ , решая которую найдем:

$$\begin{aligned} c_{00} &= -\frac{1}{9} [9q_{00} + a^2 (q_{20} + q_{02})], \\ c_{10} &= -\frac{2}{45} [15q_{10} + a^2 (q_{12} + 3q_{30})], \\ c_{20} &= \frac{2}{45} (q_{02} - 11q_{20}), & c_{11} &= -\frac{8}{15} q_{11}, \\ c_{12} &= \frac{8}{315} (3q_{30} - 17q_{12}), & c_{30} &= \frac{8}{315} (q_{12} - 15q_{30}). \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения для  $c_{01}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{02}$ ,  $c_{03}$  получили из  $c_{10}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{20}$ ,  $c_{30}$  заме-

нив  $q_{10}, q_{12}, q_{30}, q_{20}, q_{02}$  соответственно на  $q_{01}, q_{21}, q_{03}, q_{02}, q_{20}$ . Коэффициенты  $c_{ij}$  совпадают со значениями  $b_{ij}$ , приведенными в работе [2]. Имея значения  $c_{ij}$ , по формуле (7) с учетом представления (9) можно найти плотность потенциала двойного слоя  $\gamma(x)$ , тепловой поток  $q(x^*)$  и температурное поле  $t(x^*)$ .

Перемещения в теле с включением представим в виде суммы

$$u_i(x^*) = u_i^T(x^*) + u_i^P(x^*) + u_i^G(x^*) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (12)$$

где  $u_i^T(x^*) = u_i^{t_0}(x^*) + u_i^t(x^*)$  – перемещения в теле без включения:  $u_i^{t_0}(x^*)$  – обусловленные основным температурным полем  $t_0(x^*)$ , а  $u_i^t(x^*)$  – тепловым потоком  $q(x)$ ,  $u_i^P(x^*)$  – перемещения, обусловленные наличием включения,  $u_i^G(x^*)$  – перемещения, характеризующие движение жесткого включения.

Методы определения перемещений и напряжений в теле при заданной температуре известны. Ниже остановимся на определении перемещений и напряжений, обусловленных только возмущенным температурным полем (диполями тепла плотности  $\gamma(\xi)$ ). В этом случае  $u_i^{t_0}(x^*) = 0$ , а  $u_i^t(x^*)$  и  $\sigma_{ij}^t(x^*)$  определяются через термоупругий потенциал перемещений  $\Phi(x^*)$  [6]

$$\begin{aligned} u_i^t(x^*) &= \frac{\partial \Phi(x^*)}{\partial x_i}, \\ \sigma_{ij}^t(x^*) &= 2G \left[ \frac{\partial^2 \Phi(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \Delta \Phi(x^*) \right] \quad (i = \overline{1, 3}), \end{aligned} \quad (13)$$

который запишем в виде [3]

$$\Phi(x^*) = -\frac{m x_3}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi) d_\xi S}{R(x^*, \xi)}, \quad m = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t,$$

где  $\alpha_t$  и  $\nu$  – коэффициенты линейного теплового расширения и Пуассона.

По формулам (13) находим

$$\begin{aligned} u_i^t(x^*) &= \frac{m x_3 x_i}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S - \frac{m x_3}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\xi_i \gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S \quad (i = 1, 2), \\ u_3^t(x^*) &= -\frac{m}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S + \frac{m x_3^2}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{i3}^t(x^*) &= \frac{Gm}{4\pi\lambda} \left[ \iint_S \frac{(x_i - \xi_i)\gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S - 3x_3^2 \iint_S \frac{(x_i - \xi_i)\gamma(\xi)}{R^5(x^*, \xi)} d_\xi S \right] \quad (i=1, 2), \\ \sigma_{33}^t(x^*) &= \frac{Gmx_3}{4\pi\lambda} \left[ \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S - 3x_3^2 \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^5(x^*, \xi)} d_\xi S \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Соотношения (14) с учетом выражения (6) можно записать еще в виде

$$\begin{aligned}u_i^t(x^*) &= \frac{m\pi x_3 x_i}{8\lambda} q(x^*) - \frac{mx_3}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\xi_i \gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S \quad (i=1, 2), \\ u_3^t(x^*) &= \frac{m\pi x_3^2}{8\lambda} q(x^*) - \frac{m}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S, \\ \sigma_{i3}^t(x^*) &= \frac{Gm}{4\pi\lambda} \left[ \pi^2 x_i q(x^*) - \iint_S \frac{\xi_i \gamma(\xi)}{R^3(x^*, \xi)} d_\xi S - \right. \\ &\quad \left. - 3x_3^2 \iint_S \frac{(x_i - \xi_i)\gamma(\xi)}{R^5(x^*, \xi)} d_\xi S \right] \quad (i=1, 2), \\ \sigma_{33}^t(x^*) &= \frac{Gmx_3}{4\pi\lambda} \left[ \pi^2 q(x^*) - 3x_3^2 \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^5(x^*, \xi)} d_\xi S \right].\end{aligned}\quad (15)$$

Перемещения  $u_{ij}^P(x^*)$  ( $i=1, 3$ ), вызванные усилиями  $p_j(\xi)$  ( $j=1, 3$ ), действующими на тело со стороны включения в направлении осей  $x_j$  и приложенными в точке  $\xi=(\xi_1, \xi_2, 0)$ , можно записать, используя тензор перемещений Грина, входящий в формулы Соммильяны [6]

$$\begin{aligned}u_{ij}^P(x^*) &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ \iint_S \frac{\delta_{ij} p_j(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \iint_S p_j(\xi) \frac{\partial R(x^*, \xi)}{\partial x_j} d_\xi S \right\},\end{aligned}\quad (16)$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Метод решения задачи термоупругости, когда на месте включения известны перемещения  $u_1^T(x)$  и  $u_2^T(x)$ , изложен в работе [4]. Здесь остановимся на случае, когда на месте включения задано только перемещение  $u_3^T(x)$ .

Перемещения  $u_3^G(x)$  при  $x_3 = 0$  представим в виде

$$u_3^G(x) = -b_{00} + b_{10}x_1 - b_{01}x_2, \quad (17)$$

в котором  $b_{00}$ ,  $b_{10}$ ,  $b_{01}$  – неизвестные постоянные, которые определяются

из условий равновесия включения как жесткого целого:

$$\iint_S p_3(\xi) d_\xi S = 0, \quad \iint_S x_i p_3(\xi) d_\xi S = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (18)$$

Распределения перемещений  $u_3^t(x)$  и  $u_3^p(x)$  в плоскости области  $S$  определяются соответственно формулами (15) и (16) при  $x_3 = 0$ :

$$u_3^t(x) = -\frac{m}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S, \quad (19)$$

$$u_3^p(x) = \frac{1}{8\pi GA} \iint_S \frac{p_3(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S, \quad A = \frac{2(1-\nu)}{3-4\nu}. \quad (20)$$

Перемещения  $u_3^t(x)$  можно представить в виде полинома

$$u_3^t(x) = \sum_{i,j=0}^3 d_{ij}^t x_1^i x_2^j \quad (i+j \leq 3), \quad (21)$$

если тепловой поток  $q(x)$  задать формулой (9), а при вычислении интеграла для функции  $\gamma(\xi)$  использовать формулы (7), (9) и (11).

На включении при  $x_3 = 0$  суммарные перемещения (12)  $u_3(x) = 0$ . Поэтому с учетом выражений (17), (19), (20) приходим к сингулярному интегральному уравнению для определения усилий  $p_3(\xi)$ :

$$\iint_S \frac{p_3(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S = -8\pi GA u_{30}(x) \quad (x \in S), \quad (22)$$

$$u_{30}(x) = u_3^t(x) + u_3^p(x). \quad (23)$$

Это уравнение совпадает с приведенным в работе [8].

**Решение интегрального уравнения.** Интегральное уравнение (22) имеет решение в классе неограниченных на контуре области  $S$  функций, которое ищем в виде

$$p_3(\xi) = \frac{8G}{\pi} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{L(\xi)}}. \quad (24)$$

Рассмотрим случай, когда  $u_{30}(x)$  и  $\psi(\xi)$  представлены полиномами третьей степени

$$u_{30}(x) = \sum_{i,j=0}^3 d_{ij} x_1^i x_2^j \quad (i+j \leq 3), \quad (25)$$

$$\Psi(\xi) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \quad (26)$$

Причем согласно формулам (17), (21) и (23) коэффициенты  $d_{00}$ ,  $d_{10}$  и  $d_{01}$  содержат неизвестные постоянные  $b_{00}$ ,  $b_{10}$ ,  $b_{01}$ , т. е.

$$\begin{aligned} d_{00} &= d_{00}^t - b_{00}, & d_{10} &= d_{10}^t + b_{10}, \\ d_{01} &= d_{01}^t - b_{01}, & d_{ij} &= d_{ij}^t \quad (i+j > 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Подставим соотношения (24)–(26) в интегральное уравнение (22) и вычислим интегралы

$$I_{ij}(x) = \frac{1}{\pi^2} \iint_S \frac{\xi_1^i \xi_2^j}{\sqrt{L(\xi)R(x, \xi)}} d_\xi S \quad (i, j = 0, 1, 2), \quad (28)$$

а именно

$$\begin{aligned} I_{00}(x) &= 1, & I_{10}(x) &= \frac{x_1}{2}, & I_{20}(x) &= \frac{4a^2 + 5x_1^2 - x_2^2}{16}, \\ I_{01}(x) &= \frac{x_2}{2}, & I_{11}(x) &= \frac{3x_1x_2}{8}, & I_{02}(x) &= \frac{4a^2 - x_1^2 + 5x_2^2}{16}, \\ I_{12}(x) &= \frac{2a^2x_1 - x_1^3 + 9x_1x_2^2}{32}, & I_{30}(x) &= \frac{6a^2x_1 + 7x_1^3 - 3x_1x_2^2}{32}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражения для  $I_{21}(x)$  и  $I_{03}(x)$  получаем из приведенных выше заменой  $x_1 \leftrightarrow x_2$ . Тогда для определения неизвестных коэффициентов  $a_{ij}$  имеем систему линейных алгебраических уравнений, после решения которой находим

$$\begin{aligned} a_{00} &= -A \left[ d_{00} - a^2 (d_{20} + d_{02}) \right], \\ a_{10} &= -\frac{2A}{3} \left[ 3d_{10} - a^2 (d_{12} + 3d_{30}) \right], \\ a_{11} &= -\frac{8A}{3} d_{11}, & a_{01} &= -\frac{2A}{3} \left[ 3d_{01} - a^2 (d_{21} + 3d_{03}) \right], \\ a_{20} &= -\frac{2A}{3} (5d_{20} + d_{02}), & a_{02} &= -\frac{2A}{3} (d_{20} + 5d_{02}), \\ a_{12} &= -\frac{8A}{15} (3d_{30} + 7d_{12}), & a_{21} &= -\frac{8A}{15} (7d_{21} + 3d_{03}) \\ a_{30} &= -\frac{8A}{15} (9d_{30} + d_{12}), & a_{03} &= -\frac{8A}{15} (9d_{03} + d_{21}). \end{aligned} \quad (30)$$

Коэффициенты  $a_{00}$ ,  $a_{10}$  и  $a_{01}$ , учитывая соотношения (27), запишем

через неизвестные постоянные  $b_{00}$ ,  $b_{10}$ ,  $b_{01}$ :

$$a_{00} = a_{00}^t + Ab_{00}, \quad a_{10} = a_{10}^t - 2Ab_{10}, \quad a_{01} = a_{01}^t + 2Ab_{01}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} a_{00}^t &= -A \left[ d_{00}^t - a^2 (d_{20} + d_{02}) \right], \\ a_{10}^t &= -\frac{2A}{3} \left[ 3d_{10}^t - a^2 (d_{12} + 3d_{30}) \right], \\ a_{01}^t &= -\frac{2A}{3} \left[ 3d_{01}^t - a^2 (d_{21} + 3d_{03}) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Для определения коэффициентов  $b_{00}$ ,  $b_{10}$ ,  $b_{01}$  по формулам (24), (26), (30) и (31) находим выражения для усилий  $p_3(\xi)$ , подставляем их в уравнения (18), вычисляем интегралы и получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 3a_{00}^t + 3Ab_{00} + a^2 (a_{20} + a_{02}) &= 0, \\ 5a_{10}^t - 10Ab_{10} + a^2 (a_{12} + 3a_{30}) &= 0, \\ 5a_{01}^t + 10Ab_{01} + a^2 (a_{21} + 3a_{03}) &= 0, \end{aligned}$$

решив которую имеем:

$$\begin{aligned} b_{00} &= -\frac{1}{3A} \left[ 3a_{00}^t + a^2 (a_{20} + a_{02}) \right], \\ b_{10} &= \frac{1}{10A} \left[ 5a_{10}^t + a^2 (a_{12} + 3a_{30}) \right], \\ b_{01} &= -\frac{1}{10A} \left[ 5a_{01}^t + a^2 (a_{21} + 3a_{03}) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставив (33) в (31), получаем

$$\begin{aligned} a_{00} &= -\frac{a^2}{3} (a_{20} + a_{02}), \quad a_{10} = -\frac{a^2}{5} (a_{12} + 3a_{30}), \\ a_{01} &= -\frac{a^2}{5} (a_{21} + 3a_{03}). \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая соотношения (30) и (34), запишем

$$\begin{aligned} a_{00} &= \frac{4Aa^2}{3} (d_{20} + d_{02}), \quad a_{10} = \frac{16Aa^2}{15} (3d_{30} + d_{12}), \\ a_{01} &= \frac{16Aa^2}{15} (d_{21} + 3d_{03}), \quad a_{11} = -\frac{8A}{3} d_{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{20} &= -\frac{2A}{3}(5d_{20} + d_{02}), & a_{02} &= -\frac{2A}{3}(d_{20} + 5d_{02}), \\
a_{12} &= -\frac{8A}{15}(3d_{30} + 7d_{12}), & a_{21} &= -\frac{8A}{15}(7d_{21} + 3d_{03}) \\
a_{30} &= -\frac{8A}{15}(9d_{30} + d_{12}), & a_{03} &= -\frac{8A}{15}(9d_{03} + d_{21}).
\end{aligned} \tag{35}$$

По формулам (24), (26), (35) находим усилия  $p_3(x)$ .

**Анализ результатов численных исследований.** Зададим на включении тепловой поток

$$q(x) = q_{00} + q_{10}x_1 + q_{01}x_2 \tag{36}$$

и определим обусловленные им перемещения  $u_i^t(x)$  на месте включения при  $x_3 = 0$ .

В соответствии с первой формулой (15) перемещения  $u_1^t(x) = 0$  и  $u_2^t(x) = 0$ , а  $u_3^t(x)$  с учетом формул (7), (9), (11) и (19) запишем так:

$$\begin{aligned}
u_3^t(x) &= \frac{m\pi}{8\lambda} \left\{ \frac{a^2}{2} q_{00} + \frac{a^2}{6} (q_{10}x_1 + q_{01}x_2) - \frac{1}{4} q_{00} (x_1^2 + x_2^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{x_1x_2}{8} (q_{10}x_2 + q_{01}x_1) - \frac{1}{8} (q_{10}x_1^3 + q_{01}x_2^3) \right\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Введем в формуле (37) замену переменных

$$x_1 = ar \cos \theta, \quad x_2 = ar \sin \theta \tag{38}$$

и представим перемещение  $u_3^t(x)$  в виде

$$\begin{aligned}
u_3^t(r, \theta) &= \frac{m\pi a^2}{16\lambda} \{ u_{31}^t(r, \theta) + u_{32}^t(r, \theta) \}, \\
u_{31}^t(r, \theta) &= q_{00} \left( 1 - \frac{r^2}{2} \right), \\
u_{32}^t(r, \theta) &= (q_{10} \cos \theta + q_{01} \sin \theta) \frac{r^2}{12} (4 - 3r^2).
\end{aligned}$$

На рис. 1 в зависимости от радиуса  $r$  представлены перемещения  $u_{31}^*(r, \theta) = u_{31}^t(r, \theta)/q_{00}$  (штриховая кривая) и  $u_{32}^*(r, \theta) = u_{32}^t(r, \theta)/q_1$  ( $q_1 = q_{10} = q_{01}$ ) для разных углов  $\theta$ , причем кривые для  $\theta = 0$  (сплошная),  $\theta = \pi$  (штриховая) и  $\theta = \pi/4$  (точечная),  $\theta = 5\pi/4$  (штрихпунктирная) симметричны относительно прямой  $u_{32}^*(r, \theta) = 0$ , которая соответствует углу

$\theta = 3\pi/4$ . Для  $r=0$  имеем  $u_{32}^*(r, \theta) = 0$ ,  $u_{31}^*(r, \theta) = 1$ . На рис. 2 в зависимо-

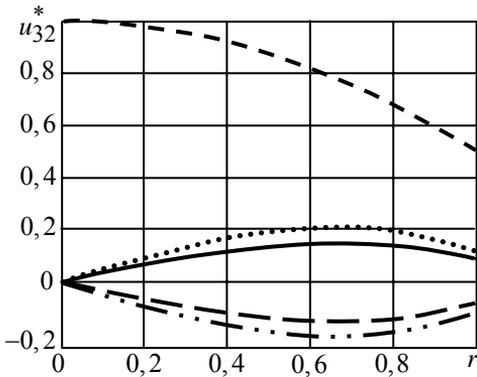


Рис. 1

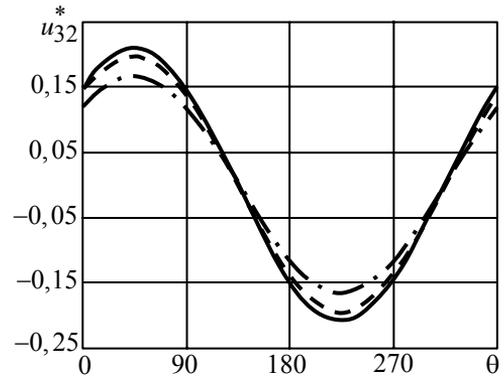


Рис. 2

сти от угла  $\theta$  показаны перемещения  $u_{32}^*(r, \theta)/q_1$  для радиуса  $r$  равного 0,7 (сплошная кривая), 0,8 (штриховая кривая) и 0,9 (штрихпунктирная кривая).

На основании соотношений (24)–(26), (35)–(37) определяем усилия  $p_3(x)$

$$p_3(x) = \frac{Gm}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{L(x)}} \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} x_1^i x_2^j, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} a_{00} &= -\frac{2Aa^2 q_{00}}{3}, & a_{10} &= -\frac{8Aa^2 q_{10}}{15}, \\ a_{01} &= -\frac{8Aa^2 q_{01}}{15}, & a_{11} &= 0, \\ a_{20} &= a_{02} = Aq_{00}, \\ a_{12} &= a_{30} = \frac{2Aq_{10}}{3}, & a_{21} &= a_{03} = \frac{2Aq_{01}}{3}. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставив выражения (40) в соотношение (39), имеем

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{Gm}{15\lambda} \frac{A}{\sqrt{L(x)}} \left[ -10a^2 q_{00} - 8a^2 (q_{10}x_1 + q_{01}x_2) + \right. \\ &\quad \left. + 15q_{00}(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1x_2(q_{10}x_2 + q_{01}x_1) + 10(q_{10}x_1^3 + q_{01}x_2^3) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

или, после замены переменных (37),

$$p_3(r, \theta) = \frac{GAm}{15\lambda} [p_{31}(r, \theta) + p_{32}(r, \theta)],$$

$$p_{31}(r, \theta) = -\frac{5q_{00}}{\sqrt{1-r^2}}(2-3r^2),$$

$$p_{32}(r, \theta) = -\frac{2r(4-5r^2)}{\sqrt{1-r^2}}(q_{10} \cos \theta + q_{01} \sin \theta).$$

На рис. 3 в зависимости от радиуса  $r$  представлены усилия  $p_{31}^*(r, \theta) = p_{31}(r, \theta)/q_{00}$  (штриховая кривая) и  $p_{32}^*(r, \theta) = p_{32}(r, \theta)/q_1$  ( $q_1 = q_{10} = q_{01}$ ) для разных углов  $\theta$ , причем кривые для  $\theta = 0$  (сплошная),  $\theta = \pi$  (штриховая) и  $\theta = \pi/4$  (точечная),  $\theta = 5\pi/4$  (штрихпунктирная) симметричны относительно прямой  $p_{32}^*(r, \theta) = 0$ , которая соответствует

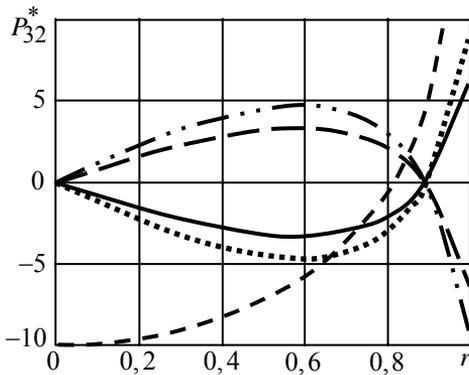


Рис. 3

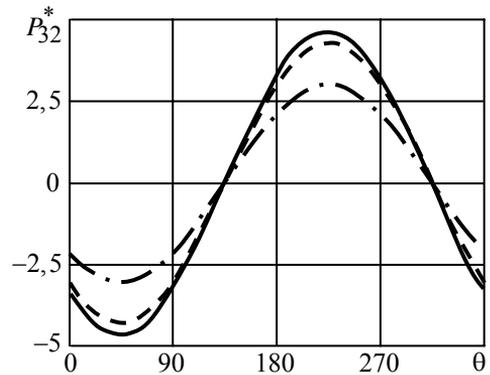


Рис. 4

углу  $\theta = 3\pi/4$ . Для  $r = 0$  и  $r = 2/\sqrt{5}$  кривые  $p_{32}^*(r, \theta) = 0$ , а при  $r \rightarrow 1$  усилия  $p_{31}^*(r, \theta) \rightarrow \infty$  и  $p_{32}^*(r, \theta) \rightarrow \infty$ . На рис. 4 усилия  $p_{32}^*(r, \theta)/q_1$  показаны для различных значений радиусов  $r$  в зависимости от угла  $\theta$ .

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язана задача термопружності для тіла з абсолютно жорстким теплонепроникним включенням у формі тонкого диска при заданому далеко від нього тепловому потоці. Диск при нагріванні не деформується. Задача зведена до розв'язування двовимірного інтегрального рівняння, з якого визначаються зусилля, що діють на тіло зі сторони включення. Для кругового включення вказана методика точного розв'язку рівняння, права частина якого є поліномом. Наведено приклад, коли на включенні задано лінійний розподіл теплового потоку.

**Ключові слова:** тонке жорстке теплонепроникне включення, теплопровідність, термопружність.

**SUMMARY.** The thermoelasticity problem for a body with perfectly rigid heat-proof inclusion of thin disc shape has been solved. The heat flow are given far from the inclusion and it does not deform in the process of heating. The problem is reduced to solving of 2D integral equation from which the forces acting on the body from the inclusion side have been determined. For a circular inclusion the procedure of exact solution of the equation, the right-hand part of which is a polynomial, has been proposed. The example for the case when the heat flow linear distribution on the inclusion has been given.

**Key words:** thin rigid heat-proof inclusion, heat conductivity, thermoelasticity

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. *Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.– К.: Наук. думка, 1983.– 288с.
2. *Kit G. S.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.*– 2008.– Т. 51, № 4.– С. 120–128.
3. *Kit G. S., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.*– 2010.– Т. 53, № 1.– С. 58–70.
4. *Kit G. S., Сушко О. П.* Термоупругое состояние тела с теплоактивным тонким жестким дисковым включением // *Теорет. и прикладная механика.*– 2012.– № 4 (50).– С. 15–22.
5. *Kit G. S., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами.– К.: Наук. думка, 1989.– 284 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости.– М.: Мир, 1975.– 872 с.
7. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007.– 716 с.
8. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения.– К.: Наук. думка, 1993.– 253 с.

*Институт прикладных проблем механики  
и математики НАН Украины, г.Львов*

*Поступила 22.08.2013 г.*

УДК 620.179

*В. Р. БОГДАНОВ*, канд. физ.-мат. наук,  
*Г. Т. СУЛИМ*, д-р физ.-мат. наук

### ПРОДВИЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНЫ В КОМПАКТНОМ ОБРАЗЦЕ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССА РАЗГРУЗКИ МАТЕРИАЛА

*Разработана аналитико-численная методика решения пространственных задач развития трещины в компактном образце для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе в упругопластической динамической постановке с учетом процесса разгрузки материала. Численное решение получено с использованием метода конечных разностей. Квазистатическая упругопластическая постановка сравнивается с динамической постановкой. Трещина подрастает согласно условию расположения максимальных разрывных напряжений в зоне непосредственного продолжения острия трещины.*

*Ключевые слова:* Компактный образец, пластическая деформация, рост трещины, пространственная задача, разгрузка, динамика.

В работе [2] решена пространственная задача о развитии пластических деформаций возле движущегося острия трещины. В публикациях [4,11] вязкость разрушения определяется на основе решения задачи о плоском деформированном состоянии и пространственной задачи в динамической упругопластической постановке соответственно допущению, что трещина неподвижна. Использование указанных динамических упругопластических моделей дает возможность значительно повысить уровень адекватности использованных для вычислений математических моделей относительно реальных материалов и изготовленных из них образцов. В работе [3] решается пространственная задача трехточечного изгиба бруса с пропилом посередине в квазистатической постановке. При этом сопоставляются результаты в квазистатической и динамической постановках. В вышеуказанных работах зона контакта ударника и образца предполагалась неизменной и односвязной. Так, в работе [7] решена плоская задача взаимодействия абсолютно твердого ударника и упругого изотропного однородного полупространства на сверхзвуковом этапе в рамках теории упругости в условиях жесткого сцепления контактирующих поверхностей. Зона контакта может быть многосвязной областью. Задача динамики взаимодействия ударника с полупространством сведена к начальной задаче Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений.

В данной статье в отличие от [2, 4, 11] решается упругопластическая трехмерная динамическая задача с учетом подрастания трещины и явления механической разгрузки материала.

**Постановка задачи.** Рассмотрим деформирование изотропного бруса  $\Sigma = L \times B \times H : \{|x| \leq L/2, 0 \leq y \leq B, 0 \leq z \leq H\}$ , имеющего форму прямоугольного параллелепипеда длины  $L$ , ширины  $B$ , толщины  $H$  (рис. 1 а) с

пропил-трещиной вдоль прямоугольника  $\{x=0, 0 \leq y \leq l=l_0, 0 \leq z \leq H\}$  срединного сечения  $x=0$  (компактный образец). Брус контактирует с двумя неподвижными гладкими опорами по области  $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a, y=0, 0 \leq z \leq H\}$ . Сверху на брус падает абсолютно твердый ударник, контактирующий с брусом по области  $\{|x| \leq A, y=B, 0 \leq z \leq H\}$  на протяжении короткого промежутка времени. Как свидетельствуют эксперименты [12], разрушение компактных образцов при ударном нагружении происходит на протяжении примерно 40 микросекунд. Будем рассматривать процесс нагружения на не менее чем в два раза большем интервале времени. Поэтому действие ударника моделируем равномерно распределенным в зоне контакта нормальным напряжением  $-P$ , изменяющимся со временем как линейная функция. Допустим также, что область контакта образца с ударником и плоскими гладкими опорами все время остается неизменной. Поскольку процесс деформирования является симметричным относительно плоскости  $x=0$ , дальше рассматривается только правая часть поперечного сечения (см. рис. 1 а). Будем считать, что процесс деформирования является упругопластическим с упрочнением, причем расчеты полей напряжений, деформаций и их приращений, в частности приращений интенсивности пластических деформаций, а также параметра Одквиста будем ниже осуществлять на основе численного решения с использованием сеточного метода соответствующей динамической упругопластической задачи. Также учтем и возможность упругой разгрузки материала. Предпо-

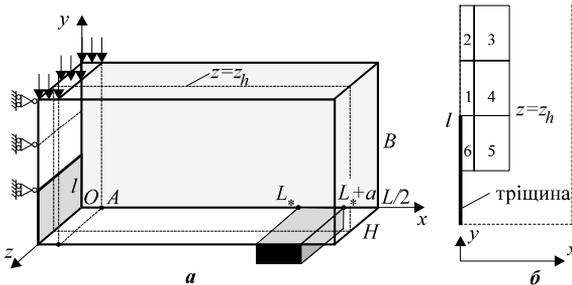


Рис. 1.

лагается также, что фронт трещины во время ее развития остается прямолинейным и параллельным оси  $Oz$ . Так что изменяющуюся со временем величину  $l$  будем считать длиной трещины.

Рассмотрим уравнения пространственной динамической теории, для которой компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  связаны с компонентами тензора деформаций соотношениями Коши. Уравнения движения среды плотности  $\rho$  имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.$$

Краевые условия задачи учитывают изменение длины трещины и отсутствие контакта между ее берегами или существования на них других нагрузок, причем искривлением фронта трещины пренебрегаем, считая его прямым и параллельным оси  $Oz$ . Таким образом, краевые и начальные условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 \quad (x = 0, \quad 0 < y < l, \quad 0 < z < H); \\
& u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 \quad (x = 0, \quad l < y < B, \quad 0 < z < H); \\
& \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 \quad (x = L/2, \quad 0 < y < B, \quad 0 < z < H); \\
& \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (y = 0, \quad 0 < x < L_*, \quad 0 < z < H); \\
& u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (y = 0, \quad L_* < x < L_* + a, \quad 0 < z < H); \\
& \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (y = 0, \quad L_* + a < x < L/2, \quad 0 < z < H); \\
& \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (y = B, \quad 0 < x < A, \quad 0 < z < H); \\
& \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (y = B, \quad A < x < L/2, \quad 0 < z < H); \\
& u_z = 0, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 \quad (z = 0, \quad 0 < x < L/2, \quad 0 < y < B); \\
& \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (z = H, \quad 0 < x < L/2, \quad 0 < y < B); \\
& u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad \dot{u}_x = 0, \quad \dot{u}_y = 0, \quad \dot{u}_z = 0, \quad l = l_0 \quad t = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Здесь точка над символом означает производную по времени.

За физическую модель материала принята модель, основанная на теории неизотермического пластического течения для среды с упрочнением и условием текучести Губера-Мизеса вместе с гипотезой кратковременной ползучести [9]. Таким образом, уравнения связи между напряжениями и деформациями имеют вид [1]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij}d\lambda, \quad (2)$$

где  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$  – девиатор тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $G$  – модуль сдвига;  $K = 3K_1$ ,  $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$  – модуль объемного сжатия, что связывает объемное расширение  $3\varepsilon$ , среднее напряжение  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$  в соотношении  $\varepsilon = K\sigma$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости (Юнга);  $d\lambda$  – некоторая скалярная функция, что определяется формой поверхности нагружения и квадратично зависит от компонент девиатора напряжений  $s_{ij}$  [9], причем

$$d\lambda = \left\{ 0 \quad (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0), \quad \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (f = 0, \quad df = 0) \right\}, \quad (3)$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ \left( d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p \right)^2 + \left( d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p \right)^2 + \left( d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p \right)^2 + \right. \\ \left. + 6 \left( \left( d\varepsilon_{xy}^p \right)^2 + \left( d\varepsilon_{xz}^p \right)^2 + \left( d\varepsilon_{yz}^p \right)^2 \right) \right]^{1/2}, \\ \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \right)^2 + \left( \sigma_{xx} - \sigma_{zz} \right)^2 + \left( \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \right)^2 + 6 \left( \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \right) \right]^{1/2},$$

где  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i^p$ ,  $d\varepsilon_i^p$  – интенсивности напряжений, пластических деформаций и приращений последних.

Будем считать, что в результате пластического деформирования происходит упрочнение материала по такому температурному соотношению [6]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0) \left( 1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0} \right)^{\eta^*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \quad (4)$$

где  $T$  – температура;  $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$  – параметр Одквиста;  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\eta^*$  – коэффициент упрочнения;  $\sigma_S(T)$  – граница текучести после упрочнения материала при температуре  $T$ .

**Методика решения.** Для решения задачи применялась численная схема метода конечных разностей с переменным шагом. Предполагалось, что нестационарное взаимодействие происходит в интервале времени  $t \in [0, t_*]$ . Как и в [2–4] необходимое для реализации вычислений численное интегрирование по времени проводилось с использованием квадратурной формулы Грегори [10] порядка  $m_1 = 3$  с коэффициентами  $D_n$  и, проводя такие же самые преобразования как в [2–4], получены выражения для напряжений и приращений деформаций.

Для учета физической нелинейности применялся метод последовательных приближений, который дает возможность нелинейную задачу свести к последовательности линейных задач [2–4, 6]:

$$\psi^{(n+1)} = \left\{ \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} (Q_i < -Q); \psi^{(n)} (|Q_i| < Q); \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)} (Q_i > Q) \right\}, \\ Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T), \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (5)$$

где  $Q$  – наибольшее отклонение интенсивности напряжений  $\sigma_i^{(n)}$  на шаге  $n$  от упрочненной границы текучести;  $n$  – номер приближения в этой последовательности. За нулевое приближение принимается  $\psi^{(0)} = 1 / (2G)$ .

Использованные выше интенсивность напряжений и деформаций определялись для каждой элементарной ячейки из численного решения для поля напряжений и деформаций. Независимым параметром, который характеризует процесс нагружения, есть время  $t_k = k\Delta t$  ( $\Delta t$  – шаг раз-

биения по времени;  $k$  - индекс узла по времени), а поэтому и соответствующая этому моменту времени сила  $F = 2АНР$  ( $P = p_{01} + p_{02}k$ , причем коэффициент  $p_{02}$  изменяется настолько мало, что будет достаточно постоянной величиной) контактного взаимодействия ударника с образцом. Поскольку в механике разрушения вязкость разрушения (трещиностойкость) в основном получают в квазистатических экспериментах и сопоставляют ее с граничными значениями коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $K_I$ , полученным из упругого решения, то для описания изменения отдельных характеристик в роле независимого параметра (переменной) будем использовать приближенное значение КИН  $K_I^e$  (ниже называем его базовым упругим КИН) для упругой задачи трехточечного изгиба балки с трещиной [8]:

$$K_I^e = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left( 1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left( \frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left( \frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left( \frac{l}{B} \right)^4 \right), \quad (6)$$

где  $4B$  - расстояние между опорами.

**Численные результаты и их анализ.** Числовые исследования проводились для компактных образцов из реакторной стали 15Х2НМФА. Для расчетов использовался метод конечных разностей [10] с переменным по координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$  шагом разбиения. Наибольшая плотность сетки разбиения была в области острия трещины, возле границ и срединных плоскостей образца. Вид разбиения в сечении  $z = z_h$  в окрестности фронтальной линии трещины и способ нумерации там ячеек отображено на рис. 1 б. Разбиение  $\Delta t$  по времени равномерное. Использование этого метода для волновых уравнений обосновано в [5], причем обеспечивается точность расчетов с порядком ошибки не большим чем  $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta t)^2)$ .

На рис. 2-4 отображены результаты расчетов компактных образцов длины  $L = 60$  мм, ширины  $B = 10$  мм, толщины  $H = 50$  мм и с глубиной пропила в срединном поперечном сечении  $l_0 = 3$  мм, с коэффициентом упрочнения материала  $\eta^* = 0,05$ . Расстояние между опорными точками равнялась  $a = 40$  мм. Вычисления осуществлены при таких значениях других параметров:  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  с,  $A = 2,5$  мм,  $p_{01} = 8$  МПа,  $p_{02} = 10$  МПа,  $M = 22$ ,  $N = 22$ ,  $K = 21$ ,  $T = 50^\circ \text{C}$ .

Для определения актуальной длины  $l$  трещины в каждый рассматриваемый момент времени использовался такой алгоритм. Если наибольшие значения напряжений нормального разрыва  $\sigma_{xx}$  были выявлены не в ячейках рядка 1 по толщине, а рядка 2, и когда такому условию разрушения соответствуют ячейки рядка, которые составляют вместе не менее 65 % от толщины образца  $H$ , тогда трещина продвигалась на один рядок ячеек вверх. Ячейки рядка 2 становились ячейками рядка 1, изменялась

сетка разбиения, осуществлялась перенумерация ячеек и все величины пересчитывались для увеличенной трещины. Так делалось до тех пор, пока упомянутые наибольшие напряжения не фиксировались во всем рядке ячейки 1.

Учет разгрузки материала происходил по такому алгоритму. Если в какой-нибудь ячейке рядка 1 абсолютное значение разрывающих напряжений становилось меньше, чем уже достигнутое там максимальное значение, тогда считалось, что пластические деформации прекращают увеличиваться в этих ячейках, материал перестает упрочняться и возобновляется линейная зависимость напряжений от деформаций. Пластические деформации снова начинали увеличиваться и упрочнение материала продолжалось, когда абсолютное значение напряжений превышало ранее достигнутое максимальное значение.

На рис. 2, 3 приведены соответственно графики зависимостей длины трещины и параметра Одквиста  $k$  от базового упругого КИН в плоскости

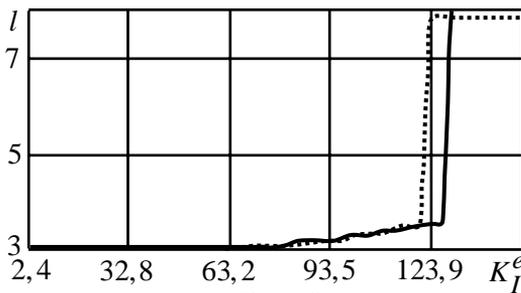


Рис. 2

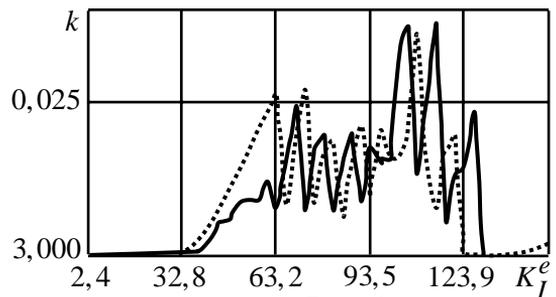


Рис. 3

$z = 41,3 \text{ мм}$ , пунктирная линия отвечает результатам расчетов задачи без учета явления разгрузки материала.

Расчеты свидетельствуют, что трещина начинает расти, когда базовый упругий КИН достигает значения  $K_I^e \equiv K_{I*}^e = 63,2 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$  (в случае без учета разгрузки материала это значение равняется  $66,2 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ ). После достижения упругим КИН значения  $K_I^e \equiv K_{I**}^e = 129,9 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$  (в случае пренебрежения явлением разгрузки материала это значение равняется  $123,9 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ ) напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{zz}$  резко уменьшаются и

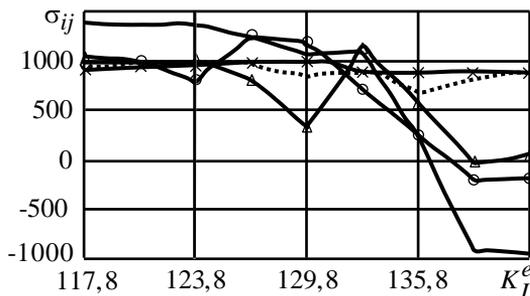


Рис. 4

становятся сжимающими (отрицательными), длина трещины резко увеличивается (см. рис. 2) и достигает значения  $l = 7,9 \text{ мм}$ . Однако, как видно из рис. 4, в этом факте нет никакого противоречия. На рис. 4 изображено процесс увеличения трещины последовательно по итерациям. Тут сплошной, сплошной с треугольником, сплошной с кружочком, сплошной с крестиком

и штриховой линиям соответствуют напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ , упругий предел текучести  $\sigma_S$  и интенсивность напряжений  $\sigma_i$ . В последний момент, когда трещина уже увеличилась до значения  $l=7,9$  мм, напряжения становятся сжимающими.

Решение пространственной задачи в динамической упругопластической формулировке с учетом увеличения трещины и разгрузки материала дает возможность более адекватно определить поля пластических деформаций и напряжений, чем при решении квазистатической упругопластической пространственной задачи напряженно-деформированного состояния, и с большей механической корректностью смоделировать процесс развития трещины. Однако в этом случае все еще остается не решенной проблема обеспечения возможностей достаточно надежного учета зависимости механических постоянных от скорости развития процессов деформирования.

**РЕЗЮМЕ.** Розроблено аналітико-числову методику розв'язування просторових задач розвитку тріщини у компактному зразку для визначення в'язкості руйнування за триточкового згину компактного зразка у пружно-пластичній динамічній математичній постановці із урахуванням явища розвантаження матеріалу. Числовий розв'язок було отримано з використанням методу скінченних різниць. Тріщина підостає відповідно до умови забезпечення максимальних розривних напружень у зоні безпосереднього продовження вістря тріщини.

**Ключові слова:** Компактний зразок, пластична деформація, ріст тріщини, тривимірна задача, розвантаження, динаміка.

**SUMMARY.** The solution of the three dimensional problem and the method of the solution in a dynamic elastic-plastic mathematical model has been developed. The numerical solution has been calculated for a three point band of material with a transversal profile in the shape of a rectangle with a notch-crack in the middle (compact profile) by method of finite differences. The crack's growth was simulated taking into account the process of unloading of the material.

**Key words:** Compact profile, plastic deformation, growing of crack, three dimension problem, unloading, dynamic.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г. Теория пластичности. – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
2. Богданов В. Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини. // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 51-56.
3. Богданов В. Р. О пространственной деформации упругопластического материала с профилем формы компактного образца // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – №. 3 (49). – С. 51–58.
4. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Надійність і довговечність машин і споруджень. – 2010. – № 33. – С. 153–166.
5. Зюкина Е. Л. Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения // Тр. мат. центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань. – Т. 26. – 2004. – С. 151–160.
6. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
7. Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В. Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскости на сверхзвуковом участке внедрения // Вестник МАИ. – Т. 18. – №6. – С. 125–132.

8. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.– К.: Наук. думка, 1988.– 620 с. (Механика разрушения и прочность материалов: В 2 т., Т. 2)
9. Теория пластичности.– М.: ИЛ, 1948.– 460 с.
10. *Хемминг Р. В.* Численные методы.– М.: Наука, 1972.– 399 с.
11. *Bohdanov V. R., Sulym G. T.* Evaluation of crack resistance based on the numerical modeling of the plane strained state // Material Science.– 2011.– Vol. 46, № 6.– P. 723–732.
12. *Weisbrod G., Rittel D.* A method for dynamic fracture toughness determination using short beams // Int. J. of Fract.– Vol. 104.– 2000.– P. 89–103.

*Национальный транспортный университет, г. Киев  
Львовский национальный университет*

*Поступила 28.05.2012*

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,  
 Е. В. АДЮШИНА, канд. физ.-мат. наук,  
 Е. И. СОШИНА

## КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

*С использованием теории функций комплексного переменного рассматривается задача о кручении анизотропного цилиндра многосвязного поперечного сечения. Получены общие представления комплексного потенциала теории кручения, содержащие неизвестные коэффициенты рядов, определение которых обобщенным методом наименьших квадратов сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для кругового цилиндра с отверстием или трещиной проведены численные исследования с их анализом и установлением закономерностей изменений напряженного состояния в зависимости от геометрических характеристик цилиндра и свойств его материала.*

**Ключевые слова:** кручение, анизотропный цилиндр, отверстия и трещины, комплексные потенциалы.

Хотя основные соотношения теории кручения анизотропных цилиндров были выведены еще С. Г. Лехницким [6], до сих пор не получены решения многих практически важных задач о кручении цилиндров с продольными полостями произвольной конфигурации. Некоторые исследования выполнены лишь в работах [3, 5].

В данной работе дано общее представление комплексного потенциала теории кручения для цилиндра с произвольными эллиптическими отверстиями или трещинами, в том числе выходящими на границу. Описаны результаты численных исследований для кругового кольца, цилиндра с трещиной, цилиндра с продольной полостью квадратного сечения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим отнесенное к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxuz$  цилиндрическое тело постоянного поперечного сечения с продольными полостями, образующие к которым параллельны оси цилиндра, совпадающей с осью  $Oz$ . Поперечное сечение цилиндра занимает многосвязную область  $S$  (рис. 1), ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с центрами в точках  $(x_{0l}, y_{0l})$  и полуосями  $a_l, b_l$ , причем полуось  $a_l$  с осью  $Ox$  образует угол  $\varphi_l$ . Эллипсы  $L_l$  могут располагаться произвольно относительно друг друга и внешнего контура, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации. Цилиндр изготовлен из однородного прямолинейно анизотропного

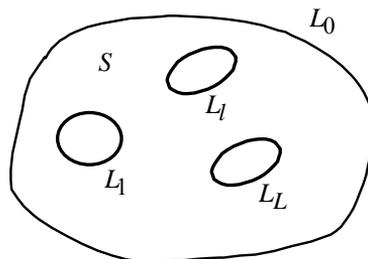


Рис. 1

материала. В каждой его точке имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярная к оси цилиндра. Внешняя поверхность цилиндра и поверхности полостей свободны от усилий, один из концов цилиндра жестко закреплен, на другом приложены усилия, приводящиеся к крутящему моменту  $M_0$ .

Решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния рассматриваемого цилиндра при использовании комплексного потенциала кручения сводится к нахождению функции

$$\varphi(x, y) = 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_3(z_3) + \gamma z_3 \overline{z_3} \right]. \quad (1)$$

где

$$\gamma = -\vartheta / 2a_{55}\beta_3^2; \quad z_3 = x + \mu_3 y; \quad (2)$$

$\mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3$  – корень характеристического уравнения

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0 \quad (3)$$

$a_{ik}$  – коэффициенты деформации материала цилиндра;  $\vartheta$  – крутка;  $\Phi_3(z_3)$  – комплексный потенциал кручения, определяемый из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_3(z_3) \right] = c_l - 2 \operatorname{Re} \left[ \gamma z_3 \overline{z_3} \right] \text{ на } L_l \quad (l = \overline{0, \mathcal{L}}), \quad (4)$$

которые для многосвязной области удобнее использовать в дифференциальной форме

$$2 \operatorname{Re} \left[ \delta_3 \Phi_3'(z_3) \right] = -2 \operatorname{Re} \left[ \gamma \overline{\delta_3} z_3 \right] \text{ на } L_l \quad (l = \overline{0, \mathcal{L}}); \quad (5)$$

$\delta_3 = dz_3/ds$ ;  $c_l$  – постоянные, одна из которых, например,  $c_0$  произвольна и может приниматься равной нулю.

Комплексный потенциал  $\Phi_3(z_3)$  определен в области  $S_3$ , получаемой из области  $S$  аффинным преобразованием (2) и ограниченной контурами  $L_{3l}$ , соответствующими контурам  $L_l$ . Эту функцию и ее производную представим в виде [4]

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_3) &= \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \\ \Phi_3'(z_3) &= \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \delta_3 \varphi'_{3ln}(z_3), \end{aligned} \quad (6)$$

в котором

$$\varphi_{30n}(z_3) = \frac{z_3^n}{R_{30}^n}, \quad \varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n},$$

$$\varphi'_{30n}(z_3) = \frac{n z_3^{n-1}}{R_{30}^n}, \quad \varphi'_{3ln}(z_3) = -\frac{n}{\zeta_{3l}^{n-1} R_{3l} (\zeta_{3l}^2 - m_{3l})}; \quad (7)$$

$\zeta_{3l}$  – переменные, получаемые из конформных отображений

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l} \left( \zeta_{3l} + \frac{m_{3l}}{\zeta_{3l}} \right) \quad (8)$$

внешности единичных кругов  $|\zeta_{3l}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{3l}$ ;

$$\begin{aligned} z_{3l} &= x_{0l} + \mu_3 y_{0l}, \\ R_{3l} &= \frac{[a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)]}{2}, \\ m_{3l} &= \frac{[a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)]}{2R_{3l}}; \end{aligned}$$

$a_{3ln}$  – постоянные, которые при использовании дифференциальной формы граничных условий (5) будем определять из них обобщенным методом наименьших квадратов. Для этого на контурах  $L_l$  ( $l = \overline{0, \mathcal{L}}$ ) выберем систему точек  $t_m$  ( $m = \overline{1, M}$ ), в которых удовлетворим граничным условиям (5). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_3 \varphi'_{3ln}(t_{3lm}) a_{3ln} = -2 \operatorname{Re} (\gamma \overline{\delta_3 t_{lm}}) \quad (m = \overline{1, M}), \quad (9)$$

Псевдорешения этой системы найдем с использованием сингулярного разложения [1, 7]. После решения этой системы станет известной производная функции  $\Phi'_3(z_3)$ , что позволит по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= 2 \operatorname{Re} \left[ \mu_3 \Phi'_3(z_3) + \gamma \overline{\mu_3 z_3} \right], \\ \tau_{yz} &= -2 \operatorname{Re} \left[ \Phi'_3(z_3) + \gamma z_3 \right], \end{aligned} \quad (10)$$

вычислить напряжения на основных площадках, а по ним и напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{nz} &= \tau_{yz} \cos ny + \tau_{xz} \cos nx, \\ \tau_{sz} &= \tau_{yz} \cos nx - \tau_{xz} \cos ny, \end{aligned} \quad (11)$$

на взаимноперпендикулярных площадках с нормальными  $n$  и  $s$ . В случае трещин, используя формулу [2]

$$k_3 = \sqrt{a_l} \operatorname{Re} \left( (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n \frac{a_{3ln}}{R_{3l}} \right). \quad (12)$$

можно вычислять и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Численные исследования были проведены для кругового цилиндра кольцевого сечения, кругового цилиндра с трещиной, кругового цилиндра с квадратной полостью. При проведении расчетов количество членов в рядах (6) и точек на контурах  $L_l$ , в которых удовлетворялись граничные условия, увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, в зависимости от геометрических характеристик цилиндра необходимо было в указанных рядах оставлять от 5 до 90 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 500 «коллокационных точек»  $t_m$ . Ниже описаны некоторые их полученных результатов. В них все значения напряжений и КИН приведены с точностью до крутки 9.

В табл. 1 для кольцевого цилиндра в зависимости от значений отношения  $a_{44}/a_{55}$  ко-

эффициентов деформации и отношения  $a_1/a_0$  радиусов внутреннего  $L_1$  и внешнего  $L_0$  контуров кольца приведены значения напряжений  $\tau_{sz}$  на площадках, нормальных к контурам, в точках А и В, а на рис. 2 для некоторых значений  $a_{44}/a_{55}$  изображены графики их распределения. Как видно, с увеличением значения  $a_1/a_0$  (с уменьшением ширины кольца) и с ростом  $a_{44}/a_{55}$  концентрация напряжений в цилиндре растет.

На рис. 3 и рис. 4 изображены графики изменения напряжений  $\tau_{sz}$  вблизи внешнего контура и КИН  $k_3^+$  для левого конца трещины в круговом цилиндре радиуса  $a_0$  с центральной трещиной длины  $2l$  в зависимости от отношения  $l/a_0$ . Сплошные, пунктирные и штриховые линии соответствуют случаям, когда  $a_{44}/a_{55}$  равно соответственно 10, 0; 1, 0 и 0, 1. Из рис. 3, 4 следует, что с увеличением  $l/a_0$  концентрация напряжений и КИН в зоне между концом трещины и внешним контуром растут. Этот рост особенно значителен для  $a_{44}/a_{55} > 1$ .

На рис. 3 и рис. 4 изображены графики изменения напряжений  $\tau_{sz}$  вблизи внешнего контура и КИН  $k_3^+$  для левого конца трещины в круговом цилиндре радиуса  $a_0$  с центральной трещиной длины  $2l$  в зависимости от отношения  $l/a_0$ . Сплошные, пунктирные и штриховые линии соответствуют случаям, когда  $a_{44}/a_{55}$  равно соответственно 10, 0; 1, 0 и 0, 1. Из рис. 3, 4 следует, что с увеличением  $l/a_0$  концентрация напряжений и КИН в зоне между концом трещины и внешним контуром растут. Этот рост особенно значителен для  $a_{44}/a_{55} > 1$ .

Таблица 1

Контур	$\frac{a_{44}}{a_{55}}$	$a_1/a_0$				
		0,1	0,5	0,8	0,9	0,99
А	0,1	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181
	1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	10	1,818	1,818	1,818	1,818	1,818
В	0,1	0,018	0,090	0,145	0,172	0,180
	1	0,100	0,500	0,800	0,950	0,980
	10	0,181	0,909	1,455	1,727	1,800

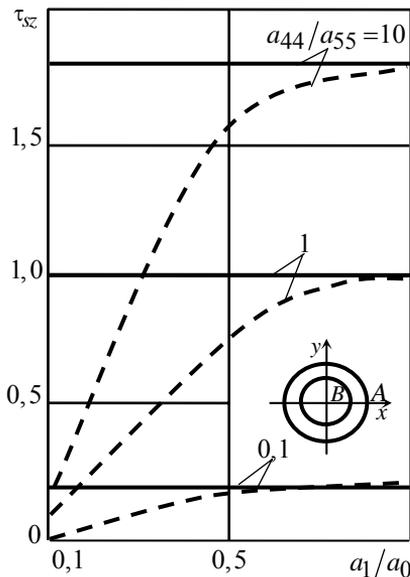


Рис. 2

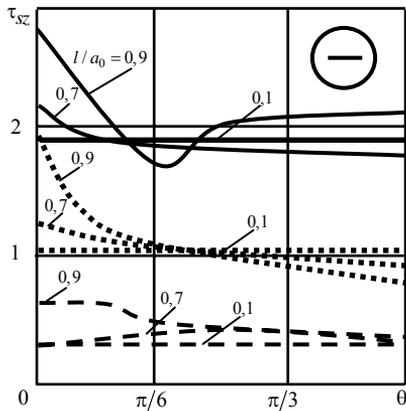


Рис. 3

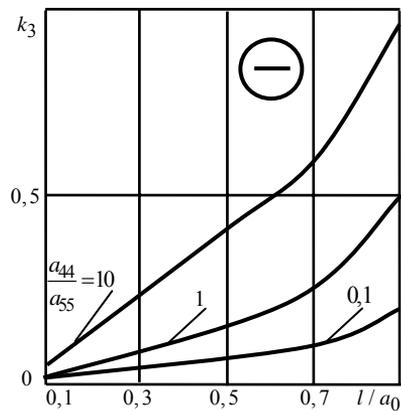


Рис. 4

В табл. 2 для кругового цилиндра радиуса  $a_0$  с диаметральной трещиной длины  $2l$  при  $l/a_0=0,3$  приведены значения напряжений  $\tau_{sz}$  в точках внешнего контура в зависимости от  $c/a_0$ , где  $c$  – расстояние ме-

Таблица 2

$a_{44}/a_{55}$	$\theta$ , рад	$c/a_0$					
		0	0,25	0,5	0,6	0,65	0,7
10	0	1,822	1,922	2,310	2,865	3,510	–
	$\pi/180$	1,822	1,921	2,288	2,843	3,500	0,252
	$\pi/12$	1,822	1,821	1,795	1,781	1,758	1,571
	$\pi/6$	1,822	1,816	1,819	1,834	1,828	1,755
	$\pi/4$	1,822	1,818	1,827	1,845	1,845	1,795
	$\pi/2$	1,822	1,819	1,839	1,876	1,903	1,810
	$3\pi/4$	1,822	1,817	1,817	1,829	1,857	1,811
	$\pi$	1,822	1,782	1,756	1,760	1,812	1,660
1	0	1,002	1,054	1,301	1,780	2,580	–
	$\pi/180$	1,002	1,053	1,300	1,760	2,490	0,083
	$\pi/12$	1,002	1,042	1,107	1,068	0,996	0,507
	$\pi/6$	1,001	1,022	1,001	0,953	0,922	0,691
	$\pi/4$	0,999	1,007	0,973	0,943	0,931	0,851
	$\pi/2$	0,998	0,989	0,970	0,962	0,962	0,910
	$3\pi/4$	0,999	0,985	0,976	0,972	0,968	0,942
	$\pi$	1,002	0,985	0,978	0,974	0,969	0,950
0,1	0	0,181	0,184	0,212	0,296	0,468	–
	$\pi/180$	0,181	0,184	0,213	0,292	0,467	0,019
	$\pi/12$	0,182	0,184	0,217	0,288	0,335	0,077
	$\pi/6$	0,182	0,186	0,222	0,231	0,215	0,090
	$\pi/4$	0,182	0,190	0,198	0,182	0,169	0,096
	$\pi/2$	0,180	0,175	0,174	0,176	0,176	0,173
	$3\pi/4$	0,182	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181
	$\pi$	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181

жду центрами внешнего контура и трещины, а на рис. 5 изображены графики изменения КИН. Заметим, что значения величин при  $c/a_0 = 0,7$  соответствуют случаю краевой трещины длины  $2l = 0,6 a_0$ . Из приведен-

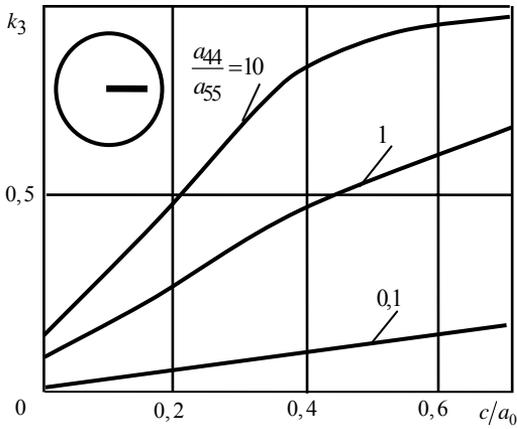


Рис. 5

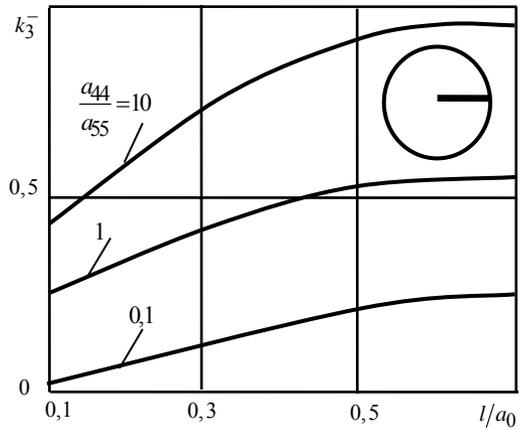


Рис. 6

ных данных видно, что при сближении трещины с внешним контуром значение КИН для правого (близкого к внешнему контуру) конца трещины и напряжений в зоне между этим концом трещины и контуром растут. При этом значения КИН для левого конца и напряжений в других зонах изменяются незначительно. При выходе трещины на внешний край концентрации напряжений в зоне около точки выхода резко снижается.

На рис. 6 представлены графики изменения значений КИН  $k_3^-$  для кругового цилиндра с радиусом  $a_0$  и краевой трещиной длины  $l$  в зависимости от  $l/a_0$ . Из рис. 6 следует, что при увеличении длины краевой трещины и отношения  $a_{44}/a_{55}$  значения  $k_3^-$  увеличиваются.

На рис. 7 приведены графики распределения напряжений  $\tau_{sz}$  вблизи внешнего контура для кругового цилиндра с квадратной полостью и отношением коэффициентов деформации  $a_{44}/a_{55} = 10$  в зависимости от  $a_1/a_0$ , где  $a_1$  — полудлина стороны квадрата. При этом расстояние от вершины квадрата до внешнего контура равняется  $c = a_0 - \sqrt{2} a_1$  и значения отношения  $c/a_0$  для приведенных на рис. 7 значений  $a_1/a_0$ , равных 0,1; 0,5; 0,7, будут соответственно 0,859; 0,295; 0,011. Из рис. 7 видно, что при

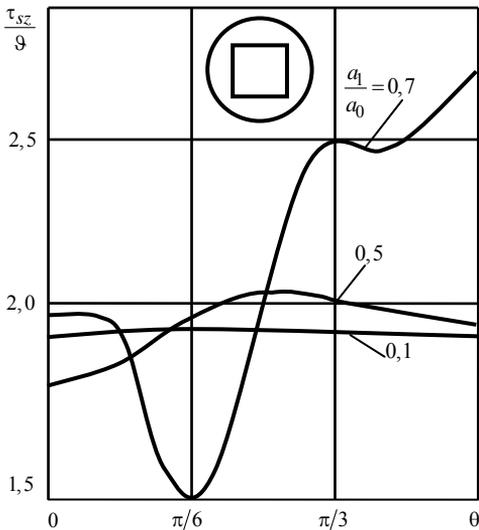


Рис. 7

увеличении размеров квадрата концентрация напряжений около внешнего контура в зонах, близких к вершинам квадрата резко увеличивается.

**РЕЗЮМЕ.** З використанням теорії функцій комплексного змінного розглядається задача про крутіння анізотропного циліндру багатазв'язного поперечного перерізу. Отримано загальне представлення комплексного потенціалу теорії крутіння, що містять невідомі коефіцієнти рядів, визначення яких узагальненим методом найменших квадратів зведено к рішенню системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для кругового циліндру с отвором або тріщиною проведено чисельні дослідження з їх аналізом та встановленням закономірностей зміни напруженого стану в залежності від геометричних характеристик циліндру та властивостей його матеріалу.

**Ключові слова:** крутіння, анізотропний циліндр, отвори та тріщини, комплексні потенціали.

**SUMMARY.** The problem of torsion of the anisotropic cylinder with multiplyconnected cross-section section is considered, with use of the theory of functions complex variable. The general representation are received for complex potential of the torsion theory, containing unknown factors of numbers, which definition by the generalised method of the least squares is shown to the decision of system linear algebraic equations. For the circular cylinder with an holes or a crack are conducted numerical researches, with their analysis and an establishment laws of changes for a tension depending on geometrical characteristics of the cylinder and properties for its material.

**Key words:** torsion, anisotropic cylinder, holes and cracks, complex potentials.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 984 с.
2. *Калоеров С.А.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56-62.
3. *Калоеров С.А., Бродская Г.Я.* Кручение многосвязных тел с трещинам // Теорет. и прикладная механика. – 1987. – №. 18. – С. 34–38.
4. *Калоеров С.А., Горянская Е.С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., Т. 7).
5. *Калоеров С.А., Горянская Е.С.* Кручение анизотропных стержней с полостями и плоскими трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – №. 26. – С. 36-43.
6. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
7. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 03.09.2013*

УДК 539.375

*М. М. НИКОЛИШИН*, д-р физ.-мат. наук,  
*В. К. ОПАНАСОВИЧ*, канд. физ.-мат. наук,  
*М. С. СЛОБОДЯН*, канд. физ.-мат. наук  
*Л. Р. КУРОТЧИН*

### **РАСТЯЖЕНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ МЕЖФАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ВОЗЛЕ ИХ ВЕРШИН**

*Решена задача растяжения кусочно-однородной пластины с двумя равными сквозными трещинами, расположенными на границе раздела материалов с учетом пластических зон вблизи вершин. С использованием комплексных потенциалов решение задачи сведено к задачам линейного сопряжения, на основе которых определены напряженное состояние на границе раздела материалов. С использованием условия пластичности Мизеса найдены длины пластических зон и величины раскрытия в вершинах трещин.*

**Ключевые слова:** *кусочно-однородная пластинка, трещина, пластическая зона, комплексные потенциалы, задача линейного сопряжения.*

Сварные тонкостенные элементы конструкций широко используются в инженерной практике. В процессе их изготовления или эксплуатации на линии соединения материалов могут возникнуть трещины, которые являются сильными концентраторами напряжений. Исследование напряженно-деформируемого состояния кусочно-однородной пластины с межфазной сквозной трещиной с учетом контактов ее берегов возле вершин проведено в публикациях [5, 6], а при наличии пластических зон у ее вершинах в статьях [2-4]. В данной работе решается задача о растяжении пластины и наличии двух равных межфазных трещин на прямолинейной границе раздела материалов с учетом пластических зон вблизи вершин, при этом для определения длины пластических зон и раскрытия трещин в их вершинах используется условие пластичности Мизеса.

**Постановка задачи.** Рассмотрим кусочно-однородную изотропную пластину с прямолинейной границей раздела материалов, находящуюся под воздействием однородного поля усилий на бесконечности  $q$ ,  $P_1$  и  $P_2$ , в предположении наличия двух равных сквозных межфазных трещин, берега которых свободны от внешней нагрузки, а на их продолжении образуются пластические зоны.

В срединной плоскости пластины введем декартовую систему координат  $Oxy$ , направив ось  $Ox$  вдоль границы раздела материалов с началом координат посередине отрезка соединяющего внутренние вершины трещин. Длину трещин обозначим через  $2l$ , а длины пластических зон – через  $w_i$ , при этом  $w_1$  – длина пластических зон около внутренних вершин, расстояние между центрами трещин – через  $2s$ . Линии, где

расположены трещины, обозначим через  $L$ , линию соединения материалов – через  $L'$ , пластические зоны около внутренних вершин трещин – через  $L'_1$  и  $L'_2$ , внешних – через  $L''_1$  и  $L''_2$  (рис. 1). Упругим характеристикам материалов полуплоскостей припишем индекс 1, 2. Предельное значение соответствующей величины  $y \rightarrow \pm 0$  обозначим значками “+” и “-”.

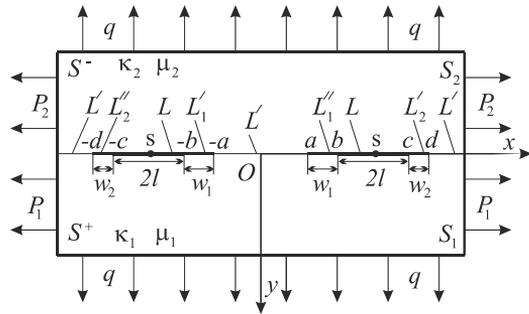


Рис. 1.

Краевые условия задачи имеют вид:

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-, \quad (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L'; \quad (1)$$

$$\sigma_y^\pm = 0, \quad \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L; \quad (2)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_{01}, \quad \tau_{xy}^\pm = \tau_{01} \text{ на } L'_1,$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_{01}, \quad \tau_{xy}^\pm = -\tau_{01} \text{ на } L''_1; \quad (3)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_{02}, \quad \tau_{xy}^\pm = \tau_{02} \text{ на } L'_2,$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_{02}, \quad \tau_{xy}^\pm = -\tau_{02} \text{ на } L''_2, \quad (4)$$

где  $\sigma_{01}$ ,  $\sigma_{02}$ ,  $\tau_{01}$ ,  $\tau_{02}$  – неизвестные нормальные и касательные напряжения в пластических зонах,  $i^2 = -1$ .

**Метод решения.** Введем в рассмотрение комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили [1, 2] и воспользуемся формулами

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})_j = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_j(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu_j \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_j = \kappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_j(z)}, \quad (6)$$

в которых  $\mu_j$  – модуль сдвига;  $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ ;  $z = x + iy$ . Причем при больших  $|z|$  имеют место зависимости

$$\Phi_j(z) = \Gamma_j + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \in S_j,$$

$$\Phi_j(z) = -\Gamma_j - \bar{\Gamma}'_j + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \in S_{3-j} \quad (j = 1, 2),$$

$$\Gamma_j = \frac{1}{4}(P_j + q), \quad \Gamma'_j = -\frac{1}{2}(P_j - q).$$

Введем в рассмотрения функцию

$$\theta(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z).$$

Как следует из краевых условий (1)–(4) и соотношения (5), для ее определения получается задача линейного сопряжения

$$\theta^+(x) - \theta^-(x) = 0, \quad x \in L + L' + L'_1 + L''_1. \quad (7)$$

Решая краевую задачу (7), получим

$$\theta(z) = \frac{1}{4}(P_1 + P_2 + 2q). \quad (8)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi(z) = \mu_{3-j} \kappa_j \Phi_j(z) - \mu_j \Phi_{3-j}(z) \quad (z \in S_j, j = 1, 2), \quad (9)$$

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + A\theta(z)/(1-g).$$

Тогда на основании (6) и краевых условий (1)–(4) для функции  $\Phi_0(z)$  получается задача линейного сопряжения:

$$\begin{aligned} \Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) &= 0, \quad x \in L', \\ \Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) &= A_1 \begin{cases} 0, & x \in L, \\ \sigma_{01} - i\tau_{01}, & x \in L'_1, \\ \sigma_{01} + i\tau_{01}, & x \in L''_1, \\ \sigma_{02} - i\tau_{02}, & x \in L'_2, \\ \sigma_{02} + i\tau_{02}, & x \in L''_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= A_1 X_0(z) \left[ \frac{\sigma_{01}}{2\pi i} \int_{L'_1 \cup L''_1} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \frac{\sigma_{02}}{2\pi i} \int_{L'_2 \cup L''_2} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\tau_{01}}{2\pi i} \int_{L'_1} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{i\tau_{02}}{2\pi i} \int_{L'_2} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\tau_{01}}{2\pi i} \int_{L''_1} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \frac{i\tau_{02}}{2\pi i} \int_{L''_2} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} \right], \\ X_0(z) &= \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - d^2)} \left( \frac{(z+a)(z-d)}{(z-a)(z+d)} \right)^{i\beta}, \quad \beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi}, \\ g &= -\frac{E_1(1+v_2) + E_2(1+v_1)(3-v_1)}{E_2(1+v_1) + E_1(1+v_2)(3-v_2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$E_j, v_j$  – модуль Юнга и коэффициенты Пуассона материала  $j$  полуплоскости.

При этом должно выполняться условие

$$\mu_1(1 + \kappa_2)P_2 - \mu_2(1 + \kappa_1)P_1 = [3(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2\kappa_1 - \mu_1\kappa_2]q. \quad (12)$$

Напряжения на границе раздела материалов найдем за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^\pm - i\sigma_{xy}^\pm &= A_1^{-1} [\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)], \\ \sigma_{xx}^+ &= A_1^{-1} \operatorname{Re} [3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x)] + P_1 - q \frac{3+g}{1-g}, \\ \sigma_{xx}^- &= -A_1^{-1} \operatorname{Re} [\Phi_0^+(x) + 3g\Phi_0^-(x)] + P_2 + q \frac{3+g}{1-g}, \end{aligned} \quad (13)$$

При этом неизвестные  $\sigma_{01}$ ,  $\sigma_{02}$ ,  $\tau_{01}$ ,  $\tau_{02}$  определим из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{01}I_s^{ab} + \sigma_{02}I_s^{cd} - \tau_{01}I_c^{ab} + \tau_{02}I_c^{cd} &= 0, \\ \sigma_{01}I_{ct}^{ab} + \sigma_{02}I_{ct}^{cd} + \tau_{01}I_{st}^{ab} - \tau_{02}I_{st}^{cd} &= q\pi e^{-\beta\pi} / (1-g), \\ -\sigma_{01}I_{st2}^{ab} - \sigma_{02}I_{st2}^{cd} + \tau_{01}I_{ct2}^{ab} - \tau_{02}I_{ct2}^{cd} &= \frac{2q\pi\beta(d-a)e^{-\beta\pi}}{1-g}, \\ \int_a^d [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)] dx &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} I_{si}^{km} &= \int_k^m \frac{t^i \sin b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad I_{ci}^{km} = \int_k^m \frac{t^i \cos b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \\ b(x) &= \beta \ln \frac{(x+a)(d-x)}{(x-a)(x+d)}. \end{aligned}$$

Раскрытие трещин в вершинах  $b$  ( $\delta_1$ ) и  $c$  ( $\delta_2$ ) вычислим по формулам

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{A_1(g-1)}{4\pi g\mu_1\mu_2} \int_a^b \sqrt{(x^2 - a^2)(d^2 - x^2)} [-\sigma_{01} \{ \sin b(x) \times \\ &\times (I_{sp}^{bc} - I_{sm}^{bc}) - \cos b(x) (I_{cp}^{bc} + I_{cm}^{bc}) \} - (\sigma_{01} - \sigma_{02}) \times \\ &\times \{ \sin b(x) (I_{sp}^{cd} - I_{sm}^{cd}) - \cos b(x) (I_{cp}^{cd} + I_{cm}^{cd}) \} - \\ &- 2\tau_{01} \{ \cos b(x) I_{sp}^{ab} + \sin b(x) I_{cp}^{ab} \} - \\ &- \tau_{01} \{ \cos b(x) (I_{sp}^{bc} - I_{sm}^{bc}) + \sin b(x) (I_{cp}^{bc} + I_{cm}^{bc}) \} - \\ &- \tau_{01} \{ \cos b(x) (I_{sp}^{cd} - I_{sm}^{cd}) + \sin b(x) (I_{cp}^{cd} + I_{cm}^{cd}) \} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau_{02} \left\{ \cos b(x) \left( I_{sp}^{cd} + I_{sm}^{cd} \right) + \sin b(x) \left( I_{cp}^{cd} - I_{cm}^{cd} \right) \right\} \Big], \\
\delta_2 = & \frac{A_1(g-1)}{4\pi g \mu_1 \mu_2} \int_d^c \sqrt{(x^2 - a^2)(d^2 - x^2)} \left[ -\sigma_{01} \left\{ \sin b(x) \left( I_{sp}^{bc} - I_{sm}^{bc} \right) - \right. \right. \\
& - \cos b(x) \left( I_{cp}^{bc} + I_{cm}^{bc} \right) + (\sigma_{01} - \sigma_{02}) \left\{ \sin b(x) \left( I_{sp}^{ab} - I_{sm}^{ab} \right) - \right. \\
& - \cos b(x) \left( I_{cp}^{ab} + I_{cm}^{ab} \right) \Big\} + 2\tau_{02} \left\{ \cos b(x) I_{sp}^{cd} + \sin b(x) I_{cp}^{ab} \right\} + \\
& + \tau_{02} \left\{ \cos b(x) \left( I_{sp}^{bc} - I_{sm}^{bc} \right) + \sin b(x) \left( I_{cp}^{bc} + I_{cm}^{bc} \right) \right\} + \\
& + \tau_{02} \left\{ \cos b(x) \left( I_{sp}^{ab} - I_{sm}^{ab} \right) + \sin b(x) \left( I_{cp}^{ab} + I_{cm}^{ab} \right) \right\} - \\
& - \tau_{01} \left\{ \cos b(x) \left( I_{sp}^{ab} + I_{sm}^{ab} \right) + \sin b(x) \left( I_{cp}^{ab} - I_{cm}^{ab} \right) \right\} \Big]. \tag{15}
\end{aligned}$$

Длины зон пластичности около вершин трещины найдем на основании условия пластичности Мизеса

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2, \tag{16}$$

где  $\sigma_Y = \min(\sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)})$ ,  $\sigma_Y^{(j)}$  – предел текучести материала  $j$  полуплоскости.

Численный анализ задачи проведен для нитесила, для которого  $\sigma_T^{(1)} = 278 \text{ МПа}$ ,  $E_1 = 1,38 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , и технически чистого железа, когда  $\sigma_T^{(2)} = 130 \text{ МПа}$ ,  $E_2 = 2,08 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . На рис. 2–7 сплошные линии соответствуют параметрам, связанным с внутренними вершинами трещин, штриховые – с внешними, причем  $w_j^* = w_j/l$  и  $\delta_j^* = \delta_j E_j / l \sigma_Y$ ,  $\tilde{q} = q / \sigma_Y$ ,  $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_1 / \sigma_Y$ . Рис. 2–5 построены при  $s^* = s/l = 3$ .

На рис. 2, 3 кривые 1 построенные при  $\tilde{q} = 0,4$ , кривые 2 – при

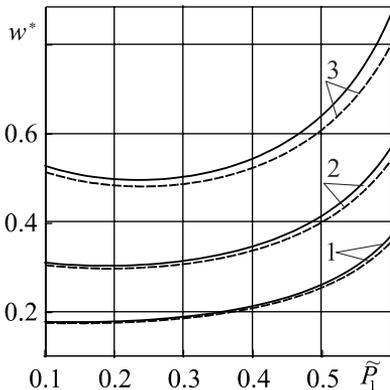


Рис. 2

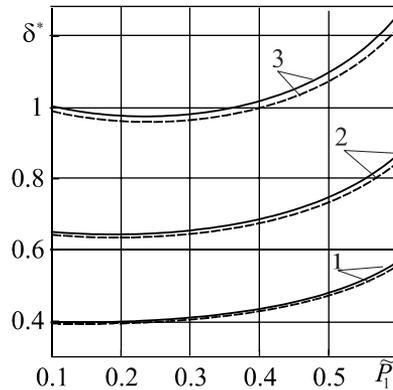


Рис. 3

$\tilde{q}=0,5$ , кривые 3 – при  $\tilde{q}=0,6$ . Из рис. 2, 3 видно, что при увеличении относительного усилия  $\tilde{P}_1$  длины пластических зон и величины раскрытия трещин у ее вершинах увеличиваются, причем эти величины больше у внутренних вершинах трещин нежели у внешних.

На рис. 4, 5 изображены кривые 1 построенные при  $\tilde{P}_1=0,4$ , кривые 2 – при  $\tilde{P}_1=0,5$ , кривые 3 – при  $\tilde{P}_1=0,6$ . При увеличении относительного усилия  $\tilde{q}$  длины пластических зон и величины раскрытия трещин у ее вершинах увеличиваются, заметим что они больше у

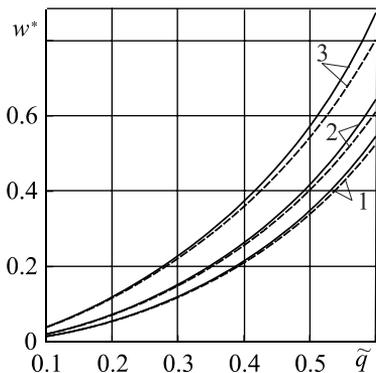


Рис. 4

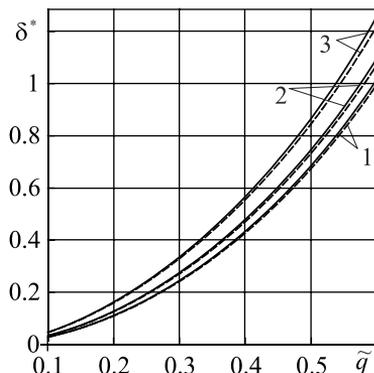


Рис. 5

ближних вершинах трещин нежели у дальних.

На рис. 6, 7 представлены кривые 1, построенные при  $\tilde{q}=0,4$ , кривые 2 – при  $\tilde{q}=0,5$ , кривые 3 – при  $\tilde{q}=0,6$ . Если расстояние между трещинами увеличивается, то величины пластических зон и относительное

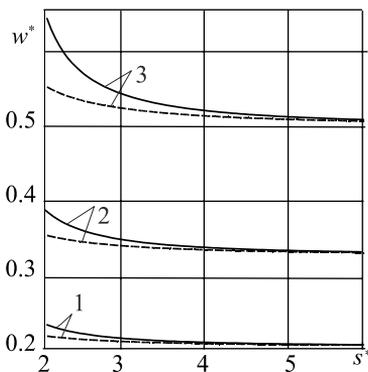


Рис. 6

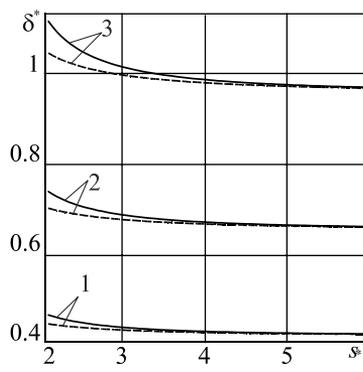


Рис. 7

раскрытие у вершинах трещин стремится до соответствующих величин для одной трещины [3].

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено розтяг кусково-однорідної пластини з двома рівними наскрізними тріщинами, розміщеними на межі поділу матеріалів. Розглядається пластинка, що знаходиться в однорідному полі розтягуючих зусиль на нескінченності, береги тріщин

вільні від зовнішнього навантаження, а у їх вершинах утворились пластичні зони. З використанням комплексних потенціалів розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, на основі яких визначено напружений стан на межі поділу матеріалів. З використанням умови пластичності Мізеса знайдено довжини пластичних зон та величини розкриття у вершинах тріщин.

**Ключові слова:** кусково-однорідна платівка, тріщина, пластична зона, комплексні потенціали, задача лінійного спряження.

**SUMMARY.** The extension of a piecewise-homogeneous plate with two equal through cracks on the interface of materials has been examined. It is assumed that the plates are in a homogeneous field of tensile forces at infinity, the crack edges are external load-free and at their tips the plastic zones have originated. Having used the complex potentials, the solution of the problem is reduced to the problems of linear conjugation. On their basis the stress state on the interface of materials has been determined. Having made use of the Misesa plasticity condition, the lengths of plastic zones and the values of opening at the crack tips have been found.

**Key words:** piecewise-homogeneous plate, crack, plastic zone, complex potentials, problem of linear conjugation.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Калоеров С. А. Решение двумерных задач теории трещин методом линейного сопряжения // Концентрация напряжений / Под ред. Гузя А. Н., Космодамианского А. С., Шевченко В. П. – К: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механіка композитов: в 12т.; Т.7). – С. 51–91.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. – 1966. – 708 с.
3. Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 115–121.
4. Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Знаходження довжини пластичних зон біля вершин наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 13, – С. 294–300.
5. Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р. Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4 – С. 101–108.
6. Острик В. І. Контакт з третім берегом міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 58–65.
7. Харун І. В., Лобода В. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С. 103–113.

*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины, г. Львов,  
Львовский национальный университет*

*Поступила 29.08.2013*

УДК 539.3

*Е. Ф. ПРОКОПАЛО*, канд. техн. наук,*А. П. ДЗЮБА*, д-р. техн. наук,*П. А. ДЗЮБА*, канд. техн. наук

### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С КВАДРАТНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ОСЕВОМ СЖАТИИ

*Обсуждаются результаты экспериментального исследования устойчивости цилиндрической оболочки с четырьмя квадратными отверстиями, регулярно расположенными относительно среднего сечения при неоднородном нагружении осевой силой. Анализируются зависимости критических усилий от степени неоднородности и размеров отверстий.*

*Ключевые слова:* оболочка, отверстие, устойчивость, неравномерное нагружение.

Задача устойчивости сплошных цилиндрических оболочек при продольном равномерном сжатии достаточно хорошо изучена как в теоретическом, так и в экспериментальном плане. Она рассматривалась многими авторами, среди которых следует отметить работы Г. Лоренца [17], С.П. Тимошенко [15], В. Койтера [5], А.С. Вольмира [1], Е.И. Григолюка, В.В. Кабанова [2], А.В. Погорелова [10]. На сегодняшний день эта задача достаточно хорошо изучена как в теоретическом, так и в экспериментальном плане.

Практически важной и недостаточно исследованной остается задача об устойчивости оболочек при неравномерном осевом сжатии. Неравномерность нагружения обуславливает резкое изменение поля напряжений в оболочке, что существенно влияет на несущую способность всей конструкции и приводит к значительным осложнениям, возникающим при теоретическом решении задачи. Количество работ, посвященных устойчивости оболочек при неравномерном продольном сжатии, является весьма ограниченным. Так, в работах Л.И. Маневича [8, 9] и В.В. Кабанова [4] рассматривалась устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии усилиями, неравномерно распределенными по ее криволинейным кромкам. Полученные решения дают возможность исследовать зависимость критических параметров от степени неоднородности поля напряжений. В работах В.Л. Красовского [6,7] приводятся результаты экспериментальных исследований докритического поведения оболочки и зависимости критических усилий от таких факторов, как длина оболочки и схема нагружения. Рассматривались случаи кинематического нагружения (задавались перемещения по отрезкам дуг направляющего круга). Общая длина участков нагружения равнялась половине периметра оболочки. Меняли количество участков нагружения и их расположение, симметричное и кососимметрическое, относительно поперечного сечения.

Актуальность экспериментального исследования докритического поведения и устойчивости цилиндрической оболочки с отверстиями при на-

гружении неравномерно распределенной продольной силой вполне очевидно, поскольку теоретическое решения этой задачи в настоящее время отсутствуют, что обусловлено ее чрезвычайной сложностью. Авторам известна только одна экспериментальная работа в этом направлении [12], что, по-видимому, можно объяснить наличием определенных технических проблем, возникающих перед исследователями при попытке экспериментального решения обсуждаемой задачи.

Одним из авторов этой статьи разработана оригинальная методика исследования устойчивости цилиндрических оболочек, которая во многих случаях позволяет существенно уменьшить трудности, возникающие при проведении таких экспериментальных исследований [11]. Используя эту методику, авторы данной статьи провели исследование устойчивости цилиндрических оболочек, ослабленных четырьмя квадратными отверстиями при неоднородном продольном сжатии.

**Механические характеристики, геометрия моделей, методика проведения испытаний.** Оболочки изготавливались из чертежной бумаги марки «В» ГОСТ 597-73. Этот материал имеет достаточно стабильные механические характеристики при выраженной ортотропии механических свойств и весьма высокую технологичность при изготовлении моделей. Впервые возможность проведения опытов на устойчивость тонкостенных оболочек, изготовленных из бумаги была показана Г.В. Роди и Е.Е. Лундквиста [18]. Экспериментальные исследования, проведенные в дальнейшем [16], в том числе и в Днепропетровском университете [3, 13, 14], подтвердили целесообразность и перспективность использования моделей из специальной бумаги при исследованиях устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек, особенно оболочек при наличии различных отверстий. При этом, оказывается, что невзирая на низкие, по сравнению с металлами, значения относительных упругих характеристик бумаги, использование такого материала даёт возможность проводить экспериментальные исследования в упругой области для достаточно широкого диапазона геометрических параметров моделей.

Характеристики оболочки были такими: модули упругости составляют  $E_x = 6,9 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $E_y = 3,45 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; коэффициенты Пуассона  $\mu_x = 0,3$ ;  $\mu_y = 0,15$ ; толщина листа –  $\delta = 0,23 \text{ мм}$ . Прямоугольные развертки оболочек вырезались из стандартного листа таким образом, чтобы направление, соответствующее модулю упругости  $E_x$  совпадало с образующей оболочки, а  $E_y$  – с ее направляющей. Затем на заготовках вырезались по четыре равновеликих квадратных отверстия, расположенных регулярно по кругу оболочки и симметрично относительно его среднего поперечного сечения.

Всего было испытано шесть серий оболочек общим количеством 144 модели. Оболочки разных серий отличались между собой размером отверстий. Первую серию составили оболочки без отверстий (сторона квадрата  $a = 0$ ), вторая серия –  $a = 4 \text{ мм}$ , третья –  $a = 8 \text{ мм}$ , четвертая –  $a = 15 \text{ мм}$ , пятая –  $a = 20 \text{ мм}$ , шестая –  $a = 30 \text{ мм}$ . Развертка оболочки склеивалась на металлическом цилиндре. Ширина клеевого шва составляла  $5 \text{ мм}$ . Внутренний радиус всех оболочек был равен  $R = 37,5 \text{ мм}$ , рабочая длина

$L_p = 75 \text{ мм}$ . Полная длина оболочки составляла  $L_{\Pi} = 75 \text{ мм}$ . Для обеспечения возможности нагружения оболочки внешними усилиями, с обеих её сторон к криволинейным краям приклеивались круговые металлические фланцы. Ширина приклею составляла  $20 \text{ мм}$ . Граничные условия оболочки соответствовали жесткому закреплению. На заготовках оболочек на границах между полосами приклейки и рабочей зоной симметрично каждому квадратному отверстию делались разрезы шириной  $1 \text{ мм}$ . На оболочках без отверстий также делались разрезы по той же схеме, что и на оболочках с отверстиями. Размер ширины разрезов выбирался из двух условий: первое – ширина должна быть минимальной, вторая – при нагружении оболочки осевой силой до потери устойчивости берега разрезов не должны касаться.

Осью симметрии принималась образующая, которая проходила через центр отверстия. Независимо от размера отверстия длина разрезов  $L$  изменялась в диапазоне  $0, 4; 8, 12; 16, 20; 25, 30$  и  $35, 40, 45, 50 \text{ мм}$ . Наличие таких разрезов обеспечивало заданную неоднородную схему нагружения (рис. 1).

Для испытаний оболочка нижним фланцем закреплялась на неподвижной горизонтальной плите. К центру верхнего фланца оболочки шарнирно крепилась тяга, которая проходила через сквозное отверстие в нижнем фланце и в плите. Через тягу гириями второго класса точности осуществлялось продольное кусочно-равномерное нагружение оболочки по отрезкам дуг поперечных сечений, которые непосредственно граничили с торцевыми фланцами. С целью получения достаточно достоверных результатов проводились испытания двух номинально идентичных оболочек.

**Результаты испытаний.** Картины докритического поведения и закритических форм равновесия оболочек были следующими. На оболочках с относительно небольшими квадратными отверстиями  $a = 4 \text{ мм}$  и  $a = 8 \text{ мм}$  наблюдалась локальная форма потери устойчивости. При малой

длине ненагруженных участков ( $L$  равнялось  $0, 4, 8 \text{ мм}$ .) локальные вмятины (одна или две) появлялись у отверстия симметрично относительно одной из его диагоналей (рис. 2). При увеличении длины ненагруженных участков ( $L = 12,5 \text{ мм}$ ) появление локальных вмятин наблюдалось на концах нагруженных участков (рис. 3), а не у квад-

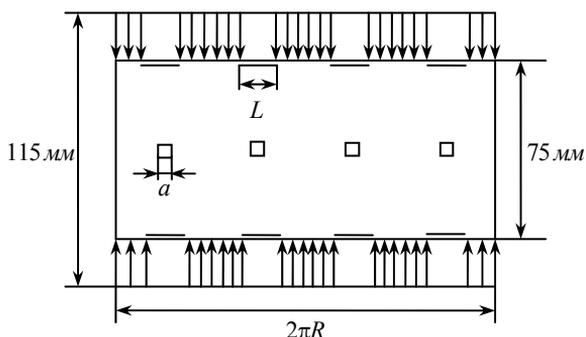


Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3

ратного отверстия. Этот факт можно объяснить тем, что в этом случае в связи с уменьшением длины нагруженных участков существенно увеличиваются напряжения по отрезкам дуг поперечного сечения оболочки, через которые передается осевая сила. Здесь и далее на фотографиях первая цифр соответствует номеру оболочки, вторая – длине стороны квадратного отверстия,  $a$  (мм), третья – длине разрезов,  $L$  (мм).

После локальной потери устойчивости, при дальнейшем увеличении сжимающей силы (как правило, не более, чем на 10 % от критической локальной) локальные вмятины заметно росли и происходила общая потеря устойчивости, которая



Рис. 4



Рис. 5

сопровождалась хлопком и полным исчерпанием несущей способности оболочки. Для оболочек без отверстий, когда длина участков, свободных от нагрузки, была меньше, чем  $L = 16$  мм, преимущественно наблюдалось образование одного пояса волн, которые охватывали весь периметр оболочки (рис. 4). Когда длина участков, свободных от нагрузки, была больше, чем  $L = 16$  мм, то обра-

зовывались преимущественно очень большие волны, которые составляли 25–30 % от длины поперечного сечения оболочки и распространялись на всю ее рабочую длину (рис. 5).

Для оболочек с отверстиями, сторона которых не превышала  $a < 8$  мм, при длине  $L < 25$  мм участков свободных от нагрузки, преимущественно наблюдалось образования трех поясов волн. Они имели ромбовидные формы (рис. 6). Один пояс волн образовывался по кругу симметрично относительно среднего поперечного сечения оболочки, причем квадратные отверстия находились внутри ромбовидной вмятины. Другие



Рис. 6



Рис. 7



Рис. 8



Рис. 9

два пояса располагались по обе стороны относительно среднего пояса. С уменьшением длины участков нагружения образовывались преимущественно крупные волны, в вершинах которых располагались квадратные

отверстия (рис. 7). При нагружении оболочек с квадратными отверстиями со стороной  $a=30$  мм панели между отверстиями сначала изгибались наружу дугообразными формами, а при достижении критической силы складывались пополам к центру кривизны оболочки (рис. 8, 9).

На рис. 10 построены зависимости относительной критической нагрузки от относительной длины ненагруженных участков  $\bar{P}=f(\alpha)$ ,  $\bar{P}=P_{кр}/P_{кр}^0$ ;  $a=L/a$ ;

$P_{кр}$  – критическая сила для оболочки с четырьмя квадратными отверстиями при равномерном ( $L=0$ ) или неоднородном нагружении ( $L \neq 0$ ),  $P_{кр}^0$  – критическая сила для оболочки без отверстий при равномерном нагружении (длина ненагруженных участков равна нулю).

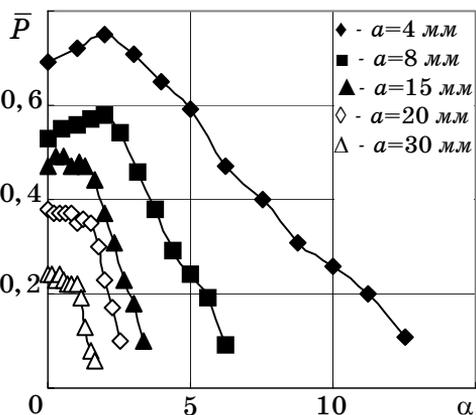


Рис. 10

Следует заметить то, что разрезы, которые определяют границы ненагруженных участков, всегда делались симметрично относительно образующей, которая проходила через центр отверстия. Наличие разрезов с обеих сторон отверстий играет двоякую роль на изменение величины критической нагрузки. С одной стороны кромки отверстий разгружаются от сжимающей силы, что приводит к увеличению критической нагрузки, с другой – наличие разрезов уменьшает площадь поперечных сечений, по которой внешнее усилие передается на оболочку, что приводит к уменьшению критической силы.

В целом характер зависимостей определяется соотношением между положительным и отрицательным влиянием разрезов на устойчивость оболочки. Для оболочек с относительно малыми отверстиями ( $a=4$  мм и  $a=8$  мм) и с малыми разрезами ( $0 \leq \alpha \leq 20$ ) при увеличении длины разрезов наблюдается некоторое (примерно на 9 %) повышение критической нагрузки. Для оболочек с отверстиями, длина сторон  $a$  которых равна 15 мм, 20 мм, при изменении параметра  $\alpha=0, 1, 3$  критическое усилие остается почти неизменным. Такая же зависимость наблюдается и для оболочек с самыми большими отверстиями ( $a=30$  мм) в интервале изменения относительной длины разрезов от нуля до единицы.

Таким образом, с увеличением длины разрезов в указанных выше интервалах, уменьшение критической силы не наблюдается. Так проявляется положительный эффект разрезов, наличие которых приводит к некоторой разгрузке зоны оболочки вокруг отверстий. Дальнейшее увеличение длины ненагруженных участков для оболочек с отверстиями всех размеров сопровождается значительным, практически линейным, уменьшением критических усилий. При наличии самых длинных разрезов ( $L=50$  мм), по четыре с обеих сторон оболочки, критическая нагрузка для оболочек без отверстий уменьшается в десять раз по сравнению с оболочками без

разрезов. Для оболочек с отверстиями, длина сторон которых равна  $a=4\text{ мм}$  – в 6,4 раза, при  $a=8\text{ мм}$  – в 6 раз, при  $a=15\text{ мм}$  – в 4,8 раза, при  $a=20\text{ мм}$  – в 4 раза и при  $a=30\text{ мм}$  – в 3,8 раза.

Изменение критической нагрузки в зависимости от размера квадратных отверстий приводится на рис. 11. Каждая из двенадцати зависимостей построена для определенного значения длины ненагруженных участков – длины разрезов, сделанных на оболочке с обеих сторон отверстий на границе между ее рабочей частью и торцевыми приспособлениями. При этом  $L$  изменялось (на рис. 11 сверху вниз) в диапазоне 0, 4, 8, 12, 16, 20, 25, 30; 35, 40, 45, 50 мм. Переход от оболочки без отверстий к оболочке с четырьмя отверстиями со стороной  $a=4\text{ мм}$  при равномерной

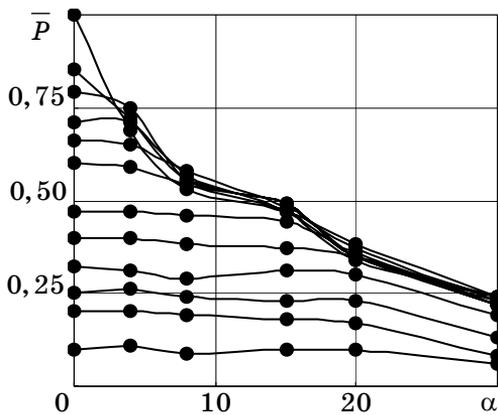


Рис. 11

нагрузке (отсутствие разрезов) сопровождается уменьшением критического усилия на 31 %. При наличии разрезов длиной  $L=4\text{ мм}$  падение критического усилия составляет 15 %, а при  $L=8\text{ мм}$  – 5 %. При дальнейшем увеличении длины разрезов от  $L=12\text{ мм}$  до  $L=50\text{ мм}$  имеет место незначительное (до 4 %) снижение, так и рост усилия. При увеличении стороны квадратного отверстия от  $a=4\text{ мм}$  до  $a=8\text{ мм}$  происходит дальнейший спад критических усилий. При этом качественно

эти зависимости подобные тем, которые были получены в предыдущем интервале изменения размера отверстий  $a=0,4\text{ мм}$ .

Нужно отметить также, что при  $a=8\text{ мм}$  для оболочек с разрезами различных длин ( $L=0, 20\text{ мм}$ ) получены практически одинаковые критические нагрузки. При дальнейшем увеличении размеров отверстий критические усилия для всех оболочек ( $0 \leq L \leq 20$ ) заметно уменьшаются, оставаясь при этом практически равными между собой для каждого значения параметра, а при длине стороны квадрата  $a=20\text{ мм}$  и  $a=30\text{ мм}$  к ним «присоединяются» критические нагрузки, полученные для оболочек с разрезами длиной  $L=25\text{ мм}$  и  $L=30\text{ мм}$ . Для этих оболочек с длиной разрезов  $L=25\text{ мм}$  и  $L=30\text{ мм}$  при изменении длины стороны отверстия  $a=0, 15\text{ мм}$ , а также для оболочек с длиной разрезов равным 35, 40, 45, 50 мм в интервале изменения параметра  $0 \leq a \leq 20\text{ мм}$  наблюдается практически постоянная, независимая от размеров отверстий критическая нагрузка. При этом имеет место её значительное уменьшение при увеличении длины разрезов. При увеличении размера стороны отверстий от  $a=20\text{ мм}$  до  $a=30\text{ мм}$  на всех оболочках, независимо от длины ненагруженных участков, имеет место близкое, в процентном отношении, снижение критических усилий, которое в среднем составляет 62 %.

В работе приводятся и обсуждаются результаты экспериментальных исследований устойчивости цилиндрических оболочек, ослабленных четырьмя квадратными отверстиями при неоднородном осевом сжатии. Описывается докритическое поведение и закритические формы равновесия испытываемых моделей. Отмечается значительное (в несколько раз) снижение критической силы для наибольшей степени неоднородности по сравнению с равномерной нагрузкой. Проводится анализ зависимостей критической силы от размера отверстий.

**РЕЗЮМЕ.** Обговорюються результати експериментального дослідження стійкості циліндричної оболонки з чотирма квадратними отворами, регулярно розташованими відносно середнього поперечного перерізу при неоднорідному навантаженні осьовою силою. Аналізуються залежності критичних зусиль від ступеня неоднорідності і розмірів отворів.

**Ключові слова:** оболонка, отвір, стійкість, нерівномірне навантаження.

**SUMMARY.** The results of the experimental research of the stability of a cylindrical shell with four square holes, regularly arranged symmetrically relative to the average cross-sectional cut on non-uniform loading from the axial compressive force. The dependences of the critical efforts of the degree of heterogeneity and the sizes of the holes are being analysed.

**Key words:** shell, hole, stability, non-uniform loading.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. *Григолюк Э.И.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
3. *Дзюба П.А.* Влияние системы случайно расположенных разрезов на устойчивость цилиндрической оболочки при нагружении крутящим моментом // Вісн. Дніпр. нац. ун-ту. Сер. Механіка. – 2008. – Т. 2, № 12. – С. 38–49.
4. *Кабанов В.В.* Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при неоднородном сжатии // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1963. – № 1. – С. 181–183.
5. *Койтер В.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. – 1960. – № 5. – С. 99–110.
6. *Красовский В.Л.* Влияние длины на устойчивость цилиндрических оболочек, сжатыми продольными локальными усилиями // Сопр. матер. и теория сооружений. – 1972. – № 16. – С. 170–172.
7. *Красовский В.Л.* Влияние схемы нагружения на устойчивость тонкостенных цилиндров при неравномерном продольном сжатии // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 38–43.
8. *Маневич А.И.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном осевом сжатии // Тр. Конф. по теории пластин и оболочек, г. Казань. – 1960. – С. 226–232.
9. *Маневич Л.И.* О локальной устойчивости оболочек при неравномерных нагрузках // Докл. АН СССР. – 1961. – № 8. – С. 1018–1021.
10. *Погорелов А.В.* Геометрическая теория устойчивости оболочек. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
11. *Прокопало Е.Ф.* Экспериментальное исследование влияния эксцентриситета, обусловленного наличием кругового отверстия, на устойчивость продольно-сжатых цилиндрических оболочек // Вісн. Дніпр. Ун-ту. Сер. Механіка. – 2007. – Т. 2, № 11. – С. 189–196.
12. *Prokopalov Y.F.* Experimental research of the stability of cylindrical shells with two square holes in a non-uniform axial compression // Theoretical foundations of civil engineering. – 2011. – Vol. 19. – P. 219–224.
13. *Прокопало Е.Ф.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении, линейно изменяющемся вдоль образующей // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1988. – № 6. – С. 61–64.
14. *Прокопало Е.Ф.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических

оболочек с квадратными отверстиями при комбинированном нагружении // Вісник Дніпр. ун-ту. Сер. Механіка.- 2004.- № 6.- С. 201–210.

15. Тимошенко С.П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки // Изв. Петрогр. электротехнического ин-та.- 1914.- Т. 11.- С. 267–287.

16. Чебанов В.М. Исследование устойчивости тонкостенных оболочек при помощи моделей из бумаги // Инженерный сборник.-1955.- Т. XXII.- С. 68–73.

17. Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder // Physikal. Zeitschrift. – 1911. – Bd. 12. № 2. – SS. 241–260.

18. Rhode R.V. Strength tests on paper cylinders in compression, bending and shear // NASA. – Techn. Note, 1931. – № 370. – P. 31.

*Днепропетровский национальный университет*

*Поступила 20 08.2013 г.*

УДК 539.3

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, д-р. физ.-мат. наук,  
 Ю. Д. КОВАЛЕВ, канд. физ.-мат. наук,  
 Ю. В. ШРАМКО, канд. физ.-мат. наук,  
 Т. А. КИРИЧЕК, канд. физ.-мат. наук

**УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ, ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ ЕГО ТОРЦОВ (КОСОСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)**

*Решена задача о гармонических упругих колебаниях слоя с двумя сквозными отверстиями, на поверхностях которых действует изгибное пульсирующее давление. Граничная задача сведена к системе интегральных уравнений, которая решается численно. Приведены примеры, в которых исследуются особенности распределения окружного напряжения по первому безразмерному волновому числу в зависимости от расстояния между отверстиями и коэффициента Пуассона.*

*Ключевые слова:* гармонические колебания, слой с двумя отверстиями, интегральные уравнения, скользящая заделка.

Изгибные колебания слоя с одним сквозным отверстием при скользящей заделке его торцов рассматривались в статье [3]. В работах [1, 4] получены и исследованы однородные решения задачи о колебаниях однослойных и трехслойных пластин при скользящей заделке торцов. В данной статье изучается упругое поведение слоя, ослабленного двумя отверстиями при гармонических нагрузках на их поверхностях и скользящей заделке торцов слоя.

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругий слой  $-h \leq x_3 \leq h$ ,  $-\infty < x_1, x_2 < \infty$  (рис. 1), ослабленный сквозными вдоль оси  $x_3$  полостями-отверстиями, поперечные сечения которых представляют собой непересекающиеся достаточно гладкие контуры

$$L_n \quad (n = 1, 2; \quad L_1 \cap L_2 = \emptyset).$$

Для определенности под контуром  $L_1$  будем понимать направляющий контур правого отверстия, под  $L_2$  – направляющий контур левого отверстия.

На цилиндрических поверхностях отверстий действует изгибное пульсирующее давление  $N = \text{Re}(N_0 e^{-i\omega t})$ ,  $N_0 = Cx_3$ , ( $C = \text{const}$ ).

Пусть механические величины имеют вид

$$u_i = \text{Re}(U_i e^{-i\omega t}), \quad \sigma_{ij} = \text{Re}(\sigma_{ij}^0 e^{-i\omega t}) \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

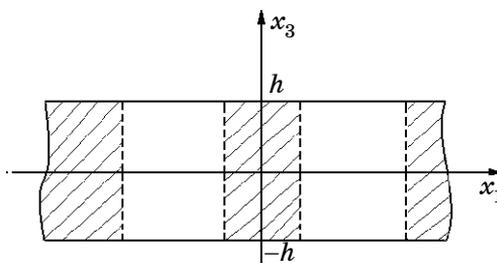


Рис.1

амплитуды компонентов заданной нагрузки раскладываются в ряды Фурье по координате  $x_3$  на  $[-h, h]$ , а на торце слоя выполняются условия

$$u_3(x_1, x_2, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h, t) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h, t) = 0. \quad (2)$$

**Метод и решение задачи.** Запишем амплитудные компоненты вектора перемещения в виде

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad U_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3 \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

в котором  $\gamma_k = (2k + 1)\pi/2h$ .

Представления амплитудных компонентов вектора перемещения (3) автоматически удовлетворяют условиям (2) на торцах слоя. Для описания стационарного волнового процесса в слое будем исходить из уравнений движения [3]

$$\sigma \operatorname{grad} \theta + \Delta \bar{u} = \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu};$$

здесь  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе.

Подставляя (1) и выражения (3) для амплитуд перемещений в уравнения движения, приходим к системе

$$\varepsilon_k^{(2)} u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0, \quad \varepsilon_k^{(2)} U_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_k^{(2)} = \nabla^2 - \beta_k^2, \quad (\beta_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \omega/C_2),$$

$$\theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i,$$

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2.$$

Из системы (5) находим

$$\varepsilon_k^{(1)} \theta_k = 0, \quad \varepsilon_k^{(1)} = \nabla^2 - (\gamma_k^2 - \alpha_1^2) \quad (\alpha_1 = \omega/C_1) \quad (6)$$

Введём функцию  $\psi_k$  соотношениями  $\theta_k = \varepsilon_k^{(2)} \psi_k$ . Из (6) следует, что  $\varepsilon_k^{(2)} \varepsilon_k^{(1)} \psi_k = 0$ . С учётом связи между  $\theta_k$  и  $\psi_k$  интегрирование системы (5) даёт

$$u_{ik} = -\sigma \partial_1 \psi_k + \omega_{ik}, \quad u_{3k} = -\sigma \partial_k \psi_k + \omega_{3k}, \quad \varepsilon_k^{(2)} \omega_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

Потребовав, чтобы соотношения  $\theta_k = \varepsilon_k^{(2)} \psi_k$  выполнялись фактически, приходим к равенствам

$$\omega_{1k} = \sigma \partial_2 \Omega_k, \quad \omega_{2k} = -\sigma \partial_1 \Omega_k, \quad \omega_{ik} = -\frac{1}{\gamma_k} (1 + \sigma) \varepsilon_k^{(1)} \Psi_k, \quad (8)$$

где  $\Omega_k$  – произвольное решение уравнения  $\varepsilon_k^{(2)} \Omega_k = 0$ .

Учитывая равенства (7), (8), окончательно получаем

$$\begin{aligned} u_{1k} - iu_{2k} &= 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left( i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)} \right), \\ u_{3k} &= -\sigma \gamma_k \Omega_k^{(1)} - \sigma \left[ \gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma \gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] \Omega_k^{(1)}, \\ \theta_k &= (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Omega_k^{(1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\Omega_k^{(i)}$  – произвольное решение уравнения  $\varepsilon_k^{(i)} \varphi = 0$ ;  $\Omega_k$  – функции, определяющие поворот элемента вокруг оси  $Ox_3$ ;  $u_{ik}$  – амплитуды соответствующих величин.

Интегральные представления функций, которые входят в (9), возьмем в виде

$$\begin{aligned} \Omega_k^{(1)} &= \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} K_0(\lambda_k r_j) ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\lambda_k r_j) d\zeta_j + \\ &+ \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\lambda_k r_j) d\bar{\zeta}_j, \\ \Omega_k^{(2)} &= \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} q_{1k}^{(j)} K_0(\beta_k r_j) ds_j + \int_{L_j} q_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\beta_k r_j) d\zeta_j + \\ &+ \int_{L_j} q_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\beta_k r_j) d\bar{\zeta}_j \\ \Omega_k &= \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} f_{1k}^{(j)} K_0(\beta_k r_j) ds_j + \int_{L_j} f_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\beta_k r_j) d\zeta_j + \\ &+ \int_{L_j} f_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\beta_k r_j) d\bar{\zeta}_j, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 &= \gamma_k^2 - \alpha_1^2, \quad r_j = |\zeta_j - z|, \\ \zeta_j &= \xi_1^{(j)} + i\xi_2^{(j)} \in L = \bigcup L_j, \quad z = x_1 + ix_2, \end{aligned}$$

$K_0(\gamma r)$  – функция Макдональда нулевого порядка;  $ds_j$  – элемент дуги контура  $L_j$ ;  $p_{ik}^{(j)}$ ,  $q_{ik}^{(j)}$ ,  $f_{ik}^{(j)}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ,  $j = 1, 2$ ) – неизвестные плотности.

Граничные условия на  $L$  запишем в форме

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{-2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12}) &= 2(N + iT), \\ (\sigma_{13} - \sigma_{23}) e^{i\psi} + (\sigma_{13} + i\sigma_{23}) e^{-i\psi} &= 2Z, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\psi$  – угол между внешней нормалью к контуру  $L$  и осью  $Ox_1$ .

Используя закон Гука и формулы (9), запишем условия (11) в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (N_k - iT_k) &= - \left[ \Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2 \right] \Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2 \Omega_k^{(2)} + \\ &+ 4\sigma e^{2i\psi} \partial_{zz}^2 \left( i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)} \right), \\ \frac{1}{\mu} (N_k + iT_k) &= - \left[ \Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2 \right] \Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2 \Omega_k^{(2)} + \\ &+ 4\sigma e^{-2i\psi} \partial_{zz}^2 \left( -i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)} \right), \\ \frac{1}{\mu} Z_k &= e^{i\psi} \partial_z \left( \tilde{a}_k \Omega_k^{(1)} + \tilde{b}_k \Omega_k^{(2)} + i\tilde{c}_k \Omega_k \right) + \\ &+ e^{-i\psi} \partial_z \left( \tilde{a}_k \Omega_k^{(1)} + \tilde{b}_k \Omega_k^{(2)} - i\tilde{c}_k \Omega_k \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha_2^2 - \alpha_1^2, \quad \tilde{a}_k = a_k - \sigma\gamma_k, \quad \tilde{b}_k = b_k - \sigma\gamma_k, \\ \tilde{c}_k &= \sigma\gamma_k, \quad a_k = -z\gamma_k, \quad b_k = -\sigma \left[ \gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma\gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right]. \end{aligned}$$

Краевая задача (12) с помощью обычной процедуры с учетом соотношений (10) сводится с помощью обычной процедуры к системе, состоящей из шести сингулярных интегральных уравнений (для каждого фиксированного  $k$ ).

Для её компактной записи введём в (12) дополнительный индекс “ $n$ ” ( $n=1, 2$ ), соответствующий двум направляющим замкнутым контурам  $L_1$  и  $L_2$ . С учетом этого системы сингулярных интегральных уравнений запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (N_k^{(n)} - iT_k^{(n)}) &= -p_{2k}^{(n)} r_{2kn}^* - p_{3k}^{(n)} r_{2kn}^* + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} G_{1kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} G_{2kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} G_{3kjn}^* ds_j \right\}, \\ \frac{1}{\mu} (N_k^{(n)} - iT_k^{(n)}) &= -p_{2k}^{(n)} \tilde{r}_{1kn} - p_{3k}^{(n)} \tilde{r}_{2kn} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} \tilde{G}_{1kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \tilde{G}_{2kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \tilde{G}_{3kjn} ds_j \right\}, \\
\frac{1}{\mu} Z_k^{(n)} & = -p_{2k}^{(n)} \tilde{r}_{1kn}^* + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} \tilde{G}_{1kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \tilde{G}_{2kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \tilde{G}_{3kjn}^* ds_j \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
if_{1k}^{(j)} - p_{1k}^{(j)} - q_{1k}^{(j)} & = 0, \quad if_{1k}^{(j)} + p_{1k}^{(j)} + q_{1k}^{(j)} = 0, \\
\tilde{a}_{k-2k} p_{1k}^{(j)} - \tilde{b}_j q_{2k}^{(j)} + i\tilde{c}_k f_{2k}^{(j)} & = 0, \quad -p_{2k}^{(j)} - q_{2k}^{(j)} + if_{2k}^{(j)} = 0, \\
\tilde{a}_k p_{3k}^{(j)} + \tilde{b}_k q_{3k}^{(j)} - i\tilde{c}_k f_{3k}^{(j)} & = 0, \quad p_{3k}^{(j)} + q_{3k}^{(j)} + if_{3k}^{(j)} = 0; \\
f_{1k}^{(j)} = 0, \quad q_{1k}^{(j)} = -p_{1k}^{(j)}, \quad f_{2k}^{(j)} & = d_{1k}^* p_{2k}^{(j)}, \\
q_{2k}^{(j)} = d_{1k}^* p_{2k}^{(j)}, \quad f_{3k}^{(j)} = \tilde{d}_{1k}^* p_{3k}^{(j)}, \quad q_{3k}^{(j)} & = \tilde{d}_{1k}^* p_{3k}^{(j)}; \\
d_{1k}^* = -i(1 + \tilde{d}_{1k}), \quad \tilde{d}_{1k} = -\frac{d_{1k}}{d_{2k}}, \quad d_{1k} = \tilde{a}_k + \tilde{c}_k, \quad d_{2k} & = \tilde{b}_k + \tilde{c}_k; \\
\sigma_{n0} = e^{2i\psi_{n0}}, \quad r_{1kn}^* = r_{1k} - \sigma_{n0} r_{1kn}, \quad r_{2kn}^* & = r_{2k} - \sigma_{n0} r_{2kn}, \\
\tilde{r}_{1kn} = r_{1k} - \bar{\sigma}_{n0} r_{3kn}, \quad \tilde{r}_{2kn} = r_{2k} - \bar{\sigma}_{n0} r_{4kn}, \quad \tilde{r}_{1kn}^* & = e^{i\psi_{n0}} r_{5kn} + e^{-i\psi_{n0}} r_{6kn}, \\
r_{1k} = -(l_{1k} - l_{2k} \tilde{d}_{1k}) l^*, \quad r_{2k} = -r_{1k}, \quad r_{1kn} & = 4\sigma \{l_{1kn}(\beta_k) - l_{1kn}(\lambda_k)\}, \\
r_{2kn} = 4\sigma \left\{ (1 + 2\tilde{d}_{1k}) l_{1kn}(\beta_k) + l_{1kn}(\lambda_k) \right\}, \\
r_{3kn} = 4\sigma \left\{ (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \bar{l}_{1kn}(\beta_k) - \bar{l}_{1kn}(\lambda_k) \right\}, \\
r_{4kn} = 4\sigma \left\{ \bar{l}_{1kn}(\beta_k) - \bar{l}_{1kn}(\lambda_k) \right\}, \quad r_{5kn} = (\tilde{a}_k + \tilde{b}_k) l_n^*, \quad r_{6kn} & = \bar{r}_{5kn}; \\
l_{1k} = -\left[ \Lambda(1 - \sigma) + \sigma \lambda_k^2 \right], \quad l_{2k} = -\sigma \beta_k^2, \quad l^* = \frac{i\pi}{2}, \quad l_n^* & = \frac{\pi}{2} e^{-i\psi_{n0}}, \\
l_{1kn}(\lambda_k) = \frac{i\pi \lambda_k^2}{8} e^{-2i\psi_{n0}}, \quad l_{1kn}(\beta_k) = \frac{i\pi \beta_k^2}{8} e^{-2i\psi_{n0}}; \\
G_{1kjn}^* = G_{1kjn} - \sigma_{n0} G_{4kjn}, \quad G_{2kjn}^* = G_{2kjn} - \sigma_{n0} G_{5kjn}, \\
G_{3kjn}^* = G_{3kjn} - \sigma_{n0} G_{6kjn}, \quad \tilde{G}_{1kjn} = G_{1kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{7kjn}, \\
\tilde{G}_{2kjn} = G_{2kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{8kjn}, \quad \tilde{G}_{3kjn} = G_{3kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{9kjn}, \\
\tilde{G}_{3kjn}^* = e^{i\psi_{n0}} G_{12kjn} + e^{-i\psi_{n0}} G_{13kjn}, \quad \tilde{G}_{2kjn}^* = e^{i\psi_{n0}} G_{11kjn} + e^{-i\psi_{n0}} G_{14kjn}, \\
\tilde{G}_{3kjn}^* = e^{i\psi_{n0}} G_{12kjn} + e^{-i\psi_{n0}} G_{15kjn}, \\
G_{1kjn} = l_{1k} k_0 (\lambda_k r_{jn0}) - l_{2k} k_0 (\beta_k r_{jn0}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2kjn} &= -\frac{i}{2} \left\{ l_{1k} \lambda_k k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + l_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k k_0 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\
G_{3kjn} &= \frac{i}{2} \left\{ l_{1k} \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + l_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\
G_{4kjn} &= \sigma \left\{ \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-2i\alpha_{jn0}}, \\
G_{5kjn} &= 4i\sigma \left\{ k_3^{**} (\lambda_k r_{jn0}) - k_3^{**} (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i(\psi_j - 3\alpha_{jn0})}, \\
G_{6kjn} &= \frac{i\sigma}{2} \left\{ \lambda_k^3 k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i(\psi_j + \alpha_{jn0})}, \\
G_{7kjn} &= \sigma \left\{ \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{2i\alpha_{jn0}}, \\
G_{8kjn} &= -\frac{i\sigma}{2} \left\{ \lambda_k^3 k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i(\psi_j + \alpha_{jn0})}, \\
G_{9kjn} &= -4i\sigma \left\{ k_3^{**} (\lambda_k r_{jn0}) - k_3^{**} (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i(\psi_j - 3\alpha_{jn0})}, \\
G_{10kjn} &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) - \tilde{b}_k \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i\alpha_{jn0}}, \\
G_{11kjn} &= \frac{1}{4} \left\{ -\tilde{a}_k \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i(\psi_j - 2\alpha_{jn0})}, \\
G_{12kjn} &= \frac{i}{4} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i\psi_j}, \\
G_{13kjn} &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) - \tilde{b}_k \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i\alpha_{jn0}}, \\
G_{14kjn} &= -\frac{i}{4} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_0 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i\psi_j}, \\
G_{15kjn} &= \frac{i}{4} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i(\psi_j - 2\alpha_{jn0})}, \\
d_{1k}^* &= -i(1 + \tilde{d}_{1k}), \quad K_3^{**}(\gamma r) = -\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 K_3(\gamma r) + \frac{1}{r^3}, \\
K_2^*(\gamma r) &= K_2(\gamma r) - \frac{2}{\gamma^2 r^2}, \quad \zeta_j - \zeta_{jn0} = r_{jn0} e^{i\alpha_{jn0}}.
\end{aligned}$$

**Описание результатов численных расчётов.** В качестве примера рассмотрим слой с двумя отверстиями, направляющие цилиндрических поверхностей которых  $L_1$  и  $L_2$  представляют собой эллипсы

$$\begin{aligned}
L_1: \quad \xi_{11} &= R_{11} \cos \varphi_1, \quad \xi_{12} = R_{12} \sin \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi; \\
L_2: \quad \xi_{21} &= R_{21} \cos \varphi_2 + d, \quad \xi_{22} = R_{22} \sin \varphi_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi,
\end{aligned}$$

либо квадраты с закруглёнными углами

$$\begin{aligned}
L_1: \quad \xi_{11} &= a_0^{(1)} (\cos \varphi_1 + C_0 \cos 3\varphi_1), \quad \xi_{12} = a_0^{(1)} (\sin \varphi_1 - C_0 \sin 3\varphi_1); \\
L_2: \quad \xi_{21} &= a_0^{(2)} (\cos \varphi_2 + C_0 \cos 3\varphi_2) + d_1, \quad \xi_{22} = a_0^{(2)} (\sin \varphi_2 - C_0 \sin 3\varphi_2); \\
0 &\leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad C_0 = 0,14036.
\end{aligned}$$

Для характеристики напряженного состояния слоя на цилиндрических поверхностях отверстий рассчитывались амплитудные значения величин [6]

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \\
\theta &= \psi - \pi, \quad \sigma_{ZZ} = \sigma_{33}
\end{aligned} \tag{14}$$

в точке контура  $L_2$ :  $\varphi_2 = 0$ ,  $x_3 = 0,8h$ .

При численной реализации алгоритма система интегральных уравнений методом механических квадратур [2, 5] сводилась к линейной системе алгебраических уравнений. Последовательность вычислений такая: сначала численно решалась система интегральных уравнений краевой задачи (13), далее определялись коэффициенты Фурье  $\sigma_{ij}^{(k)}$  тензора напряжений, затем по формулам (14) рассчитывались напряжения в вышеозначенной точке.

Коэффициенты Фурье искоемых величин (14) с учетом формул (9), (10), операции предельного перехода и уравнения относительно плотностей, запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \sigma_{\theta\theta}^{(kn)} &= -p_{2k}^{(n)} m_{1k} - p_{3k}^{(n)} m_{2k} + \\
&+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} H_{1kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} H_{2kjn} ds_j + \right. \\
&\left. + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} H_{3kjn} ds_j \right\} - \frac{1}{\mu} N_k^{(n)}, \\
\frac{1}{\mu} \sigma_{zz}^{(kn)} &= -p_{2k}^{(n)} m_{1k}^* - p_{3k}^{(n)} m_{2k}^* + \\
&+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} H_{1kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} H_{2kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} H_{3kjn}^* ds_j \right\}, \tag{15}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
m_{1k} &= 2r_{1k}, \quad m_{2k} = 2r_{2k}, \\
H_{1kjn} &= 2G_{1kjn}, \quad H_{2kjn} = 2G_{2kjn}, \quad H_{3kjn} = 2G_{3kjn}, \\
m_{1k}^* &= -\left( a_k^* + b_k^* \tilde{d}_{1k} \right) l^*, \quad m_{2k}^* = -m_{1k}^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{1kjn}^* &= a_k^* k_0 (\lambda_k r_{jn0}) - b_k^* k_0 (\beta_k r_{jn0}), \\
 H_{2kjn}^* &= -\frac{i}{2} \left\{ a_k^* \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + b_k^* \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\
 H_{3kjn}^* &= \frac{i}{2} \left\{ a_k^* \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + b_k^* \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\
 a_k^* &= (\sigma - 1) \Lambda - 2\gamma_k a_k, \quad b_k^* = -2\gamma_k b_k.
 \end{aligned}$$

Расчеты проводились для случая, когда на цилиндрических поверхностях слоя действует изгибающее пульсирующее давление, амплитудное значение которого определяется выражением  $N_0 = C \sin \gamma_0 x_3$  ( $C = const$ ).

На рис.2-5 приведены распределения относительного амплитудного значения окружного напряжения  $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$  в зависимости от изменения безразмерного волнового числа  $\alpha_1 a$  ( $a$  – характерный линейный размер) при

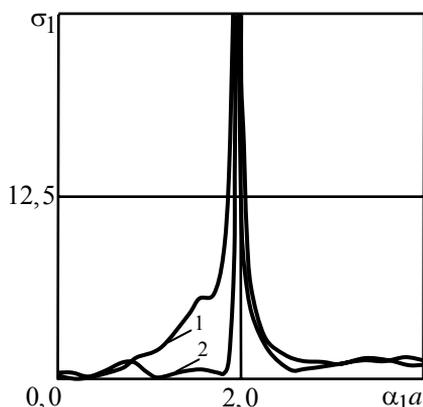


Рис. 2

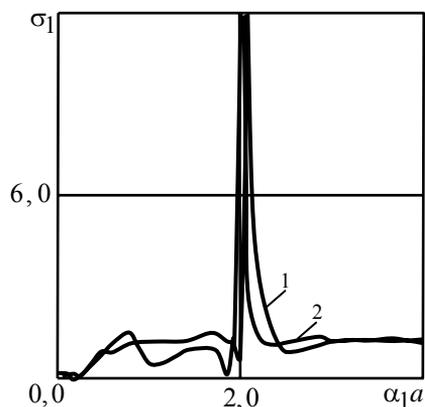


Рис. 3

различных геометрических и механических параметрах слоя и  $a=1$ . Все графики построены для круговых полостей  $R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = 1$  и  $h=90$ .

Кривые 1, 2 на рис. 2 соответствуют значениям  $d$ , равным 1,5 и 2, когда их коэффициент Пуассона  $\nu = 0,15$ . Кривые 1, 2 на рис. 3 соответ-

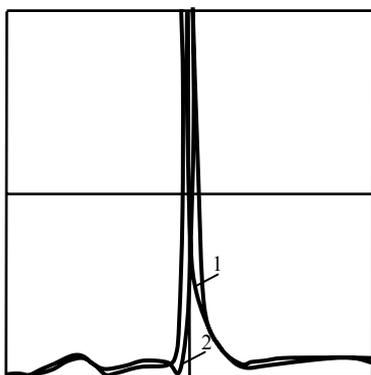


Рис. 4

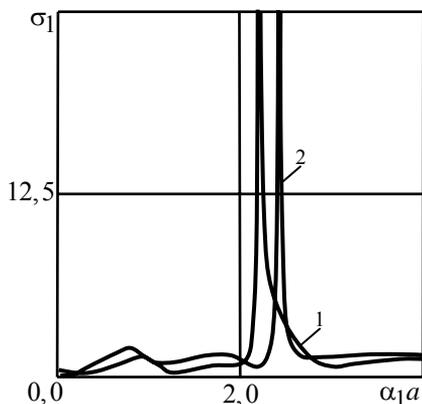


Рис. 5

ствують значенням  $d$ , рівним 2 і 5 відповідно при  $\nu = 0,22$ . Криві 1, 2 на рис. 4 побудовані при  $d = 2$ , коли коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,11$  і  $0,22$  відповідно. Криві 1, 2 на рис. 5 побудовані при  $d = 2$  і значенні коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,11$  і  $0,3$  відповідно.

Як видно з даних рис. 2–5, при збільшенні відстані між отворами спостерігається звуження основи першого резонансу; при зменшенні коефіцієнта Пуассона спостерігається зміщення основи першого резонансу в бік початку координат; при збільшенні різниці між коефіцієнтами Пуассона спостерігається збільшення відстані між основами першого резонансу.

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано задачу про гармонічні пружні коливання шару з двома наскрізними отворами, на поверхнях яких задано згинний пульсуючий тиск. Крайова задача зводиться до системи інтегральних рівнянь, яка розв'язується чисельно. Наведені приклади, у яких досліджуються особливості розподілу колового напруження за першим безрозмірним хвильовим числом в залежності від відстані між отворами та коефіцієнта Пуассона.

**Ключові слова:** гармонічні коливання, шар з двома отворами, інтегральні рівняння, ковзальне закріплення.

**SUMMARY.** The time-harmonic elastic problem for thick plate with two holes is solved. On surfaces flexural pulsing pressure is set. The boundary value problem is converted to the numerical solving of the system of integral equations. Features of hoop stress distribution on the first non-dimensional wave number depending on distance between holes and Poisson's factor are investigated. Numerical examples are also presented.

**Key words:** time-harmonic oscillation, layer with two holes, integral equations, flat face conditions.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алтухов Є. В., Панченко Ю. В., Богатчук А. Ю. Коливання ізотропних пластин з урахуванням крайових умов типу плоского торця або діафрагми // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 41-45.
2. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. – 235 с.
3. Фильштинский Л. А., Ковалев Ю. Д. Изгибные колебания слоя с туннельными отверстиями при скользящей заделке его торцов // Акустичний симпозіум «Консонанс-2003». – 2003. – С. 265-270.
4. Шевченко В. П., Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко. Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца // Доп. НАН України. – 2011. – № 9. – С. 70-77.
5. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. *The Numerical Solutions of Singular Integral Equations. Method of Analysis and Solutions of Crack Problems* // Leyden: Noordhoff Intern. Publ. – 1973. – P. 268–425.
6. Yang Zh. The stress and strain concentrations of an elliptical hole in an elastic plate of finite thickness subjected to tensile stress // Int. J. Fract. – 2009. – 155. - P. 43-54.

Сумської державний університет

Поступила 04.09.2013

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук,  
Р. Ф. ТЕРЛЕЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук,  
М. Т. СОЛОДЯК, канд. физ.-мат. наук

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В МАГНИТНЫХ СРЕДАХ

*Рассмотрены особенности построения моделей термомеханики для ферромагнитных (ферритовых) тел с учетом моментных факторов, обусловленных воздействием электромагнитного поля.*

**Ключевые слова:** электромагнитотермоупругость, моментные факторы, ферромагнетики, ферриты, резонансные явления, магнитостатические волны.

Усовершенствование известных и создание новых эффективных способов технологической обработки изделий из магнитных материалов с усложненными свойствами (ферромагнитных, ферритовых) с использованием индукционного нагрева; выбор рациональных режимов эксплуатации энергетических установок и электротехнических устройств, содержащих магнитные элементы; разработка приборов, использующих явления ферромагнитного, ядерного магнитного и электронного парамагнитного резонансов и изучение особенности распространения магнитостатических волн требуют математического моделирования и исследования взаимосвязанных электромагнитоупругих и тепловых процессов в изотропных и анизотропных магнитных средах. Сложность этой проблематики состоит в необходимости привлечения и развития теорий электромеханического взаимодействия, учитывающих моментные факторы на основе подходов классической или моментной теории упругости [12].

Поскольку процессы намагничивания в теле могут быть взаимосвязаны с процессами поляризации, то будем исходить из известной общей теории взаимодействия деформируемого твердого тела с электромагнитным полем (ЭМП) [14, 15]. При ее построении используют подходы механики сплошной среды, базирующиеся на континуальных представлениях и методах неравновесной (рациональной) термодинамики. Действие внешнего по отношению к телу ЭМП связывают с силовыми и энергетическими факторами. Первые при наличии моментных эффектов учитывают не только через объемные (пондеромоторные) силы  $\vec{F}$ , но и объемные пары сил  $\vec{L}$  (пондеромоторные моменты). Вторые определяются процессами обмена энергией между ЭМП и телом и характеризуются объемным притоком энергии  $\psi$  от поля к телу и тепловыделениями  $Q$  вследствие процессов диссипации (при прохождении тока, поляризации и намагничивания). При этом  $\psi = w + Q$ , где  $w$  – энергия ЭМП.

В континуальной модели, вводя определенные характеристики ( $\rho$ ,

$U$  – плотность массы и внутренней энергии;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений Коши;  $q_i$  – вектор теплового потока) и используя физические законы сохранения массы, количества движения, момента количества движения и энергии (сформулированные в интегральной форме), а также учитывая факторы влияния ЭМП, получают следующую систему балансовых уравнений механики деформируемого твердого тела при воздействии ЭМП в локальной (дифференциальной) форме [9, 15]

$$\rho \frac{d \dot{x}_i}{dt} = \sigma_{ij,j} + F_i, \quad \sigma_{[ij]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijl} L_l, \quad \rho \frac{dU}{dt} = \sigma_{ij} \dot{x}_{i,j} - q_{j,j} + \psi, \quad (1)$$

и условия в скачках (отдельные граничные условия) на поверхности

$$\sigma_{ij} n_j = P_i^{ext}(\bar{x}, t), \quad q_j n_j = q^{ext}(\bar{x}, t), \quad (2)$$

Выше:  $x_i$  декартовы (эйлеровы) координаты, а  $\dot{x}_i$  – скорости точек;  $\varepsilon_{ijl}$  – тензор Леви-Чивита; индексами в квадратных скобках обозначены несимметричные тензоры, повторяющиеся индексы обозначают суммирование, а запятая перед индексом – дифференцирование по соответствующим координатам;  $P_i^{ext}(\bar{x}, t)$ ,  $q^{ext}(\bar{x}, t)$  – заданные вектор поверхностного нагружения и тепловой поток;  $n_i$  – вектор внешней нормали к поверхности.

Отметим, что второе из соотношений (1) выражает несимметричность тензора напряжений в рамках классической теории упругости. При учете инерционных моментных эффектов связанных с вращательным движением точек тела, в несимметричной теории упругости уравнение баланса момента импульса получают в виде [12]

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{ik} + \mu_{ji,j} + L_i = J \frac{d\dot{\omega}_i}{dt}, \quad (3)$$

где  $\dot{\omega}_i$  – скорость поворота точек тела,  $J$  – мера инерции при вращении. В упрощенной теории псевдоконтинуума Коссера предполагается зависимость вектора поворота  $\bar{\omega}$  от вектора перемещения  $\bar{u}$  ( $\omega_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j}$ ) С использованием такого подхода электромагнитоупругие процессы исследовались в частности в [2].

Для описания локально-неравновесных состояний в физически малых элементах тела используют подходы неравновесной термодинамики континуума. При этом второй закон термодинамики формулируют в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема [9, 14]

$$\rho \frac{d\eta}{dt} + (q_i T^{-1})_{,i} - Q T^{-1} \geq 0. \quad (4)$$

Здесь  $\eta$ ,  $T$  – плотность энтропии и температура в теле. Неравенство (4) полезно представить в таком виде, когда известны величины, характеризующие диссипацию электромагнитной энергии в теле при воздействии ЭМП. Так, исключив из этого неравенства величину  $q_{i,i}$  с помощью третьего из соотношений (3), выражающего первый закон термодинами-

ки, приходим к так называемому диссипативному неравенству

$$\rho \left( \frac{d\eta}{dt} - \frac{dU}{dt} \right) - \frac{1}{T} q_i T_{,i} + t_{ij} x_{i,j} + \psi - Q \geq 0. \quad (5)$$

Для того, чтобы получить полную систему соотношений, которым должны удовлетворять характеристики описывающие исследуемые электромагнитные, тепловые, и механических процессы в теле, находящемся под воздействием внешнего ЭМП, необходимо получить также систему уравнений Максвелла для характеристик ЭМП в области внешней среды и тела.

Моделирование электромеханического взаимодействия поля и материала путем построения определенных микро- или макромоделей, описывающих процессы электропроводности, поляризации, намагничивания во взаимосвязи с другими физическими процессами в теле при воздействии ЭМП, позволяет (при соответствующем определении введенных при континуальном описании характеристик) выразить факторы воздействия поля через характеристики ЭМП в теле, удовлетворяющие системе уравнений Максвелла в том или ином формулировании [6, 14, 15].

Используем статистический подход [8, 15]. Он дает возможность на основании известных физических представлений о строении твердого тела определить такие характеристики как электропроводность, поляризация и намагничивание. Постулируется, что на микроуровне ЭМП в теле создается точечными заряженными физическими частицами (электронами, ядрами), движущимися в вакууме под воздействием внешних факторов (в том числе внешнего ЭМП), которые и образуют в теле стабильные группы (атомы, ионы, молекулы). Макроскопические уравнения Максвелла и выражения для величин, характеризующих взаимодействие тела с полем, устанавливают путем статистического усреднения по точкам пространства микроуравнений поля и механики для упомянутых групп. Поляризацию и намагничивание в теле определяют через статистически средние величины от мультипольных электрических и магнитных моментов, характеризующих стабильные группы. При этом система макроскопических уравнений Максвелла имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E_{i,i} &= \Omega - P_{i,i}, & -\varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} + \mu_0^{-1} \varepsilon_{ijk} B_{k,j} &= J_i + \frac{\partial P_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} M_{k,j}, \\ B_{i,i} &= 0, & \frac{\partial B_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} E_{k,j} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  – напряженность электрического и индукция магнитного полей в теле, а  $\Omega$ ,  $\vec{P}$  – плотность заряда и поляризация, определяемые как статистически средние от введенных микрохарактеристик стабильных групп;  $\vec{J}$ ,  $\vec{M}$  – плотность тока и намагничивание, которые представляются в виде:

$$\vec{J} = \Omega \dot{\vec{x}} + \vec{I}^{(c)}, \quad \vec{M} = \vec{M} + \vec{P} \times \dot{\vec{x}} + \vec{M}_\Phi, \quad (7)$$

где  $\dot{\vec{x}}$  – средние скорости. Видно, что плотность полного тока  $\vec{J}$  в теле

состоит из плотности конвективного тока  $\Omega \dot{\vec{x}}$ , обусловленного движением заряда, и тока проводимости  $\vec{I}^{(c)}$ , связываемого с флуктуациями скоростей стабильных групп относительно средней (которые могут быть вызваны, в частности движением свободных электронов). Плотность намагничивания  $\vec{M}$  содержит три составляющие. Первая – вызвана наличием магнитных дипольных моментов в группах, вторая – обусловлена движением поляризованных групп, а третья – флуктуациями скоростей групп, обладающих электрическими дипольными моментами.

Если ввести величины электрического смещения  $\vec{D}$  и напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  с помощью известных соотношений

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i, \quad H_i = \mu_0^{-1} B_i - M_i, \quad (8)$$

приходим к системе уравнений Максвелла в форме Минковского [6, 15].

Приведем выражения для упомянутых выше факторов воздействия ЭМП в статистической модели [8, 15]:

$$F_i = \Omega E_i + \varepsilon_{ijk} J_j B_k + P_j E_{j,i} + M_j B_{j,i} + \varepsilon_{ijk} \rho \frac{d}{dt} (\rho^{-1} P_j B_k), \quad (9)$$

$$L_i = \varepsilon_{ijk} \left[ P_j E_k + M_j B_k + \dot{x}_j (\varepsilon_{kpl} P_p B_l) \right], \quad (10)$$

$$\psi = J_i E_i + E_i \frac{\partial P_i}{\partial t} - M_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + (\dot{x}_i P_l E_l)_{,i} - \dot{x}_i F_i. \quad (11)$$

Видно, что наличие пондеромоторных моментов может быть обусловлено непараллельностью в теле векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  или  $\vec{H}$  и  $\vec{M}$ .

Система уравнений Максвелла (6) и выражения (9)–(11) для факторов воздействия ЭМП на тело записаны для подвижного тела в нерелятивистском приближении (медленно движущихся сред). Тогда токи в собственной системе отсчета  $(\vec{x}', t')$  ( $\dot{\vec{x}} = 0$ ), связанной с подвижными точками тела (системе покоя [8]) являются токами проводимости  $\vec{I}'^{(c)}$  в теле, а выражение для притока энергии ЭМП к телу в этой системе отсчета имеет вид:

$$\psi = J'_i E'_i + \rho \frac{d}{dt'} (\rho^{-1} P') E'_i - M'_i \frac{d B'_i}{d t'}, \quad J'_i = I_i'^{(c)},$$

$$\vec{M}' = \vec{M}' + \vec{M}'_\phi, \quad (12)$$

где

$$\vec{E}' = \vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}, \quad \vec{D}' \approx \vec{D}, \quad \vec{B}' \approx \vec{B}, \quad \vec{H}' = \vec{H} - \dot{\vec{x}} \times \vec{D},$$

$$\vec{P}' = \vec{P}, \quad \Omega' \approx \Omega, \quad \vec{M}' = \vec{M} + \dot{\vec{x}} \times \vec{P}, \quad \vec{J} = \vec{J} - \Omega \dot{\vec{x}}. \quad (13)$$

На основании теоремы Умова-Пойнтинга (следующей из системы уравнений Максвелла, записанной для подвижного тела), определяя энергию и поток энергии ЭМП соотношениями [1, 13]

$$w = \varepsilon_0 (\bar{E}')^2 + (\bar{B}')^2 / \mu_0, \quad \bar{\Pi}' = \bar{E}' \times \bar{H}', \quad (14)$$

получаем закон сохранения электромагнитной энергии в виде

$$\psi = -\frac{d}{dt'} [w^{(em)}] - \nabla' \bar{\Pi}'. \quad (15)$$

Здесь штрихом обозначены величины в системе покоя. Таким образом приток энергии (12) содержит как энергию поля, так и диссипированную энергию, переходящую в энергию тепловых колебаний в теле. При циклическом изменении ЭМП энергия поля за один цикл равна нулю, поэтому выражение (15) может служить для определения объемных тепловыделений в теле за один цикл (период  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  – круговая частота) [1].

Поскольку все измерения электромагнитных величин проводят для неподвижного тела, то связи (13) могут быть использованы при выводе определяющих уравнений модели электропроводного твердого тела, связывающих плотность тока  $\bar{J}$ , электрическое смещение  $\bar{D}$  и индукцию  $\bar{B}$  магнитного поля в нем с величинами напряженностей электрического  $\bar{E}$  и магнитного  $\bar{H}$  полей.

Для конкретизации модели тела следует получить определяющие (физические) уравнения (уравнения состояния и кинетические), описывающие взаимосвязь введенных параметров электромагнитных, тепловых и механических процессов в деформируемых телах при воздействии внешнего ЭМП. Эти уравнения должны учитывать специфические электрофизические свойства таких тел и особенности термомеханического поведения их материала при рассматриваемых комплексных нагружениях (электромагнитных, тепловых и механических).

Рассматриваемый тензор напряжений Коши (вследствие моментного действия ЭМП) является несимметричным. При установлении определяющих уравнений для такого тензора (в частности, при определении значений экспериментально измеряемых упругих характеристик), формулировании системы ключевых уравнений электромагнитотермомеханики в рамках безмоментной теории упругости, определяющим является симметричный тензор напряжений. Для построения физических уравнений с использованием такой теории можно провести симметризацию тензора  $\sigma_{ij}$ , воспользовавшись известным в литературе представлением для пондеромоторной силы  $\bar{F}$  [13]

$$F_i = \sigma_{ij,j}^{(M)} - \frac{\partial G_i}{\partial t}, \quad G_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_0 E_j B_k, \quad (16)$$

где

$$\sigma_{ij}^{(M)} = E_i P_j - M'_i B_j + \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0^{-1} B_i B_j - (w^{(em)}/2 - M'_k B_k) \delta_{ij} \quad (17)$$

– компоненты тензора натяжений Максвелла. Тогда, с учетом выражения (10) для пондеромоторного момента, получаем, что величины  $\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{(M)} = \sigma_{ij}^{(e)}$  образуют компоненты  $\sigma_{ij}^{(e)}$  симметричного тензора. Урав-

нения баланса импульса (1) и граничные условия (2) с использованием тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(e)}$  можно записать в виде

$$\rho \frac{d \dot{x}_i}{dt} = \sigma_{ij,j}^{(e)} - \frac{\partial G_i}{\partial t}, \quad \sigma_{ij}^{(e)} n_j = P_i^{ext}(\bar{x}, t) + \sigma_{ij}^{(M)} n_j. \quad (18)$$

Таким образом, в рамках симметричной теории упругости моментные факторы взаимодействия практически изменяют только вид механических граничных условий и могут быть учтены при их формулировании.

При построении определяющих уравнений в качестве независимых параметров состояния выбраны величины напряженностей электрического и магнитного полей  $E'_i$ ,  $H'_i$ , температура  $T$  и компоненты  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  тензора малой деформации. Использован феноменологический подход и методы неравновесной термодинамики [9, 15]. Получены следующие представления для внутренней энергии  $U$ , компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(e)}$ , энтропии  $\eta$  и удельной теплоемкости  $c_\varepsilon$  [1, 15]:

$$U = U^0(\varepsilon_{ij}, T) - T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{I_*}{T} \right), \quad \eta = \eta^0 - \frac{\partial I_*}{\partial T}, \quad \sigma_{ij}^{(e)} = \sigma_{ij}^0 + 2\rho \frac{\partial I_*}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

$$c_\varepsilon = c_\varepsilon^0 - \frac{\partial}{\partial T} \left[ T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{I_*}{T} \right) \right], \quad c_\varepsilon^0 = \left( \frac{\partial U^0}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}},$$

$$I_* = x_A \int_0^1 f(s x_A, \varepsilon_{ij}, T) ds, \quad x_A = \{\bar{P}', \bar{M}'\}, \quad I_* \rightarrow 0 \text{ при } x_A = 0, \quad (19)$$

которые учитывают влияние ЭМП на свойства тела. В (19) составляющие  $U^0$ ,  $\psi^0$ ,  $t_{ij}^0$ ,  $\eta^0$  зависят лишь от введенных параметров  $\varepsilon_{ij}$ ,  $T$  состояния. Показано, что в пренебрежении сопряженными эффектами первого порядка (пьезоэлектрическим, пьезомагнитным) и второго (пироэлектрическим, пиромагнитным) определяющие уравнения для компонент  $\sigma_{ij}^{(e)}$  тензора напряжений и плотности энтропии  $\eta$  имеют такую же структуру, как и в отсутствие воздействия ЭМП. В частности, для электропроводного теплопроводного тела термоупругое поведение материала которого в пределах упругости является линейным, они имеют вид

$$\sigma_{ij}^{(e)} \approx \sigma_{ij}^0 = \left\{ \left( K - \frac{2}{3} G \right) e_{kk} - K [\alpha (T - T_0)] \right\} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad (20)$$

$$\eta \approx \eta^0 = -c_\varepsilon (T_0)^{-1} (T - T_0) + \alpha K (\rho)^{-1} \varepsilon_{kk}, \quad (21)$$

где  $K$ ,  $G$  – упругие постоянные;  $\alpha$  – коэффициент объемного температурного расширения.

Кинетическое уравнение для введенного потока  $q_i$  тепла устанавливаем исходя из обобщенного диссипативного неравенства (5) (в приближе-

нии линейной связи между термодинамическим потоком и силой). При определенной в конкретной модели электропроводного тела скорости диссипации энергии внешнего ЭМП вследствие процессов поляризации, намагничивания и электропроводности (объемной плотности тепловыделений  $Q$ ) оно принимает вид закона теплопроводности Фурье

$$q_i = -\kappa T_{,i}, \quad (22)$$

где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности.

Осуществим конкретизацию электрофизических соотношений модели для изотропных и анизотропных ферритовых и ферромагнитных тел, с учетом гистерезисного характера намагничивания в предположении о ЭМП как внешнем воздействии.

**Ферромагнитные тела во внешних однородных полях.** Сначала рассмотрим изотропные (поликристаллические) ферромагнитные тела, в которых при действии внешнего ЭМП доминируют процессы электропроводности и намагничивания. Такие тела характеризуем высокой электропроводностью, которая определяется токами проводимости в собственной системе отсчета  $\vec{J}' = \vec{I}'^{(c)}$ , которые описываются согласно закону Ома как для неподвижного тела. Касательно поляризационных свойств они обычные линейные диэлектрики, процессы поляризации в которых имеют мгновенный характер. При этом вектор поляризации  $\vec{P}'$  совпадает по направлению с вектором напряженности  $\vec{E}'$  электрического поля. Физические уравнения, описывающие электропроводные и поляризационные характеристики таких тел имеют вид

$$\vec{J}' = \lambda \vec{E}', \quad \vec{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}', \quad (23)$$

где  $\lambda$  – коэффициент электропроводности,  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость.

Для процессов намагничивания свойственен гистерезисный характер, обусловленный доменной структурой их строения. При этом экспериментально устанавливаемая зависимость между индукцией  $\vec{B}'$  и напряженностью  $\vec{H}'$  ( $\vec{B}'$  параллельно  $\vec{H}'$ ) магнитного поля описывается соотношением [11]

$$\vec{B}' = B'(H') \vec{e}_H \equiv \mu(H') \vec{H}', \quad (24)$$

где  $\mu(H')$  – абсолютная магнитная проницаемость;  $\vec{e}_H = \vec{H}'/H'$ , – орт в направлении вектора  $\vec{H}'$ ;  $H'$  и  $B'$  – проекции векторов  $\vec{H}'$  и  $\vec{B}'$  на положительное направление  $\vec{H}'$ . При циклическом перемагничивании зависимость (23) описывает динамическую петлю гистерезиса, для которой характерно насыщение (рис. 1). Гистерезисную зависимость  $B'(H')$  при учете специфики процессов намагничивания в периодическом во времени

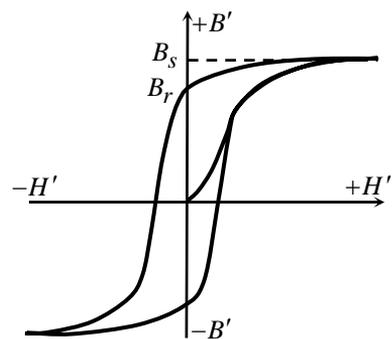


Рис. 1

магнитном поле  $H' = A \cos \omega t + C \sin \omega t$  аппроксимируем следующей аналитической зависимостью [4]

$$B'(H') = \mu_0 H + \beta_H \operatorname{arctg} \alpha_H H, \quad (25)$$

где  $H = H'$  – для материалов, имеющих узкую петлю гистерезиса, которую моделируем основной кривой намагничивания (магнитомягкие ферромагнетики) и  $H = \sqrt{1 - \chi_H^2} H' - \chi_H / \omega \partial H' / \partial t$  – для материалов, имеющих широкую петлю гистерезиса (магнитотвердые ферромагнетики). В соотношении (25):  $\beta_H = 2M_s / \pi$ ,  $\alpha_H = (\mu_i - 1) \mu_0 \beta_H^{-1}$ ,  $M_s = \mu_0^{-1} B_s$  – намагничивание насыщения, где  $\mu_i$  – начальная относительная проницаемость;  $\chi_H = H_c / H_m$  при  $H' \leq H_m$  и  $\chi_H = H_c / H_0$  при  $H' > H_m$ ;  $H_0$ ,  $H_m$  – значения напряженности на поверхности тела и соответствующее гистерезисному насыщению;  $H_c$  – коэрцитивная сила.

В кристаллических ферромагнетиках проявляется магнитная анизотропия, при которой зависимость между вектором индукции  $\vec{B}'$  (или намагниченности  $\vec{M}'$ ) и вектором напряженности  $\vec{H}'$  магнитного поля описывается с помощью тензора  $\mu_{ij}$  магнитной проницаемости (или  $\varkappa_{ij}$  магнитной восприимчивости)

$$B'_i = \mu_{ij} H'_j, \quad M'_i = \varkappa_{ij} H'_j. \quad (26)$$

Тензоры магнитной проницаемости и восприимчивости связаны, согласно с определением (8) вектора намагниченности, соотношением  $\mu_{ij} = \mu_0 (\delta_{ij} + \varkappa_{ij})$ .

Заметим, что компоненты магнитной проницаемости  $\mu_{ij}$  или восприимчивости  $\varkappa_{ij}$  являются, в общем случае, нелинейными функциями вектора  $\vec{H}'$  напряженности магнитного поля, его производных  $\dot{\vec{H}}'$  по времени и их комбинаций.

Ферромагнитные анизотропные тела (для которых справедливы материальные соотношения (26)) во внешнем магнитном поле подвержены также воздействию пондеромоторного момента  $\vec{L}$ . Его выражение (в системе покоя  $(\vec{x}', t')$  ( $\dot{\vec{x}} = 0$ )) через компоненты вектора  $\vec{H}'$  получим подставляя зависимости (23), (26) в формулу (10):

$$\begin{aligned} L_x &= \mu_0 \left[ (\varkappa_{yx} H'_z - \varkappa_{zx} H'_y) H'_x + (\varkappa_{yy} - \varkappa_{zz}) H'_y H'_z - \varkappa_{zy} H_y'^2 + \varkappa_{yz} H_z'^2 \right], \\ L_y &= \mu_0 \left[ (\varkappa_{zy} H'_x - \varkappa_{xy} H'_z) H'_y - (\varkappa_{xx} - \varkappa_{zz}) H'_x H'_z + \varkappa_{zx} H_x'^2 - \varkappa_{xz} H_z'^2 \right], \\ L_z &= \mu_0 \left[ (\varkappa_{xz} H'_y - \varkappa_{yz} H'_x) H'_z + (\varkappa_{xx} - \varkappa_{yy}) H'_x H'_y - \varkappa_{yx} H_x'^2 + \varkappa_{xy} H_y'^2 \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражения для пондеромоторного момента в лабораторной системе отсчета найдем используя связи (16).

**Ферритовые тела во внешних однородных полях.** При описании электрофизических свойств феррита считаем его изотропным материалом,

имеющим низкую удельную электропроводность  $\lambda = 10^{-6} \div 10^{-2}$  См/м, для которого характерны одновременно процессы намагничивания и поляризации, а векторы намагничивания и поляризации параллельны соответственно векторам напряженностей магнитного и электрического полей. Физические уравнения описывающие электрофизические свойства (как для неподвижного тела) записываем в виде [3, 5]

$$\vec{B}' = B'(H')\vec{e}_H \equiv \mu(H')\vec{H}', \quad \vec{D}' = D'(E')\vec{e}_E \equiv \varepsilon(E')\vec{E}', \quad \vec{J}' = \lambda\vec{E}'. \quad (28)$$

Магнитные свойства феррита определяются аналогично как в ферромагнетике. В (28)  $\varepsilon(E')$  – диэлектрическая проницаемость;  $\vec{e}_E = \vec{E}'/E'$  – орт в направлении вектора  $\vec{E}'$ ;  $E'$  и  $D'$  – проекции векторов  $\vec{E}'$  и  $\vec{D}'$  на положительное направление вектора  $\vec{E}'$ . При циклическом перемагничивании и переполяризации первые две зависимости описывают (как и в ферромагнетике) динамические петли гистерезиса, для которых свойственно насыщение. Формы петель для конкретных материалов зависят от частоты и амплитуды внешнего поля. Для слабых полей и высоких частот кривые намагничивания и поляризации имеют форму эллипса. Для отдельных ферритов известны (измеренные экспериментально) такие характеристики:  $B_s, D_s$  – индукции насыщения;  $B_r, D_r$  – остаточные индукции;  $H_c, E_c$  – коэрцитивные силы;  $H_{\max}, E_{\max}$  – характерные величины напряженностей при насыщенных намагничивании и поляризации;  $\mu_i, \varepsilon_i$  – начальные и  $\mu_m, \varepsilon_m$  – максимальные относительные проницаемости. Гистерезисные зависимости  $B'(H')$  и  $D'(E')$  при учете специфики процессов намагничивания и поляризации ферритов при гармонических во времени напряженностях магнитного и электрического полей  $E' = A_* \cos \omega t + C_* \sin \omega t$  получаем в виде

$$B'(H') = \mu_0 H + \beta_H \operatorname{arctg} \alpha_H H, \quad D'(E') = \varepsilon_0 E + \beta_E \operatorname{arctg} \alpha_E E, \quad (29)$$

где  $E = E'$  – для материалов с узкой петлей гистерезиса, моделируемой основной кривой поляризации (мягкие ферриты) и  $E = \sqrt{1 - \chi_E^2} E' - \frac{\chi_E}{\omega} \frac{\partial E'}{\partial t}$  – для материалов, имеющих широкую петлю гистерезиса (твердые ферриты). В (29):  $\beta_E = 2P_s/\pi$ ;  $\alpha_E = (\varepsilon_i - 1)\varepsilon_0 \beta_E^{-1}$ ;  $\chi_E = E_c/E_m$  при  $E' \leq E_m$  и  $\chi_E = E_c/E_0$  при  $E' > E_m$ ;  $E_0$  – значение напряженности электрического поля на поверхности тела, а  $P_s = D_s$  – поляризация насыщения.

В случае эллиптической зависимости между индукциями и напряженностями при гармонических напряженностях магнитного и электрического полей в электротехнической литературе используют (при комплексном представлении характеристик ЭМП и рассмотрении первых гармоник) комплексные проницаемости  $\mu_* = \mu' - i\mu''$ ,  $\varepsilon_* = \varepsilon' - i\varepsilon''$  и соответствующие тангенсы углов потерь  $\operatorname{tg} \delta_m = \mu''/\mu'$  и  $\operatorname{tg} \delta_d = \varepsilon''/\varepsilon'$  (для характе-

ристики гистерезисных тепловыделений). Их получаем из (29) при

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu_i \sqrt{1 - \chi_H^2}, \quad \mu'' = \mu_i \chi_H, \\ \chi_H &= \frac{\operatorname{tg} \delta_m}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \delta_m}} \left( \operatorname{tg} \delta_m = \frac{\chi_H}{\sqrt{1 - \chi_H}} \right); \\ \varepsilon' &= \varepsilon_i \sqrt{1 - \chi_E^2}, \quad \varepsilon'' = \varepsilon_i \chi_E, \\ \chi_E &= \frac{\operatorname{tg} \delta_d}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \delta_d}} \left( \operatorname{tg} \delta_d = \frac{\chi_E}{\sqrt{1 - \chi_E}} \right).\end{aligned}\quad (30)$$

При этом комплексные проницаемости (тангенсы потерь) существенно зависят от частоты. В литературе имеются значения комплексных проницаемостей и тангенсов потерь как функций частоты для разных типов ферритов. Они описывают зависимости между напряженностями и индукциями при  $\omega \geq 10^4 \text{ c}^{-1}$  и  $H_{max} \leq 10^3 \text{ A/м}$ .

**Ферромагнитные и ферритовые тела во внешних неоднородных полях.** Для возбуждения резонансных явлений, сопровождающихся интенсивным поглощением электромагнитной энергии, и магнитостатических колебаний и волн в системах типа магнитопроводов используют комбинацию постоянного магнитного и переменного электромагнитного полей. При этом элемент с магнитными свойствами (в частности, ферромагнитный или ферритовый) находится во взаимоперпендикулярных постоянном  $\vec{H}'_0$  и переменном  $\vec{H}'_1$  магнитных полях, что обеспечивает максимальное влияние моментных факторов взаимодействия.

При упомянутых условиях вектор напряженности  $\vec{H}'$  магнитного поля, а также вектор  $\vec{M}'$  намагниченности в теле осуществляют колебательные движения, а магнитные процессы описываются уравнением гиромагнитных колебаний в форме Гильберта или в форме Ландау-Лившица [7, 10]:

$$\dot{\vec{M}}' = -\gamma_s \vec{M}' \times \vec{H}' + \frac{\alpha_s}{M} \vec{M}' \times \dot{\vec{M}}' = -\frac{\gamma_s}{1 + \alpha_s^2} \left[ \vec{M}' \times \vec{H}' + \frac{\alpha_s}{M} \vec{M}' \times (\vec{M}' \times \vec{H}') \right], \quad (31)$$

где  $\gamma_s = g_0 \mu_0 e_e / 2m_e$  – магнитомеханическое (гиромагнитное) отношение;  $g_0$  – фактор Ланде,  $e_e$  и  $m_e$  – соответственно заряд и масса электрона;  $\alpha_s$  – параметр потерь, определяемый в эксперименте.

Электропроводные, поляризационные и магнитные свойства тела в зависимости от свойств его материала описывают соотношения приведенные выше.

Для рассматриваемого случая при нахождении магнитного поля в магнетике исходим из уравнений магнитостатики [7, 10, 13]

$$B_{i,i} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} H_{k,j} = 0. \quad (32)$$

Их можно получить на основании проведенного критериального анализа



уравнения магнитостатики (32), определяющие уравнения для теплопроводного линейно упругого тела (20)–(22) и физические уравнения для ферромагнитных или ферритовых тел, а также полученные выражения для энергетических и силовых факторов воздействия ЭМП получаем полную систему ключевых дифференциальных уравнений модели относительно параметров, выбранных в качестве независимых (определяющие). Она описывает взаимосвязанные электромагнитные, тепловые и механические процессы в рассматриваемых магнетиках при воздействии внешнего ЭМП, которое определяется системой уравнений Максвелла во внешней среде или задается значениями характеристик поля на поверхности. Систему ключевых уравнений дополняем граничными и начальными условиями, которые соответствуют имеющимся условиям теплообмена с внешней средой и механического нагружения тела.

*Работа выполнена при поддержке НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований (проект ВВ-РФФД/382, № госрегистрации 0110U004144).*

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто особливості побудови моделей термомеханіки для ферромагнітних (феритових) тіл за врахування моментних чинників обумовлених дією електромагнітного поля.

**Ключові слова:** електромагнітотермопружність, моментні чинники, ферромагнетики, ферити, резонансні явища, магнітостатичні хвилі.

**SUMMARY.** The peculiarities of thermomechanics models of ferromagnetic (ferrite) solids accounting the moment factors caused by the action of the electromagnetic field are considered.

**Key words:** electromagnetothermoelasticity, moment factors, ferromagnetic and ferrite solids, resonance phenomena, magnetostatic waves.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл в 5-ти т. / Під заг ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра - Т. 1: Термомеханіка багатоконпонентних тіл низької електропровідності. – Львів: СПОЛЮМ, 2006. – 300 с.
2. Вестяк В. А., Тарлаковський Д. В., Терлецький Р. Ф. Нестационарные процессы в электромагнитоупругой полуплоскости под действием поверхностных возмущений // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 34–40.
3. Гачкевич А. Р., Івасько Р. А., Солодяк М. Т., Шимура С. Методика прогнозування термомеханічного поведіння ферритових елементів електромагнітних пристроїв при забезпеченні їх функціональних властивостей // Теорет. і прикладна механіка. – 2007. – Вип. 43. – С. 28–34.
4. Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термомеханічне поведіння шару при впливі гармонічного електромагнітного поля // Прикл. механіка. – 1989. – Т. 25, №1 2. – С. 93–101.
5. Гачкевич О., Солодяк М., Івасько Р., Бойчук В. Моделювання дії електромагнетного поля на термомеханічну поведінку деформівних твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 43-54.
6. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризованих електропровідних деформівних твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 19–37.
7. Гуревич А.Г., Магнітний резонанс в ферритах і антиферромагнетиках. – М.: Наука, 1973. – 592с.

8. Де Гроот С., Сатторп Л. Электродинамика. – М: Наука, 1982. – 560 с.
9. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость. – К: Наук. думка, 1988. – 320 с – Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. – Т. 4.
10. Кринчик Г.С. Физика магнитных явлений. – М.: Изд-во МГУ, 1985.– 336с.
11. Мишин Д.Д. Магнитные материалы. – М.: Высш. школа, 1981. – 335 с.
12. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
13. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика. – М.: Высшая школа, 1980. – 335 с.
14. Hutter K., van de Ven A.A. and Ursescu A. Electromagnetic field-matter interaction in thermoelastic solids. and viscous fluids – Lecture Notes in Physics. – 710. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 403 p.
15. Hutter K., van de Ven A. A. Field-matter interaction in thermoelastic solids.– Lecture Notes in Physics.– 88.– Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1978.– 234 p.

*Институт прикладных проблем механики  
и математики НАН Украины, г. Львов*

*Поступила 25.07.2013 г.*

УДК 539.3

*Р. С. МУСИЙ*, д-р физ.-мат. наук,  
*Н. Б. МЕЛЬНИК*,  
*Р. Ф. ТЕРЛЕЦКИЙ*, д-р физ.-мат. наук,  
*И. ШИМЧАК*, д-р наук.

### ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Предложена математическая постановка и методика решения задачи об определении термонапряженного состояния и несущей способности биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях. Численно проанализировано термонапряженное состояние и несущую способность рассматриваемых цилиндров при электромагнитном воздействии в режиме с импульсным модулирующим сигналом в зависимости от частоты несущих электромагнитных колебаний и величины напряженности магнитного поля.*

**Ключевые слова:** биметаллический цилиндр, импульсное электромагнитное воздействие, режим с импульсным модулирующим сигналом, термонапряженное состояние, несущая способность, резонансные частоты.

Биметаллические цилиндрические системы являются конструктивными элементами многих устройств и часто в процессе их изготовления и эксплуатации подвергаются воздействию импульсных электромагнитных полей (ЭМП), в частности с модуляцией амплитуды [1, 10]. Такие поля вызывают в каждом из составляющих слоев цилиндра объемные нестационарные источники  $Q^{(n)}$  ( $n=1, 2$ ) джоулева тепла и пондеромоторные силы  $\vec{F}^{(n)}$ , обуславливающие возникновение полей: температуры  $T_*^{(n)}$  и механических перемещений  $\vec{U}^{(n)}$ , деформации  $\hat{\epsilon}^{(n)}$  и напряжений  $\hat{\sigma}^{(n)}$ . Компоненты тензора  $\hat{\sigma}^{(n)}$  динамических напряжений при определенных параметрах импульсного ЭМП могут достигать критических значений, влекущих потерю цилиндром несущей способности [2, 5, 9].

Известны [3, 4, 6] исследования термонапряженного состояния (ТНС) (при конкретных условиях закрепления) однородных полого [3] и сплошного [6] электропроводных цилиндров, а также биметаллических пластин [4] при воздействии импульсного ЭМП. Однако воздействие импульсных ЭМП на ТНС биметаллических цилиндров изучено недостаточно.

В данной работе сформулирована комплексная задача термомеханики для длинного полого биметаллического цилиндра при однородном нестационарном электромагнитном воздействии. Предложена методика ее решения с использованием аппроксимации распределений всех ключевых функций по радиальной координате  $r$  квадратичными многочленами в каждом составляющем слое и интегрального преобразования Лапласа по времени  $t$ . Исследованы ТНС и несущая способность цилиндра для случая

воздействии в режиме с импульсным модулирующим сигналом (РИМС).

**Постановка задачи.** Рассмотрим длинный полый биметаллический цилиндр, отнесенный к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , ось

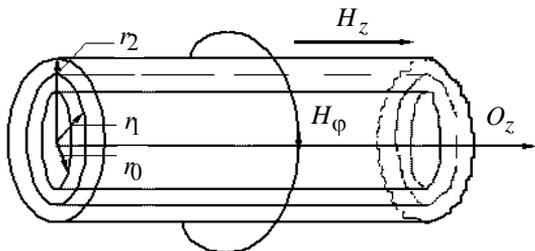


Рис. 1

$Oz$  которой совпадает с осью цилиндра (рис. 1). Цилиндр находится под воздействием нестационарного ЭМП, которое задано значениями отличной от нуля осевой компоненты  $H_z^{(n)}$  вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}^{(n)}(r, t) = \{0, 0, H_z^{(n)}(r, t)\}$  на внутренней  $r=r_0$  и внешней  $r=r_2$  поверхностях, т.е

$$\begin{aligned} H_z^{(1)}(r_0, t) &= H_z^-(t), \\ H_z^{(2)}(r_2, t) &= H_z^+(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H_z^\pm(t)$  – заданные функции времени  $t$ . Материалы составляющих слоев цилиндра однородны, изотропны и неферромагнитны, а их физико-механические характеристики постоянны. Поверхности  $r=r_0$  и  $r=r_2$  цилиндра теплоизолированы и свободны от силовой нагрузки, а на поверхности  $r=r_1$  раздела слоев выполняются условия идеального электромагнитного, теплового и механического контактов [2].

При таких условиях используемая расчетная схема определения ТНС цилиндра состоит из трех этапов [7, 8, 11], а именно: на первом – из уравнений электродинамики определяется вектор напряженности  $\vec{H}^{(n)}$  магнитного поля в каждом из слоев и обусловленные им джоулевы тепловыделения и пондеромоторные силы, которые выражаются через напряженность поля посредством формул

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &= \frac{1}{\sigma_n} (\text{rot } \vec{H}^{(n)})^2, \\ \vec{F}^{(n)} &= \mu_n (\text{rot } \vec{H}^{(n)}) \times \vec{H}^{(n)}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_n, \mu_n$  – удельные электропроводности и абсолютные магнитные проницаемости; на втором – из уравнений теплопроводности (в которых  $Q^{(n)}$  принимается плотностью объемных источников тепла) определяется распределение температуры  $T_*^{(n)}$ ; на третьем – из уравнений динамической термоупругости при известных температурах  $T_*^{(n)}$  и объемных силах  $\vec{F}^{(n)}$  находятся компоненты вектора перемещений  $\vec{U}^{(n)}$  и тензора напряжений  $\hat{\sigma}^{(n)}$ .

**Определение ЭМП.** Отличная от нуля осевая составляющая  $H_z^{(n)}(r, t)$

вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}^{(n)} = \{0; 0; H_z^{(n)} \equiv H_z^{(n)}(r, t)\}$  в цилиндре описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 H_z^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

граничными условиями (1) на поверхностях  $r = r_0$ ,  $r = r_2$ , и условиями идеального электромагнитного контакта на поверхности  $r = r_1$ :

$$\begin{aligned} H_z^{(1)}(r_1, t) &= H_z^{(2)}(r_1, t), \\ \frac{\partial H_z^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} &= k_\sigma \frac{\partial H_z^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3)$$

а также нулевым начальным условием  $H_z^{(n)}(r, 0) = 0$ . Здесь  $k_\sigma = \sigma_1 / \sigma_2$ .

При найденных функциях  $H_z^{(n)}(r, t)$  удельные плотности джоулевых тепловыделений  $Q^{(n)}(r, t)$  и пондеромоторных сил  $\vec{F}^{(n)} = \{F_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$  в рассматриваемом случае определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &= \frac{1}{\sigma_n} \left( \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} \right)^2, \\ F_r^{(n)} &= -\mu_n H_z^{(n)} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4)$$

**Определение температурного поля.** Температурное поле  $T^{(n)}(r, t)$  в слоях описывается уравнениями теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n}, \quad (5)$$

граничными условиями теплоизоляции поверхностей  $r = r_0$  и  $r = r_2$ , т.е.

$$\frac{\partial T^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} = \frac{\partial T^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

условиями идеального теплового контакта на поверхности  $r = r_1$ :

$$\begin{aligned} T^{(1)}(r_1, t) &= T^{(2)}(r_1, t), \\ \frac{\partial T^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} &= k_\lambda \frac{\partial T^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (7)$$

нулевым начальным условием  $T^{(n)}(r, 0) = 0$ . Здесь  $T^{(n)}(r, 0) = T_*^{(n)}(r, 0) - T_0$  – отклонение температуры от начальной  $T_0$ ;  $\kappa_n$ ,  $\lambda_n$  – коэффициенты

температуро- и теплопроводности материалов составляющих слоев,  $k_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$ .

**Определение ТНС.** Радиальная составляющая  $U_r^{(n)}(r, t)$  вектора перемещений  $\vec{U}^{(n)} = \{U_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$  в слоях описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_r^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{U_r^{(n)}}{r^2} - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 U_r^{(n)}}{\partial t^2} = \\ = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} F^{(n)} \end{aligned} \quad (8)$$

граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{U_r^{(1)}(r_0, t)}{r_0} = \alpha_1 \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} T^{(1)}(r_0, t), \\ \frac{\partial U_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{U_r^{(2)}(r_1, t)}{r_1} = \alpha_2 \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} T^{(2)}(r_1, t) \end{aligned} \quad (9)$$

на поверхностях  $r = r_0$  и  $r = r_2$ , условиями идеального механического контакта при  $r = r_1$ :

$$\begin{aligned} U_r^{(1)}(r_1, t) = U_r^{(2)}(r_1, t), \\ (1 - \nu_1) \frac{\partial U_r^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_1 \frac{U_r^{(1)}(r_1, t)}{r_1} - \alpha_1 (1 + \nu_1) T^{(1)}(r_1, t) = \\ = \frac{E_2(1 - 2\nu_1)}{E_1(1 - 2\nu_2)} \left[ (1 - \nu_2) \frac{\partial U_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \nu_1 \frac{U_r^{(2)}(r_1, t)}{r_1} - \alpha_2 (1 + \nu_2) T^{(2)}(r_1, t) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

а также нулевыми начальными условиями:

$$U_r^{(n)}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial U_r^{(n)}(r, 0)}{\partial r} = 0. \quad (11)$$

Здесь  $c_n = \sqrt{E_n(1 - \nu_n) / \rho_n(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}$  – скорость упругой волны расширения;  $\nu_n$ ,  $\alpha_n$  – коэффициенты Пуассона и линейного теплового расширения,  $E_n$  – модули Юнга,  $\rho_n$  – плотности материалов слоев.

При найденных функциях  $U_r^{(n)}(r, t)$  радиальную  $\sigma_{rr}^{(n)}$  и кольцевую  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$  компоненты тензора напряжений определяем по формулам:

$$\sigma_{rr}^{(n)} = \frac{2E_n}{1-2\nu_n} \left[ (1-\nu_n) \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} + \nu_n \frac{U_r^{(n)}}{r} - \alpha_1 (1+\nu_n) T^{(n)} \right], \quad (12)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = \frac{2E_n}{1-2\nu_n} \left[ (1-\nu_n) \frac{U_r^{(n)}}{r} + \nu_n \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} - \alpha_1 (1+\nu_n) T^{(n)} \right]. \quad (13)$$

Для количественной оценки влияния физических факторов (джоулева тепла  $Q^{(n)}$  и пондеромоторной силы  $\vec{F}^{(n)}$ ) на ТНС тензор напряжений  $\hat{\sigma}^{(n)}$  представим в виде суммы двух составляющих  $\hat{\sigma}^{(n)} = \hat{\sigma}^{T^{(n)}} + \hat{\sigma}^{F^{(n)}}$ , обусловленных этими факторами.

При найденных температуре и компонентах тензора суммарных напряжений интенсивность напряжений в каждом из слоев определяется формулой [9]:

$$\sigma_i^{(n)} = \sqrt{\frac{3I_2(\hat{\sigma}^{(n)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)})}{2}}, \quad (14)$$

где  $I_j(\hat{\sigma}^{(n)})$ , ( $j=1, 2$ ) –  $j$ -й инвариант тензора напряжений в  $n$ -ом слое. Несущая способность биметаллического цилиндра сохраняется до тех пор, пока максимальное значение интенсивности напряжений  $\sigma_i^{\max(n)}$  в каждом слое не превышает предел упругой деформации  $\sigma_d^{(n)}$  его материала [5, 9], что определяется условием  $\sigma_i^{\max(n)} \leq \sigma_d^{(n)}$ .

**Методика решения задачи.** Для построения решения комплексной исходной задачи, т.е. составляющих задач электродинамики, теплопроводности и термоупругости, используем аппроксимацию по радиальной координате в каждом слое ключевых функций  $\Phi^{(n)}(r, t) = \{H_z^{(n)}(r, t), T^{(n)}(r, t), U_r^{(n)}(r, t)\}$  квадратичными многочленами:

$$\Phi^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{\Phi^{(n)}}(t) r^i. \quad (15)$$

Коэффициенты  $a_i^{\Phi^{(n)}}$  полиномов представляем линейной комбинацией соответствующих граничных значений  $\Phi_0(t)$ ,  $\Phi^+(t) = \Phi(r_2, t)$ ,  $\Phi^-(t) = \Phi(r_1, t)$  искомых функций  $\Phi^{(n)}(r, t)$  на поверхностях  $r=r_0$ ,  $r=r_2$ ,  $r=r_1$  цилиндра и суммарных по пакету составляющих слоев интегральных характеристик

$$\Phi_s(t) = \sum_{n=1}^2 \int_{r_{n-1}}^{r_n} \Phi^{(n)}(r, t) r^s dr, \quad s = 1, 2 \quad (16)$$

этих функций, т.е.

$$\begin{aligned}
a_i^{\Phi(n)}(t) = & a_{i,1}^{\Phi(n)}\Phi_1(t) + a_{i,2}^{\Phi(n)}\Phi_2(t) + a_{i,3}^{\Phi(n)}\Phi^+(t) + \\
& + a_{i,4}^{\Phi(n)}\Phi^-(t) + a_{i,5}^{\Phi(n)}\Phi_0(t).
\end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения для определения интегральных характеристик  $\Phi_s(t)$  получаем интегрированием исходных уравнений (2), (5), (8) (с учетом выражения (16) и представлений (15), (17)). В результате преобразований получаем следующие системы уравнений для интегральных характеристик составляющей  $H_z(r, t)$  вектора напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned}
\frac{dH_{z1}(t)}{dt} - d_1 H_{z1}(t) - d_2 H_{z2}(t) &= d_3 H_z^+(t) + d_4 H_z^-(t), \\
\frac{dH_{z2}(t)}{dt} - d_5 H_{z1}(t) - d_6 H_{z2}(t) &= d_7 H_z^+(t) + d_8 H_z^-(t);
\end{aligned} \tag{18}$$

температуры  $T(r, t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{dT_1(t)}{dt} - d_1^* T_1(t) - d_2^* T_2(t) &= Q_1(t), \\
\frac{dT_2(t)}{dt} - d_3^* T_1(t) - d_4^* T_2(t) &= Q_2(t);
\end{aligned} \tag{19}$$

радиальной компоненты  $U_r(r, t)$  вектора перемещений:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 U_{r1}(t)}{dt^2} - d_1^{**} U_{r1}(t) - d_2^{**} U_{r2}(t) &= B_1^{0F}(t) + B_1^{0T}(t) + B_1^F(t) + B_1^T(t), \\
\frac{d^2 U_{r2}(t)}{dt^2} - d_9^{**} U_{r1}(t) - d_{10}^{**} U_{r2}(t) &= B_2^{0F}(t) + B_2^{0T}(t) + B_2^F(t) + B_2^T(t).
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь функции  $Q_s(t)$ ,  $B_s^{0F}(t)$ ,  $B_s^{0T}(t)$ ,  $B_s^F(t)$ ,  $B_s^T(t)$  ( $s=1, 2$ ) получены интегрированием согласно формуле (16) правых частей исходных уравнений (5), (8), а коэффициенты  $d_k$  ( $k=1...10$ ), выражаются через физико-механические характеристики материалов и геометрические параметры составляющих слоев.

Системы уравнений (18)–(20) решаем с использованием преобразования Лапласа (при проинтегрированных в соответствии с (16) заданных начальных условиях на функции  $H_z^{(n)}$ ,  $T^{(n)}$ ,  $U_r^{(n)}$ ). При этом, для искомым ключевых функций задачи получаем выражения:

$$H_z^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 \left[ a_{i,1}^{(n)} H_{z1}(t) + a_{i,2}^{(n)} H_{z2}(t) + a_{i,3}^{(n)} H_z^+(t) + a_{i,4}^{(n)} H_z^-(t) \right] r^i, \tag{21}$$

$$T^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 \left[ b_{i1}^{(n)} T_1(t) + b_{i2}^{(n)} T_2(t) \right] r^i, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
U_r^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 & \left[ c_{i,1}^{(n)} U_{r1}(t) + c_{i,2}^{(n)} U_{r2}(t) + c_{i,3}^{(n)} U_r^+(t) + c_{i,4}^{(n)} U_r^-(t) + \right. \\
& + c_{i,5}^{(n)} F_r^{(1)}(r_1, t) + c_{i,6}^{(n)} F_r^{(2)}(r_1, t) + c_{i,7}^{(n)} T^{(1)}(r_0, t) + \\
& + c_{i,8}^{(n)} T^{(2)}(r_2, t) + c_{i,9}^{(n)} T^{(1)}(r_1, t) + c_{i,10}^{(n)} T^{(2)}(r_1, t) + \\
& \left. + c_{i,11}^{(n)} U^{(1)}(r_1, t) + c_{i,12}^{(n)} U^{(2)}(r_1, t) \right] r^i . \quad (23)
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $a_{i,k}^{(n)}$  ( $k=1\dots 4$ ),  $b_{il}^{(n)}$  ( $l=1, 2$ ),  $c_{i,m}^{(n)}$  ( $m=1,\dots,12$ ) выражаются как и коэффициенты  $d_k$  через характеристики материалов и геометрические параметры. При найденных функциях  $U_r^{(n)}(r, t)$  с использованием формул (12)–(14) определяем отличные от нуля радиальные  $\sigma_{rr}^{(n)}$  и кольцевые  $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$  компонент тензора напряжений и соответствующие им интенсивности напряжений в составляющих слоях рассматриваемого цилиндра. После этого проводим анализ его несущей способности.

**Пример. Электромагнитное воздействие в режиме с импульсным модулирующим сигналом (РИМС).** Действие в РИМС математически описываем функцией  $H_z^\pm(t) = k H_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}) \cos \omega t$ . Здесь  $k$  – нормировочный коэффициент;  $H_0$  – максимальное значение напряженности магнитного поля на поверхностях  $r=r_0$  и  $r=r_2$  соответствующее амплитуде синусоидальных электромагнитных колебаний;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – параметры, характеризующие времена фронтов нарастания  $\tau_{\phi.n.}$  и убывания  $\tau_{\phi.y.}$  модулирующего импульса;  $\omega$  – круговая частота несущих колебаний.

Исследования выполнены для биметаллического цилиндра с радиусами поверхностей  $r_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $r_1 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $r_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Внутренний слой изготовлен из нержавеющей стали X18Н9Т, внешний – из меди. Продолжительность  $\tau_i$  модулирующего импульса принималась равной  $\tau_i = 10^{-4} \text{ с}$ . Параметры  $\beta_1$  и  $\beta_2$  выбирались таким образом, чтобы  $\tau_{\phi.n.}/\tau_{\phi.y.} \approx 0,1$ .

На рис. 2 показано изменение во времени кольцевой  $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$  компоненты тензора динамических напряжений в окрестности поверхности контакта  $r=r_1$  (линии 1,2 соответствуют составляющей  $\sigma_{\phi\phi}^{F(n)}$  напряжений, а линии 3,4 – составляющей  $\sigma_{\phi\phi}^{T(n)}$  стальном и медном слоях цилиндра). На рис. 3 приведена зависимость максимальных значений интенсивностей напряжений  $\sigma_i^{\max(n)}$  от величины  $H_0$  при  $r=r_1$ . Линии 1,2 соответствуют значениям  $\tau_i$  равным  $10^{-3}$  и  $10^{-4} \text{ с}$ . На рис. 4 представлено изменение во времени напряжений  $\sigma_{rr}^{F(n)}$  при  $r=r_1$ , которые при  $\omega = \omega_{r1} = 4,88 \cdot 10^6 \text{ 1/с}$

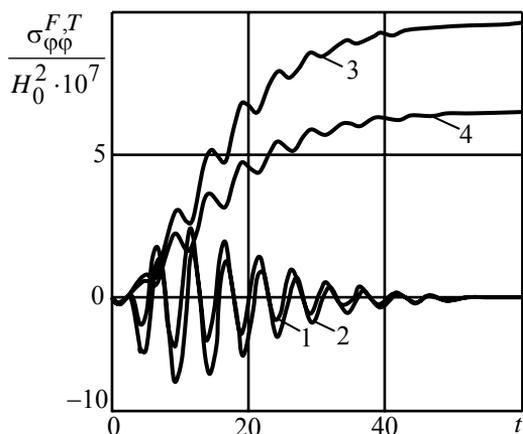


Рис. 2

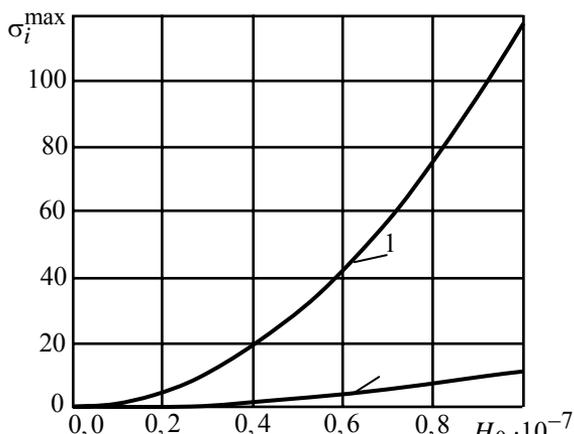


Рис. 3

( $\omega_{r1}$  – первая резонансная частота ЭМП [2]) являются определяющими. Рис. 5 иллюстрирует зависимость для  $\omega = \omega_{r1}$  интенсивности напряжений

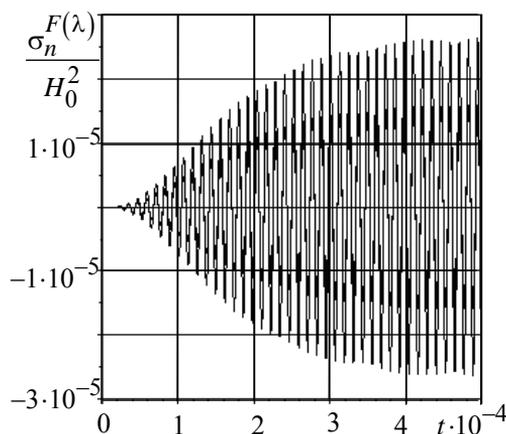


Рис. 4

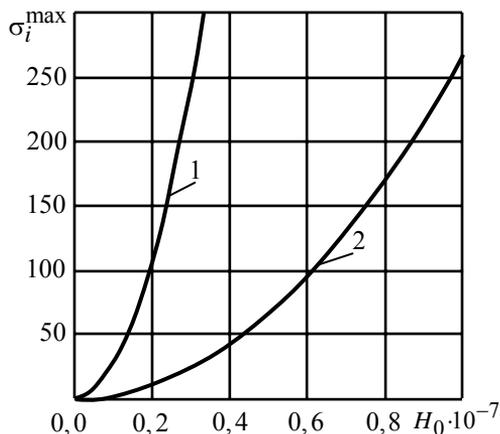


Рис. 5

$\sigma_i^{\max(n)}$  от величины  $H_0$  при  $r = r_1$ .

Как показали проведенные исследования ТНС биметаллического цилиндра при выбранных параметрах электромагнитного воздействия в РИМС в основном определяется напряжениями  $\sigma_{rr}^{F(n)}$  и  $\sigma_{\phi\phi}^{T(n)}$ . Несущая способность цилиндра может быть утрачена на разных частотах несущих электромагнитных колебаний (в том числе на первой резонансной) при соответствующих значениях величин напряженности магнитного поля. На основе полученных зависимостей  $\sigma_i^{\max(n)}$  от величины  $H_0$  при различных длительностях модулирующего импульса, найдены критические параметры (значения  $H_0$ ) электромагнитного воздействия в РИМС, при ко-

торых теряется несущая способность биметаллического цилиндра.

*Работа выполнена при поддержке НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований (проект ВВ-РФФД/382, № госрегистрации 0110U004144).*

**РЕЗЮМЕ.** Сформульовано залежності між ядрами повзучості, що задають скалярні властивості ізотропного нелінійно-в'язкопружного середовища за умов складного напруженого стану, та ядрами повздовжньої та поперечної повзучості за умов одновісного розтягу. У якості моделі середовища використано нелінійну модель в'язкопружності Работнова. Узагальнення моделі на складний напружений стан виповнено на підставі тензорно-лінійного зв'язку та пропорційності девіаторів. Експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій повзучості за умов чистого скручення за механічними характеристиками, що знайдені за результатами випробувань на одновісний розтяг.

**Ключові слова:** нелінійна в'язкопружність, ізотропні матеріали, ядра спадковості, складний напружений стан, тензорно-лінійний зв'язок, одномірна модель Работнова, скалярні в'язкопружні властивості, повздовжня повзучість, поперечна повзучість.

**SUMMARY.** The functions between creep kernels giving scalar properties of isotropic nonlinear viscoelastic medium under the complex stress state and longitudinal as well as transverse creep kernels obtained under uniaxial tension have been stated. The nonlinear Rabotnov's model of viscoelasticity is used as a medium model. The generalization of the model on the complex stress state has been carried out based on a tensor-linear connection and proportionality of deviators. The problem of creep strains calculation under the pure torsion using the mechanical characteristics obtained from results at uniaxial tension tests has been approved experimentally.

**Key words:** nonlinear viscoelasticity, isotropic materials, hereditary kernels, the complex stress state, tensor-linear relation, onedimensional Rabotnov's model, scalar viscoelastic behaviour, longitudinal creep, transverse creep.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хищенко Л. Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: МОСТ–Торнадо, 2003. – 288 с.
2. Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
3. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Мельник Н. Б. Термомеханічна поведінка порожнистого електропровідного циліндра при імпульсній електромагнітній дії // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 146–154.
4. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Тарлаковський Д. В. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
5. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. – М.: Высш. школа, 1975. – 463 с.
6. Мусій Р. С. Термопружний стан електропровідного циліндра під дією поверхневих електромагнітних імпульсів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 2. – С. 45–52.
7. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми. – Львів: РАСТР-7, 2010. – 216 с.
8. Мусій Р. С. Математическая модель термомеханики электропроводных тел при воздействии радиоимпульсов // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – № 36. – С. 91–100.
9. Орленко Л. П. Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. – М.: Машиностроение, 1964. – 168 с.
10. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / Под ред. Ф. Херлаха – М.: Мир, 1988. – 456 с.
11. Hachkevych O., Musij R., Stasiuk H. Metoda określenia parametryw prcyesyw

fizyczno–mechanicznych w przewodzących częściach maszyn przy oddziaływaniu pól elektromagnetycznych typu impulsowego z modulacją amplitudy // Problemy rozwoju maszyn roboczych: XXI konferencja naukowa / Pełne teksty referatów, 21-24 stycznia 2008 r., Zakopane. – Opole, 2008. – P. 185-192.

*Национальный университет "Львівська Політехніка", г. Львов*

*Институт прикладных проблем механики  
и математики НАН Украины, г. Львов*

*Политехника Опольска, Польша, г. Ополе*

*Поступила 24.08.2013 г.*

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, д-р физ.-мат. наук

**ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ВНЕШНЕЙ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ СИЛОВЫХ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

*Решены статические задачи термоэластостатики для пьезоэлектрического материала, содержащего внешнюю круговую трещину, при силовых, электрических и температурных нагрузках. В замкнутом виде найдены выражения коэффициентов интенсивности напряжений и коэффициентов интенсивности электрической индукции для внешней круговой трещины при симметричных силовых, электрических и температурных воздействиях. Выявлено влияние свойств электроупругого материала на значения коэффициентов интенсивности при силовых, электрических и температурных воздействиях.*

**Ключевые слова:** электроупругий материал, внешняя круговая трещина, силовые, электрические и температурные воздействия, коэффициенты интенсивности силовых и электрических полей

Изучению распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи плоских трещин при внешних нагрузках посвящены работы [2, 3, 5, 6]. Влияние некоторых температурных воздействий на напряженное состояние в пьезоэлектрическом материале с круговой, а также эллиптической трещинами исследовано в статьях [5, 6]. В работе [2] установлено соответствие между коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) для плоских трещин в электроупругом и упругом трансверсально-изотропных материалах при силовых и температурных воздействиях, которое позволяет использовать при рассмотрении задач термоэластостатики для тел с трещинами решения более простых задач термоупругости. Заметим, что впервые идея подхода, основанного на соответствии решений граничных задач, для тел с начальными напряжениями с плоскими трещинами, предложена в [1]. Напряженное и электрическое состояния в электроупругом теле с внутренней круговой трещиной исследовано в [3]. В то же время, термоэластостатическое состояние пьезоэлектрического материала с внешней круговой трещиной при силовых, электрических и температурных нагрузках общего вида не изучалось.

В настоящей работе исследованы пространственные задачи статики термоэластостатики для пьезоэлектрического материала с внешней дискообразной (круговой) трещиной при симметричных силовых, электрических и температурных воздействиях общего вида.

**Постановка задачи.** Рассмотрим внешнюю круговую трещину  $r \geq a$ , расположенную в электроупругом трансверсально-изотропном материале в плоскости его изотропии ( $z = 0$ ). Пусть на поверхностях внешней круговой трещины задано распределение нормального давления  $p_0(r, \theta)$ , а также распределения электрической индукции и температурного поля  $-d_0(r, \theta)$  и

$T_0(r, \theta)$  соответственно, симметричные относительно плоскости трещины. В результате приходим к граничным условиям следующего вида:

$$\begin{aligned} u_z^\pm &= \Psi^\pm = 0, \quad \sigma_{xz}^\pm = \sigma_{yz}^\pm = 0, \\ \frac{\partial T^\pm}{\partial z} &= 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \\ \sigma_{zz}^\pm &= -p_0(r, \theta), \quad D_z^\pm = -d_0(r, \theta), \\ T^\pm(r, \theta, 0) &= T_0(r, \theta), \quad r > a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned} \quad (1)$$

Также считаем, что для распределений симметричных силовых, электрических и температурных полей на поверхностях внешней трещины имеют место неравенства

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty r p_0(r, \theta) dr d\theta < \infty, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r d_0(r, \theta) dr d\theta < \infty, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r T_0(r, \theta) dr d\theta < \infty.$$

Разложим функции  $p_0(r, \theta)$ ,  $d_0(r, \theta)$  и  $T_0(r, \theta)$  в ряды Фурье

$$\begin{aligned} p_0(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(1)}(r) \sin n\theta, \\ d_0(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(2)}(r) \sin n\theta, \\ T_0(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(3)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(3)}(r) \sin n\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее воспользуемся представлением решений системы уравнений статики термоэлектроруупругости для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала через гармонические функции, предложенном в [5].

**Основные соотношения.** Система связанных уравнений статики термоэлектроруупругости для трансверсально-изотропного электроруупругого материала имеет вид

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} &= \beta_{11} T_{,x}; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} &= \beta_{11} T_{,y}; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} &= \beta_{33} T_{,z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33}u_{z,zz} - \\
& - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = -p_3 T_{,z}; \\
& \lambda_{11}(T_{,xx} + T_{,yy}) + \lambda_{33} T_{,zz} = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – независимые модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости,  $\lambda_{11}, \lambda_{33}$  – коэффициенты теплопроводности;  $\beta_{11}, \beta_{33}$  – коэффициенты температурных напряжений,  $p_3$  – пирозлектрическая постоянная.

Решение системы (3) может быть выражено через пять потенциалных функции  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) в форме [5]:

$$\begin{aligned}
u_x &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,x} + \Phi_{5,y}, & u_y &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,y} - \Phi_{5,x}, \\
u_z &= \sum_{j=1}^4 k_j \Phi_{j,z}, & \Psi &= \sum_{j=1}^4 l_j \Phi_{j,z},
\end{aligned} \tag{4}$$

где функции  $\Phi_j$  в формулах (4) удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 5); \tag{5}$$

$v_5 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ ,  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – корни алгебраического уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned}
& v^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\
& + v (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0;
\end{aligned} \tag{6}$$

$$A_1 = c_{11}^E e_{15}, \quad A_2 = (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15},$$

$$A_3 = c_{44}^E e_{33}, \quad B_2 = - \left[ \varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15} (e_{31} + e_{15}) \right],$$

$$B_3 = \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33} (e_{31} + e_{15}), \quad C_1 = -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S,$$

$$C_3 = -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S, \quad C_2 = (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S,$$

$$D_2 = e_{15} (c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}),$$

$$D_3 = c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E).$$

$k_j, l_j$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – постоянные в формулах (4) связаны с величинами  $v_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (7)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j, \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (8)$$

Потенциальная функция  $\Phi_4$  одновременно удовлетворяет двум уравнениям

$$\Phi_{4,zz} = \frac{m}{k^2} T; \quad \Phi_{4,xx} + \Phi_{4,yy} + k^2 \Phi_{4,zz} = 0, \quad (9)$$

в которых  $k^2 = \lambda_{33} / \lambda_{11}$  (отношение коэффициентов теплопроводности в двух направлениях),  $m$  – неизвестная постоянная.

Значения  $k_j, l_j$  можно представить в виде

$$k_j = \frac{(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})}{(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})},$$

$$l_j = \frac{(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2}{(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})} \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (10)$$

Для определения неизвестных постоянных  $k_4, l_4$  получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} & (\beta_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} c_{33}^E + \beta_{11} c_{44}^E k^2) k_4 + (\beta_{33} (e_{15} + e_{31}) - \beta_{11} e_{33} + \\ & + \beta_{11} e_{15} k^2) l_4 + (\beta_{33} (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (c_{44}^E + c_{13}^E) k^2) = 0, \\ & (-p_3 (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} e_{33} + \beta_{11} e_{15} k^2) k_4 + (-p_3 (e_{15} + e_{31}) + \beta_{11} \varepsilon_{33}^S - \\ & - \beta_{11} \varepsilon_{11}^S k^2) l_4 + (-p_3 (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (e_{15} + e_{31}) k^2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$m = \frac{\beta_{11} k^2}{c_{44}^E + (c_{13}^E + c_{44}^E) k_4 + (e_{15} + e_{31}) l_4 - c_{11}^E k^2}. \quad (12)$$

При введении обозначений  $z_j = z n_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) функции  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$ ,  $\Phi_5(x, y, z_5)$  являются гармоническими функциями в соответствующей системе координат.

**Метод решения.** Представим температурное поле в электроупругом материале с трещиной в виде потенциала простого слоя с плотностью  $\theta(\xi, \eta)$ . Воспользуемся суперпозицией состояний, для первого из которых

$$\begin{aligned}\Phi_4^{(1)}(x, y, z_4) &= F(x, y, z_4) = \\ &= m \iint_{\Omega} \theta(\xi, \eta) \{z_4 \ln(\rho_4 + z_4) - \rho_4\} d\xi d\eta, \\ \rho_4(x, y, z_4) &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2},\end{aligned}\quad (13)$$

а также положим функции

$$\Phi_i^{(1)}(x, y, z_i) = \alpha_i^* F(x, y, z_i) \quad (i=1, 2, 3); \quad \Phi_5^{(1)} = 0,$$

где  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$ ,  $\alpha_3^*$  – неизвестные постоянные. Для второго состояния суперпозиции функции  $\Phi_j^{(2)}$  ( $j=1, 5$ ) выберем такими:

$$\Phi_4^{(2)} = \Phi_5^{(2)}; \quad \Phi_i^{(2)}(x, y, z_i) = \beta_i^* f^*(x, y, z_i) + \beta_i^{**} f^{**}(x, y, z_i) \quad (i=1, 3),$$

где  $\beta_i^*$ ,  $\beta_i^{**}$  – неизвестные постоянные, а  $f^*$  и  $f^{**}$  – гармонические функции, при построении которых воспользуемся гармоническим потенциалом в виде интегралов Фурье-Бесселя [4]

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} g_n^*(s) \frac{1}{s} J_n(r, s) e^{-sz} ds + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_0^{\infty} h_n^*(s) \frac{1}{s} J_n(r, s) e^{-sz} ds.\end{aligned}\quad (14)$$

После вычислений находим выражения КИН и КИЭИ в виде

$$\begin{aligned}K_I &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{a^{-n+1/2}} \int_a^{\infty} \frac{r^{1-n} [f_n^{(1)}(r) - \gamma_S^{Piezo} f_n^{(3)}(r)] dr}{(r^2 - a^2)^{1/2}} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{a^{-n+1/2}} \int_a^{\infty} \frac{r^{1-n} [g_n^{(1)}(r) - \gamma_S^{Piezo} g_n^{(3)}(r)] dr}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \right); \\ K_D &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{a^{-n+1/2}} \int_a^{\infty} \frac{r^{1-n} [f_n^{(2)}(r) - \gamma_D^{Piezo} f_n^{(3)}(r)] dr}{(r^2 - a^2)^{1/2}} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{a^{-n+1/2}} \int_a^{\infty} \frac{r^{1-n} [g_n^{(2)}(r) - \gamma_D^{Piezo} g_n^{(3)}(r)] dr}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \right),\end{aligned}\quad (15)$$

где использованы коэффициенты разложений силовых, электрических и температурных нагрузок в ряды Фурье согласно выражениям (2).

В случае осесимметричного нагружения получаем

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_a^{\infty} \frac{r [p_0(r) - \gamma_S^{Piezo} T_0(r)] dr}{(r^2 - a^2)^{1/2}};$$

$$K_D = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_a^\infty r \frac{[d_0(r) - \gamma_D^{Piezo} T_0(r)] dr}{(r^2 - a^2)^{1/2}}. \quad (16)$$

Отметим, что в рассмотренных задачах статики термоупругости трещина является открытой, т.е. не имеет место налегание поверхностей трещины друг на друга, если на поверхностях трещины выполняется неравенство  $p_0(r, \theta) - \gamma_S^{Piezo} T_0(r, \theta) \geq 0$  (относительно силовых и температурных воздействий).

На основе найденных явных выражений КИН и КИЭИ для силовых, электрических и температурных воздействий рассмотрим ряд новых задач статики термоэлектроупругости для пьезоэлектрического материала с внешней круговой трещиной.

**Задача 1.** Температура, силовые и электрические нагрузки равномерно распределены по окружности радиуса  $c > a$ . Тогда имеем

$$T(r, \theta, 0) = T_0(r) = \frac{T_0}{2\pi r} \delta(r - c); \quad p_0(r) = \frac{p_0}{2\pi r} \delta(r - c);$$

$$d_0(r) = \frac{d_0}{2\pi r} \delta(r - c).$$

В результате находим

$$K_I = \frac{[p_0 - \gamma_S^{Piezo} T_0]}{(\pi a)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{(c/a)^2 - 1}}; \quad K_D = \frac{[d_0 - \gamma_D^{Piezo} T_0]}{(\pi a)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{(c/a)^2 - 1}}. \quad (17)$$

**Задача 2.** Однородное значение температуры, силовых и электрических нагрузок поддерживается на внутренней кольцевой области  $a < r < b$  трещины. Тогда имеем

$$K_I = 2 [p_0 - \gamma_S^{Piezo} T_0] \sqrt{a/\pi} \sqrt{(b/a)^2 - 1};$$

$$K_D = 2 [d_0 - \gamma_D^{Piezo} T_0] \sqrt{a/\pi} \sqrt{(b/a)^2 - 1}. \quad (18)$$

**Задача 3.** Однородное значение температурного поля, силовых и электрических нагрузок распределено по кольцевой области  $a < c < r < b$  на поверхности трещины. В результате вычислений получаем

$$K_I = 2 [p_0 - \gamma_S^{Piezo} T_0] \sqrt{a/\pi} \left( \sqrt{(b/a)^2 - 1} - \sqrt{(c/a)^2 - 1} \right);$$

$$K_D = 2 [d_0 - \gamma_D^{Piezo} T_0] \sqrt{a/\pi} \left( \sqrt{(b/a)^2 - 1} - \sqrt{(c/a)^2 - 1} \right). \quad (19)$$

**Задача 4.** На внешней круговой поверхности трещины имеет место следующее распределение температурного поля, силовых и электрических нагрузок

$$T(r, \theta, 0) = T_0(r) = T_0 (r/a)^{-n}; \quad p_0(r) = p_0 (r/a)^{-n};$$

$$d_0(r) = d_0 (r / a)^{-n}, \quad n > 2.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} K_I &= [p_0 - \gamma_S^{Piezo} T_0] \sqrt{a} \frac{\Gamma(n/2 - 1/2)}{\Gamma(n/2)}; \\ K_D &= [d_0 - \gamma_D^{Piezo} T_0] \sqrt{a} \frac{\Gamma(n/2 - 1/2)}{\Gamma(n/2)}, \end{aligned} \quad (20),$$

где использовано обозначение  $\Gamma(n)$  – гамма-функция.

**Задача 5.** В двух точках поверхности внешней круговой трещины, с полярными координатами  $(b, \pm \alpha)$ , где  $b > a$ , действуют сосредоточенные температурные, силовые и электрические источники. Граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} T(r, \theta, 0) &= \frac{T_0}{r} \delta(r-b) \delta(\theta \pm \alpha); \quad p(r, \theta) = \frac{P_0}{r} \delta(r-b) \delta(\theta \pm \alpha); \\ d(r, \theta) &= \frac{d_0}{r} \delta(r-b) \delta(\theta \pm \alpha). \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} K_I &= 2 [p_0 - \gamma_S^{Piezo} T_0] (\pi a)^{-3/2} (r_0^2 - 1)^{-1/2} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_0^{-n} \cos n\alpha \cos n\theta \right); \\ K_D &= 2 [d_0 - \gamma_D^{Piezo} T_0] (\pi a)^{-3/2} (r_0^2 - 1)^{-1/2} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_0^{-n} \cos n\alpha \cos n\theta \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $r_0 = b/a$ .

Положив  $\alpha = 0$ , получим случай, когда на поверхности трещины в точке с полярными координатами  $(b, 0)$  действуют сосредоточенные источники с удвоенной интенсивностью. Тогда находим

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{2 [p_0 - \gamma_S^{Piezo} T_0]}{(\pi a)^{3/2}} \frac{(r_0^2 - 1)}{[1 - 2r_0 \cos \theta + r_0^2]}; \\ K_D &= \frac{2 [d_0 - \gamma_D^{Piezo} T_0]}{(\pi a)^{3/2}} \frac{(r_0^2 - 1)}{[1 - 2r_0 \cos \theta + r_0^2]}. \end{aligned} \quad (22)$$

При переходе к упругому трансверсально-изотропному и изотропному материалам имеем  $\gamma_S^{Piezo} \rightarrow \gamma^{Trans} \rightarrow \mu \alpha (1 + \nu) / (1 - \nu)$ .

**Анализ результатов численных исследований.** Пусть в электроупругом материале с внешней круговой трещиной на верхней и нижней поверхностях трещины (в точках  $r_0 = b/a$  и  $\theta = 0$ ) действуют сосредоточенные силовые и температурные нагрузки. На рис.1 приведено распределение КИН вдоль фронта внешней круговой трещины при различных размещениях

температурных стоков от границы трещины. Линии 1, 2, 3, 4, 5 отвечают случаям  $r_0 = b/a$ , равным 2,0; 1,7; 1,5;

1,4; 1,3. Величина  $K_I^*$  на рисунке соответствует значению  $K_I(\text{па})^{3/2} / 2(p_0 - \gamma_S^{\text{Piezo}} T_0)$ .

Видно, что при приближении точки приложения нагрузок к фронту внешней круговой трещины значения КИН возрастают. Аналогично получаем изменение КИЭИ при приложении силовых и электрических нагрузок. Линии на рис. 1 в этом случае будут соответствовать изменению

$K_D(\text{па})^{3/2} / 2(d_0 - \gamma_D^{\text{Piezo}} T_0)$  вдоль фронта трещины.

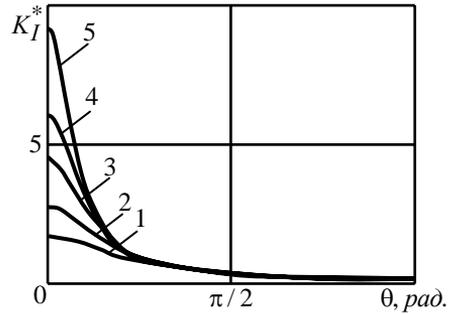


Рис.1

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано статичні задачі термоелектропружності для п'єзоелектричного матеріалу, що містить зовнішню кругову тріщину при силових, електричних та температурних навантаженнях. У замкненому вигляді отримано точні вирази коефіцієнтів інтенсивності напружень і коефіцієнтів інтенсивності електричної індукції для зовнішньої кругової тріщини при симетричних силових, електричних та температурних впливах. Встановлено вплив властивостей електропружного матеріалу на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень при силових, електричних та температурних навантаженнях.

**Ключові слова:** електропружний матеріал, зовнішня кругова тріщина, силові, електричні та температурні впливи, коефіцієнти інтенсивності силових та електричних полів.

**SUMMARY.** The problems of thermoelectroelasticity for the piezoelectric material with an external circle crack under force, electric and thermal loads were considered. The closed expressions of stress intensity factors and intensity electric induction factors were found for the external circle crack under symmetric force, electric and thermal loads. The influence of properties of piezoelectric material on the values of stress intensity factors was established under force, electric and thermal influences.

**Key words:** electroelastic material, external circle crack, force, electric and thermal influence, intensity factors of force and electric fields.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
2. Кирилюк В. С. Термонапряженное состояние пьезокерамического тела с плоской трещиной при симметричном тепловом потоке с поверхностями трещины // Прикл. механика. – 2010. – Vol. 46, № 7. – С. 23–33.
3. Кирилюк В. С. Точные решения задач термоэлектроупругости для пьезоэлектрического материала с внутренней круговой трещиной // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 5 (51). – С. 64–72.
4. Kassir M. K., Sih G. C. Three-dimensional crack problems. Mechanics of fracture. – Vol. 2 – Leyden, 1975. – 452 p.
5. Podil'chuk Yu. N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170.
6. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 40, № 3. – P. 237–246.

УДК 539.3

О. И. ЛЕВЧУК, канд. физ.-мат. наук

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ О ВДАВЛИВАНИИ ВОГНУТОГО КОНИЧЕСКОГО ЖЕСТКОГО ШТАМПА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

*Решена задача о контактном взаимодействии электроупругого трансверсально-изотропного полупространства с вогнутым коническим жестким штампом. Задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. С помощью разложения по малому параметру получено соотношение для поиска неизвестной области контакта штампа с полупространством. Параметры контактного взаимодействия штампа с упругим трансверсально-изотропным и изотропным полупространствами следуют из приведенных формул для задачи электроупругости как частные случаи. Описаны численные результаты исследования, установлено влияние силы вдавливания штампа и свойств пьезоэлектрического материала на параметры контакта штампа с полупространством.*

**Ключевые слова:** электроупругость, контактная задача, вогнутый конический штамп, электроупругое полупространство, гладкий контакт.

Исследованиям контактного взаимодействия при вдавливании вогнутых жестких штампов в упругие изотропные и трансверсально-изотропные тела посвящены статьи [5, 4, 7, 9] соответственно. Важные задачи контакта тел с начальными напряжениями с жесткими и упругими штампами изучены в работах А.Н. Гузя [5]. В то же время, для электроупругих тел проводились исследования их контактного взаимодействия, в основном, с выпуклыми жесткими и упругими штампами [1, 2, 8] и др. В статье [3] решена контактная задача о вдавливании вогнутого сферического жесткого штампа в электроупругое полупространство. Однако контактное взаимодействие вогнутого конического жесткого штампа с пьезоэлектрическим полупространством не изучено.

В настоящей статье рассмотрена пространственная контактная задача электроупругости о вдавливании вогнутого конического жесткого штампа в электроупругое полупространство (рис. 1). Предполагается, что имеет место гладкий контакт (без трения). На основе представления решения трехмерных уравнений электроупругости для пьезоэлектрического тела задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В замкнутом виде получено соотношение для нахождения геометрических параметров контакта вогнутого конического жесткого штампа с полупространством. Контактное взаимодействие упругого трансверсально-изотропного полупростран-

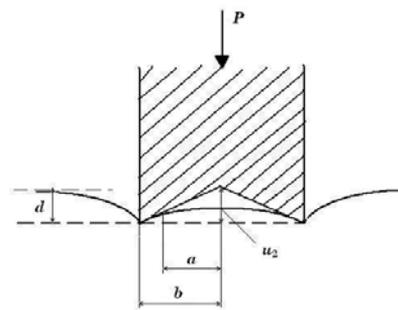


Рис.1

ва с вогнутым коническим жестким штампом следует из полученных результатов как частный случай.

**Постановка задачи.** Рассмотрим электроупругое трансверсально-изотропное полупространство, поверхность которого является плоскостью изотропии пьезоэлектрического материала. При рассмотрении задачи предполагаем, что имеет место гладкий контакт (без трения) штампа с полупространством. Также считаем, что поверхность полупространства является неэлектропроводящей. При таких предположениях на поверхности контакта  $z = 0$  граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad D_z = 0; \quad \sigma_{zz} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \\ \sigma_{zz} = -p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad u_z = \delta - \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi(x, y)$  – функция, описывающая поверхность вогнутого штампа;  $p(x, y)$  – контактное давление под штампом;  $D_z$  – нормальная компонента вектора электрической индукции;  $\Omega$  – неизвестная область контакта под вогнутым коническим штампом, поскольку радиус области контакта  $a$  (рис. 1) необходимо найти в процессе решения задачи.

**Основные соотношения.** Уравнения статики электроупругости для трансверсально-изотропного электроупругого тела относительно перемещений  $u_x, u_y, u_z$  и электрического потенциала  $\Psi$  принимают вид

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – независимые модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости.

Решение системы уравнений (2) можно выразить через четыре потенциальные функции  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) [10].

$$\begin{aligned} u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \\ u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k_i, l_i$  – некоторые постоянные, а функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 5), \quad (4)$$

где  $v_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , а значения  $v_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка:

$$v^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + v (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты при степенях  $v$  находим с помощью таких обозначений:

$$\begin{aligned} A_1 &= c_{11}^E e_{15}; & A_3 &= c_{44}^E e_{33}; \\ A_2 &= (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15}; \\ B_2 &= -\left[ \varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15} (e_{31} + e_{15}) \right]; \\ B_3 &= \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33} (e_{31} + e_{15}); & C_1 &= -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S; \\ C_2 &= (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S; & C_3 &= -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S; \\ D_2 &= e_{15} (c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}); \\ D_3 &= c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E). \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянные  $k_j, l_j$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) в формулах (3) связаны с величинами  $v_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (7)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j, \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (8)$$

При введении обозначений  $z_j = z n_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) видно, что функции  $\Phi_1(x, y, z_1), \Phi_2(x, y, z_2), \Phi_3(x, y, z_3), \Phi_4(x, y, z_4)$  являются гармоническими функциями в соответствующей системе координат.

**Метод решения.** При рассмотрении задачи воспользуемся схемой решения, предложенной в работах [1, 2] при изучении контактного взаимодействия электроупругих тел с выпуклыми жесткими штампами. Она также использована в [3] при решении задачи электроупругости для во-

гнутого сферического штампа. Потенциальные функции  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) выберем следующим образом:

$$\Phi_i^{(1)}(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \beta_i^* \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (9)$$

где  $\rho_i = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}$  ( $i = \overline{1, 3}$ );  $\beta_i^*$  – неизвестные постоянные;  $p(\xi, \eta)$  – функция, которая определяется в процессе решения задачи. Положим также  $\Phi_4^{(1)} = 0$ . Постоянные  $\beta_i^*$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) выберем такими, что удовлетворяют системе трех линейных алгебраических уравнений

$$\beta_1^* a_1 + \beta_2^* a_2 + \beta_3^* a_3 = 1; \quad \frac{\beta_1^* a_1}{\sqrt{\nu_1}} + \frac{\beta_2^* a_2}{\sqrt{\nu_2}} + \frac{\beta_3^* a_3}{\sqrt{\nu_3}} = 0;$$

$$\beta_1^* d_1 + \beta_2^* d_2 + \beta_3^* d_3 = 0.$$

В результате, приходим к

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$u_z|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} A^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}};$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \begin{cases} -p(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad D_z|_{z=0} = 0 \quad z = 0 \quad (10)$$

где  $A^{Piezo} = \sum_{j=1}^3 \beta_j^* k_j / \sqrt{\nu_j}$ .

Следовательно, контактная задача электроупругости о вдавливании вогнутого конического жесткого штампа в пьезоэлектрическое полупространство, поверхность которого не содержит электродного покрытия, сводится к решению задачи теории потенциала, подобно задаче контактного взаимодействия упругого изотропного полупространства с вогнутым коническим жестким штампом. Для перехода к контактной задаче теории упругости следует значение  $A^{Piezo}$  заменить  $(1 - \nu)/\mu$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – модуль сдвига материала.

Заметим, что осуществляя переход от электроупругого материала к упругому трансверсально-изотропному материалу, величина  $A^{Piezo}$  принимает значение  $A^{Trans}$ . При дальнейшем переходе к упругому изотропному материалу, от значения  $A^{Trans}$  приходим к выражению  $(1 - \nu)/\mu$ .

Далее на основе результатов [5, 7] для контактных задач теории упругости о взаимодействии вогнутых жестких штампов с изотропным полупространством находим связь между силой вдавливания вогнутого конического штампа и размерами площадки контакта

$$\begin{aligned} \frac{P}{2\pi} A^{Piezo} &= \int_0^b g_0(t) dt + \int_b^\infty g_2(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^a g(t) \log\left(\frac{b-t}{b+t}\right) dt; \\ g_0(t) &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\omega f_0(\omega) d\omega}{(t^2 - \omega^2)^{1/2}} \quad (0 \leq t < b), \\ g_2(t) &= \frac{4}{\pi^2} \int_t^\infty (t^2 - \omega^2)^{-1/2} \left\{ \frac{d}{d\omega} \int_a^\omega \left[ \frac{d}{ds} \int_s^\infty \frac{r f_1(r) dr}{(r^2 - s^2)^{1/2}} \right] \frac{s ds}{(\omega^2 - s^2)^{1/2}} \right\} d\omega, \end{aligned} \quad (11)$$

где функция  $g(t)$  является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} g(t) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \frac{g(s)}{(t^2 - s^2)} \left[ 2s \log\left(\frac{b-t}{b+t}\right) - 2t \log\left(\frac{b-s}{b+s}\right) \right] ds = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^t (t^2 - \omega^2)^{-1/2} \frac{d}{d\omega} \int_\omega^b \frac{s g_0(s) ds}{(s^2 - \omega^2)^{1/2}} d\omega - \frac{2t}{\omega} \int_b^\infty \frac{g_2(s) ds}{t^2 - s^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользовавшись далее результатами исследования задачи о контакте вогнутого жесткого осесимметричного штампа с упругим изотропным полупространством [5, 7], получаем связь между силой вдавливания и параметрами контакта в виде

$$\begin{aligned} \frac{P}{2\pi} A^{Piezo} &= \int_0^b G_0(t) dt + \int_b^\infty G_2(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^a G(t) \log\left(\frac{b-t}{b+t}\right) dt; \\ G_0(t) &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\omega f_0(\omega) d\omega}{(t^2 - \omega^2)^{1/2}} \quad (0 \leq t < b), \\ G_2(t) &= \frac{4}{\pi^2} \int_t^\infty (\omega^2 - t^2)^{-1/2} \left\{ \frac{d}{d\omega} \int_a^\omega \left[ \frac{d}{ds} \int_s^\infty \frac{r f_1(r) dr}{(r^2 - s^2)^{1/2}} \right] \frac{s ds}{(\omega^2 - s^2)^{1/2}} \right\} d\omega, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $G(t)$  является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} G(t) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \frac{G(s)}{(t^2 - s^2)} \left[ 2s \log\left(\frac{b-t}{b+t}\right) - 2t \log\left(\frac{b-s}{b+s}\right) \right] ds = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^t (t^2 - \omega^2)^{-1/2} \frac{d}{d\omega} \int_\omega^b \frac{s G_0(s) ds}{(s^2 - \omega^2)^{1/2}} d\omega - \frac{2t}{\omega} \int_b^\infty \frac{G_2(s) ds}{t^2 - s^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

При рассмотрении контактной задачи электроупругости аналогично задаче теории упругости [5] используем разложение по малому параметру, где  $\varepsilon = c = a/b$ ,  $a$  – неизвестное значение радиуса площадки контакта (рис. 1) с вогнутым коническим штампом.

Для конического вогнутого штампа (рис. 1) имеем

$$u(r) = (d - u_2) + u_2 \left(\frac{r}{b}\right) = f_0(r); \quad f_1(r) = 0. \quad (15)$$

Используя уравнения (11)–(14), в результате проведенных вычислений получаем

$$\begin{aligned}
P(c) = & \frac{4b}{A^{Piezo}} \left\{ (d - u_2) \left[ 1 - \frac{4c^3}{3\pi^2} - \frac{8c^5}{15\pi^2} - \frac{16c^6}{27\pi^4} - \frac{92c^7}{315\pi^2} - \frac{448c^8}{675\pi^2} + O(c^9) \right] \right\} + \\
& + \frac{\pi u_2}{4} \left( \left[ 1 + \frac{8c^3}{9\pi^2} - \frac{52c^5}{75\pi^2} - \frac{32c^6}{81\pi^4} - \frac{326c^7}{735\pi^2} + \frac{496c^8}{10125\pi^4} + O(c^9) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{8c^3 \log c}{3\pi^2} \left[ 1 + \frac{c^2}{5} - \frac{4c^3}{9\pi^2} + \frac{3c^4}{35} - \frac{92c^5}{45\pi^2} + O(c^6) \right] \right) \Bigg\}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Для нахождения неизвестного радиуса контакта конического вогнутого штампа аналогично [3, 5] воспользуемся условием экстремума  $\partial P(c)/\partial c = 0$ . Тогда имеем

$$\frac{d}{u_2} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{c^2 + \frac{16c^3}{81\pi^2} + \frac{5c^4}{6} - \frac{1479c^5}{10125\pi^2} + \log c \left( 2 + \frac{2c^2}{3} - \frac{16c^3}{9\pi^2} + \frac{2c^4}{5} - \frac{1472c^5}{135\pi^2} \right)}{1 + \frac{2c^2}{3} + \frac{8c^3}{9\pi^2} + \frac{23c^4}{45} + \frac{896c^5}{675\pi^2}}, \quad (17)$$

где перемещения  $d$  и  $u_2$  соответствуют обозначениям на рис. 1.

С помощью полученных формул (16), (17) определяются радиус неизвестной области контакта пьезоэлектрического полупространства с вогнутым коническим жестким штампом. Из найденных выражений предельным переходом следуют соответствующие параметры контакта для упругого трансверсально-изотропного полупространства с вогнутым коническим штампом. При этом, величину  $A^{Piezo}$  в указанных формулах следует заменить значением  $A^{Elast}$  (получаем, полагая равными нулю электрические свойства пьезоэлектрического материала). Оценку влияния связанности силовых и электрических полей для конкретного пьезоэлектрического материала можно провести на основе анализа отношения  $A^{Piezo}/A^{Elast}$  по данным работы [2]. Например, для электроупругих материалов PZT-4, PХЕ-5, ВаTiO3 отношение  $A^{Piezo}/A^{Elast}$  равно 0,695; 0,735; 0,854 соответственно. При последующем предельном переходе к упругому изотропному материалу из выражений  $A^{Elast}$  получаем величину  $(1 - \nu)/\mu$ , т.е. из приведенного решения как частный случай следуют результаты работы [5] для упругого полупространства.

**Анализ результатов численных исследований.** Рассмотрим контактное взаимодействие вогнутого конического жесткого штампа (рис.1) с пьезоэлектрическим полупространством. На основе выражений (16), (17), при заданной силе вдавливания вогнутого конического штампа, численно решая уравнение (16) относительно значения  $c = a/b$  и учитывая при этом соотношение (17), находим неизвестный радиус области. На рис. 2 показано влияние значений нагрузки  $P$  и свойств пьезоэлектрического материала (через значение  $A^{Piezo}$ ) на размеры области контакта. Оценивая

значения  $A^{Piezo} / A^{Elast}$  для различных электроупругих материалов, убеждаемся, что за счет связанности силовых и электрических полей для пьезоэлектрических материалов требуется приложить большую нагрузку, чтобы достичь того же перемещения штампа, чем для чисто упругого трансверсально-изотропного материала (с теми же упругими свойствами, что и соответствующий пьезоэлектрический материал)

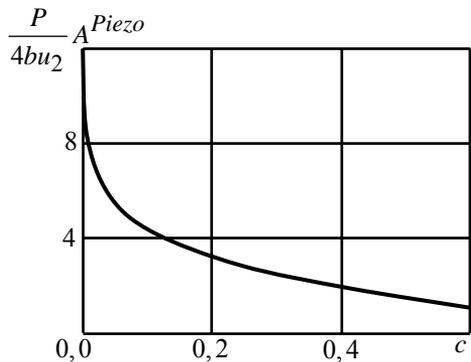


Рис.2

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто контактну взаємодію трансверсально-ізоотропного п'єзоелектричного півпростору з вигнутим конічним жорстким штампом. Розв'язок контактної задачі зведено до розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. За допомогою розкладу по малому параметру отримано співвідношення для пошуку невідомої області контакту вигнутого конічного жорсткого штампа з електропружним півпростором, що залежить від сили вдавлювання, геометричних параметрів конічного штампу і п'єзоелектричних властивостей електропружного матеріалу півпростору. Параметри контактної взаємодії вигнутого конічного штампа з пружним трансверсально-ізоотропним і ізоотропним півпросторами впливають з наведених формул для задачі електропружності як частинні випадки. Проведено числові дослідження. Вивчено вплив сили вдавлювання штампу і властивостей п'єзоелектричного матеріалу на параметри контакту вигнутого конічного жорсткого штампа з електропружним півпростором.

**Ключові слова:** електропружність, контактна задача, вигнутий конічний штамп, п'єзоелектричний півпростір, гладкий контакт.

**SUMMARY.** The contact interaction of the transversally – isotropic piezoelectric half-space with axesymmetric concave conic rigid punch was considered. The solution of contact problem reduced to the solution of Fredholm integral equations of the second kind. The relation for the finding of unknown contact region of concave conic rigid punch of axesymmetric form with piezoelectric half-space depends on the pressure force, geometric parameters of conic punch and electroelastic properties of piezoelectric material was obtained on the base of expansion on the small parameter. The parameters of contact interaction of concave conic punch with elastic transversally – isotropic and isotropic half-spaces follow from the mentioned formulas for the electroelasticity problem as partial cases. The numerical investigations were carried out. The influence of pressure force of punch and properties of electroelastic material on parameters of contact interaction of half-space with concave conic rigid punch was established.

**Key words:** electroelasticity, contact problem, concave conic punch, electroelastic half-space, smooth contact.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:**

1. Кирилюк В. С. О взаимосвязи решений статических контактных задач теории упругости и электроупругости для полупространства // Прикл. механика. –2006. – Т. 42, № 11. – С. 69–84.
2. Кирилюк В. С., Левчук О. И. Двумерная контактная задача электроупругости о вдавливании штампов в пьезокерамическую полуплоскость // Прикл. механика. –2008. – Т. 44, № 11. – С. 55–70.
3. Левчук О. И. Контактное взаимодействие электроупругого полупространства с вогнутым осесимметричным жестким штампом // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – № 5 (51). – С. 73–80.

4. *Akiyama T., Hara T., Shibuya T.* Elastic contact problem of a transversely isotropic half-space indented by a concave or convex rigid punch 2003 // *Theoretical and Applied Mechanics Japan.* – 2003. – № 52, – P. 31–40.

5. *Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitskii V.B.* Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – Vol. 40, № 7. – P. 744–765.

6. *Barber J. R.* Indentation of the semi-infinite elastic solid by a concave rigid punch // *Journal of Elasticity.* – 1976. – Vol 6, № 2. – P.149 – 159.

7. *Collins W. D.* On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations: // VIII potential problems for a circular annulus, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* – 1963. – № 13. – P. 235–246.

8. *Ding H.J., Hou P.F., Guo F.L.* The elastic and electric fields for three-dimensional contact for transversely isotropic piezoelectric materials // *Int. J. Solids Structures.* – 2000. – Vol.37, № 23. – P. 3201–3229.

9. *Jain D. L., Kanwal R. P.* Three-part boundary value problems in potential and generalised axially symmetric potential theories // *J. Analyse Math.* – 1972. – № 25. – P. 107–158.

10. *Podil'chuk Yu.N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 26.08.2013 г.*

УДК 539.3:534.1

*Х. АЛЬТЕНБАХ*, д-р техн. наук,  
*В. А. ЕРЕМЕЕВ*, д-р физ.-мат. наук,  
*А. В. НАСЕДКИН*, д-р физ.-мат. наук

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ПЛЕНКАМИ

*В работе предложены модели нестационарных задач для пьезоэлектрических тел наноразмеров с учетом демпфирования и поверхностных эффектов. Моделирование размерного фактора осуществлено посредством добавления на поверхности соответствующих упругих мембран и диэлектрических пленок. Приведены классические и обобщенные постановки задач и их конечно-элементные аппроксимации.*

*Ключевые слова:* пьезоэлектричество, динамические задачи электроупругости, наномеханика, поверхностные эффекты, метод конечных элементов.

Экспериментальные исследования показывают, что наноразмерные тела демонстрируют механические свойства, существенно отличающиеся от аналогичных объектов обычных размеров, в частности, увеличивается их жесткость. Для объяснения таких эффектов был предложен ряд моделей, среди которых достаточно общепринятой стала теория поверхностных эффектов ([1] и др.). Так, для упругих наноразмерных тел принимается, что на их поверхности действуют поверхностные напряжения, которые можно промоделировать поверхностными мембранами с соответствующими поверхностными модулями упругости. В ряде последующих работ были предприняты попытки распространения методики учета поверхностных эффектов на наноразмерные пьезоэлектрические и флексоэлектрические тела. Так, по-видимому, впервые в [2] было предложено в функционал энергии для наноразмерного пьезоэлектрического материала добавить поверхностные интегралы с членами, содержащими поверхностные модули пьезоэлектрического тела и компоненты тензора деформаций и напряженности электрического поля. Подобный подход получил развитие при исследованиях задач для пьезоэлектрических наноразмерных проволок, балок, пластин и наноразмерных пьезокомпозитных структур в работах [6–8] и др.

В настоящей работе, следуя [3, 5], предполагается, что «поверхностные пленки» не имеют поверхностного пьезоэлектрического эффекта, т.е. поверхностные напряжения связаны только с поверхностными деформациями, а поверхностная электрическая индукция связана только с поверхностной напряженностью электрического поля. Естественно, что за счет общей связанности механических и электрических полей в объеме пьезоэлектрического тела данные поверхностные механические и электрические поля также будут связаны между собой. Принятые допущения позволяют построить строгую теорию для пьезоэлектрических наноразмерных тел, сформулировать полные постановки динамических краевых

задач с учетом затухания, получить обобщенные постановки задач и исследовать различные математические вопросы.

**Постановка задач.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная в  $R^3$  область, занимаемая пьезоэлектрическим телом;  $\Gamma = \partial\Omega$  – граница области;  $\mathbf{n}$  – вектор внешней единичной нормали к  $\Gamma$ ;  $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$  – компоненты вектора перемещений;  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$  – электрический потенциал;  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$  – вектор пространственных координат;  $t$  – время. Систему уравнений для пьезоэлектрического наноразмерного тела  $\Omega$  с учетом демпфирования запишем, аналогично [4], в том же виде, что и для тела обычных размеров

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho(\ddot{u}_i + \alpha_d \dot{u}_i), \quad D_{j,j} = q_\Omega; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(\varepsilon_{kl} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{kl}) - e_{kij} E_k, \quad D_i + \zeta_d \dot{D}_i = e_{ikl}(\varepsilon_{kl} + \zeta_d \dot{\varepsilon}_{kl}) + \kappa_{ij} E_j; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{u_{k,l} + u_{l,k}}{2}, \quad E_k = -\varphi_{,k}; \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $D_i$  и  $E_i$  – компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля;  $\rho$  – плотность материала;  $c_{ijkl} = c_{ijkl}^E$  – компоненты тензора упругих модулей четвертого ранга, измеренных при постоянном электрическом поле;  $e_{ijk}$  – компоненты тензора пьезомодулей третьего ранга;  $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}^S = \varepsilon_{ij}^S$  – компоненты тензора диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянной деформации;  $\alpha_d$ ,  $\beta_d$ ,  $\zeta_d$  – коэффициенты демпфирования;  $f_i$  – компоненты вектора плотности массовых сил;  $q_\Omega$  – объемная плотность электрических зарядов;  $(\dots)^T$  – операция транспонирования. Тензоры материальных модулей имеют такие же свойства симметрии и положительной определенности, как и соответствующие тензоры для модулей пьезоэлектрических тел обычных размеров.

Сформулируем граничные условия для системы дифференциальных уравнений (1) с (2), (3). Эти граничные условия подразделяются на два типа (механические и электрические) и будут отличать наноразмерные тела от соответствующих тел макроразмеров.

Для формулировки механических граничных условий предположим, что существует разбиение границы  $\Gamma$  на два подмножества  $\Gamma_\sigma$  и  $\Gamma_u$  ( $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ ). Будем считать, что на участке  $\Gamma_\sigma$  действуют обычные механические напряжения  $p_{\Gamma_i}$  и поверхностные напряжения  $\tau_{ij}^s$

$$n_j \sigma_{ij} = \partial_j^s \tau_{ij}^s + p_{\Gamma_i}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma; \quad (4)$$

где  $\partial_j^s = \partial/\partial x_j - n_j(\partial/\partial r)$  – компоненты поверхностного оператора градиента;  $r$  – координата, отсчитываемая по нормали к  $\Gamma_\sigma$ ;  $\tau_{ij}^s$  – компоненты тензора поверхностных напряжений; причем суммирование по  $s$  здесь и

везде далее отсутствует.

Как и для чисто упругого тела, примем, что поверхностные напряжения  $\tau_{ij}^s$  связаны с поверхностными деформациями  $\varepsilon_{kl}^s$  определяющим соотношением  $\tau_{ij}^s = c_{ijkl}^s (\varepsilon_{kl}^s + \beta_d \dot{\varepsilon}_{kl}^s)$ , где  $\varepsilon_{kl}^s = (\partial_k^s u_m A_{ml} + A_{km} \partial_l^s u_m)/2$ ,  $c_{ijkl}^s$  – компоненты тензора четвертого ранга поверхностных упругих модулей,  $A_{km} = \delta_{km} - n_k n_m$ ,  $\delta_{km}$  – символ Кронекера. Свойства тензора поверхностных упругих модулей  $c_{ijkl}^s$  здесь аналогичны соответствующим свойствам тензора  $c_{ijkl}$ , т.е.  $c_{ijkl}^s$  – полусимметричный положительно определенный тензор относительно симметричных тензоров второго ранга со структурой  $\varepsilon_{kl}^s$ .

На части границы  $\Gamma_u$  примем как стандартные условия для перемещений, так и граничные условия контактного типа. Именно, пусть  $\Gamma_u = \cup_j \Gamma_{uj}$ ,  $j = 0, 1, \dots, L$ ,  $\Gamma_{u0} \neq \emptyset$ , участки  $\Gamma_{uj}$  не граничат друг с другом, и среди  $\Gamma_{uj}$  есть  $L+1-l$  участков с заданными перемещениями  $u_{\Gamma_j}$  ( $j \in J_r = \{0, l+1, l+2, \dots, L\}$ ) и  $l$  плоских участков ( $j \in J_p = \{1, 2, \dots, l\}$ ), контактирующих без трения с плоскими массивными штампами. С каждым из  $l$  плоских участков  $\Gamma_{uj}$ ,  $j \in J_p$ , свяжем свои местные системы координат  $O_\xi^{(j)} \xi_1^{(j)} \xi_2^{(j)} \xi_3^{(j)}$  таким образом, чтобы ось  $\xi_3^{(j)}$  совпадала по направлению с направлением внешней нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $O_\xi^{(j)}$ , а оси  $\xi_1^{(j)}$  и  $\xi_2^{(j)}$  были бы главными осями инерции для  $j$ -ого штампа. При сделанных предположениях на участках  $\Gamma_{uj}$  можно принять следующие граничные условия

$$u_i n_i = \sum_{k=0}^2 \alpha_{jk}^u \xi_k^{(j)} \quad (\xi_0^{(j)} = 1), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad j \in J_p; \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma_{uj}} \xi_p^{(j)} \sigma_{kl} n_k n_l d\Gamma = -(\ddot{\alpha}_{jp}^u + \alpha_d \dot{\alpha}_{jp}^u) M_p^{(j)} + P_{jp}, \quad p=0, 1, 2, j \in J_p; \quad (6)$$

$$\sigma_{ik} n_k - \sigma_{kl} n_k n_l n_i = \partial_k^s \tau_{ik}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad j \in J_p; \quad (7)$$

$$u_i = u_{\Gamma_{ji}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad j \in J_r, \quad \Gamma_{u0} \neq \emptyset; \quad (8)$$

где в (5), (6) суммирование по повторяющимся индексам  $j$  и  $p$  отсутствует; величины  $\alpha_{j0}^u$  имеют смысл общего смещения участка  $\Gamma_{uj}$  по нормали;  $\alpha_{j1}^u = -\theta_2^{(j)}$ ,  $\alpha_{j2}^u = -\theta_1^{(j)}$  – углы поворота участка  $\Gamma_{uj}$  относительно осей  $\xi_2^{(j)}$  и  $\xi_1^{(j)}$ , соответственно;  $M_0^{(j)}$  – масса штампа;  $M_1^{(j)} = J_{\xi_2^{(j)} \xi_2^{(j)}}^{(j)}$ ,  $M_2^{(j)} = J_{\xi_1^{(j)} \xi_1^{(j)}}^{(j)}$  – главные моменты инерции штампа с номером  $j$ ;  $P_{jp}$  – силы (при  $p=0$ ) и моменты (при  $p=1, 2$ ), действующие на штамп с номером  $j$ ;  $u_{\Gamma_{ji}}$  – компоненты вектора заданных функций перемещений на участках  $\Gamma_{uj}$ ,  $j \in J_r$ .

Заметим, что здесь при контакте наноразмерного тела со штампом без трения касательные напряжения не равны нулю, а уравниваются по (7) действием поверхностных напряжений, как и в [7].

Для определения электрических граничных условий предположим, что поверхность  $\Gamma$  разбита также на два подмножества:  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_\varphi$  ( $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_\varphi$ ).

Участки  $\Gamma_D$  не электродированы, и на них выполняются условия

$$n_i D_i = \partial_i^s d_i^s - q_\Gamma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D; \quad (9)$$

где компоненты вектора поверхностной электрической индукции  $d_i^s$  связаны с компонентами вектора поверхностной напряженности электрического поля  $E_i^s = -\partial_i^s \varphi$  определяющим соотношением  $d_i^s + \zeta_d \dot{d}_i^s = \kappa_{km}^s A_{ik} A_{ml} E_l^s$ ;  $\kappa_{km}^s$  — компоненты тензора поверхностных диэлектрических проницаемостей, симметричного и положительно определенного относительно векторов со структурой  $E_i^s$ ;  $q_\Gamma$  — известная поверхностная плотность электрических зарядов.

Подмножество  $\Gamma_\varphi$  состоит из  $M+1$  не граничащих друг с другом участков  $\Gamma_{\varphi_j}$  ( $j \in J_Q \cup J_V$ ),  $J_Q = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $J_V = \{0, m+1, m+2, \dots, M\}$ , покрытых бесконечно тонкими электродами. На данных участках зададим следующие граничные условия

$$\varphi = \Phi_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad j \in J_Q; \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma_{\varphi_j}} n_i D_i d\Gamma = -Q_j, \quad I_j = \pm \dot{Q}_j, \quad j \in J_Q; \quad (11)$$

$$\varphi = V_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad \Gamma_{\varphi_0} \neq \emptyset, \quad j \in J_V; \quad (12)$$

где величины  $\Phi_j$ ,  $Q_j$ ,  $I_j$  и  $V_j$  зависят только от  $t$ , причем значения  $\Phi_j$  изначально не известны, а знак "+" или "-" во второй формуле (11) для выражения тока  $I_j$  через заряд  $Q_j$  зависит от выбора направления тока во внешней цепи.

По (10)–(12) имеется  $m$  электродов из  $\Gamma_{\varphi_j}$ ,  $j \in J_Q$ , запитываемых генераторами токов  $I_j$ , и  $(M+1-m)$  электродов из  $\Gamma_{\varphi_j}$ ,  $j \in J_V$ , запитываемых генераторами напряжений с известными значениями потенциалов  $V_j$ .

Заметим, что  $\Phi_j$  в (10) и  $V_j$  в (12) не зависят от координат  $\mathbf{x}$ , и, следовательно, электроды являются эквипотенциальными поверхностями. Граничные условия (10), (11) с интегральным соотношением в (11) в некотором смысле аналогичны контактными граничным условиям (5)–(7) для жестких штампов. Однако, отличительным свойством пьезоэлектрических устройств является необходимость граничных условий (10)–(12), так как они определяют зависимости между электрическими потенциалами и электрическими зарядами при включении пьезоэлектрических тел во

внешние цепи. Между тем, механические контактные граничные условия (5)–(7) совсем не типичны для пьезоэлектрических тел, и были введены выше для общности постановки задачи и для возможности сравнения влияния механических и электрических граничных условий контактного типа на собственные частоты [3].

Заканчивают постановку нестационарных задач для пьезоэлектрических сред начальные условия:

$$u_i = u_{*i}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i = v_{*i}(\mathbf{x}), \quad \varphi = \varphi_*(\mathbf{x}), \quad t = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (13)$$

причем при  $\zeta_d = 0$  начальное условие на электрический потенциал не требуется.

Представленная выше постановка нестационарных задач (1) – (13) для пьезоэлектрических наноразмерных тел позволяет адекватно учесть механическое и электрическое затухание и поверхностные эффекты. При  $\beta_d = \zeta_d$  для этой постановки применим метод разложения по модам, аналогично [4]. Поверхностные эффекты, характерные для наноразмерных тел, здесь учтены в граничных условиях (4), (7), (9). Вместе с соответствующими определяющими соотношениями для поверхностных полей эти формулы для нестационарных задач являются новыми.

**Обобщенные или слабые постановки.** Предварительно введем некоторые функциональные пространства определенных на  $\Omega$  функций  $\varphi$  и вектор-функций  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ . Обозначим через  $H_\rho^0$  пространство вектор-функций  $\mathbf{u} \in L_2$  со скалярным произведением  $(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{H_\rho^0} = \int_\Omega \rho \bar{v}_i u_i d\Omega$ , где  $\overline{(\dots)}$  – операция комплексного сопряжения, необходимая только для комплекснозначных пространств для задач об установившихся колебаниях.

На множестве вектор-функций  $\mathbf{u} \in C^1$ , удовлетворяющих однородному граничному условию (8)  $\mathbf{u} = 0$  на  $\Gamma_{uj}$ ,  $j \in J_r$ , и (5) при  $\forall \alpha_{jk}^u$  на  $\Gamma_{uj}$ ,  $j \in J_p$ , введем скалярное произведение:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{H_u^1} = \int_\Omega v_{i,j} u_{i,j} d\Omega + \int_{\Gamma_\tau} A_{ik} A_{jm} \partial_j^s \bar{v}_k \partial_m^s u_i d\Gamma, \quad \Gamma_\tau = \Gamma_\sigma \cup (\cup_{j \in J_p} \Gamma_{uj}).$$

Замыкание множества таких вектор-функций  $\mathbf{u}$  в норме, генерируемой данным скалярным произведением, обозначим через  $H_u^1$ .

Для функций  $\varphi \in C^1$ , удовлетворяющих однородному граничному условию (10)  $\varphi = 0$  на  $\Gamma_{\varphi j}$ ,  $j \in J_V$ , и (13) для  $\forall \Phi_j$  на  $\Gamma_{\varphi j}$ ,  $j \in J_Q$ , введем скалярное произведение  $(\chi, \varphi)_{H_\varphi^1} = \int_\Omega \bar{\chi}_{,i} \varphi_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma_D} \partial_i^s \bar{\chi} \partial_i^s \varphi d\Gamma$ . Замыкание множества таких функций  $\varphi$  в норме, генерируемой данным скалярным произведением, обозначим через  $H_\varphi^1$ .

Наконец, введем пространства  $Q_u = L_2(0, T; H_u^1)$  и  $Q_\varphi = L_2(0, T; H_\varphi^1)$ ,

где для банахова пространства  $X$  с нормой  $\|\cdot\|_X$  через  $L_2(0, T; X)$  обозначено пространство (классов) функций  $t \rightarrow f(t)$  из  $[0, T]$  в  $X$ , и таких, что  $(\int_0^T \|f(t)\|_X^2 dt)^{1/2} = \|f\|_{L_2(0, T; X)} < \infty$ .

Снимем неоднородность в главных граничных условиях, разыскивая решение  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$  в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_b, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_b; \quad (14)$$

где  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{Q}_u$ ,  $\varphi_0 \in \mathcal{Q}_\varphi$  удовлетворяют однородным условиям, а известные (специально подобранные) функции  $\mathbf{u}_b$ ,  $\varphi_b$  – неоднородным условиям:

$$n_i u_{0i} = \sum_{k=0}^2 \alpha_{jk}^{u0} \xi_k^{(j)}, \quad n_i u_{bi} = \sum_{k=0}^2 \alpha_{jk}^{ub} \xi_k^{(j)}, \quad \alpha_{jk}^{u0} + \alpha_{jk}^{ub} = \alpha_{jk}^u, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad j \in J_p; \quad (15)$$

$$u_{0i} = 0, \quad u_{bi} = u_{\Gamma_{ji}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad \Gamma_{u0} \neq \emptyset, \quad i \in J_r; \quad (16)$$

$$\varphi_0 = \Phi_{0j}, \quad \varphi_b = \Phi_{bj}, \quad \Phi_{0j} + \Phi_{bj} = \Phi_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad j \in J_Q; \quad (17)$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_b = V_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad \Gamma_{\varphi 0} \neq \emptyset, \quad i \in J_V. \quad (18)$$

Используя (14)–(18) и действуя стандартным образом, т.е. умножая первые из уравнений (1) на компоненты  $v_i$  произвольной вектор-функции  $\mathbf{v} \in H_u^1$ , второе из уравнений (1) – на произвольную функцию  $\chi \in H_\varphi^1$ , интегрируя по частям и учитывая (2), (3) и граничные условия (4)–(12), приходим к интегральным соотношениям вида

$$\tilde{\rho}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_0) + d(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_0) + c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) + e(\varphi_0, \mathbf{v}) = L_u(\mathbf{v}); \quad (19)$$

$$-e(\chi, \mathbf{u}_0 + \zeta_d \dot{\mathbf{u}}_0) + \kappa(\chi, \varphi_0) = L_\varphi(\chi) + \zeta_d L_\varphi^t(\chi); \quad (20)$$

где

$$\tilde{\rho}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \rho_p(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad d(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \alpha_d \tilde{\rho}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \beta_d c(\mathbf{v}, \mathbf{u}); \quad (21)$$

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})_{H_\rho^0}, \quad \rho_p(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{jk}^v \alpha_{jk}^u M_k^{(j)}; \quad (22)$$

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = c_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + c_\Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \kappa(\chi, \varphi) = \kappa_\Omega(\chi, \varphi) + \kappa_\Gamma(\chi, \varphi); \quad (23)$$

$$c_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_\Omega c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{v}}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad c_\Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_\tau} c_{ijkl}^s \varepsilon_{ij}^s(\bar{\mathbf{v}}) \varepsilon_{kl}^s(\mathbf{u}) d\Gamma; \quad (24)$$

$$\kappa_\Omega(\chi, \varphi) = \int_\Omega \kappa_{ij} E_i(\bar{\chi}) E_j(\varphi) d\Omega, \quad \kappa_\Gamma(\chi, \varphi) = \int_{\Gamma_D} \kappa_{ij}^s E_i^s(\bar{\chi}) E_j^s(\varphi) d\Gamma \quad (25)$$

$$e(\varphi, \mathbf{v}) = - \int_\Omega e_{kij} E_k(\bar{\varphi}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega; \quad (26)$$

$$L_u(\mathbf{v}) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}) - \tilde{\rho}(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_b) - d(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_b) - c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_b) - e(\varphi_b, \mathbf{v}); \quad (27)$$

$$L_\varphi(\chi) + \zeta_d L_\varphi^t(\chi) = \tilde{L}_\varphi(\chi) + \zeta_d \tilde{L}_\varphi^t(\chi) + e(\chi, \mathbf{u}_b + \zeta_d \dot{\mathbf{u}}_b) - \kappa(\chi, \varphi_b); \quad (28)$$

$$\tilde{L}_u(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \bar{v}_i f_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{v}_i p_{\Gamma i} d\Gamma + \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{jk}^v P_{jk}; \quad (29)$$

$$\tilde{L}_{\varphi}(\chi) = \int_{\Omega} \bar{\chi} q_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_D} \bar{\chi} q_{\Gamma} d\Gamma + \sum_{j=1}^m \bar{X}_j Q_j; \quad (30)$$

$$\tilde{L}_{\varphi}^t(\chi) = \int_{\Omega} \bar{\chi} \dot{q}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_D} \bar{\chi} \dot{q}_{\Gamma} d\Gamma + \sum_{j=1}^m \bar{X}_j \dot{Q}_j. \quad (31)$$

Итогом представленных преобразований может являться понятие обобщенного решения.

*Определение.* Обобщенным или слабым решением начально-краевой задачи (1)–(13) является пара функций  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$  в форме (14), в которой для функций  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_b$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_b$  выполняются граничные условия (15)–(18), причем функции  $\mathbf{u}_b$ ,  $\varphi_b$  известны, а функции  $\mathbf{u}_0 \in Q_u$ ,  $\varphi_0 \in Q_{\varphi}$  удовлетворяют интегральным соотношениям (19), (20) с (21)–(31)  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{v} \in H_u^1$ ,  $\chi \in H_{\varphi}^1$ . Кроме того, пара функций  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$  удовлетворяет начальным условиям (13).

Исходя из представленных классических и слабых постановок нестационарных задач для наноразмерных пьезоэлектрических тел, можно сформулировать также аналогичные формулировки задач на собственные значения [5], задач об установившихся колебаниях [3] и статических задач, установить различные математические свойства решений (существование, единственность, дискретность спектра, теоремы об изменениях собственных частот при варьировании входных данных и т.д. [3, 5]), а также обосновать проекционно-разностные методы для построения приближенных решений. Как известно, среди таких численных методов наибольшее распространение получил метод конечных элементов, который и описывается в следующем разделе.

**Конечно-элементные аппроксимации.** Пусть  $\Omega_h$  – область, занимаемая соответствующей конечно-элементной сеткой  $\Omega_h \subseteq \Omega$ ,  $\Omega_h = \cup_k \Omega^{ek}$ , где  $\Omega^{ek}$  – отдельный конечный элемент с номером  $k$ . На границе  $\Gamma_h = \partial\Omega_h$  выделим участки  $\Gamma_{h\sigma}$ ,  $\Gamma_{huj}$ ,  $j=0, 1, 2, \dots, L$ ,  $\Gamma_{hD}$ ,  $\Gamma_{h\varphi j}$ ,  $j=0, 1, 2, \dots, M$ , аппроксимирующие границы  $\Gamma_{\sigma}$ ,  $\Gamma_{uj}$ ,  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_{\varphi j}$ . Тогда, на  $\Omega_h$  с соответствующими границами аналогично пространствам  $H_u^1$ ,  $H_{\varphi}^1$  можно ввести конечномерные функциональные пространства  $H_{hu}^1$ ,  $H_{h\varphi}^1$ , а на  $\Omega_h \times [0, T]$  аналогично пространствам  $Q_u$ ,  $Q_{\varphi}$  – пространства  $Q_{hu}$ ,  $Q_{h\varphi}$ .

На конечно-элементной сетке  $\Omega_h = \cup_k \Omega^{ek}$  приближенное решение  $\mathbf{u}_{h0} \approx \mathbf{u}_0$ ,  $\varphi_{h0} \approx \varphi_0$  для задачи (19), (20) будем искать в форме

$$\mathbf{u}_{h0}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_u^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \varphi_{h0}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \Phi(t); \quad (32)$$

где  $\mathbf{N}_u^T$  – матрица функций формы (базисных функций) для перемещений,  $\mathbf{N}_\varphi^T$  – вектор-строка функций формы для электрического потенциала,  $\mathbf{U}$ ,  $\Phi$  – глобальные векторы узловых значений перемещений и электрического потенциала, соответственно.

Проекционные функции  $\mathbf{v} \in H_u^1$ ,  $\chi \in H_\varphi^1$  представим в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u^T(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{U}, \quad \chi(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \delta \Phi. \quad (33)$$

Следуя обычной конечно-элементной технике, слабую постановку задачи (19), (20) запишем в конечномерных пространствах  $H_{hu}^1$ ,  $H_{h\varphi}^1$ ,  $Q_u$ ,  $Q_\varphi$  для области  $\Omega_h = \cup_k \Omega^{ek}$  с соответствующими границами. Подставляя (32), (33) в задачу (19), (20) для  $\Omega_h$ , будем иметь

$$\tilde{\mathbf{M}}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u; \quad (34)$$

$$-\mathbf{K}_{u\varphi}^T \cdot (\mathbf{U} + \zeta_d \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_\varphi + \zeta_d \mathbf{F}_\varphi^t; \quad (35)$$

где  $\tilde{\mathbf{M}}_{uu} = \mathbf{M}_{uu} + \mathbf{M}_{Puu}$ ,  $\mathbf{M}_{uu} = \sum_k^a \mathbf{M}_{uu}^{ek}$ ,  $\mathbf{C}_{uu} = \sum_k^a \mathbf{C}_{uu}^{ek}$ ,  $\mathbf{K}_{uu} = \sum_k^a \mathbf{K}_{uu}^{ek}$ ,  $\mathbf{K}_{u\varphi} = \sum_k^a \mathbf{K}_{u\varphi}^{ek}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \sum_k^a \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{ek}$  – глобальные конечно-элементные матрицы, полученные из соответствующих элементных матриц в результате процедуры ансамблирования ( $\sum_k^a$ ),  $\mathbf{M}_{Puu}$  – матрица масс и моментов инерции для штампов; а векторы  $\mathbf{F}_u$ ,  $\mathbf{F}_\varphi$  и  $\mathbf{F}_\varphi^t$  получаются в результате конечно-элементных аппроксимаций для правых частей  $L_u(\mathbf{v})$ ,  $L_\varphi(\chi)$  и  $L_\varphi^t(\chi)$  в (19), (20).

В соответствие с (21) – (26) элементные матрицы даются формулами

$$\mathbf{M}_{uu}^{ek} = \int_{\Omega^{ek}} \rho \mathbf{N}_u^e \cdot \mathbf{N}_u^{eT} d\Omega, \quad \mathbf{C}_{uu}^{ek} = \alpha_d \mathbf{M}_{uu}^{ek} + \beta_d \mathbf{K}_{uu}^{ek}; \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^{ek} = \mathbf{K}_{\Omega uu}^{ek} + \mathbf{K}_{\Gamma uu}^{ek}, \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{ek} = \mathbf{K}_{\Omega \varphi\varphi}^{ek} + \mathbf{K}_{\Gamma \varphi\varphi}^{ek}; \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_{\Omega uu}^{ek} = \int_{\Omega^{ek}} \mathbf{B}_u^{eT} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_u^e d\Omega, \quad \mathbf{K}_{\Gamma uu}^{ek} = \int_{\Gamma_\tau^{ek}} \mathbf{B}_{su}^{eT} \cdot \mathbf{c}^s \cdot \mathbf{B}_{su}^e d\Gamma; \quad (44)$$

$$\mathbf{K}_{\Omega \varphi\varphi}^{ek} = \int_{\Omega^{ek}} \mathbf{B}_\varphi^{eT} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{B}_\varphi^e d\Omega, \quad \mathbf{K}_{\Gamma \varphi\varphi}^{ek} = \int_{\Gamma_D^{ek}} \mathbf{B}_{s\varphi}^{eT} \cdot \boldsymbol{\kappa}^s \cdot \mathbf{B}_{s\varphi}^e d\Gamma; \quad (45)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi}^{ek} = \int_{\Omega^{ek}} \mathbf{B}_u^{eT} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{B}_\varphi^e d\Omega, \quad \mathbf{B}_{(s)u}^e = \mathbf{L}(\nabla^{(s)}) \cdot \mathbf{N}_u^{eT}, \quad \mathbf{B}_{(s)\varphi}^e = \nabla^{(s)} \mathbf{N}_\varphi^{eT}; \quad (46)$$

$$\mathbf{L}^T(\nabla^{(s)}) = \begin{bmatrix} \partial_1^{(s)} & 0 & 0 & 0 & \partial_3^{(s)} & \partial_2^{(s)} \\ 0 & \partial_2^{(s)} & 0 & \partial_3^{(s)} & 0 & \partial_1^{(s)} \\ 0 & 0 & \partial_3^{(s)} & \partial_2^{(s)} & \partial_1^{(s)} & 0 \end{bmatrix}; \quad (47)$$

где  $\Gamma_{\tau}^{ek}$ ,  $\Gamma_D^{ek}$  – грани конечных элементов, выходящие на участки  $\Gamma_{h\tau}$ ,  $\Gamma_{hD}$  с заданными поверхностными эффектами;  $\mathbf{N}_u^{eT}$ ,  $\mathbf{N}_\varphi^{eT}$  – матрицы и вектора-строки аппроксимирующих базисных функций, соответственно, определенных на отдельных конечных элементах.

В (44)–(47) использованы векторно-матричные обозначения:  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}^s$  – 6x6 матрицы упругих объемных и поверхностных модулей,  $c_{\alpha\beta}^{(s)} = c_{ijkl}^{(s)}$ ;  $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$ ;  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ , с законом соответствия  $\alpha \leftrightarrow (ij)$ ,  $\beta \leftrightarrow (kl)$ :  $1 \leftrightarrow (11)$ ,  $2 \leftrightarrow (22)$ ,  $3 \leftrightarrow (33)$ ,  $4 \leftrightarrow (23) = (32)$ ,  $5 \leftrightarrow (13) = (31)$ ,  $6 \leftrightarrow (12) = (21)$ ;  $\mathbf{e}$  – 3x6 матрица пьезомодулей ( $e_{i\beta} = e_{ikl}$ ).

Заметим, что в (34)–(46) глобальные и элементные матрицы масс и жесткости  $\tilde{\mathbf{M}}_{uu}$ ,  $\mathbf{M}_{uu}^{ek}$ ,  $\mathbf{K}_{\Omega uu}$ ,  $\mathbf{K}_{\Omega uu}^{ek}$  формируются точно также, как и для чисто упругого тела, а матрицы  $\mathbf{K}_{u\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{u\varphi}^{ek}$ ,  $\mathbf{K}_{\Omega\varphi\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{\Omega\varphi\varphi}^{ek}$  идентичны соответствующим матрицам для пьезоэлектрических тел. Матрицы  $\mathbf{K}_{\Gamma uu}$  и  $\mathbf{K}_{\Gamma\varphi\varphi}$  определяются поверхностными напряжениями и поверхностными электрическими зарядами, соответственно. Эти матрицы аналогичны матрицам жесткости для поверхностных упругих мембран и матрицам диэлектрических проницаемостей для поверхностных диэлектрических пленок. Таким образом, для проведения конечно-элементного пьезоэлектрического динамического анализа для тел с поверхностными эффектами наряду с обычными твердотельными пьезоэлектрическими конечными элементами необходимо иметь поверхностные структурные мембранные элементы и поверхностные конечные элементы диэлектрических пленок. В остальном конечно-элементная техника решения нестационарных задач для пьезоэлектрических тел с поверхностными эффектами может повторять аналогичную технику для пьезоэлектрических тел без поверхностных эффектов. Это же замечание справедливо и для задач на собственные значения [5], задач об установившихся колебаниях [3] и статических задач. В частности, можно использовать те же процедуры учета главных граничных условий и условий контактного типа, те же решатели с седловыми матрицами для нестационарных задач, задач на собственные значения, задач об установившихся колебаниях и статических задач, определять частоты электрических резонансов и антирезонансов, а также алгоритмы метода разложения по модам (см., например, [4]).

Отметим, что результаты вычислительных экспериментов по конечно-элементному решению задач об установившихся колебаниях и задач на собственные значения для продольно-поляризованного наноразмерного стержня из оксида цинка при различных варьируемых параметрах, характеризующих поверхностные эффекты, были представлены в [3, 5].

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» Минобрнауки и программы развития ЮФУ.*

**РЕЗЮМЕ.** У роботі розглянуті моделі нестационарних задач для п'єзоелектричних тіл нанорозмірів з урахуванням демпфірування і поверхневих ефектів. Моделювання розмірного фактора здійснене за допомогою додавання на поверхні відповідних пружних мембран і діелектричних плівок. Наведено класичні та узагальнені постановки задач і їх звичайно-елементні апроксимації.

**Ключові слова:** п'єзоелектрика, динамічні задачі електропружності, наномеханіка, поверхневі ефекти, метод кінцевих елементів.

**SUMMARY.** The paper discusses about transient problems for piezoelectric nanosized bodies with taking into account damping and surface effects. For modeling of size effect we add to the surface the corresponding elastic membranes and dielectric films. We present news classical and weak statements of transient problems and finite element approximations

**Key words:** piezoelectricity, dynamic electroelastic problem, nanomechanics, surface effects, finite element methodp.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Duan H. L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress / H. L. Duan, J. Wang, Z. P. Huang, B. L. Karihaloo // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2005.– Vol. 53.– P. 1574–1596.
2. Huang G. Y. Effect of surface piezoelectricity on the electromechanical behaviour of a piezoelectric ring / G. Y. Huang, S. W. Yu // *Phys. Status Solidi B.* – 2006.– Vol. 243, № 4.– P. R22–R24.
3. Nasedkin A. V. Harmonic oscillations of nanosize piezoelectric bodies with surface effects / A. V. Nasedkin, V. A. Eremeyev // *Proc. IRF'2013, IV Int. Conf. Integrity – Reliability – Failure. Funchal, 23-27 Jun 2013.* Eds. J.F. Silva Gomes, S.A. Meguid. Univ. Porto, Univ. Toronto, Univ. Madeira. INEGI, 2013.– CD. Paper 4073.– 19 p.
4. Nasedkin A. V. Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems / A. V. Nasedkin / In: *Piezoceramic materials and devices.* Ed. I.A. Parinov. Nova Science Publishers, N.-Y., 2010.– P. 177–218.
5. Nasedkin A. V. Spectral properties of piezoelectric bodies with surface effects / A. V. Nasedkin, V. A. Eremeyev / In: *Advanced Structured Materials. Vol. 30. Surface effects in solid mechanics - Models, Simulations and Applications.* Eds. Altenbach H., Morozov N. F. – Springer-Verlag, Berlin, 2013.– P. 105–121.
6. Xiao J. H. Size-dependent effective electroelastic moduli of piezoelectric nanocomposites with interface effect / J. H. Xiao, Y. L. Xu, F. C. Zhang // *Acta Mechanica.* – 2011.– Vol. 222, No 1-2.– P. 59–67.
7. Yan Z. Vibration and buckling analysis of a piezoelectric nanoplate considering surface effects and in-plane constraints / Z. Yan, L. Y. Jiang // *Proc. R. Soc. A.* – 2012. – Vol. 468.– P. 3458–3475.
8. Zhang C. On propagation of anti-plane shear waves in piezoelectric plates with surface effect / C. Zhang, W. Chen, C. Zhang // *Physics Letters A.* – 2012.– Vol. 376. P. 3281–3286.

*Університет ім. Отто фон Геріке, г. Магдебург  
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону*

*Поступила 13. 08. 2013г.*

УДК 539.3

*В. Г. КАРНАУХОВ*, д-р физ.-мат.наук,  
*Т. В. КАРНАУХОВА*, канд. физ.-мат.наук,  
*Н. В. ПЕРЕСУНЬКО*, *Н. В. ПЕТРЕНКО*

## **О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОЙ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ ТЕРМОМЕХАНИКИ И ТЕРМОЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ НЕУПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

*Установлена аналогия между задачами термомеханики и термоэлектромеханики при исследовании активного демпфирования вынужденных резонансных колебаниях неупругих пластин и оболочек при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Предполагается, что механические характеристики пассивных материалов зависят от температуры. Решение нелинейной задачи получено итерационным методом и методом конечных элементов. Исследовано влияние нелинейности и коэффициента обратной связи на амплитудно- и температурно-частотные характеристики цилиндрической панели с жестко заземленными торцами.*

*Ключевые слова:* активное демпфирование, сенсоры и актуаторы, разогрев, динамические характеристики колебаний.

В последние годы для управления колебаниями тонкостенных элементов широко используются пьезоэлектрические включения, одни из которых выполняют функции актуаторов, а другие – сенсоров [12–14]. Одной из эффективных технологий активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний тонкостенных элементов является совместное использование сенсоров и актуаторов, когда к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная скорости снимаемого с сенсора разности потенциалов или тока скорости снимаемого с сенсора заряда [12–14]. При этом в электромеханической системе, состоящей из пассивных слоев (без пьезоэффекта), покрытых пьезослоями, выполняющими функции сенсора и актуатора, к диссипативным потерям за счет неупругого поведения материала добавляется диссипация за счет указанного использования пьезослоев. При изгибных колебаниях тонкостенных элементов последняя учитывается дополнительным членом в уравнениях движения, пропорциональным скорости изменения амплитуды поперечного прогиба. Для исследования колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов можно применять аналитические и численные методы. В работах [8–10] для расчета динамических характеристик пластин и оболочек из неупругих физически нелинейных пассивных материалов использован метод конечных элементов.

В настоящей статье устанавливается аналогия между задачами термомеханики и задачами термоэлектромеханики для тонкостенных элементов из неупругих нелинейных материалов. Суть ее состоит в том, что использование концепции комплексных характеристик [7] позволяет свести расчет основных динамических характеристик вынужденных резонансных колебаний тонкостенных элементов (амплитудно-, температурно-

частотных характеристик, зависимости коэффициента демпфирования от частоты) с активными слоями к решению задачи о вынужденных резонансных колебаниях элементов из пассивных неупругих нелинейных материалов путем формального введения в уравнения движения комплексной плотности и путем модификации комплексных жесткостных характеристик. Для решения последней можно уже использовать разработанные ранее методы расчета основных динамических характеристик тонкостенного элемента из пассивных физически нелинейных материалов [8–10]. В связи с тем, что выражение для снимаемых с сенсора показаний является интегральной характеристикой, для расчета указанной выше комплексной плотности можно использовать известные приближенные или точные выражения для собственных функций. Указанный подход существенно упрощает расчет фундаментальных характеристик резонансных колебаний тонкостенных элементов с пьезоактивными включениями.

В качестве примера рассмотрена нелинейная задача о колебаниях и диссипативном разогреве цилиндрической панели с жестким защемлением торцов. Нелинейность порождается зависимостью механических характеристик от температуры и зависимостью диссипативной функции от деформаций и температуры. Представлены графики, иллюстрирующие влияние такого типа физической нелинейности и коэффициента обратной связи на фундаментальные динамические характеристики этой панели.

**Постановка задачи.** Для моделирования механического поведения тонкостенных оболочек из неупругих материалов используем механические гипотезы Кирхгоффа-Лява. Полученные на их основе универсальные уравнения механики однослойных и многослойных тонких оболочек из пассивных материалов в криволинейной ортогональной системе координат представлены, например, в [1]. Аналогичные уравнения для слоистых тонкостенных элементов, составленных из пьезоактивных (с пьезоэффектом) и пассивных (без пьезоэффекта) материалов приведены в [5, 6]. К универсальным уравнениям механики оболочек, пригодным для любых материалов, относятся уравнения движения в усилиях и моментах, кинематические соотношения, граничные условия. Специфика поведения материалов описывается уравнениями состояния, связывающими усилия и моменты с деформациями. Для гармонических процессов механическое поведение неупругих материалов моделируется путем использования концепции комплексных характеристик [7], согласно которой определяющие уравнения имеют такой же вид, как и соответствующие уравнения теории упругости с тем лишь отличием, что они являются комплексными с зависимыми от температуры и деформаций механическими характеристиками. При учете диссипативного разогрева в результате гистерезисных потерь к универсальным уравнениям относится также уравнение энергии, которое дополняется уравнением состояния для диссипативной функции. Для гармонических процессов диссипативная функция совпадает с усредненной за период мощностью. При учете связанности механических и электрических полей указанные выше гипотезы дополняются адекватными им гипотезами относительно электрических полевых величин, согласно которым нормальные составляющие векторов напряженности электрического поля и индукции считаются гораздо больше их тангенциальных составляющих. При этом из уравнения сохранения заряда следует, что между электродами нормальная составляющая индукции не зависит от

толщиной координаты. В дальнейшем ограничимся трехслойными оболочками, составленными из среднего пассивного неупругого слоя и нанесенных на внешние поверхности одинаковыми упругими пьезослоями с противоположной поляризацией. На основе указанных гипотез можно получить определяющие уравнения для оболочек, составленных из пассивных и пьезоактивных слоев. Определяющие уравнения для усилий и моментов по своему виду совпадают с уравнениями термоупругости тонких оболочек с тем лишь отличием, что несколько модифицируются жесткостные характеристики и в них появляются слагаемые, пропорциональные подводимой к электродам разность потенциалов. Считаем, что на оболочку действует равномерное поверхностное давление, изменяющееся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , близкой к резонансной:  $p = p_0 \exp(i\omega t)$ . Ограничимся случаем такой физической нелинейности, когда механические характеристики пассивного материала зависят только от температуры. При этом диссипативная функция будет нелинейной функцией температуры и деформаций. Подставляя кинематические соотношения в уравнения состояния, а полученный результат – в универсальные уравнения движения, получим комплексные уравнения движения в перемещениях, в которых для моногармонических процессов в уравнении движения появляется член

$$\tilde{F} = -\tilde{\rho}\omega^2 w - \Delta M_0 - p_0. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{\rho}$ ,  $w$ ,  $\Delta$  – приведенная плотность, комплексный поперечный прогиб, оператор Лапласа в криволинейной системе координат соответственно. В дальнейшем ограничимся пологими оболочками. При этом величина  $M_0$  определяется по таким же формулам, как и в теории пластин. Эти формулы представлены в [2,3] и имеют вид

$$M_0 = -\frac{1}{4} G_S \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2 \iint_{(S_1)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) d\alpha d\beta, \quad (2)$$

где  $S_1$  – площадь сенсора и актуатора, а остальные обозначения представлены в [2,3].

Аналитическое выражение для величины  $M_0$  зависит от граничных условий для поперечного перемещения. Рассмотрим, например, цилиндрическую панель либо прямоугольную в плане пологую оболочку произвольной конфигурации с размерами  $a \times b$ . Для жесткого защемления торцов граничные условия для поперечного прогиба имеют вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0 \quad \alpha = 0, a; \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \beta} = 0 \quad \beta = 0, b. \quad (3)$$

Для управления колебаниями оболочки при таком типе граничных условий поверхности пьезослоев покрываются бесконечно тонкими электродами, на которых вырезаются пятна определенных размеров. Для расчета их оптимальных размеров и размещения получим аналитическое выражение для  $M_0$  при граничных условиях (3), выбирая в качестве

пробных функций следующее выражения, тождественно удовлетворяющие граничным условиям (3):

$$w = A_{mn}(t) \bar{w}_{mn}(\alpha, \beta). \quad (4)$$

Здесь

$$\bar{w}_{mn}(\alpha, \beta) = (1 - \cos k_m \alpha)(1 - \cos p_n \beta), \quad k_m = \frac{2m\pi}{a}, \quad p_n = \frac{2n\pi}{a}. \quad (5)$$

Если центр указанного пятна имеет координаты  $(\xi, \eta)$ , а его размеры равны  $(c, d)$ , то после громоздких вычислений с использованием (5) найдем аналитическое выражение для множителя, фигурирующего в (2):

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & \iint_{(S_1)} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) d\alpha d\beta = 2k_m \sin \left( k_m \frac{c}{2} \right) \cos(k_m \xi) \times \\ & \times \left[ d - \frac{2}{p_n} \sin \left( p_n \frac{d}{2} \right) \cos(p_n \eta) \right] + \\ & + 2p_n \sin \left( p_n \frac{d}{2} \right) \cos(p_n \eta) \left[ c - \frac{2}{k_m} \sin \left( k_m \frac{c}{2} \right) \cos(k_m \xi) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

При совпадении центра пятна с центром оболочки

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & 4m\pi \left( \frac{b}{a} \frac{l}{L} \right) \pi \sin \left( m\pi \frac{l}{L} \right) \cos(m\pi) \left[ 1 - \frac{1}{n\pi} \sin \left( n\pi \frac{l}{L} \right) \cos(n\pi) \right] + \\ & + 4n\pi \left( \frac{a}{b} \frac{l}{L} \right) \sin \left( n\pi \frac{l}{L} \right) \cos(n\pi) \left[ 1 - \frac{1}{m\pi} \sin \left( m\pi \frac{l}{L} \right) \cos(m\pi) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $l, L$  – соответственно длина диагонали пятна и оболочки.

Анализ выражения (7) показывает, что  $\tilde{Q} = 0$  при  $l = 0$  и  $l = L$ . Поэтому при полном покрытии пятном оболочки и его малых размерах управлять колебаниями панели невозможно. Размеры пятна выбираются путем построения графика зависимости  $\tilde{Q}$  от отношения  $l/L$  и выбора такого его значения, которое отвечает максимуму  $\tilde{Q}$ . В работе [3] при другом выборе пробных функций установлено, что оптимальный размер при  $m = n = 1$  отвечает значению  $l/L = 0,4$ , которое и будет использовано в дальнейшем при расчетах. Для гармонических процессов

$$A_{mn}(t) = f_{mn} e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Подставляя (4), (5), (8) в (2), находим

$$M_0(\alpha, \beta) = \begin{cases} M_1 & \text{при } (\alpha, \beta) \in S_1, \\ 0 & \text{при } (\alpha, \beta) \notin S_1. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $S_1$  – область пятна, к которому подводится разность потенциалов, а

$$M_1 = -\frac{1}{4} G_s \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2 \omega f_{mn} \tilde{Q}. \quad (10)$$

Вне пятна разность потенциалов равна нулю.

Так как рассматриваются резонансные колебания на частотах, близких к резонансным, резонансная составляющая  $M_0(\alpha, \beta)$  для случая жесткого защемления определяется формулой

$$M_0(\alpha, \beta) = M_{mn} (1 - \cos k_m \alpha) (1 - \cos p_n \beta). \quad (11)$$

Здесь

$$M_{mn} = \frac{16}{9} \left( \frac{l}{L} \right)^2 M_1 \left[ 1 - \frac{l}{L} \frac{1}{m\pi} \sin \left( m\pi \frac{l}{L} \right) \cos(m\pi) \right] + \\ + \left[ 1 - \frac{l}{L} \frac{1}{n\pi} \sin \left( n\pi \frac{l}{L} \right) \cos(n\pi) \right]. \quad (12)$$

Учитывая (1), находим, что

$$\bar{F} = -\tilde{p}\omega^2 w - \Delta M_0 - p_0 = -\tilde{p}\omega^2 w - M_{mn} \left[ k^2 \cos(k_m \alpha) (1 - \cos(p_n \beta)) + \right. \\ \left. + p_n^2 (1 - \cos(k_m \alpha)) \cos(p_n \beta) \right] - p_0. \quad (13)$$

В выражении (13) выделим резонансную составляющую  $(1 - \cos k_m \alpha) (1 - \cos p_n \beta)$  в члене, появившемся в результате взаимодействия механических и электрических полей. Для этого разложим функции  $\cos(k_m \alpha)$  и  $\cos(p_n \beta)$  в ряды по  $(1 - \cos(k_m \alpha))$  и  $(1 - \cos(p_n \beta))$  соответственно. Тогда

$$-M_{mn} \left[ k_m^2 \cos(k_m \alpha) (1 - \cos(p_n \beta)) + p_n^2 (1 - \cos(k_m \alpha)) \cos(p_n \beta) \right] = i\omega \beta_{mn} w, \quad (14)$$

где

$$\beta_{mn} = \frac{1}{27} \left( \frac{l}{L} \right)^2 G_s \gamma_{31}^2 (h_1 + h_0)^2 (k_m^2 + p_n^2) \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} = -Q. \quad (15)$$

Здесь

$$\tilde{Q}_{mn} = 4m\pi \left( \frac{l}{L} \right) \sin m\pi \left( \frac{l}{L} \right) \cos m\pi \left[ 1 - \frac{1}{n\pi} \left( \frac{L}{l} \right) \sin n\pi \left( \frac{l}{L} \right) \cos n\pi \right] + \\ + 4n\pi \left( \frac{l}{L} \right) \sin n\pi \left( \frac{l}{L} \right) \cos n\pi \left[ 1 - \frac{1}{m\pi} \left( \frac{L}{l} \right) \sin m\pi \left( \frac{l}{L} \right) \cos m\pi \right]. \quad (16)$$

При этом

$$-\tilde{\rho}\omega^2 w - \Delta M_0 = -\tilde{\rho}\omega^2(1 - i\varepsilon_{mn})w = -\bar{\rho}\omega^2 w, \quad (17)$$

где

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{\tilde{\rho}\omega} \beta_{mn}, \quad \bar{\rho} = \tilde{\rho}(1 - i\varepsilon_m). \quad (18)$$

Таким образом, после аналитического определения дополнительного члена в уравнении движения формально задача термоэлектровязкоупругости свелась к задаче термомеханики для панели из пассивного материала с мнимой плотностью  $\bar{\rho}$ . Аналогичные формулы можно получить и для шарнирного опирания торцов оболочки. При этом пробное выражение для поперечного прогиба имеет вид:

$$\bar{w}_{mn}(\alpha, \beta) = \sin(k_m \alpha) \sin(p_n \beta), \quad k_m = \frac{m\pi}{a},$$

$$p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (m, n = 1, 3, \dots). \quad (19)$$

Для этого типа граничных условий при  $m = n = 1$  поверхности активных слоев покрываются полностью.

**Метод решения.** Для решения нелинейных задач о колебаниях и диссипативном разогреве тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами можно использовать представленные в [8–10,11] численно-аналитические методы решения таких задач для элементов из пассивных материалов с заменой действительной плотности на комплексную. При этом нелинейность задачи может быть обусловлена зависимостью комплексных характеристик как от температуры, так и от амплитуд деформаций. Нелинейные задачи при помощи итерационных методов сводятся к решению линейных механических задач вязкоупругости с мнимой плотностью и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. Линейная задача механики сводится к вариационной задаче для комплексного функционала  $\mathcal{E}_M$ , представленного, например, в [11] для оболочек вращения. Линейная задача теплопроводности также сводится к вариационной для функционала  $\mathcal{E}_T$ , выписанного в [11]. Решение вариационной задачи механики находится методом конечных элементов [11] с использованием двенадцатиузловых изопараметрических четырехузловых элементов с аппроксимацией перемещений и геометрии оболочки полиномами третьей степени в пределах четырехугольника. При этом прогиб оболочки в пределах элемента аппроксимируется бикубическими полиномами Эрмита:

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i, \quad (20)$$

где  $w_i$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_i$ ,  $\left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i$ ,  $\left( \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i$  – амплитудные значения прогиба и его производных в узловых точках,  $L_i$  – полиномы Эрмита [11].

Тангенциальные составляющие перемещений срединной поверхности оболочки  $u$ ,  $v$  в пределах элемента аппроксимируются кубическими полиномами  $N_i$  [11]:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_0^i, \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_0^i. \quad (21)$$

Подробности представлены в [11].

**Пример расчета динамических характеристик колебаний прямоугольной в плане цилиндрической панели.** Рассмотрим задачу о колебаниях и диссипативном разогреве пологой цилиндрической панели из нелинейного вязкоупругого материала. Нелинейность порождается зависимостью механических характеристик пассивного материала от температуры и зависимостью диссипативной функции от деформаций и температуры. Трехслойная цилиндрическая панель постоянной толщины  $H = 2h_1 + h_0$  с вязкоупругим средним слоем толщиной  $h_0$  и двумя одинаковыми внешними пьезослоями с противоположной поляризацией и толщиной  $h_1$  находится под действием равномерно распределенного механического давления  $p = p_0 \cos \omega t$ . Предполагаются условия конвективного теплообмена с внешней средой с температурой  $T_c$ .

Внешние слои изготовлены из упругого пьезоэлектрического материала ЦТС<sub>T</sub> BC-2, теплофизические и механические характеристики которого приведены в [11]. Считаем, что они не зависят от температуры. Зависимость комплексного модуля сдвига изотропного пассивного материала  $G = G' + iG''$  рассчитывается по формулам

$$G' = [968 - 8,69(T - T_0)]A_0, \quad G'' = [87,1 - 0,7(T - T_0)]A_0, \quad (22)$$

в которых  $A_0 = 10^6 \text{ Па}$ . Коэффициент Пуассона считается постоянным и равным  $\nu = 0,36$ . Для температуры плавления принимается значение  $T_m = 140^\circ \text{C}$ . Геометрия оболочки, условия нагружения и теплообмена характеризуются такими значениями параметров:  $H = 0,01 \text{ м}$ ,  $2h_1 = 0,0002 \text{ м}$ ,  $h_0 = 0,0098 \text{ м}$ ,  $\alpha_T = 20 \text{ Вм/м}^2 \text{ гр}$ ;  $\lambda_T = 0,47 \text{ Вм/м}^2 \text{ гр}$ ,  $T_c = T_0 = 20^\circ \text{C}$ ,  $|w| P_0 = 10^4 \text{ Па}$ ,  $\rho = 0,929 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $R = 0,1 \text{ м}$ ,  $L = 0,1 \text{ м}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/3$ .

На рис. 1, 2 представлены амплитудно-частотные (АЧХ) и температурно-частотные характеристики (ТЧХ) колебаний панели в окрестности первого резонанса для разных значений коэффициентов обратной связи  $G_s$  для случая независящих от температуры свойств пассивного материала. Верхняя, средняя и нижняя кривые отвечают значениям  $G_s = 0$ ,  $G_s = 0,2 \cdot 10^{-5}$ ,  $G_s = 0,5 \cdot 10^{-5}$  соответственно.

Как видно из этих рисунков, за счет выбора коэффициента обратной связи можно существенно повлиять на амплитуду колебаний и темпера-

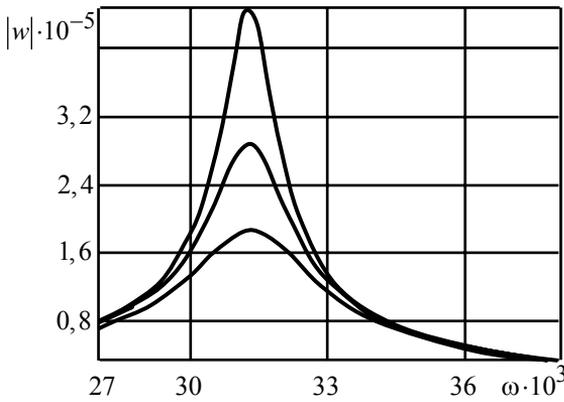


Рис. 1

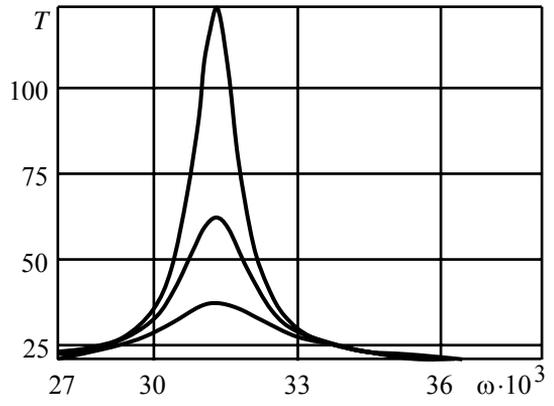


Рис. 2

туру диссипативного разогрева.

Рис. 3, 4 иллюстрируют влияние нелинейности указанного выше типа на амплитудно- и температурно-частотные характеристики, а также влияние на них коэффициента обратной связи. На этих рисунках исполь-

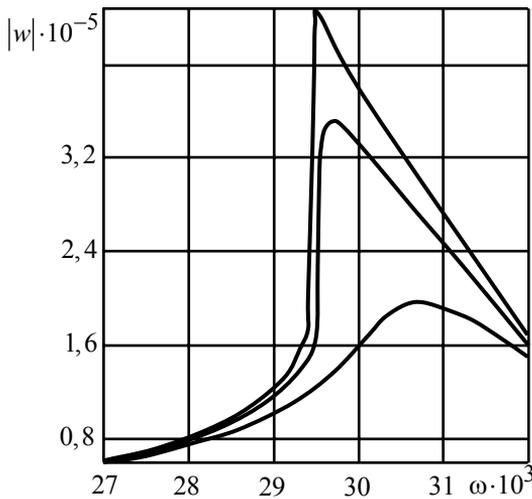


Рис. 3

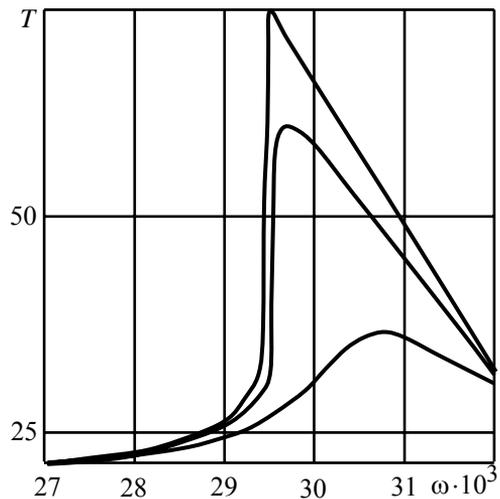


Рис. 4

зованы те же обозначения, что и на рис. 1, 2. Как видно, появляются характерные для физической нелинейности мягкого типа резкие изменения в АЧХ и ТЧХ с частотой.

Таким образом, выбором коэффициента обратной связи можно существенно повлиять на динамические характеристики оболочки.

В работе [13] эта же задача решалась без использования представленной выше аналогии. Сравнение числовых результатов показывает их полное качественное и количественное согласование.

Для расчета динамических характеристик пластин можно использовать указанные выше программы путем выбора достаточно большого радиуса панели.

Для определения критического давления необходимо по представленной выше методике провести расчеты для разных значений давления

и найти то его значение, при котором максимальная температура в некоторой точке элемента достигает точек деградации материала [14]. Под точкой деградации понимается температура плавления пассивного материала или точка Кюри пьезоматериала. При превышении давлением критического значения имеет место специфический тип теплового разрушения, когда элемент не разделяется на части, но перестает выполнять свое функциональное назначение. Например, при достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри пьезоматериал деполяризуется и пьезоактивные включения теряют пьезоэффект. В результате пьезоактивные включения (сенсоры и актуаторы) становятся пассивными и управлять колебаниями тонкостенного элемента становится невозможно.

Указанная выше аналогия имеет место и для тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами с учетом нелинейности, порождаемой зависимостью механических характеристик от амплитуд деформаций. При расчете динамических характеристик пластин и оболочек из таких материалов можно использовать разработанные ранее программы [4–6, 13] для исследования резонансных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов из пассивных физически нелинейных материалов.

**РЕЗЮМЕ.** Установлена аналогія між задачами термомеханіки й термоелектромеханіки при дослідженні активного демпфування вимушених резонансних коливань непружних пластин та оболонок за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Вважається, що механічні характеристики пасивних матеріалів залежать від температури. Розв'язок нелінійних задач знайдено ітераційним методом та методом скінченних елементів. Досліджено вплив нелінійностей і коефіцієнта оберненого зв'язку на амплітудно-і температурно-частотні характеристики циліндричної панелі з жорстко зацмеленими торцями.

**Ключові слова:** активне демпфування, сенсори й актуатори, розігрів, динамічні характеристики коливань.

**SUMMARY.** Analogy between of the problems of thermomechanics and thermoelectromechanics to investigate active damping of forced resonant vibrations of nonelastic plates and shells by piezoelectric sensors and actuators is established. It is supposed that the mechanical characteristics of passive material are depend on the temperature. Solution of a nonlinear problem are obtained by an iterative method and finite element method. An influence of the dissipative heating on amplitude- and temperature-frequency characteristics of cylindrical panel with built-in edges is investigated.

**Key words:** active damping, sensors and actuators, heating, dynamic characteristics of vibrations.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами // Прикладная механика.– 2010.– Т. 46, № 1.– С. 94–104.
3. Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В. Резонансные колебания жестко защемленной прямоугольной термовязкоупругой пластины с сенсорами и актуаторами // Прикладная механика. – 2010.– Т. 46, № 3.– С. 61–69.
4. Карнаухов В.Г., Карпенюк А.С. Потеря функциональной способности вязкоупругой прямоугольной пластины с шарнирным опиранием торцов из-за температуры диссипативного разогрева // Теорет. и прикладная механика.– 2012.– № 4(50).– С. 137– 144.
5. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. – Т.4. – К.: Наук. думка, 1988. – 320 с.

6. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
7. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел.– Житомир, 2005.– 428 с.
8. Карнаухов В.Г., Сичко В.М., Карпенюк А.С. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойных неупругих прямоугольных пластин // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43.– С. 102– 110.
9. Карнаухов В.Г., Сичко В.М., Карпенюк А.С. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев неупругих прямоугольных пластин // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. –Т. 51, № 1.– С. 101–121.
10. Карнаухов В. Г., Сичко В. М., Карпенюк О. С. Вплив температури дисипативного розігріву на пасивне демпфування вимушених резонансних коливань ізотропної в'язкопружної циліндричної панелі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 1.– С. 51–54.
11. Козлов В. І., Карнаухова Т. В., Пересунько М. В. Чисельне моделювання активного демпфування вимушених термомеханічних резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних включень // Мат. методи и физ.-мех. поля. – 2009.– Т.52,№ 3.– С. 117–126.
12. Gabbert U., Tzou H. S. Smart Structures and Structronic Systems. – Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/ London. – 2001.– 384p.
13. Gopinathan S., Varadan V. V., Varadan V. K. A review and critique of theories for piezoelectric laminates // Smart Mater.Struct.– 2000.– Vol. 9.– P. 24–48.
14. Li Z., Crocker M. J. A Review on Vibration Damping in Sandwich Composite Structures// Int. J. of Acoust. and Vibr.– 2005.– Vol.10, № 4.– P. 159 –169.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Национальный технический университет Украины “КПИ”, г. Киев*

*Николаевский национальный университет*

*Поступила 01.09.2013 г.*

УДК 539.3

*Х. И. СЕРЕДНИЦКАЯ,  
Р. М. МАРТЫНЯК, д-р физ.-мат. наук,  
Б. С. СЛОБОДЯН, канд. физ.-мат. наук.*

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМОЙ ЩЕЛЬЮ ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТЫ

*Решена плоская задача термоупругости для тела с удлиненной щелью переменной высоты, содержащей теплопроницаемый наполнитель. Учтено изменение термического сопротивления наполнителя с изменением формы щели, обусловленным деформированием материала. Исследовано термомеханическое поведение тела с такой трещиной для двух видов механической нагрузки: растягивающей, при которой щель полностью раскрывается, и сжимающей, при которой возникает частичный контакт берегов щели.*

*Ключевые слова:* щель переменной высоты, теплопроницаемый наполнитель, растяжение, сжатие, частичное закрытие щели.

Задачи термоупругости для тел с раскрытыми теплопроницаемыми трещинами рассмотрены в работах [3, 5, 8]. Изучено [1, 2, 4, 6, 7] термонапряженное состояние однородных и кусочно-однородных тел с внутренними и межфазными трещинами, берега которых вступают в контакт под действием термических нагрузок. В настоящей статье проанализировано термоупругое состояние однородного тела с заполненной теплопроницаемой средой щелью переменной высоты для двух видов силовой нагрузки: растягивающей, при которой трещина полностью раскрыта, и сжимающей, при которой берега трещины контактируют на участках, примыкающих к ее вершинам.

**Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечное тело (плоскость) с вытянутой щелью (трещиной) длины  $2a$  переменной высоты, форма которой описывается функцией  $h_0(x) = H_0[1 - (x/a)^2]^{3/2}$ ,  $H_0 \ll a$ . Берега щели плавно смыкаются на её концах ( $h'_0(\pm a) = 0$ ). Полость дефекта заполнена теплопроводной средой (жидкостью или газом) с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_c$ . Механическим влиянием наполнителя пренебрегаем. На бесконечности тело подвержено перпендикулярным трещине однородному тепловому потоку  $q_y = q$  и нормальным напряжениям  $\sigma_y = p$ , под действием которых в нем реализуется двумерное стационарное температурное поле и состояние плоской деформации. Влияние теплопроводного наполнителя щели на теплообмен между ее берегами [3, 5] будем учитывать термическим сопротивлением  $r(x)$ , пропорциональным высоте щели  $h(x)$ , которую она принимает после приложения к телу нагрузки, и обратно пропорциональным коэффициенту теплопроводности наполнителя ( $r(x) = h(x)/\lambda_c$ ).

Будем изучать термонапряженное состояние тела, возникающее как

при растягивающей ( $p > 0$ ), так и при сжимающей ( $p < 0$ ) силовой нагрузке. В случае растягивающей нагрузки ( $p > 0$ ) щель полностью раскрывается (рис. 1). При сжимающей нагрузке ( $p < 0$ ) берега щели в окрестности ее концов вступают в контакт (рис. 2) на некоторых участках  $[-a, -b]$  и  $[b, a]$ , длина которых заранее неизвестна и зависит от нагрузки. Поэтому для каждого из этих случаев должна ставиться и решаться

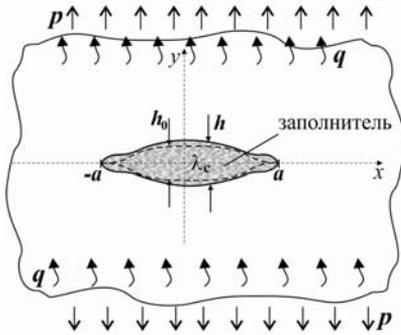


Рис. 1

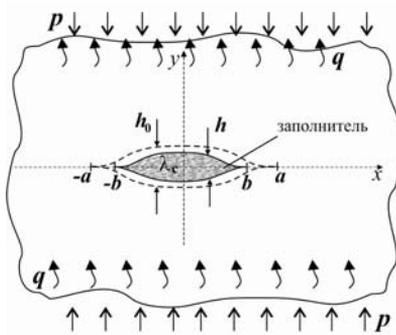


Рис. 2

отдельная задача.

**Полностью раскрытая трещина.** При действии растягивающей нагрузки ( $p > 0$ ) (рис. 1) термические и механические граничные условия на берегах полностью раскрытой трещины имеют вид

$$q_y^+ = q_y^-, \quad T^- - T^+ = q_y^- \left[ \frac{h(x)}{\lambda_c} \right]; \quad (1)$$

$$\sigma_y^- = 0, \quad \sigma_y^+ = 0, \quad \tau_{xy}^+ = 0,$$

$$\tau_{xy}^- = 0; \quad y = 0, \quad |x| < a. \quad (2)$$

Здесь  $T$  - температура;  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  - компоненты тензора напряжений;  $q_y$  - компонента вектора теплового потока; верхние индексы «-» и «+» у функций обозначают их предельные значения на нижнем и верхнем берегах трещины соответственно.

Температура, напряжения и перемещения в теле представляются через высоту щели  $h(x)$  и скачек температуры  $\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0)$  между ее берегами [2, 3, 7]. Высота щели при действии на тело растягивающей нагрузки определяется аналитически

$$h(x) = \frac{2pa(1-\nu)}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + H_0 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{3/2}, \quad |x| < a,$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $G$  - модуль сдвига материала тела.

Для определения скачка температуры получено сингулярное интег-

ро-дифференциальное уравнение типа Прандтля

$$\lambda_c \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a, \quad \gamma(\pm a) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности материала тела.

Уравнение (3) решается численно. Выразив напряжения в окрестности щели через функции  $\gamma(x)$  и  $h(x)$  [2, 7], определим коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_y(x, 0) \right\},$$

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{xy}(x, 0) \right\}.$$

**Частично закрытая щель.** Предполагаем, что на участках налегания берегов щели, возникающих в окрестности ее вершин при действии сжимающей нагрузки ( $p < 0$ ) (рис. 2), осуществляется идеальный тепловой и бесфрикционный механический контакт берегов.

Гранично-контактные условия в этом случае имеют вид:

на участках контакта берегов трещины ( $y = 0, b \leq |x| < a$ ):

$$T^+ = T^-, \quad q_y^+ = q_y^-, \quad \sigma_y^+ = \sigma_y^-,$$

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad u_y^- - u_y^+ = h_0(x); \quad (4)$$

на раскрытом участке трещины ( $y = 0, |x| < b$ ):

$$q_y^+ = q_y^-, \quad T^- - T^+ = q_y^+ \frac{h(x)}{\lambda_c},$$

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \sigma_y^+ = 0, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad \tau_{xy}^- = 0; \quad (5)$$

Здесь  $u_y$  - компонента вектора перемещений.

Для определения высоты щели  $h(x)$  и скачка температуры  $\gamma(x)$  получена система сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{h'(t)}{t-x} dt = \frac{2(1-\nu)p}{G} + \frac{3H_0}{2a} \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \right), \quad |x| < b, \quad h(\pm b) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\lambda_c \gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < b, \quad \gamma(\pm b) = 0. \quad (7)$$

Вследствие плавного смыкания берегов щели в точках  $x = \pm b$  производные функций  $\gamma(x)$  и  $h(x)$  должны удовлетворять условиям [9]

$$h'(\pm b) = 0, \quad (8)$$

$$\gamma'(\pm b) = 0. \quad (9)$$

Решая аналитически уравнение (6) с учетом условия (8), определяем

высоту и длину щели

$$h(x) = \frac{H_0}{a^3} (b^2 - x^2)^{3/2}, \quad |x| < b. \quad (10)$$

$$b = a \sqrt{1 - \frac{4pa(1-\nu)}{3H_0G}}. \quad (11)$$

Полагая в (11)  $b = 0$ , находим внешнее сжимающее напряжение  $p = 3H_0 G / (4a(1-\nu))$ , приводящее к полному смыканию берегов щели.

Подставляем найденную функцию  $h(x)$  (10) в уравнение (7) и определяем его решение, удовлетворяющее условию (9), используя разработанную в [9] аналитико-численную методику.

**Анализ численных результатов.** Для численных расчетов введены безразмерные величины: высота щели  $\bar{h} = h/a$ , полудлина щели  $\bar{b} = b/a$ , приложенные к телу нормальные напряжения  $\bar{p} = 4(1-\nu)p/G$ , скачек температуры  $\bar{\gamma} = \gamma\lambda/(qa)$ , коэффициент теплопроводности заполнителя щели  $\bar{\lambda}_c = \lambda_c/\lambda$ , коэффициенты интенсивности напряжений

$$\bar{K}_I = 4(1-\nu)K_I/(G\sqrt{a}), \quad \bar{K}_{II} = \frac{2\lambda(1-\nu)}{\alpha(1+\nu)Ga\sqrt{aq}}K_{II}, \quad \text{координата } \bar{x} = x/a.$$

При расчетах принималось, что максимальная высота начальной щели равна одной тысячной ее полудлины ( $H_0 = 0,001a$ ).

На рис. 3 показана зависимость полудлины щели  $\bar{b}$  от сжимающей нагрузки  $\bar{p}$ . Крайняя правая точка графика соответствует нагрузке  $\bar{p} = -0,003$ , при которой щель полностью закрывается ( $\bar{b} = 0$ ). Рис. 4 иллюстрирует форму щели  $\bar{h}(\bar{x})$  для разных значений сжимающей ( $\bar{p} < 0$ ) и

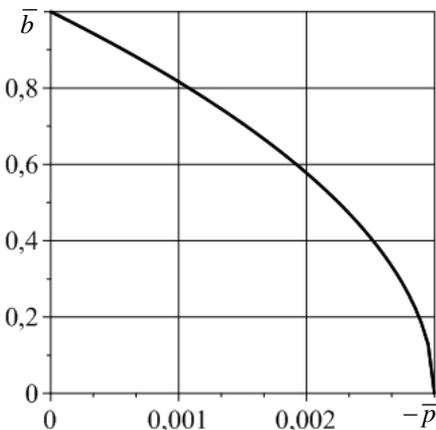


Рис. 3

растягивающей ( $\bar{p} > 0$ ) механической нагрузки. Штриховая кривая соответствует начальной щели  $\bar{h}_0(\bar{x})$ . Увеличение сжимающей нагрузки приводит к одновременному уменьшению высоты и длины щели, тогда как увеличение растягивающей нагрузки обуславливает лишь увеличение высоты щели. Для каждого из этих случаев свойственна различная форма конечного участка щели – при сжимающей нагрузке берега щели плавно смыкаются, при растягивающей нагрузке щель имеет эллипсообразную вершину.

Зависимость максимального раскрытия щели  $\bar{h}_{\max}$ , которое достигается в ее центре ( $\bar{h}_{\max} = \bar{h}(0)$ ), от внешней силовой нагрузки показана на рис. 5. Эта зависимость является линейной для растягивающих усилий ( $\bar{p} > 0$ ) и нелинейной для сжимающих усилий из диапазона  $-0,003 < \bar{p} < 0$ , при которых берега щели контактируют частично. Горизонтальный участок графика соответствует полностью закрытой щели при  $\bar{p} < -0,003$ .

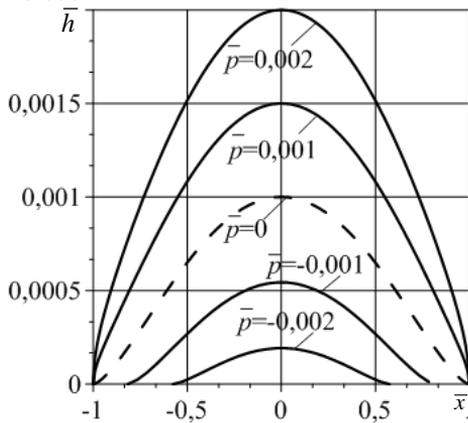


Рис. 4

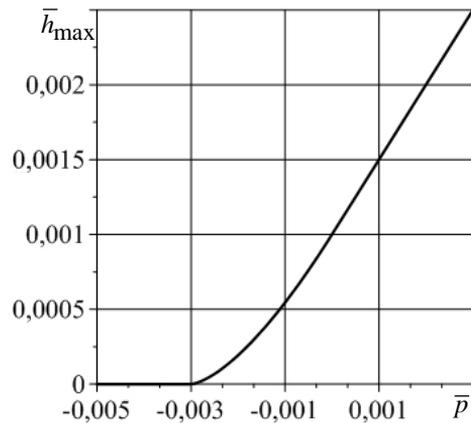


Рис. 5

На рис. 6 показано распределение скачка температуры  $\bar{\gamma}(\bar{x})$  между берегами щели для разных значений растягивающих и сжимающих нагрузок и фиксированного значения коэффициента теплопроводности за-

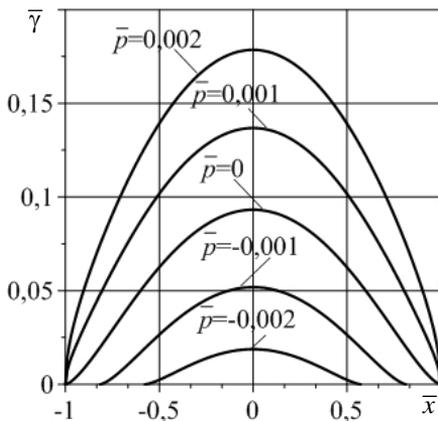


Рис. 6

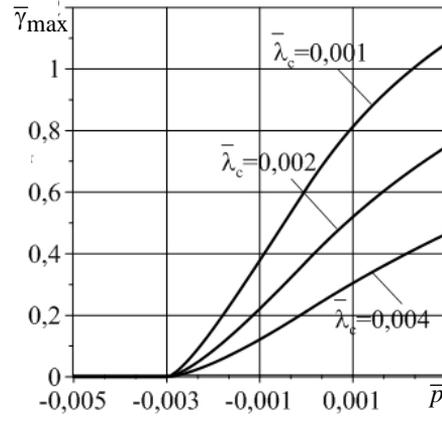


Рис. 7

полнителя щели  $\bar{\lambda}_c = 0,01$ . Сравнение кривых на рис. 6 и на рис. 4 свидетельствует о качественном соответствии зависимостей формы щели и скачка температуры на ней от силовой нагрузки.

Теплопроводность заполнителя существенно влияет на распределение температуры на поверхностях щели. Зависимость максимального

значения скачка температуры  $\bar{\gamma}_{\max}$ , которое достигается в центре трещины, от внешней нагрузки для различных коэффициентов теплопроводности заполняющей ее среды изображена на рис. 7. Анализ представленных на нем кривых показывает, что с уменьшением теплопроводности среды в щели скачек температуры увеличивается.

Зависимости коэффициентов интенсивности напряжений (КИН)  $\bar{K}_I$  и  $\bar{K}_{II}$  от приложенных к телу на бесконечности нормальных напряжений  $\bar{\sigma}_y = \bar{p}$  представлены на рис. 8 и рис. 9 соответственно. При действии сжимающих напряжений ( $\bar{p} < 0$ ) КИН  $\bar{K}_I$  равен нулю (горизонтальный участок графика на рис. 8), при действии растягивающей нагрузки ( $\bar{p} > 0$ ) КИН  $\bar{K}_I$  линейно зависит от  $\bar{p}$  (наклонный участок графика на рис. 8).

Увеличение действующих на тело нормальных напряжений  $\bar{p}$  приводит к увеличению КИН  $\bar{K}_{II}$  как для сжимающей так и для растягивающей нагрузки (рис. 9). КИН  $\bar{K}_{II}$  нелинейно зависит от  $\bar{p}$ . Кривые этой зависимости имеют характерный излом при  $\bar{p} = 0$ , свидетельствующий об увеличении скорости роста  $\bar{K}_{II}$  с ростом  $\bar{p}$  при переходе от сжи-

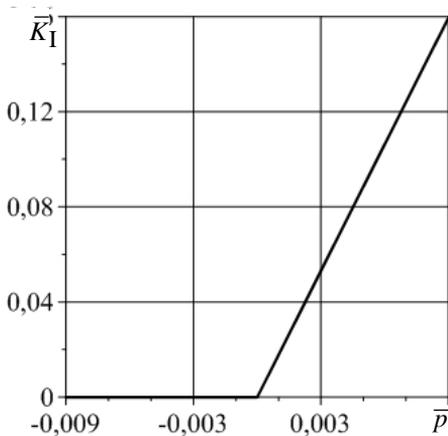


Рис. 8

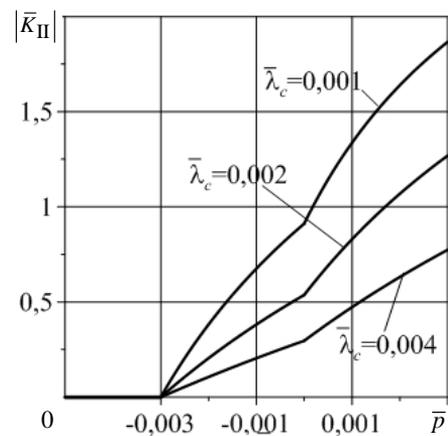


Рис. 9

мающей ( $\bar{p} < 0$ ) к растягивающей ( $\bar{p} > 0$ ) нагрузке. В случае полного закрытия щели КИН  $\bar{K}_{II}$  становится равным нулю (горизонтальный участок графиков на рис. 9). Теплопроводность заполнителя существенно влияет на КИН  $\bar{K}_{II}$ , тогда как КИН  $\bar{K}_I$  не зависит от нее. Уменьшение коэффициента теплопроводности заполнителя щели  $\bar{\lambda}_c$  приводит к увеличению  $\bar{K}_{II}$  (рис. 9) – например, при отсутствии силовой нагрузки ( $\bar{p} = 0$ ) уменьшение  $\bar{\lambda}_c$  в 2 раза (от  $\bar{\lambda}_c = 0,004$  до  $\bar{\lambda}_c = 0,002$ ) вызывает возрастание КИН  $\bar{K}_{II}$  в 1,81 раза.

*Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект Ф 53.1/026).*

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано плоску задачу термопружності для тіла з видовженою тріщиною змінної висоти, яка містить теплопроникний заповнювач. Враховано зміну термічного опору заповнювача зі зміною форми щілини, зумовленою деформуванням матеріалу. Досліджено термомеханічну поведінку тіла з такою тріщиною для двох видів механічного навантаження: розтягувального, за якого щілина повністю розкривається, та стискального, за якого виникає частковий контакт берегів щілини.

**Ключові слова:** щілина змінної висоти, теплопроникний заповнювач, розтяг, стиск, часткове закриття щілини.

**SUMMARY.** The plane thermoelastic problem for a body with a crack having variable height and filled with a heat-permeable medium is solved. The change in thermal resistance of the filler caused by the change of crack shape, which is induced by deformation of the material, is taken into account. Thermomechanical behavior of the body with such a crack is investigated for two types of mechanical loading: tensile loading, under which the crack completely opens, and compression loading, under which the partial contact of the crack faces occurs.

**Key words:** variable height crack, heat-permeable filler, tension, compression, crack partial closure.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Балуева А. В., Гольдштейн Р. В., Матчинский М.* Пространственная задача о закрытии трещины вблизи тепловых источников // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996.- №4.- С. 85–92.
2. *Гольдштейн Р. В., Кит Г. С., Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Эффект частичного закрытия міжфазної тріщини з теплопровідним заповнювачем і поверхневими плівками при дії на біматеріал термічного навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012.- Т. 55, № 4. – С.64-73.
3. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук.думка, 1983.– 278 с.
4. *Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Нагалка С. П., Гончар Х. И.* Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке // Теорет. и прикладная механика. 2002.– № 36.– С.83–90.
5. *Кит Г. С., Мартиняк Р. М.* Термопружність структур з теплопровідними тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2003.– Т. 46, №1.– С. 11–20.
6. *Мартиняк Р. М.* Термонапружений стан біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2010.– Т. 53, № 1.– С.71–79.
7. *Мартыняк Р. М., Середницкая Х. И.* Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной // Теорет. и прикладная механика. – 2012.– № 4 (50).– С. 91–98.
8. *Подстригач Я. С., Кит Г. С.* Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин // Тепловые напряжения в элементах конструкций. –1967.– № 7.– С. 194–201.
9. *Martynyak R.M., Chumak K.A.* Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2012.– № 55.– P. 1170–1178.

*Институт прикладных проблем механики  
и математики НАН Украины, Львов*

*Поступила 05.09.2013*

## Вниманию авторов статей

1. В журнале публикуются статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области двумерной и трехмерной механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, механики разрушения, а также гидромеханики.

2. При подготовке статьи необходимо соблюдать структуру изложения: в начале приводится УДК, авторы (с указанием научной степени) и название статьи, затем аннотация и ключевые слова, потом введение (история вопроса и место данной работы), постановка задачи (физическая, математическая), метод и построение решения (без анализа результатов других работ), анализ полученных теоретических и числовых результатов с выводами. В конце статьи приводится список литературы, а также на украинском и английском языках – резюме и ключевые слова (переводы аннотации в начале статьи). Статья должна быть научно и литературно обработана. Особое внимание нужно уделять правильному использованию общепринятой терминологии. Авторам нужно учитывать правильное использование понятий «величина» и «значение» и не допускать стилистических и терминологических погрешностей. Все числовые значения используемых величин должны приводиться в системе СИ. В десятичных дробях целая часть должна отделяться от дробной запятой (а не точкой).

3. Текст статьи в редакторе Word набирается шрифтом UkrainianSchoolBook (размером 11), аннотация, ключевые слова, резюме и список литературы, табличный материал – тем же шрифтом размером 9. Формулы набираются с использованием Microsoft Equation или MathType шрифтом UkrainianSchoolBook и Symbol: Full – 11 pt, subscript /superscript – 70 %, sub-subscript/ superscript – 60 %, symbol – 150 %, sub-symbol – 100 %; текст и переменные – курсивом. Указанным способом набираются также все буквы латинского и греческого алфавитов, встречающиеся в тексте. Межстрочный интервал – одинарный. Каждая формула отделяется от основного текста интервалом в 5 пунктов. Параметры страницы: формат – В5 (176×250 мм), поля зеркальные; сверху – 1,7 см, снизу – 2,2 см, внутри – 1,8 см, снаружи – 1,5 см, абзацный отступ 1 см

4. Группы формул отделяются друг от друга знаком точки с запятой, внутри группы формулы отделяются друг от друга знаком запятой. Каждая строка формул набирается отдельным объектом Microsoft Equation. Во всех случаях после знаков препинания ставится один (в объектах Microsoft Equation – два) пробел. Если в строке за формулой в скобках приведены расшифровки величин, то перед скобкой знак запятой или точки с запятой не ставится, но ставятся один пробел. В тех случаях, когда скобки или знаки арифметических действий внутри формул сливаются с соседними символами, нужно ставить пробелы внутри объекта Microsoft Equation. Номер формулы или группы формул ставится в конце последней строки формул. Если подряд приводятся несколько групп формул, то они отделяются друг от друга знаком точки с запятой.

5. Рисунки изготавливаются с использованием графического редактора и представляются в электронном виде в двух экземплярах: «немой» (в формате jpg, bmp и т. д., без подписей), для редактирования при необходимости, и с обозначениями. Сканированные рисунки не принимаются. На рисунки наносятся негустые равномерные сетки, основные линии выполняются толще, чем линии сетки и осей координат; буквенные обозначения набираются размером 9.

6. К статье прилагаются на отдельном листе данные об авторе (авторах) – фамилия, имя, отчество, адрес, телефон, а также на украинском и английском языках фамилии и инициалы авторов и название статьи.