
СОДЕРЖАНИЕ

<i>Кит Г. С., Черняк М. С.</i> Напряженное состояние составных цилиндра и шара при тепловыделении в центральной области	7
<i>Бабич Д. В.</i> Статистический критерий разрушения для хрупких материалов при статическом и повторяющихся нагружениях	16
<i>Кириллюк В. С., Левчук О. И.</i> Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения.....	28
<i>Алтухов Е. В., Фоменко М. В.</i> Колебания трехслойных пластин с жесткой заделкой торцов и при проскальзывании слоев	38
<i>Богданов В. Р.</i> Пространственная деформация упруго-пластического материала с профилем формы компактного образца	51
<i>Скородинский И. С., Максимук А. В.</i> Обобщенная двухпараметрическая модель термовязкоупругого промежуточного слоя или покрытия	59
<i>Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А., Полищук Т. В.</i> О развитии начальных пластических полос от негладкой границы раздела изотропных сред	70
<i>Кобзарь Ю. М.</i> Модель хрупкого разрушения стержней в условиях длительной прочности	76
<i>Семенюк Н. П., Жукова Н. Б., Иванова Н. И.</i> Об учете больших прогибов при исследовании устойчивости и критического поведения длинных гофрированных цилиндрических оболочек	83
<i>Подчасов Н. П., Янчевский И. В.</i> Управление нестационарными колебаниями полупассивной цилиндрической оболочки при секционированном электродировании пьезослоя	93

<i>Шульга М. О.</i> К анализу дисперсионных соотношений для упругоэлектрических волн в периодически-неоднородных средах	102
<i>Бойчук Е. В., Оксенчук Н. Д., Червинко О. П.</i> Эффект термомеханической связанности при импульсном нагружении вязкопластического полупространства	111
<i>Калоеров С. А., Добряк Д. А., Добряк О. А.</i> Решение задач термоупругости для кусочно-однородных пластин	118

З М І С Т

<i>Кім Г. С., Черняк М. С.</i> Напружений стан складених циліндра і кулі при тепловиділенні в центральній області	7
<i>Бабич Д. В.</i> Статистичний критерій руйнування для крихких матеріалів при статичному і повторюваних навантаженнях.....	16
<i>Кирилюк В. С., Левчук О. І.</i> Тривимірна контактна задача для двох п'єзокерамічних тіл з врахуванням тепловиділення	28
<i>Алтухов Є. В., Фоменко М. В.</i> Коливання тришарових пластин із жорстким закріпленням торців і при проковзуванні шарів ..	38
<i>Богданов В. Р.</i> О просторовій деформації пружнопластичного матеріалу з профілем форми компактного зразка	51
<i>Скородинський І. С., Максимук О. В.</i> Узагальнена двопараметрична модель термов'язкопружного проміжкового шару або покриття	59
<i>Камінський А. О., Кіпніс Л. А., Хазін Г. А., Поліщук Т. В.</i> Про розвиток початкових пластичних смуг від негладкої межі поділу ізотропних середовищ	70
<i>Кобзар Ю. М.</i> Модель крихкого руйнування стержнів за умов довготривалої міцності	76
<i>Семенюк М. П., Жукова Н. Б., Іванова Н. І.</i> Про врахування великих прогинів при дослідженні стійкості та закритичної поведінки довгих гофрованих циліндричних оболонок	83
<i>Подчасов М. П., Янчевський І. В.</i> Керування нестационарними коливаннями напівпасивної циліндричної оболонки при секціонованому електродуванні п'єзосферу.....	93
<i>Шульга М. О.</i> До аналізу дисперсійних співвідношень для пружноелектричних хвиль в періодично-неоднорідних середовищах	102

<i>Бойчук Є. В., Оксенчук Н. Д., Червінко О. П.</i> Ефект термо- механічної зв'язаності при імпульсному навантаженні в'язкопла- стичного півпростору	111
<i>Калоєров С. О., Добряк Д. О., Добряк О. А.</i> Розв'язання задач термопружності для кусково-однорідних пластин	118

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

Scientific journal
№ 3 (49)

Founded in 1970
Donetsk 2011

C O N T E N T S

<i>Kit H. S., Chernyak M. S.</i> Stressed state of composite cylinder and sphere at heat release in central region	7
<i>Babich D. V.</i> Statistical fracture criterion for brittle materials under static and repeated loadings.....	16
<i>Kirilyuk V. S., Levchuk O. I.</i> Three-dimensional contact problem for the two piezoelectric bodies taking into account of heat generation	28
<i>Altukhov E. V., Fomenko M. V.</i> Vibrations of three-layer plates with rigidly clamped ends and layers slip	
<i>Bogdanov V. R.</i> About tree dimension deformation of an elastic-plastic material with the profile of compact shape	
<i>Skorodynskiy I. S., Maksymuk O. V.</i> Generalized two-parameter model of thermoviscoelastic interphase layer or coating	59
<i>Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Khazin G. A., Polischuk T. V.</i> On development of initial plastic strips from non-smooth interface of isotropic media.....	70
<i>Kobzar' Yu. M.</i> The model of brittle fracture of rods under long-term strength.....	76
<i>Semenyuk N. P., Zhukova N. B., Ivanova N. I.</i> On the account for large deflections at analysis of stability and postbuckling behavior of the long corrugated cylindrical shells	83
<i>Podchasov N. P., Yanchevskiy I. V.</i> Non-stationary vibrations control for semipassive cylindrical shell with partially electroded piezolayer	93
<i>Shul'ga M. O.</i> On analysis of dispersion relations for elastoelectrical waves in periodically inhomogeneous media	102

<i>Boychuk O. V., Oksenchuk N. D., Chervinko O. P.</i> An Effect of thermo mechanical coupling under pulse loading of half-space..	111
<i>Kaloerov S. A., Dobryak D. A., Dobryak O. A.</i> Thermoelasticity problem solution for piecewise-homogeneous plate	118

УДК 539.3

Г. С. КИТ, д-р физ.-мат. наук, М. С. ЧЕРНЯК

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРА И ШАРА
ПРИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Решены одномерные задачи стационарной теплопроводности и термоупругости для двухкомпонентных цилиндра и шара при тепловыделении в центральной области и при их нагреве до постоянной температуры. Приведены результаты исследования напряжений при различных отношениях коэффициентов линейного теплового расширения, модулей сдвига и радиусов области тепловыделения и внешней области.

Ключевые слова: составной цилиндр, составной шар, тепловыделение, теплопроводность, термоупругость.

Для практики важное значение имеет исследование термоупругого состояния тепловыделяющих элементов (ТВЭЛОВ). Они являются неотъемлемыми элементами конструкций ядерных энергетических установок различного функционального назначения. Среди них наибольшее распространение получили ТВЭЛЫ цилиндрической формы [3, 5]. Однако для отдельных энергетических установок применяют ТВЭЛЫ сферической формы [1, 6]. Распределение напряжений в композите с тепловыделяющими включениями, его прочность и характер разрушения зависят от многих факторов, в том числе от механических и теплофизических характеристик материалов включений и связующего, а также от интенсивности тепловыделения включений. При расчетах термоупругого состояния ТВЭЛОВ различной конфигурации используют численные методы [1]. Однако для более ясного понимания физики тепловых процессов важное значение имеют аналитические методы расчета. Они позволяют на простых моделях проследить поведение той или иной конструкции ТВЭЛА при тепловом нагружении и выявить возможные параметры управления тепловым процессом. Ценность таких модельных расчетов заключается еще и в том, что из полученных зависимостей просто получить оценки предельных возможностей материала, конструкции, процесса.

Неоднородное температурное поле в ТВЭЛЕ обуславливает появление термонапряжений, так как горячие участки стремятся расширится, а холодные не допускают этого. Поэтому горячие участки материала ТВЭЛА находятся в состоянии сжатия, а холодные – растяжения. Например, в ТВЭЛЕ цилиндрической формы температура от центра к поверхности убывает, поэтому приповерхностные области растянуты. Если на поверхности ТВЭЛА имеются макроскопические дефекты, то они концентрируют растягивающие термонапряжения, что может привести к появлению трещин.

В данной работе исследуется термоупругое состояние составного цилиндра и шара, в центральной области которых происходит тепловыделение с постоянной удельной мощностью.

Постановка задачи. Рассмотрим составные цилиндр или шар радиуса R_2 , из внутренней области которых радиуса R_1 осуществляется тепло-

выделение с постоянной удельной мощностью q . Ихняя поверхность не нагружена и поддерживается при постоянной температуре t_0 . Механические и теплофизические характеристики тел разные (обозначим их индексами 1 и 2 для внутренней и внешней части). На границе соединения имеют место условия идеального теплового и механического контактов.

Решение задачи теплопроводности. Определение стационарного температурного поля рассматриваемых тел сводится к решению уравнений теплопроводности

$$\Delta T_1 = -\frac{q}{\lambda_1}, \quad \Delta T_2 = 0, \quad (1)$$

где λ_1 – коэффициент теплопроводности области тепловыделения, при граничных условиях

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \text{ при } r = R_1 \text{ и } T_2 = t_0 \text{ при } r = R_2. \quad (2)$$

Для цилиндра уравнения (1) в полярной системе координат имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = -\frac{q}{\lambda_1}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) = 0. \quad (3)$$

После двукратного интегрирования (3) и удовлетворения условиям (2) с учетом ограниченности температуры в центре цилиндра получаем

$$T_1 = -\frac{qr^2}{4\lambda_1} + C_1^T, \quad T_2 = C_2^T \ln r + C_3^T.$$

Здесь

$$C_1^T = \frac{qR_1^2}{2} \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) + t_0,$$

$$C_2^T = -\frac{qR_1^2}{2\lambda_2}, \quad C_3^T = \frac{qR_1^2}{2\lambda_2} \ln R_2 + t_0.$$

Отсюда при $R_2 = R_1 = R$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \infty$ получаем распределение температуры в однородном цилиндре [1]:

$$T = \frac{qR^2}{4\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + t_0.$$

Аналогично для шара оператор Лапласа в сферической системе координат (одномерный случай) записывается довольно просто:

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Поэтому, как и раньше, после двукратного интегрирования уравне-

ний (1) находим

$$T_1 = -\frac{qr^2}{6\lambda_1} + C_1^T, \quad T_2 = -\frac{C_2^T}{r} + C_3^T,$$

где

$$C_1^T = \frac{qR_1^2}{3} \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{R_2 - R_1}{\lambda_2 R_2} \right) + t_0, \quad C_2^T = -\frac{qR_1^3}{3\lambda_2}, \quad C_3^T = -\frac{qR_1^3}{2\lambda_2 R_2} + t_0.$$

Для однородного шара температура распределяется по закону [1]

$$T = \frac{qR^2}{6\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + t_0.$$

Решение задачи термоупругости. Если поперечное сечение стержневого твэла существенно меньше его длины, то он находится в состоянии плоской деформации.

Для решения задачи термоупругости используем уравнение равновесия в перемещениях

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}\Theta - 2\mu \text{rot}\bar{\omega} = \alpha_t (3\lambda + 2\mu) \text{grad}T, \quad (4)$$

где $\Theta = \text{div}\bar{u}$ – объемная деформация, $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\bar{u}$ – вектор локального поворота, λ , μ – постоянные Ляме. Обозначим $k = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$ и запишем уравнение (4) для одномерного случая [2]:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial r} = \beta^T \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \beta^T = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}, \quad (5)$$

где ν и α – коэффициенты Пуассона и линейного теплового расширения. Решение уравнения (5)

$$\Theta_i = D_i + \beta_i^T T_i \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где неизвестные постоянные D_i определяются из граничных условий идеального механического контакта сопряженных тел

$$u_1 = u_2, \quad \sigma_{rr}^1 = \sigma_{rr}^2 \quad \text{при } r = R_1 \quad \text{и} \quad \sigma_{rr}^2 = 0 \quad \text{при } r = R_2. \quad (7)$$

Составной цилиндр. Для цилиндра в полярной системе координат

$$\Theta_i = \frac{\partial(ru_i)}{r\partial r}.$$

Отсюда, с учётом выражения (6) и ограниченности перемещений при $r = 0$, находим

$$u_1 = \frac{r}{2} \left(D_1 + \beta_1^T C_1^T \right) - \frac{\beta_1^T q r^3}{16\lambda_1},$$

$$u_2 = \frac{r}{2} \left(D_2 + \beta_2^T C_3^T \right) + \frac{\beta_2^T C_2^T r}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \frac{D_3}{r}.$$

По известным компонентам u_i и соотношениям Дюамеля – Неймана

$$\sigma_{rr} = \lambda \Theta + 2\mu \varepsilon_{rr} - \alpha_t (3\lambda + 2\mu) T, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \Theta + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha_t (3\lambda + 2\mu) T \quad (8)$$

определяем компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= G_1 \left[m_1 D_1 - \beta_1^T C_1^T + \frac{\beta_1^T q r^2}{8\lambda_1} \right], \\ \sigma_{rr}^2 &= G_2 \left[m_2 D_2 - \beta_2^T C_3^T - \beta_2^T C_2^T \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{2D_3}{r^2} \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= G_1 \left[m_1 D_1 - \beta_1^T C_1^T + \frac{3\beta_1^T q r^2}{8\lambda_1} \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= G_2 \left[m_2 D_2 - \beta_2^T C_3^T - \frac{\beta_2^T C_2^T}{2} \left(3 \ln r + \frac{1}{2} \right) + \frac{D_3}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где G - модуль сдвига, $m_i = \frac{1}{1 - 2\nu_i}$.

Для определения неизвестных постоянных D_i ($i = 1, 2, 3$) воспользуемся граничными условиями (7), из которых следует

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\lambda_1 H_1} \left\{ \beta_1^T (8\lambda_1 C_1^T - q R_1^2) \left[G_2 (m_2 R_2^2 + R_1^2) - G_2 m_2 (R_2^2 - R_1^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4G_2 \lambda_1 k_2 \beta_2^T \left[(2C_3^T - C_2^T) (R_2^2 - R_1^2) + 2C_2^T (R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1) \right] \right\}, \\ D_2 &= \frac{1}{\lambda_1 H_1} \left\{ 4\beta_2^T \lambda_1 (m_1 G_1 + G_2) \left[2C_2^T (R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2C_3^T - C_2^T) (R_2^2 - R_1^2) \right] + G_1 k_1 \beta_1^T R_1^2 (8\lambda_1 C_1^T - q R_1^2) \right\}, \\ D_3 &= -\frac{R_1^2 R_2^2}{2\lambda_1 H_1} \left\{ 8\beta_2^T \lambda_1 C_2^T \left[m_2 \ln R_1 (m_1 G_1 + G_2) + \ln R_2 (m_1 G_1 - m_2 G_2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4G_1 \beta_2^T \lambda_1 m_1 k_2 (2C_3^T - C_2^T) \right] - G_1 \beta_1^T k_1 m_2 (8\lambda_1 C_1^T - q R_1^2) \left. \right\}, \\ H_1 &= 8(R_2^2 - R_1^2)(G_2 m_2 - G_1 m_1) + 8G_1 R_2^2 k_2 m_1. \end{aligned}$$

Полагая в выражениях (9) и (10)

$$\begin{aligned} R_2 = R_1 = R, \quad G_1 = G, \quad G_2 = 0, \\ \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \infty, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = 0, \quad t_0 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

находим термонапряжения в однородном цилиндрическом твэле [1]

$$\sigma_{rr} = K \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = K \left(3 \frac{r^2}{R^2} - 1 \right), \quad K = \frac{\alpha G q (1 + \nu) R^2}{8\lambda(1 - \nu)}.$$

В случае составного цилиндра, нагретого до постоянной температуры t_0 , в формулах (9) для определения напряженного состояния следует принять $q = 0$. Тогда коэффициенты D_i имеют вид

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{t_0}{H_1} \left\{ (R_2^2 - R_1^2) [G_2 k_2 \beta_2^T - G_2 \beta_1^T m_2] + G_1 \beta_1^T (R_1^2 + m_2 R_2^2) \right\}, \\ D_2 &= \frac{t_0}{H_1} \left\{ (R_2^2 - R_1^2) \beta_2^T [G_2 + G_1 m_1] - G_1 \beta_1^T k_1 R_1^2 \right\}, \\ D_3 &= \frac{R_1^2 R_2^2}{2H_1} G_1 t_0 (k_1 \beta_1^T m_2 - k_2 \beta_2^T m_1). \end{aligned}$$

Полученные результаты при $R_2 \rightarrow \infty$ совпадают с приведёнными в работе [4].

Составной шар. Поскольку объёмная деформация определяется формулой (6), то перемещения найдём из уравнения в сферической системе координат

$$\Theta_i = \frac{\partial(r^2 u_i)}{r^2 \partial r}$$

и запишем так:

$$u_1 = \frac{1}{3} r (D_1 + \beta_1^T C_1^T) - \frac{\beta_1^T q r^3}{30\lambda_1}, \quad u_2 = \frac{1}{3} r (D_2 + \beta_2^T C_3^T) - \frac{\beta_2^T C_2^T}{2} + \frac{D_3}{r^2}.$$

Подставив в соотношения (8) выражение деформаций через перемещения в сферической системе координат, получим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= \frac{2G_1}{3} \left[n_1 D_1 - 2\beta_1^T C_1^T + \frac{\beta_1^T q r^2}{5\lambda_1} \right], \\ \sigma_{rr}^2 &= \frac{2G_2}{3} \left[n_2 D_2 + \beta_2^T \left(\frac{3C_2^T}{r} - 2C_3^T \right) - \frac{6D_3}{r^3} \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{2G_1}{3} \left[n_1 D_1 - 2\beta_1^T C_1^T + \frac{2\beta_1^T q r^2}{5\lambda_1} \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= \frac{2G_2}{3} \left[n_2 D_2 + \beta_2^T \left(\frac{3C_2^T}{2r} - 2C_3^T \right) + \frac{3D_3}{r^3} \right], \end{aligned} \tag{12}$$

где $n_i = \frac{1 + \nu_i}{1 - 2\nu_i}$.

Для определения неизвестных постоянных D_i ($i = 1, 2, 3$) воспользуемся граничными условиями (7), из которых находим

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{2}{5\lambda_1 H_2} \left\{ \beta_1^T (qR_1^2 - 10\lambda_1 C_1^T) \left[n_2 G_2 (R_2^3 - R_1^3) - G_1 n_2 R_2^3 - 2G_1 R_1^3 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 15G_2 k_2 \lambda_1 \beta_2^T C_3^T (R_2^3 - R_1^3) \right\} - \frac{9}{H_2} G_2 k_2 \beta_2^T C_2^T (R_2^2 - R_1^2), \\
D_2 &= -\frac{2\beta_2^T}{H_2} (n_1 G_1 + 2G_2) \left[3C_2^T (R_2^2 - R_1^2) - 2C_3^T (R_2^3 - R_1^3) \right] + \\
&\quad + \frac{3}{5\lambda_1 H_2} G_1 k_1 \beta_1^T R_1^3 (10\lambda_1 C_1^T - qR_1^2), \\
D_3 &= -\frac{R_1^2 R_2^2}{2H_2} \left[3G_1 n_1 k_2 \beta_2^T C_2^T R_2 - 2G_1 R_1 R_2 (n_1 k_2 \beta_2^T C_3^T - n_2 k_1 \beta_1^T C_1^T) + \right. \\
&\quad \left. + 4\beta_2^T C_2^T (R_2 - R_1) (n_2 G_2 - n_1 G_1) \right] - \frac{R_1^2 R_2^2}{10\beta_1 H_2} G_1 n_2 k_1 \beta_2^T q, \\
H_2 &= 4(R_2^3 - R_1^3)(G_2 n_2 - G_1 n_1) + 3G_1 k_2 R_2^3 n_1. \tag{13}
\end{aligned}$$

Для однородного сферического твэла при условиях (11) получим выражения для напряжений

$$\sigma_{rr} = K \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = K \left(2 \frac{r^2}{R^2} - 1 \right), \quad K = \frac{2\alpha G q (1 + \nu) R^2}{15\lambda (1 - \nu)},$$

которые совпадают с приведёнными в работе [1].

В случае составного шара, нагретого до постоянной температуры t_0 , в формулах (12) и (13) для определения перемещений и напряжений следует принять $q = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\frac{2t_0}{H_2} \left\{ 2\beta_1^T \left[n_2 (G_2 (R_2^3 - R_1^3) - G_1 R_2^3) - 2G_1 R_1^3 \right] - \right. \\
&\quad \left. - 3G_2 \beta_2^T k_2 (R_2^3 - R_1^3) \right\}, \\
D_2 &= -\frac{2t_0}{H_2} \left[2\beta_2^T (n_1 G_1 + 2G_2) (R_2^3 - R_1^3) + 3G_1 \beta_1^T k_1 R_1^3 \right], \\
D_3 &= \frac{R_1^3 R_2^3}{H_2} G_1 t_0 (n_2 \beta_1^T k_1 - n_1 \beta_2^T k_2).
\end{aligned}$$

При $R_2 \rightarrow \infty$ полученные результаты совпадают с приведёнными в работе [7]

$$\sigma_{rr}^1 = \sigma_{\theta\theta}^1 = 2K_0, \quad \sigma_{rr}^2 = \frac{2K_0}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta}^2 = -\frac{K_0}{r^3}$$

$$K_0 = -\frac{2R^3 G_1 G_2 (1 - \nu_1) (\alpha_1 - \alpha_2) t_0}{G_1 (1 + \nu_1) + 2G_2 (1 - 2\nu_1)}.$$

4. Анализ результатов численных исследований. На рис. 1 представлены графики распределения напряжений в составном цилиндре σ_{rr}^* (сплошные линии) и $\sigma_{\theta\theta}^*$ (штриховые, штрих-пунктирные и пунктирные линии), $\sigma^* = \lambda_1 \sigma / q \alpha_1 G_1$, для $\alpha_2 = 2\alpha_1$, а на рис. 2 - $\alpha_2 = 0,5\alpha_1$, вычисленных по формулам (9) для значений $G_2/G_1 = 3; 1; 1/3$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) и значений $R_2 = 2; 5$ (рис. а, б) при $R_1 = 1$. При вычислении

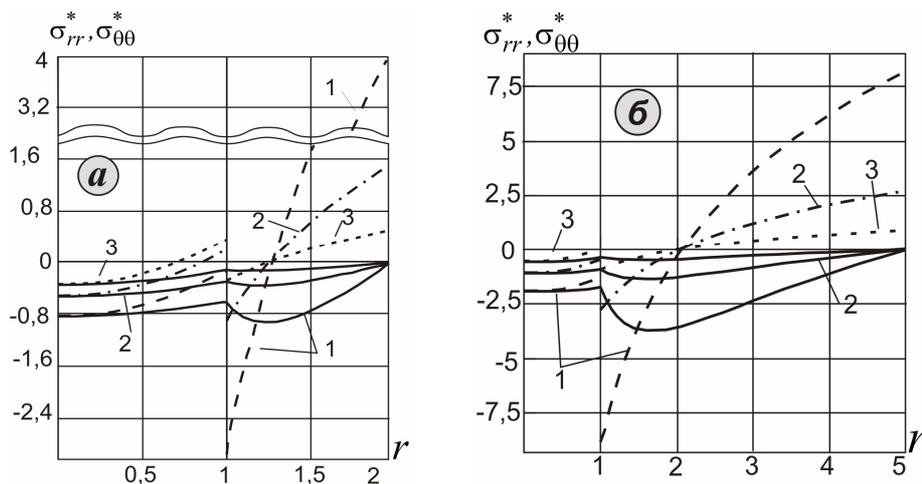


Рис. 1

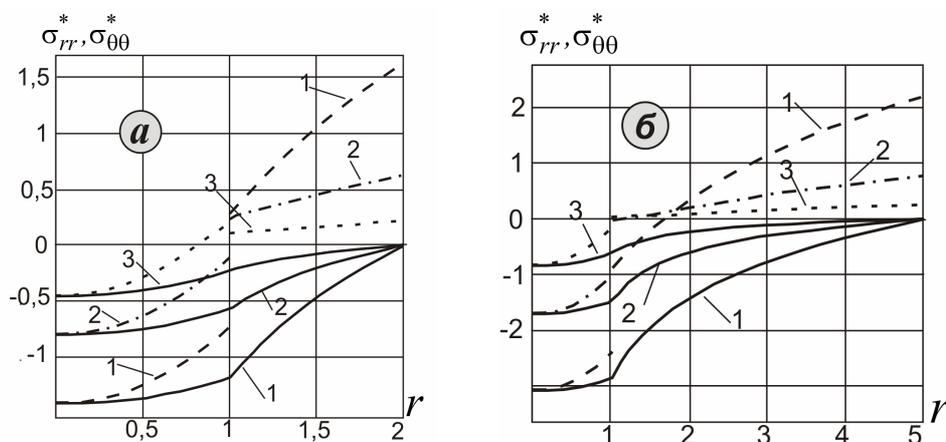


Рис. 2

як приняли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. На рис. 3 и рис. 4 построены по формулам (12) аналогичные графики для составного шара при указанных

выше параметров.

Из графиков следует, что для цилиндра и шара радиальные напря-

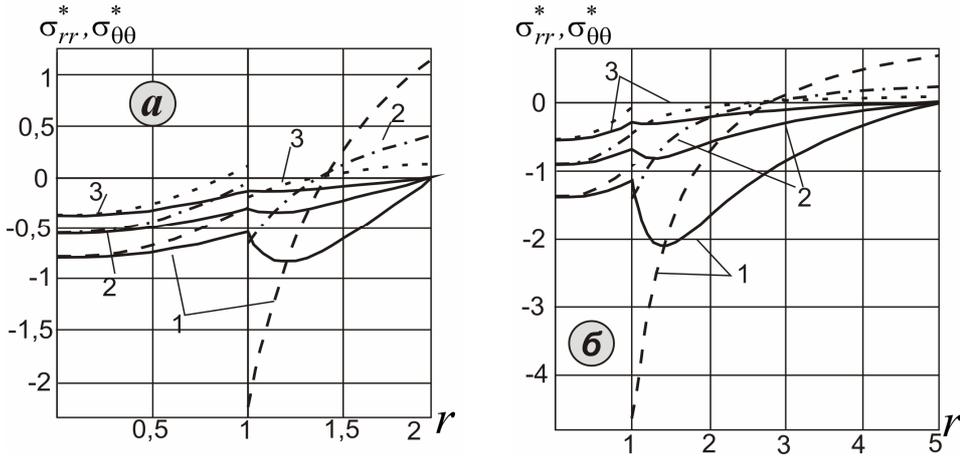


Рис. 3

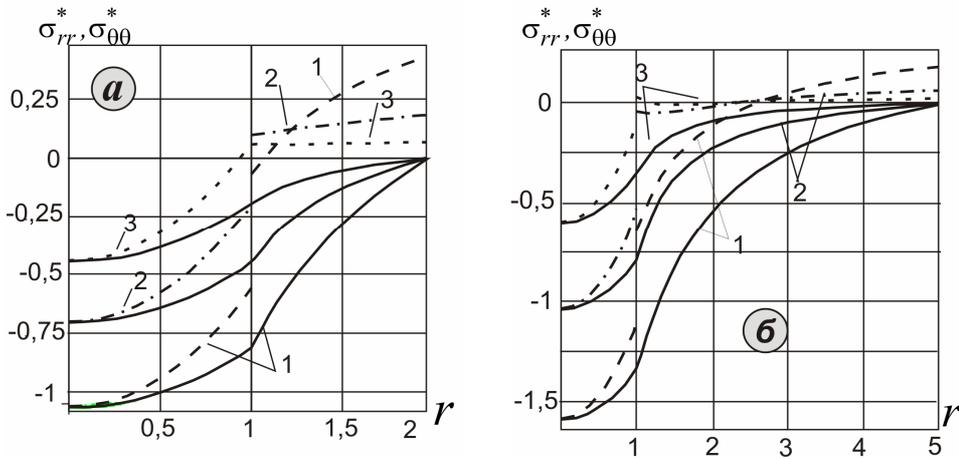


Рис. 4

жения σ_{rr}^* сжимающие, и чем меньше модуль сдвига и чем больше коэффициент теплового расширения внутренней области по отношению к внешней ($G_1 < G_2, \alpha_1 > \alpha_2$), тем больше значение напряжений по модулю в области тепловыделения. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}^*$ имеют скачок на месте соединения областей (при $r = R_1$), в области тепловыделения они в основном сжимающие, во внешней области – растягивающие и принимают максимальное значение на границе тела (при $r = R_2$). В центре цилиндра и шара $\sigma_{rr}^*(0) = \sigma_{\theta\theta}^*(0)$.

Интересно отметить также, что если коэффициент теплового расширения области тепловыделения больше, чем внешней области ($\alpha_1 > \alpha_2$), то

радиальные напряжения σ_{rr}^* монотонно уменьшаются (рис. 2 и 4), а при $\alpha_1 < \alpha_2$ σ_{rr}^* при $r > R_1$ увеличиваются по модулю и при $G_1 < G_2$ их максимальное значение больше, чем в области тепловыделения, а затем стремятся к нулю при $r \rightarrow R_2$ (рис. 1 и 3).

В случае составных цилиндра и шара, нагретых до постоянной температуры t_0 , напряжения $\sigma_{rr}^* = \sigma_{\theta\theta}^*$ ($\sigma^* = \sigma/\alpha_1 G_1 t_0$) внутри области $r < R_1$ постоянны, сжимающие при $\alpha_1 > \alpha_2$ и растягивающие при $\alpha_1 < \alpha_2$, возрастают с увеличением отношения G_2/G_1 . На границе раздела материалов напряжения $\sigma_{\theta\theta}^*$ разрывны, меняют знак и уменьшаются при $r \rightarrow R_2$.

РЕЗЮМЕ. Розв'язані одновимірні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для двокомпонентних циліндра і кулі при тепловиділенні у центральній області та при їх нагріванні до сталої температури. Наведені результати дослідження напружень при різних відношеннях коефіцієнтів лінійного теплового розширення, модулів зсуву і радіусів області тепловиділення та зовнішньої області.

Ключові слова: складені циліндр і куля, тепловиділення, теплопровідність, термопружність.

SUMMARY. The one-dimensional problems of stationary heat conduction and thermoelasticity, for two-component cylinder and sphere at heat release in central region and at their heating to steady temperature have been solved. The results of investigation of stresses for different relations of coefficients of linear thermal expansion, shear moduli and radii of heat release region and external region have been presented.

Key words: composite cylinder and sphere, heat release, heat conductivity, thermoelasticity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Власов Н. М., Федик И. И. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. — М.: ЦНИИАтоминформ, 2001. — 205 с.
2. Галазюк В. А., Кит Г. С. Осесимметричный напружено-деформованый стан тіла з плоскою пеленою теплових джерел // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 1. — С. 141–152.
3. Галанин А. Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 529 с.
4. Подстригач Я. С., Гайвась И. В. Двухмерная задача термоупругости для бесконечной среды с цилиндрическим включением // Прикладная механика. — 1966. — Т. 2, № 3. — С. 124–126.
5. Самойлов А. Г. Тепловыделяющие элементы ядерных реакторов. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 219 с.
6. Черников А. С., Пермяков Л. Н., Федик И. И., Гаврилин С. С., Курбаков С. Д. Твэлы на основе сферических частиц с защитным покрытием для реакторов повышенной безопасности // Атомная энергия. — 1999. — Т. 87, Вып. 6. — С. 451–462.
7. Шевчук П. Р. Температурные напряжения в бесконечном пространстве с инородным сферическим включением при однородном тепловом потоке на бесконечности // Вопросы механики реального твердого тела. — 1964. — Вып. 3. — С. 38–41.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 15.06.2011

УДК 539.3

Д. В. БАБИЧ, д-р техн. наук

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ
ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ И
ПОВТОРЯЮЩИХСЯ НАГРУЖЕНИЯХ**

Предлагается статистический критерий прочности при статическом и повторяющихся нагрузениях хрупких материалов, который связывает начало макроразрушения в виде образования макротрещин либо потери целостности тела с достижением плотности микротрещин в материале некоторого (критического) значения. Суть предлагаемого критерия состоит в отождествлении значений концентрации микродефектов при статическом и усталостном разрушении тела со значением концентрации микродефектов, которое имеет место при разрушении материала при одноосном статическом нагружении.

Ключевые слова: микроповреждаемость, статическое и усталостное разрушение, критическая плотность, микротрещин.

Большинство современных силовых, деформационных и энергетических критериев прочности носит феноменологический характер, являясь результатом обобщения опытных данных и не касаясь физической сути явления разрушения. Поэтому каждый из инженерных критериев прочности применим только для группы материалов, для которой получены лежащие в его основе опытные данные [1]. В последнее время достигнуты значительные успехи в раскрытии механизмов разрушения различных материалов [1, 2, 6]. В частности, установлено, что физический процесс разрушения состоит из нескольких этапов, связанных с накоплением до определенного уровня рассеянных повреждений (микротрещин) с последующим нарушением целостности тела в результате образования макротрещин либо других причин.

Целью настоящей работы является разработка структурного подхода к построению статистических критериев прочности для упруго-хрупких материалов на основе вероятностной модели механизма хрупкого микро-разрушения (микроповреждаемости) при статическом и повторяющихся нагружениях.

Физическая постановка задачи. Известно [1, 2, 5], что разрушение материалов является сложным многоэтапным процессом, включающим рассеянное микро-разрушение структурных элементов. Разрушение структурных элементов может происходить путем образования плоских микротрещин отрывом, сдвигом либо при наличии обоих механизмов. На первой стадии разрушения размеры повреждений малы по сравнению с линейными размерами структурных элементов. На второй – повреждения достигают размеров порядка размеров этих элементов. Третья стадия (начало разрушения материала) наступает при достижении концентрацией микротрещин некоторого критического значения, когда расстояния между микродефектами приближаются к значениям их характерных размеров. При этом в случае растягивающих напряжений начало разрушения

связано со слиянием микротрещин, приводящим к образованию макротрещины и нарушению целостности тела [1, 2, 6]. В случае сжимающих напряжений, начало разрушения, по-видимому, связано с явлением потери устойчивости во внутренней структуре поврежденного материала [2].

Связь начала макроразрушения с достижением концентрацией микротрещин в объеме тела некоторого (критического) значения при заданном виде и уровне нагружения, позволяет ввести в рассмотрение статистический критерий прочности. Статистическая природа такого критерия связана со случайным (вероятностным) характером микроразрушений в материале. Суть статистического критерия заключается в сравнении значения концентрации микродефектов, вызываемого рассматриваемым видом нагружения тела, с критическим значением концентрации микродефектов, которое для данного материала является причиной начала макроразрушения (образование макротрещины при растяжении либо потеря устойчивости во внутренней структуре при сжатии) не зависимо от многокомпонентности и вида напряженного состояния. Критические значения концентрации микротрещин определяются на основании опытных данных о разрушении образцов материала при одноосном растяжении и сжатии.

Ниже рассмотрен вариант статистического критерия прочности для упруго-хрупких материалов, разрушающихся путем образования трещин отрыва при малых упругих деформациях при статических однократном и кратных нагружениях. Подобным образом могут быть построены определяющие соотношения для статистических критериев прочности и при других механизмах образования микротрещин.

Структурная модель накопления плоских микродефектов в упруго-хрупком материале. Существуют различные подходы к моделированию микроповреждаемости материалов [1, 5, 7, 9, 10]. Для рассматриваемой задачи наиболее подходящей является структурная модель повреждаемости материала в виде образования рассеянных по объему плоских микротрещин [5, 7, 9].

Согласно этой модели, считается, что единичный объем материала состоит из N структурных элементов эллипсоидальной (a' , b' – большая и меньшая полуоси эллипсоида вращения) либо сферической (a' – радиус сферы) формы. Каждый структурный элемент может растрескиваться, в результате чего появляется плоский дефект эллиптической либо круговой формы с размерами порядка размеров структурных элементов. Для оценки степени поврежденности материала вводится численная характеристика $\varepsilon = N_0 \langle v' \rangle$, где N_0 – количество микротрещин в единичном объеме,

$\langle v' \rangle = \frac{4\pi}{3} \langle a'b'^2 \rangle$ – средний объем частиц материала. Если общее количество частиц в единице объема – $N = 1 / \langle v' \rangle$, то объемная концентрация микродефектов будет определяться выражением $p = N_0 / N$. Средние расстояния между центрами микрочастиц (R) и центрами разрушенных микроэлементов (R_0) приближенно определяются формулами $R = 1 / \sqrt[3]{N}$

и $R_0 = 1 / \sqrt[3]{N_0}$ [7].

Таким образом, размеры и характер распределения микротрещин в реальных телах связаны с разрывами структурных элементов. Форма и размеры трещин отождествляются с таковыми для сечений разрыва структурных элементов материала.

Для описания процесса микроповреждаемости используется структурная модель накопления повреждений Даниэлса. Физический смысл модели Даниэлса применительно к структурно неоднородной среде раскрыт в [1]. Сущность модели Даниэлса сводится к следующему.

Пусть в лабораторной (неподвижной) системе координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой направлены по взаимно перпендикулярным радиусам случайного шара единичного радиуса, выбранного в качестве представительного объема, заданы средние напряжения σ_{ij} . Локальные системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ выбираются таким образом, чтобы оси $O'x'_3$ были направлены по нормали к поверхности шара. На поверхности случайного шара вокруг направления $O'x'_3$ в географической системе координат выделяется элементарная область площадью $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$, которая пересекает N структурных элементов. В сечениях пересекаемых структурных элементов действует одинаковое локальное истинное напряжение $\bar{\sigma}'_{33}$ (истинные напряжения $\bar{\sigma}'_{33}$ отличаются от условных σ'_{33} тем, что первые относятся к площадкам поврежденной среды, вторые — к площадкам сплошной среды). В качестве критерия разрушения микроэлементов материала путем отрыва принимается соотношение 1-ой теории прочности

$$\bar{\sigma}'_{33} \geq \sigma, \quad (1)$$

где σ — случайная величина, которая обозначает предельные значения истинного растягивающего либо сжимающего нормального напряжений для различным образом ориентированных структурных элементов. Для аппроксимации распределения прочностных свойств кристаллитов и зерен различной ориентации в микронеоднородных материалах используются различные законы: степенной закон [1, 10], нормальный закон распределения микропрочности [1], функция распределения Вейбулла [1, 10] и др.

Ограничимся рассмотрением степенного закона. Плотность и интегральная функция распределения микропрочности при степенном законе представляются соотношениями

$$f_i(\sigma) = \frac{\alpha_i (\sigma - \sigma_{0i})^{\alpha_i - 1}}{(\sigma_i - \sigma_{0i})^{\alpha_i}},$$

$$F_i(\sigma) = \begin{cases} 0, & (\sigma < \sigma_{0i}), \\ (\sigma - \sigma_{0i})^{\alpha_i} / (\sigma_i - \sigma_{0i})^{\alpha_i}, & (\sigma_{0i} \leq \sigma \leq \sigma_i), \\ 1, & (\sigma > \sigma_i), \end{cases} \quad (2)$$

в которых σ_{0i} , σ_i — минимальная и максимальная величины предельных значений σ индивидуальных структурных элементов при растяжении

($i = 1$) и сжатии ($i = 2$); α_i – параметр разброса микропрочности. Параметры распределения α_i , σ_{0i} , σ_i находятся по экспериментальным данным, например, методом моментов [9], состоящим в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим моментам распределения, которые являются функциями неизвестных параметров α_i , σ_{0i} , σ_i .

При двухпараметрическом ($\sigma_{0i} = 0$) распределении микропрочности интегральная функция распределения (2) и соотношения, связывающие основные выборочные моменты (среднее значение предела микропрочности σ'_{ei} , дисперсия D_i^2) с соответствующими моментами закона (2) имеют вид:

$$F_i(\sigma) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_i} \right)^{\alpha_i}; \quad (3)$$

$$\sigma'_{ei} = \int_0^{\sigma_i} \sigma f_i(\sigma) d\sigma = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1} \sigma_i; \quad (4)$$

$$D_i^2 = \int_0^{\sigma_i} (\sigma - \sigma'_{ei})^2 f_i(\sigma) d\sigma = \frac{\alpha_i}{2 + \alpha_i} \sigma_i^2 - \frac{2\alpha_i \sigma'_{ei} \sigma_i}{1 + \alpha_i} + \sigma'_{ei}{}^2 = \frac{\alpha_i}{(1 + \alpha_i)^2 (2 + \alpha_i)} \sigma_i^2. \quad (5)$$

Коэффициент вариации k_{wi} представляется формулой

$$k_{wi} = \sqrt{\frac{1}{\alpha_i (2 + \alpha_i)}}. \quad (6)$$

Из выражений (4) – (6) следуют выражения

$$\alpha_i = -1 + \frac{1}{k_{wi}} \sqrt{1 + k_{wi}^2}, \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{1 + k_{wi}^2}}{\sqrt{1 + k_{wi}^2} - k_{wi}} \sigma'_{ei}. \quad (7)$$

Интегральная функция распределения микропрочности $F_i(\sigma)$ обозначает долю единичной площади случайного сечения тела, на которой предел микропрочности меньше некоторого определенного значения σ . Указанная доля площади случайного сечения тела представляет собой суммарную площадь сечений структурных элементов, на которых пределы прочности меньше значения действующего нормального напряжения, вследствие чего они растрескиваются.

Элементы будут разрушаться, когда напряжения $\bar{\sigma}'_{33}$ достигнут предельных значений σ для этих элементов. Разрушение отдельных элементов образует совокупность независимых случайных событий. Взаимодействие элементов между собой состоит лишь в том, что после разрушения

части из них происходит перераспределение напряжений между оставшимися целыми элементами.

При достижении истинными растягивающими нормальными напряжениями $\bar{\sigma}'_{33}$ предельных значений эти элементы разрушаются путем образования в них микротрещин с плоскостями, нормальными к направлению действия напряжения $\bar{\sigma}'_{33}$. В случае сжимающих напряжений образующиеся микротрещины ориентируются преимущественно параллельно направлению действия $\bar{\sigma}'_{33}$ [1, 9]. В связи с этим имеет место равенство $\bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}$, так как разрушенные структурные элементы материала сопротивляются сжатию как сплошные. Если условное локальное растягивающее напряжение σ'_{33} является независимым параметром нагружения, то в рамках рассматриваемой модели истинное локальное напряжение в сечениях не разрушенных структурных элементов приближенно определяется формулой

$$\bar{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1 - F_1(\bar{\sigma}'_{33})}. \quad (8)$$

На основании изложенного средние плотности микродефектов на поверхности случайного шара при заданных растягивающих и сжимающих напряжениях σ_{ij} соответственно определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_1(\bar{\sigma}'_{33}) d\Omega = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_1(\bar{\sigma}'_{33}) \sin \vartheta d\vartheta d\psi, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_2(\sigma'_{33}) d\Omega = \frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_2(\sigma'_{33}) \sin \vartheta d\vartheta d\psi. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом истинные локальные напряжения $\bar{\sigma}'_{33}$ через условное локальное напряжение σ'_{33} определяются формулой (8). Условные локальные напряжения σ'_{33} и заданные в теле средние напряжения σ_{kl} связаны преобразованием [9]

$$\sigma'_{33} = \sigma_{kl} \alpha_{3k} \alpha_{3l}, \quad (10)$$

где α_{3k} , α_{3l} – определяемые углами ϑ , ψ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$) направляющие косинусы локальной системы координат по отношению к лабораторной системе координат [4]

$$\alpha_{31} = \sin \psi \sin \vartheta, \quad \alpha_{32} = -\cos \psi \sin \vartheta, \quad \alpha_{33} = \cos \vartheta. \quad (11)$$

$\bar{N} = 4\pi$ – нормирующий множитель, который следует из условия

$$\frac{1}{\bar{N}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_i(\bar{\sigma}'_{33}) \sin \vartheta d\vartheta d\psi = 1 \quad \text{при } \bar{\sigma}'_{33} = \sigma_i. \quad (12)$$

Объемная концентрация плоских микродефектов будет определяться отношением количества разрушенных микрочастиц при растяжении либо сжатии N_{0i} к их общему количеству ($p_i = N_{0i} / N$) в представительном объеме. Воспользовавшись приемом, применяемым в петрографии для анализа тонких срезов осадков [3], можно показать, что $p_i = \varepsilon_i$.

Для определения соотношением (3) концентрации растрескивающихся структурных элементов материала требуются параметры распределения α_i , σ_i . В силу малости размеров структурных элементов прямое определение параметров α_i , σ_i неосуществимо. Поэтому необходимо воспользоваться опосредованным приемом определения этих величин по экспериментальным значениям условных параметров макропрочности для выборки макрообразцов (σ_{ei} , D_i^2 , k_{wi}). Необходимо отметить, что коэффициенты вариации микропрочности структурных элементов материала, как относительные величины, в условных и истинных напряжениях по значениям совпадают. Поэтому параметры α_i в функциях распределения макропрочности материала (образцов) и структурных элементов будут совпадать. Определению подлежат лишь параметры σ_i .

В случае сжатия ($\sigma_{ii} < 0$, $i=1, 2, 3$) указанные параметры определяются по формулам (7) в силу совпадения условных и истинных напряжений.

При растяжении ($\sigma_{ii} > 0$, $i=1, 2, 3$) определению подлежит параметр σ_1 . Процедура определения этого параметра состоит в следующем. В соответствии с (8) среднее предельное значение независимого параметра нагружения (условного напряжения) $\langle \sigma'_{e33} \rangle$ через истинные напряжения определяется выражением

$$\langle \sigma'_{e33} \rangle = \bar{\sigma}'_{33\max} [1 - F_1(\bar{\sigma}'_{33\max})], \quad (13)$$

где $\bar{\sigma}'_{33\max}$ – максимальное значение напряжения в структурном элементе, которое достигается при разрушении экспериментальных образцов. На основании (13) $\bar{\sigma}'_{33\max}$ определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\sigma} \{ \sigma [1 - F_1(\sigma)] \}_{\sigma=\bar{\sigma}'_{33\max}} = 0. \quad (14)$$

С учетом (3), (4), (14) значение $\bar{\sigma}'_{33\max}$ представляется выражениями

$$\bar{\sigma}'_{33\max} = \left(\frac{1}{1 + \alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \sigma_1 \quad \text{либо} \quad \bar{\sigma}'_{33\max} = \langle \sigma'_{e33} \rangle > \frac{1 + \alpha_1}{\alpha_1}, \quad (15)$$

откуда при $\langle \sigma'_{e33} \rangle = \sigma_{e1}$ для параметра распределения прочности структурных элементов σ_1 следует выражение

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{e1} (1 + \alpha_1)^{\frac{1}{\alpha_1} + 1}}{\alpha_1}. \quad (16)$$

Таким образом, при известных значениях средней прочности, дисперсии либо коэффициента вариации для выборки образцов из некоторого материала соответствующие параметры для структурных элементов материала согласно (4) – (6), (16) будут определяться формулами

$$\begin{aligned} \langle \bar{\sigma}'_{e33} \rangle &= \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \sigma_1 = \sigma_{e1} (1 + \alpha_1)^{\frac{1}{\alpha_1}}, \\ D_1^2 &= \frac{\sigma_{e1}^2 (1 + \alpha_1)^{\frac{2}{\alpha_1}}}{\alpha_1 (2 + \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

В формулах (15) – (17) величина $\langle \sigma'_{e33} \rangle = \sigma_{e1}$ представляет собой среднее значение предела прочности некоторого материала, а σ_1 , $\langle \bar{\sigma}'_{e33} \rangle$, $\bar{\sigma}'_{33\max}$ соответственно обозначают максимальное и среднее значение прочности индивидуальных структурных элементов и наибольшее среднее значение прочности структурных элементов, реализуемое в разрушающихся образцах.

С использованием представленных соотношений можно определять критические значения плотности микротрещин ε_{ik} , с образованием которых связано начало макроразрушения тел в виде образования макротрещины либо потери устойчивости во внутренней структуре поврежденного материала. Это обстоятельство позволяет ввести в рассмотрение статистический критерий прочности.

Статистический критерий прочности. Пусть в лабораторной системе координат, связанной с представительным объемом тела, заданы напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). С учетом изложенного выше концентрация микротрещин в случайном сечении тела будет определяться выражением вида (3)

$$F_i(\bar{\sigma}'_{33}) = \left(\frac{\bar{\sigma}'_{33}}{\sigma_i} \right)^{\alpha_i} \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

где соответственно при растяжении ($\sigma_{jj} > 0$) и сжатии ($\sigma_{jj} < 0$) для локального напряжения $\bar{\sigma}'_{33}$ имеют место формулы

$$\bar{\sigma}'_{33} \approx \frac{\sigma'_{33}}{1 - F_1(\bar{\sigma}'_{33})}, \quad \bar{\sigma}'_{33} = \sigma'_{33}. \quad (19)$$

Здесь σ'_{33} – условное локальное нормальное к плоскости случайного сечения напряжение, которое через заданные в лабораторной системе координат напряжения определяется формулами (10), (11).

Статистический критерий прочности представляется соотношением

$$F_i(\bar{\sigma}'_{33m}) \leq \varepsilon_{ik} \quad (i = 1, 2), \quad (20)$$

где $F_i(\bar{\sigma}'_{33m}) = \varepsilon_{im}$ – концентрация трещин в сечении с максимальным локальным нормальным истинным напряжением, которая в случае мгновенного достижения растягивающими напряжениями значения σ'_{33m} определяется из уравнения

$$\varepsilon_{1m} (1 - \varepsilon_{1m})^{\alpha_1} = \left(\frac{\sigma'_{33m}}{\sigma_1} \right)^{\alpha_1}.$$

При сжатии $\varepsilon_{2m} = \left(\frac{\sigma'_{33m}}{\sigma_2} \right)^{\alpha_2}$ в силу совпадения истинных и условных напряжений.

Критические значения концентрации микротрещин при мгновенном растяжении либо сжатии ε_{ik} в (20) определяются соотношениями

$$\varepsilon_{1k} (1 - \varepsilon_{1k})^{\alpha_1} = \left(\frac{\sigma_{e1}}{\sigma_1} \right)^{\alpha_1}, \quad \varepsilon_{2k} = \left(\frac{\sigma_{e2}}{\sigma_2} \right)^{\alpha_2}. \quad (21)$$

Здесь σ_{ei} ($i = 1, 2$) средние значения пределов прочности соответственно при растяжении и сжатии образцов некоторого материала.

Необходимо отметить, что накопление микротрещин в материале зависит от особенностей нагружения тела (кратность, скорость нагружения и др.). Предположим, что до начала деформирования в материале существовала начальная микроповрежденность плотностью ε_{i0} . Функция распределения $F_i(\sigma)$ в (3) в этом случае будет определять относительную долю оставшихся в сечении тела с относительной площадью $(1 - \varepsilon_{i0})$ не разрушенных структурных элементов, в которых предел прочности равен или меньше некоторого значения σ . Поэтому, если в не разрушенной части сечения материала напряжения $\bar{\sigma}'_{33} \geq \sigma$, то функция $F_i(\bar{\sigma}'_{33})$ будет определять относительное содержание разрушенных микроэлементов в оставшейся относительной части не разрушенного сечения $(1 - \varepsilon_{i0})$. Тогда при монотонном (статическом) повышении напряжений до значений $\bar{\sigma}'_{33}$ концентрация микротрещин в случайном сечении тела достигнет величины, определяемой выражением

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i0} + (1 - \varepsilon_{i0}) F_i(\bar{\sigma}'_{33}) = \varepsilon_{i0} + (1 - \varepsilon_{i0}) \left(\frac{\bar{\sigma}'_{33}}{\sigma_i} \right)^{\alpha_i} \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Соотношения типа (21) при $\varepsilon_{i0} = 0$ принимают вид

$$\varepsilon_{1k} (1 - \varepsilon_{1k})^{\alpha_1 - 1} = \left(\frac{\sigma_{e1}}{\sigma_1} \right)^{\alpha_1}, \quad \varepsilon_{2k} = (1 - \varepsilon_{2k}) \left(\frac{\sigma_{e2}}{\sigma_2} \right)^{\alpha_2}. \quad (23)$$

Аналогичный подход к определению накопления микродефектов приведен в [7]. Предлагаемый статистический критерий прочности является более универсальным по сравнению с известными силовыми, деформационными либо энергетическими, поскольку критическое значение плотности микродефектов является общим признаком начала разрушения материала независимо от характера нагружения [7].

Повторяющиеся нагружения. Рассматриваемый критерий разрушения удобно применять при исследовании усталостного разрушения при кратных и циклических нагружениях тел. Основанием для применимости его в таких задачах является экспериментально установленная связь механизма усталостного разрушения с явлением накопления микродефектов в материале при повторных нагружениях, а также совпадение структуры в сечениях разрушения материала при статическом и усталостном нагружении [5, 8]. При рассмотрении циклического знакопеременного нагружения необходимо иметь ввиду различие в механизмах микроразрушения материала при кратных сжатиях и растяжениях одинаковыми напряжениями. В первом случае концентрация микродефектов при последующих сжатиях (исключая первое) не изменяется, во втором – увеличивается в связи с уменьшением эффективной площади сечения.

Предположим, что образец из сплошного ($\varepsilon_{1(0)} = 0$) материала подвергается одноосному кратному статическому растяжению условным напряжением σ_{110} . Тогда в результате первого ($(n) = (1)$) растяжения образца в материале образуется поврежденность, концентрация которой, согласно (22), будет определяться соотношением

$$\varepsilon_{1(1)} = \left(1 - \varepsilon_{1(1)}\right)^{1-\alpha_1} \left(\frac{\sigma_{110}}{\sigma_1}\right)^{\alpha_1}. \quad (24)$$

В результате n -го растяжения в поперечном сечении образца появятся разрушенные структурные элементы, плотность которых будет определяться соотношением

$$\varepsilon_{1(n)} = \varepsilon_{1(n-1)} + \left(1 - \varepsilon_{1(n)}\right)^{1-\alpha_1} \left(\frac{\sigma_{110}}{\sigma_1}\right)^{\alpha_1}. \quad (25)$$

Здесь $\varepsilon_{1(n-1)}$ – концентрация микродефектов, образовавшихся вследствие предшествующего $n - 1$ -го растяжения образца. Усталостное разрушение образца наступит при N -ом растяжении, когда прогрессирующая концентрация микротрещин достигнет критического значения $\varepsilon_{1(N)} = \varepsilon_{1k}$, определяемого соотношением (23),

$$\varepsilon_{1k} = \varepsilon_{1(N-1)} + \left(1 - \varepsilon_{1k}\right)^{1-\alpha_1} \left(\frac{\sigma_{110}}{\sigma_1}\right)^{\alpha_1}. \quad (26)$$

Указанным количеством растяжений характеризуется долговечность образца. Долговечность N можно определять путем прямого хода, решая уравнения (25) либо с помощью обратного хода вычислений с использова-

нием соотношения (26). Последний вариант более предпочтителен в связи с отсутствием необходимости решения уравнений (25) произвольной степени, связанной со значением α_1 .

Необходимость в последовательных вычислениях промежуточных значений концентрации микродефектов при определении долговечности связана с тем, что по мере накопления микротрещин повреждающее воздействие последующих растяжений изменяется, увеличиваясь с ростом количества нагружений.

Двустороннюю приближенную оценку долговечности образца можно получить, отождествляя приращение концентрации микродефектов в результате одного любого акта нагружения соответственно с минимальным и максимальным приращением

$$\Delta_{\min} = \varepsilon_{1(2)} - \varepsilon_{1(1)}, \quad \Delta_{\max} = \varepsilon_{1k} - \varepsilon_{1(N-1)} = (1 - \varepsilon_{1k})^{1-\alpha_1} \left(\frac{\sigma_{110}}{\sigma_1} \right)^{\alpha_1}. \quad (27)$$

При таком подходе получим

$$\varepsilon_{1k} / \Delta_{\max} < N < \varepsilon_{1k} / \Delta_{\min}. \quad (28)$$

Другой приближенный подход к определению N связан с определением на основании (25) нескольких (n) значений приращений концентрации микродефектов $\Delta_i \varepsilon_1$ для отдельных актов растяжения с последующим определением их среднего значения. Этот подход дает для долговечности N выражение

$$N = \varepsilon_{1k} \left[\left(\frac{\sigma_{110}}{\sigma_1} \right)^{\alpha_1} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \varepsilon_{1(i)})^{1-\alpha_1} \right]^{-1}. \quad (29)$$

Здесь $\varepsilon_{1(i)} = i \frac{\varepsilon_{1k}}{n}$ – значения концентрации микродефектов из интервала $[\varepsilon_{1(1)}, \varepsilon_{1k}]$ в порядке их увеличения.

Обсуждаемый подход позволяет также определять остаточный предел прочности материала σ_{11e} после n -кратного нагружения, а также условный предел выносливости σ_{1y} для заданной базы испытаний N_0 . Соответствующие выражения для искомых величин имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11e} &= \sigma_1 (\varepsilon_{1k} - \varepsilon_{1(n)})^{1/\alpha_1} (1 - \varepsilon_{1k})^{1-1/\alpha_1}; \\ \sigma_{1y} &= \sigma_1 \varepsilon_{1k}^{1/\alpha_1} (1 - \varepsilon_{1k})^{1-1/\alpha_1} / N_0^{1/\alpha_1}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{1(n)}$ – концентрация микродефектов, накопившаяся вследствие n -кратного растяжения (25).

Числовой пример. Рассмотрим процедуру применения статистического критерия статической прочности для одноосного повторяющегося растяжения напряжениями $\sigma_{110} = 0,257\sigma_{e1}$ для стали 45 с характери-

ками прочности материала [5]

$$\sigma_{e1} = 0,674 \times 10^9 \text{ Па}, \quad k_{w1} = 0,07. \quad (30)$$

Для определения параметров прочности индивидуальных структурных элементов σ_1 , $\langle \bar{\sigma}'_{e33} \rangle$, $\bar{\sigma}'_{33\max}$, α_1 применяются формулы (4) – (7), (16), (17)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0,885 \times 10^9 \text{ Па}, \quad \langle \bar{\sigma}'_{e33} \rangle = 0,823 \times 10^9 \text{ Па}, \\ \bar{\sigma}'_{33\max} &= 0,725 \times 10^9 \text{ Па}, \quad \alpha_1 = 13,321. \end{aligned} \quad (31)$$

Для материала с упругими параметрами (30),(31) критическое значение концентрации микротрещин в плоском сечении на основании (23) составляет $\varepsilon_{1к} = 0,050$.

Оценка долговечности образцов при повторных растяжениях напряжениями $\sigma_{110} = 0,280 \times 10^9 \text{ Па}$ на основании (27), (28) дает результат

$$1,207 \times 10^5 < N < 2,281 \times 10^5.$$

В соответствии с (29) при $n = 10$ имеем $N = 1,585 \times 10^5$.

Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными [8].

Таким образом, на основании современных представлений о механизме макроразрушения хрупких материалов предложены статистические критерии их разрушения при статическом и кратном нагружении.

РЕЗЮМЕ. Пропонується статистичний критерій міцності при статичному і повторюваних навантаженнях крихких матеріалів, що зв'язує початок макроруйнування у вигляді утворення макротріщин або втрати цілісності тіла з досягненням щільності мікротріщин в матеріалі деякого (критичного) значення. Суть пропонованого критерію полягає в ототожненні значень концентрації мікродефектів при статичному і втомному руйнуванні тіла зі значенням концентрації мікродефектів, що має місце при руйнуванні матеріалу при одноосьовому статичному навантаженні.

Ключові слова: мікропошкоджуваність, статичне і втомне руйнування, критична щільність мікротріщин.

SUMMARY. It is proposed statistical criterion of strength for static and repetitive loading of brittle materials, which connects the beginning of macrodestruction in the form of education microcracks or loss of integrity of the body with the achievement of the density of microcracks in the material of a certain (critical) value. The essence of the proposed criterion is the identification of concentrations of microdefects in static and fatigue failure of the body with a concentration of microdefects, which takes place at the destruction of the material under uniaxial static loading.

Key words: mikrodamageability, static and fatigue failure, the critical density of microcracks.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
2. *Гузъ А.Н.* Разрушение в структуре материалов. – К.: Литера, 2008. – 592 с. (Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2 т. Т. 1).

3. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
4. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. Т.2. – М.: Наука, 1977. – 479 с.
5. *Салганик Р.Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. –1973. – № 4. – С. 149 – 158.
6. Статистические закономерности малоциклового нагружения. / Махутов Н. А., Зацаринный В. В., Базарас Ж. М. и др. – М.:Наука, 1989.– 252 с.
7. *Тамуж В.П., Куксенко В.С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
8. *Троценко В.Т., Сосновский Л.А.* Сопротивление усталости металлов и сплавов. Справочник в 2 частях. Часть 1.– Киев: Наукова думка, 1987.– 510 с.
9. *Babich D.V. and Bastun V.N.* On dispersed microdamageability of elastic-brittle materials under deformation // *J.Strain Analysis*. – 2010. – Vol. 45, № 1. – P. 57-66.
10. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – Vol.34, № 10. – P. 1120 – 1127.

Институт механики НАН Украины, г.Киев

Поступила 22.10.2011

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, канд. физ.-мат. наук,
О. И. ЛЕВЧУК, канд. физ.-мат. наук

ТРЕХМЕРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

Решена задача о контактном взаимодействии двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения. Контактная задача согласно подходу Герца сведена к решению интегрального уравнения. В замкнутом виде получено выражение для контактного давления, зависящего от силы сжатия и температурного влияния, а также соотношения для нахождения неизвестной области контакта тел. Численными исследованиями установлено влияние тепловыделения на параметры контактного взаимодействия тел.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, контактная задача, пьезоэлектрические тела, полупространство, тепловыделение.

Решениям пространственных контактных задач теории упругости для изотропных тел посвящены работы [3, 5, 11, 13]. Эти задачи с учетом тепловыделения решены в статьях [1, 2, 4, 10], а с учетом температурных полей на контактное взаимодействие трансверсально-изотропных упругих тел с жесткими штампами – в работах [8, 12]. Аналогичные задачи для пьезокерамических тел рассматривались в [6, 7, 9, 14]. Но контактное взаимодействие двух трансверсально-изотропных электроупругих (пьезокерамических) тел с учетом тепловыделения не исследовалось.

В настоящей статье решена пространственная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения. С помощью представления решения уравнений термоэлектроупругости через потенциальные функции задача сведена к интегральному уравнению, решение которого получено для площадки контакта эллиптической формы. В явном виде получено выражение для контактного давления, соотношения для определения геометрических размеров площадки контакта.

Постановка задачи. Рассмотрим два трансверсально-изотропных электроупругих (пьезокерамических) тела, ограниченных выпуклыми поверхностями S_1 и S_2 и соприкасающихся в точке O . Пусть оси $z_1^{(1)}$, $z_2^{(2)}$, перпендикулярные общей касательной плоскости и проведенные из общей точки касания вглубь тел, являются осями поляризации (симметрии) тел.

Согласно подходу Герца при рассмотрении локальных эффектов пьезокерамические тела заменим пьезокерамическими полупространствами с площадкой контакта Ω , расположенной в плоскости $z = z_1^{(1)} = z_2^{(2)} = 0$ внутри эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, с неизвестными полуосями a , b , определяемыми в процессе решения задачи. Для неэлектродированных поверхностей тел с учетом тепловыделения на их поверхностях на основе результатов исследований для упругих изотропных тел [1, 2] в контактной плоскости $z = 0$ получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(i)} = \sigma_{yz}^{(i)} = 0, \quad D_z^{(i)} = 0, \quad z = 0; \\
\sigma_{zz}^{(i)} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega; \\
\sigma_{zz}^{(i)} = -p^*(x, y) \quad (x, y) \in \Omega; \\
u_z^{(1)} + u_z^{(2)} = \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) \quad (x, y) \in \Omega; \\
T^{(i)}(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad (x, y) \in \Omega; \\
T^{(i)}(x, y, 0) = 0 \quad (x, y) \notin \Omega \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $i=1, 2$ – номер полупространства; $\varphi_i(x, y)$ – уравнения поверхностей тел S_i ; D_z – нормальная компонента вектора электрической индукции, $T_0(x, y)$ – функция распределения температурного поля на площадке контакта; $p^*(x, y)$ – неизвестное давление на площадке контакта, которое, как и полуоси эллиптической площадки контакта, находится в процессе решения задачи.

Основные соотношения. Уравнения стационарной термоэлектроруговости для пьезокерамического тела относительно перемещений u_x , u_y , u_z и электрического потенциала Ψ (при отсутствии массовых сил, сосредоточенных зарядов и источников тепла) можно записать так:

$$\begin{aligned}
c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\
+ (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = \beta_{11} T_{,x}, \\
c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,xy} + \\
+ (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = \beta_{11} T_{,y}, \\
(c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\
+ e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = \beta_{33} T_{,z}, \\
(e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15} (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \\
- \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = -p_3 T_{,z}, \\
\lambda_{11} (T_{,xx} + T_{,yy}) + \lambda_{33} T_{,zz} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где c_{11}^E , c_{12}^E , c_{13}^E , c_{33}^E , c_{44}^E – модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле; e_{31} , e_{15} , e_{33} – пьезомодули; ε_{11}^S , ε_{33}^S – диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации; λ_{11} , λ_{33} – коэффициенты теплопроводности; β_{11} , β_{33} – постоянные, зависящие от коэффициентов линейного расширения и упругих свойств мате-

риалов; p_3 – пирозлектрическая постоянная.

Решение системы уравнений (4) можно выразить через пять следующих потенциальных функции Φ_i ($i = \overline{1, 5}$) [15]:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,x} + \Phi_{5,y}, & u_y &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,y} - \Phi_{5,x}, \\ u_z &= \sum_{j=1}^4 k_j \Phi_{j,z}, & \Psi &= \sum_{j=1}^4 l_j \Phi_{j,z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь k_i, l_i – постоянные, определяемые из решения задачи.

После подстановки перемещений и потенциала (3) в уравнения (2) эти уравнения удовлетворяются тождественно, если функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (4)$$

где $v_5 = \frac{2c_{44}^E}{c_{11}^E - c_{12}^E}$, v_i ($i = 1, 2, 3$) – корни алгебраического уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned} &v^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ &+ v (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0; \\ A_1 &= c_{11}^E e_{15}, \quad A_2 = (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15}, \\ A_3 &= c_{44}^E e_{33}, \quad B_2 = -\left[\varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15} (e_{31} + e_{15}) \right], \\ B_3 &= \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33} (e_{31} + e_{15}), \quad C_1 = -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S, \\ C_2 &= (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S, \quad C_3 = -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S, \\ D_2 &= e_{15} (c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}), \\ D_3 &= c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E). \end{aligned} \quad (5)$$

Постоянные k_j, l_j ($i = 1, 2, 3$) в выражениях (3) связаны с величинами v_j соотношениями

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad (7)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j, \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Потенциальная функция Φ_4 одновременно удовлетворяет двум уравнениям

$$\Phi_{4,zz} = \frac{m}{k^2} T, \quad \Phi_{4,xx} + \Phi_{4,yy} + k^2 \Phi_{4,zz} = 0, \quad (9)$$

в которых $k^2 = \lambda_{33} / \lambda_{11}$ (отношение коэффициентов теплопроводности), m – неизвестная постоянная.

Значения k_j , l_j можно представить в виде

$$k_j = \frac{\left[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15}) \right]}{\left[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) \right]},$$

$$l_j = \frac{\left[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2 \right]}{\left[(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) \right]} \quad (j=1, 2, 3). \quad (10)$$

Для определения неизвестных постоянных k_4 , l_4 получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} & \left(\beta_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} c_{33}^E + \beta_{11} c_{44}^E k^2 \right) k_4 + \left(\beta_{33} (e_{15} + e_{31}) - \beta_{11} e_{33} + \right. \\ & \quad \left. + \beta_{11} e_{15} k^2 \right) l_4 + \left(\beta_{33} (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (c_{44}^E + c_{13}^E) k^2 \right) = 0, \\ & \left(-p_3 (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} e_{33} + \beta_{11} e_{15} k^2 \right) k_4 + \left(-p_3 (e_{15} + e_{31}) + \beta_{11} \varepsilon_{33}^S - \right. \\ & \quad \left. - \beta_{11} \varepsilon_{11}^S k^2 \right) l_4 + \left(-p_3 (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (e_{15} + e_{31}) k^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Значение m выражается через значения k_4 , l_4 :

$$m = \frac{\beta_{11} k^2}{c_{44}^E + (c_{13}^E + c_{44}^E) k_4 + (e_{15} + e_{31}) l_4 - c_{11}^E k^2}. \quad (12)$$

Если вводить обозначения $z_j = z n_j^{-1/2}$ ($j = \overline{1, 5}$), то функции $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$, $\Phi_5(x, y, z_5)$ будут гармоническими функциями в соответствующей системе координат.

Метод решения. Для каждого из полупространств температурное поле представим в виде потенциала двойного слоя

$$T(x, y, z_4) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_4} \iint_{\Omega} \frac{T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2]^{1/2}}. \quad (13)$$

В силу свойств этого классического потенциала имеем

$$T(x, y, z_4) \Big|_{z_4=z=0} = \begin{cases} T_0(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Для каждого из полупространств воспользуемся суперпозицией двух состояний [9]. Для первого из состояний суперпозиции потенциальную функцию $\Phi_4(x, y, z_4)$ выберем в виде

$$\Phi_4^{(1)}(x, y, z_4) = F(x, y, z_4) = m \iint_{\Omega} T_0(\xi, \eta) \ln(\rho_4 + z_4) d\xi d\eta. \quad (14)$$

Здесь $\rho_4(x, y, z_4) = \sqrt{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2]}$. Для этого состояния также положим $\Phi_i^{(1)}(x, y, z_i) = \alpha_i^* F(x, y, z_i)$ ($i=1, 2, 3$), $\Phi_5^{(1)} = 0$, где α_1^* , α_2^* , α_3^* – постоянные, которые определим из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1^* a_1 / \sqrt{v_1} + \alpha_2^* a_2 / \sqrt{v_2} + \alpha_3^* a_3 / \sqrt{v_3} &= -a_4 / k, \\ \alpha_1^* k_1 / \sqrt{v_1} + \alpha_2^* k_2 / \sqrt{v_2} + \alpha_3^* k_3 / \sqrt{v_3} &= -k_4 / k, \\ \alpha_1^* d_1 + \alpha_2^* d_2 + \alpha_3^* d_3 &= -d_4. \end{aligned}$$

Для второго состояния суперпозиции функции $\Phi_j^{(2)}$ ($j=1, 2, 3, 4, 5$) выберем в форме

$$\Phi_i^{(2)}(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \beta_i^* \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i=1, 2, 3), \quad (15)$$

в которой $\rho_i = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}$ ($i=1, 2, 3$), β_i^* – неизвестные пока постоянные, $p(\xi, \eta)$ – функция, определяемая в процессе решения задачи. Положим также $\Phi_4^{(2)} = \Phi_5^{(2)} = 0$. Согласно выражениям (15) для других потенциальных функций получаем

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \Phi_i^{(2)}(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \beta_i^* \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}} \quad (i=1, 2, 3).$$

Постоянные β_i^* ($i=1, 2, 3$) для второго состояния суперпозиции выберем такими, чтобы они удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \beta_1^* a_1 + \beta_2^* a_2 + \beta_3^* a_3 &= 1, \\ \beta_1^* a_1 / \sqrt{v_1} + \beta_2^* a_2 / \sqrt{v_2} + \beta_3^* a_3 / \sqrt{v_3} &= 0, \\ \beta_1^* d_1 + \beta_2^* d_2 + \beta_3^* d_3 &= 0. \end{aligned}$$

Окончательно для суперпозиции состояний для каждого из полупространств получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} &= 0 \text{ при } z = 0; \\ u_z|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} A^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \begin{cases} -p(x, y) - \gamma_S^{Piezo2} T_0(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

$$D_z|_{z=0} = 0 \text{ при } z = 0,$$

$$\text{где } \gamma_S^{Piezo} = -m \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i^* a_i + a_4 \right); \quad A^{Piezo} = \left(\sum_{j=1}^3 \beta_j^* \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \right).$$

Отметим, что при переходе от пьезокерамического материала к чисто упругому трансверсально-изотропному материалу имеем $A^{Piezo} \rightarrow A^{Trans}$ и $\gamma_S^{Piezo} \rightarrow \gamma^{Trans}$, где A^{Trans} и γ^{Trans} – величины, имеющие явные выражения [8]. Осуществляя далее переход к упругому изотропному материалу, имеем $A^{Trans} \rightarrow (1 - \nu) / \mu$, $\gamma^{Trans} \rightarrow \mu\alpha(1 + \nu) / (1 - \nu)$ (ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, α – коэффициент линейного расширения материала).

Обозначим через $p^*(x, y)$ контактное давление при взаимодействии пьезокерамических тел. Тогда, используя выражения напряжений σ_{zz} в плоскости контакта $z = 0$, получаем, что $p^*(x, y) = p(x, y) + \gamma_S^{Piezo} T_0(x, y)$. Перемещения u_z в плоскости контакта для каждого из полупространств можно получить с помощью контактного давления и распределения температурного поля:

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} A^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} A^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{[p^*(x, y) - \gamma_S^{Piezo} T_0(x, y)] d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} A^{Piezo} \left(\iint_{\Omega} \frac{p^*(x, y) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \gamma_S^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В результате контакта двух пьезокерамических полупространств с различными свойствами имеем

$$\begin{aligned} \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left[(A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}) \iint_{\Omega} \frac{p^*(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \right. \\ &\quad \left. - (A_1^{Piezo} \gamma_{S1}^{Piezo} + A_2^{Piezo} \gamma_{S2}^{Piezo}) \iint_{\Omega} \frac{T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right] \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \end{aligned}$$

Исследуя локальные эффекты, согласно теории Герца, приходим к инте-

гравльному уравнению

$$\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{N^*(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (17)$$

где $N^*(\xi, \eta) = (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}) p^*(\xi, \eta) - (A_1^{Piezo} \gamma_{S1}^{Piezo} + A_2^{Piezo} \gamma_{S2}^{Piezo}) T_0(\xi, \eta)$.

Для задачи с тепловыделением рассмотрим случай распределения температурного поля на площадке в виде $T_0(x, y) = T_0^*(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$ $(x, y) \in \Omega$, обоснование выбора которого дано в работах [1, 2]. Тогда после подстановки функции распределения температурного поля в интегральное уравнение, следуя схеме рассмотрения задачи для двух изотропных полупространств [1, 2], имеем

$$p^*(x, y) = \frac{3}{2} \left(\frac{P}{\pi ab} - \frac{1}{2} \gamma_{Piezo}^* T_0^* \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2} + \gamma_{Piezo}^* T_0^* \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (x, y) \in \Omega. \quad (18)$$

Здесь $\gamma_{Piezo}^* = (A_1^{Piezo} \gamma_{S1}^{Piezo} + A_2^{Piezo} \gamma_{S2}^{Piezo}) / (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo})$, P – сила, прижимающая пьезокерамические тела. Максимальное контактное давление в центре площадки контакта принимает вид

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} + \frac{1}{4} \gamma_{Piezo}^* T_0^*. \quad (19)$$

Значение δ , характеризующее сближение двух пьезоэлектрических тел, после вычислений находим в виде

$$\delta = \frac{P_0}{2} a \sqrt{1-e^2} K(e), \quad p_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{P}{\pi ab} - \frac{1}{2} \gamma_0^* \right) (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}). \quad (20)$$

Эксцентриситет эллипса площадки контакта аналогично взаимодействию упругих тел определяется из выражения

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2)[K(e) - E(e)]}{E(e) - (1-e^2)K(e)}, \quad (21)$$

в котором $K(e)$, $E(e)$ – полные эллиптические интегралы. Значения полуосей эллиптической площадки контакта находим на основе соотношений

$$a = \varepsilon a_0, \quad b = a \sqrt{1-e^2}, \quad a_0 = \left[P R_1 (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}) \right]^{1/3} \alpha_0, \quad \alpha_0 = \left[\frac{3}{2\pi} D(e) \right]^{1/3}, \quad D(e) = [K(e) - E(e)] / e^2. \quad (22)$$

Значение $\varepsilon = a / a_0$ является решением кубического уравнения

$$\varepsilon^3 + \omega \varepsilon^2 = 1, \quad (23)$$

где

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{R_1}{a_0} \left(A_1^{Piezo} \gamma_{S1}^{Piezo} + A_2^{Piezo} \gamma_{S2}^{Piezo} \right) T_0^* \sqrt{1 - e^2} D(e).$$

С помощью полученных выражений определяются контактное давление и геометрические параметры площадки контакта. Из найденных выражений следует, что при нагреве ($T_0^* > 0$) температурное воздействие уменьшает размеры площадки контакта двух пьезокерамических тел.

Отметим, что из выражений (18)–(23) для параметров контактного взаимодействия пьезокерамических тел (с учетом влияния температурного поля) предельным переходом следуют соответствующие параметры контакта для двух упругих трансверсально-изотропных тел с учетом тепловыделения. Последующим предельным переходом также следуют результаты работ [1, 2] для контакта двух упругих изотропных тел с учетом тепловыделения. Также, полагая в выражениях (18)–(23) значение $T_0^* = 0$, получаем соотношения для нахождения параметров контакта для двух пьезокерамических тел при отсутствии тепловыделения и в предположении об отсутствии электродного покрытия на поверхностях контактирующих тел.

Анализ результатов численных исследований. Проведены численные исследования по выявлению влияния тепловыделения на характеристики контактного взаимодействия двух тел. Все основные параметры контактного взаимодействия тел определяются выражениями (18)–(23). На рис. 1 для случая сжатия двух тел и тепловыделения (распределения температуры) приведен график изменения значения большой полуоси эллиптической площадки контакта в зависимости от параметра ω . По известному эксцентриситету эллипса из соотношения (21), значение второй полуоси эллипса определяется выражением $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Если $\omega = 0$, то приходим к контакту двух пьезокерамических тел без тепловыделения.

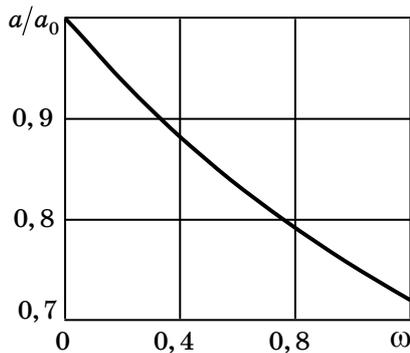


Рис.1

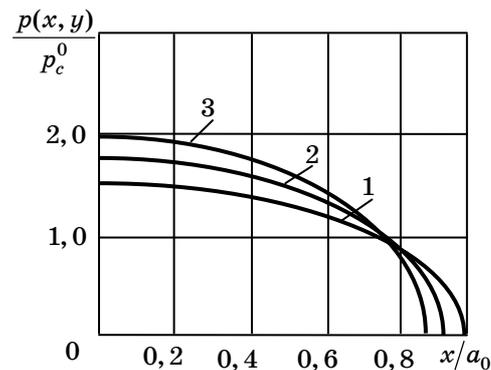


Рис.2

На рис.2 изображены графики распределения контактного давления вдоль оси Ox . Для рис. 2 принято $p_c^0 = P/(\pi ab)$, кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям T_0^* , равным 0, $P/[(\pi ab)\gamma_{Piezo}^*]$, $2P/[(\pi ab)\gamma_{Piezo}^*]$.

Из рис. 1, 2 и других полученных результатов следует, что при увеличении тепловыделения (увеличении значения T_0^*) размеры площадки контакта тел уменьшаются, а значения контактных напряжений увеличиваются. Тепловыделение может существенно влиять на все основные параметры контактного взаимодействия тел.

Из полученных результатов как частные случаи следуют параметры контактного взаимодействия двух упругих трансверсально-изотропных тел с учетом тепловыделения, для изотропных упругих тел [1, 2], а также решение задачи Герца для двух пьезокерамических тел без тепловыделения.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто контактну взаємодію двох п'єзокерамічних тіл з врахуванням тепловиділення. Проблему досліджено згідно підходу Герца. Контактну задачу зведено до пошуку розв'язку інтегрального рівняння, що враховує властивості п'єзокерамічних тіл і розподіли температурного поля спеціального виду на площадці контакту. У замкненому вигляді отримано вираз для обчислення контактного тиску, а також співвідношення для пошуку невідомої області контакту тіл, що залежить від сили притискання та температурного впливу. Чисельними дослідженнями встановлено вплив тепловиділення на параметри контактної взаємодії п'єзокерамічних тіл.

Ключові слова: термоэлектропружність, контактна задача, п'єзоелектричні тіла, півпростір, тепловиділення.

SUMMARY. The contact interaction of two piezoelectric bodies taking into account of heat generation was considered. The problem was researched in according to Hertz's approach. Contact problem was reduced to the solution of the integral equation, which takes into account the properties of two piezoelectric bodies, and also the distribution of temperature field in a contact area. The expression of the contact pressure was obtained in closed form, and relations for searching of unknown contact area, that depend on the force of loading and temperature influence, were found also. The parameters of contact interaction (in view of heat generation) of two piezoelectric transversally isotropic bodies and contact characteristics of two piezoelectric bodies (at absence of temperature effect) follow from obtained the formulas as the particular cases. The numerical researches were carried out. The effect of heat generation on the parameters of contact interaction of two piezoelectric bodies was established.

Key words: thermoelectroelasticity, contact problem, piezoelectric bodies, half-spaces, heat generation.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бородачев Н. М., Тариков Г. П.* Определение наибольших расчетных напряжений под площадкой контакта с учетом тепловыделения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 6. – С. 76–84.
2. *Бородачев Н. М., Тариков Г. П.* Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения при трении скольжения // Трение и износ. – 2003. – Т. 24, № 2. – С. 153–160.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
4. *Грилицкий Д. В., Краснюк П. П.* Стационарный термоупругий контакт двух цилиндров с фрикционным теплообразованием // Трение и износ. – 1996. – Т. 17, № 3. – С. 312–319.
5. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.

6. *Кирилюк В. С.* О давлении нагретого жесткого кругового штампа на пьезокерамическое полупространство с отслоением материала под штампом // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 144–151.
7. *Кирилюк В. С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 29–35.
8. *Кирилюк В. С.* О связи контактных задач термоупругости для изотропного и трансверсально-изотропного полупространств // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 37–42.
9. *Кирилюк В. С.* О соответствии между решениями специального класса контактных задач термоупругости и термоэлектроупругости для полупространства // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 69–76.
10. *Коровчинский М. В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкасания // Контактная прочность машиностроительных материалов. – М.: Наука, 1964. – С. 5–24.
11. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
12. *Подильчук Ю. Н., Ткаченко В. Ф., Соколовский Я. И.* Термоупругая контактная задача о вдавлении нагретого эллиптического в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство // Прикладная механика– 1996.– Т. 32, № 11.– С. 38–45.
13. *Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B.* Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 7. – P. 744–765.
14. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170.
15. *Shang F., Kuna M., Kitamura T.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2003.– Vol. 40, № 3. – P. 237–246.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 20.10.2011.

УДК 539.3:534.1

Е. В. АЛТУХОВ, канд. физ-мат. наук, *М. В. ФОМЕНКО***КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКОЙ ТОРЦОВ И ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ**

В пространственной постановке решена задача теории упругости об установившихся колебаниях трехслойных изотропных пластин симметричного строения с жесткой заделкой плоских граней. На границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта без отрыва. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Проведен асимптотический анализ и численные исследования дисперсионных уравнений. Представлены диаграммы спектральных кривых, графики изменения фазовых и групповых скоростей.

Ключевые слова: дисперсионные спектры, жесткая заделка, метод однородных решений, скользящий контакт, трехслойная пластина, установившиеся колебания, фазовые и групповые скорости.

Развитие теорий поперечно-неоднородных упругих пластин и методов решения конкретных задач отражено в обзорных статьях [14, 21, 22] и монографиях, например, [15, 19], в которых отмечается актуальность развития известных и создания новых аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния и волновых полей в слоистых пластинах на основе уравнений трехмерной теории упругости. Для пространственных задач статики и динамики трехслойных пластин важную роль сыграли предложенные в работе [12] однородные решения, с помощью которых решены различные задачи [9, 15, 16]. В работе [9] впервые полуобратным методом получена полная система однородных решений уравнений равновесия в перемещениях для трехслойной плиты симметричного строения. Исследованию свойств однородных решений неоднородных плит посвящены работы [15, 16]. Колебания трехслойной пластины в случае идеального контакта слоев для различных граничных условий на торцах исследовались с использованием однородных решений в работах [4, 5, 7, 18]. Однако может иметь место наличие поверхностей ослабленного механического контакта [11]. В частности, на границе слоев может иметь место условие полного проскальзывания при неразрывности нормальных компонент смещений и напряжений [13]. Для колебаний трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев в работах [6, 17] получены однородные решения.

В настоящей статье на основе метода однородных решений в трехмерной постановке решена задача о гармонических колебаниях трехслойной пластины, плоские грани которой жестко закреплены, а на границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину симметричного строения относительно ее срединной плоскости со слоями из изотропных материалов и находящимися друг с другом в условиях скользящего контакта. На лицевых гранях пластины выполняются условия же-

сткого закрепления. На боковой поверхности действуют внешние гармонически изменяющиеся во времени усилия.

Отнесем пластину к размерным прямоугольным координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Срединную плоскость пластины совместим с координатной плоскостью $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$. Тогда $|\tilde{x}_3| \leq (h_1 + h_2)$, где h_1 – толщина внешних одинаковых слоев, $2h_2$ – толщина внутреннего слоя. Величины, относящиеся к внешним слоям, обозначим индексом 1 внизу, к внутреннему – индексом 2, \tilde{G}_m – модуль сдвига, ρ_m – плотность материала, ν_m – коэффициент Пуассона, m – номер слоя.

Введем безразмерные величины и координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, & x_2 &= \tilde{x}_2/R, & x_3 &= \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), \\ \lambda &= h/R, & h &= h_1 + h_2, & \lambda_1 &= h_1/h, & \lambda_2 &= h_2/h, \\ u_{mi} &= \tilde{u}_{mi}/R, & \sigma_{mij} &= \tilde{\sigma}_{mij}/(2\tilde{G}_2) \quad (i, j = \overline{1, 3}, m = 1, 2); \\ G_m &= \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, & G_1 &= G. \end{aligned}$$

Тогда построение однородных решений задачи об установившихся колебаниях рассматриваемой пластины сводится к интегрированию уравнений движения

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{mj} + \left(D^2 + \frac{\Omega_m^2}{\lambda^2} \right) u_{mj} + \nu_{m0} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{m3} + \left(D^2 + \frac{\Omega_m^2}{\lambda^2} \right) u_{m3} + \lambda^{-1} \nu_{m0} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

для каждого слоя с учетом граничных условий

$$\begin{aligned} u_{1i}(x_1, x_2, 1) &= 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \\ u_{13}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{23}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{233}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{1j3}(x_1, x_2, \lambda_2) &= 0, \quad \sigma_{2j3}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & D^2 &= \partial_1^2 + \partial_2^2, & \theta_m &= \partial_1 u_{m1} + \partial_2 u_{m2} + \lambda^{-1} \partial_3 u_{m3}, \\ \nu_{m0} &= \frac{1}{1 - 2\nu_m}, & \Omega_m &= h\omega / c_{mS}, & c_{mS} &= \sqrt{\frac{\tilde{G}_m}{\rho_m}}. \end{aligned}$$

Построение однородных решений. Однородные решения задачи (1), (2) для симметричных (обозначаемым значком «+»вверху) и кососимметричных (обозначаемым значком «-») колебаний можно представить в ви-

де суммы вихревого и потенциального состояний:

$$u_{mi}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = u_{miB}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) + u_{mi\Pi}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1, 3}; m = 1, 2).$$

Перемещения вихревого состояния имеют вид [9]

$$u_{m1B}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^{\pm}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2),$$

$$u_{m2B}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^{\pm}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \quad u_{m3B}^{\pm} = 0.$$

Здесь

$$p_{1k}^{\pm}(x_3) = \cos l_{1k}^{\pm}(x_3 - \lambda_2), \quad p_{2k}^{\pm}(x_3) = 0, \quad \text{когда } \cos l_{1k}^{\pm} \lambda_1 = 0;$$

$$p_{1k}^+(x_3) = 0, \quad p_{2k}^+(x_3) = \cos l_{2k}^+ x_3, \quad \text{при } \sin l_{2k}^+ \lambda_2 = 0;$$

$$p_{1k}^-(x_3) = 0, \quad p_{2k}^-(x_3) = \frac{1}{l_{2k}^-} \sin l_{2k}^- x_3, \quad \text{в случае } \cos l_{2k}^- \lambda_2 = 0;$$

$$D^2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) - \left(\frac{\delta_k^{\pm}}{\lambda} \right)^2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) = 0, \quad (l_{mk}^{\pm})^2 = \Omega_m^2 + (\delta_k^{\pm})^2;$$

δ_k^{\pm} – собственные значения.

Потенциальное решение будем искать в виде

$$u_{mj\Pi}(x_1, x_2, x_3) = n_m(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2),$$

$$u_{m3\Pi}(x_1, x_2, x_3) = q_m(x_3) C(x_1, x_2). \quad (3)$$

Из соотношений (1) – (3) следует, что функция $C(x_1, x_2)$ удовлетворяет метагармоническому уравнению

$$D^2 C(x_1, x_2) - \left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ и параметра разделения переменных γ получаем спектральную задачу

$$n_m'' + \left[\Omega_m^2 + \gamma^2 (1 + \nu_{m0}) \right] n_m + \lambda \nu_{m0} q_m' = 0,$$

$$q_m'' + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + \nu_{m0}} q_m + \frac{\gamma^2 \nu_{m0}}{\lambda (1 + \nu_{m0})} n_m' = 0,$$

$$n_1(1) = 0, \quad q_1(1) = 0, \quad q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2),$$

$$\lambda q_1(\lambda_2) + n_1'(\lambda_2) = 0, \quad \lambda q_2(\lambda_2) + n_2'(\lambda_2) = 0,$$

$$G \left[\gamma^2 (\nu_{10} - 1) n_1(\lambda_2) + \lambda (\nu_{10} + 1) q_1'(\lambda_2) \right] =$$

$$= \gamma^2 (\nu_{20} - 1) n_2 (\lambda_2) + \lambda (\nu_{20} + 1) q_2' (\lambda_2). \quad (4)$$

Общим решением краевой задачи (4) являются функции

$$\begin{aligned} n_1^\pm (x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma_{11}^\pm (x_3 - \lambda_2) + H_2^\pm \sin \gamma_{11}^\pm (x_3 - \lambda_2) + \\ &\quad + H_3^\pm \cos \gamma_{12}^\pm (x_3 - \lambda_2) + H_4^\pm \sin \gamma_{12}^\pm (x_3 - \lambda_2), \\ q_1^\pm (x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma_{11}^\pm (x_3 - \lambda_2) + Q_2^\pm \cos \gamma_{11}^\pm (x_3 - \lambda_2) + \\ &\quad + Q_3^\pm \sin \gamma_{12}^\pm (x_3 - \lambda_2) + Q_4^\pm \cos \gamma_{12}^\pm (x_3 - \lambda_2), \\ n_2^+ (x_3) &= H_5^+ \cos \gamma_{21}^+ x_3 + H_6^+ \cos \gamma_{22}^+ x_3, \\ q_2^+ (x_3) &= Q_5^+ \sin \gamma_{21}^+ x_3 + Q_6^+ \sin \gamma_{22}^+ x_3, \\ n_2^- (x_3) &= H_5^- \sin \gamma_{21}^- x_3 + H_6^- \sin \gamma_{22}^- x_3, \\ q_2^- (x_3) &= Q_5^- \cos \gamma_{21}^- x_3 + Q_6^- \cos \gamma_{22}^- x_3, \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \gamma_{m1}^2 &= k_m^2 \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad \gamma_{m2}^2 = \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad k_m^2 = \frac{1 - 2\nu_m}{2 - 2\nu_m}; \\ Q_i^\pm &= \lambda^{-1} a_i^\pm H_i^\pm, \quad a_1^\pm = -\gamma_{11}^\pm, \quad a_2^\pm = \gamma_{11}^\pm, \\ a_3^\pm &= -\frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{12}^\pm}, \quad a_4^\pm = \frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{12}^\pm}, \quad a_5^\pm = \mp \gamma_{21}^\pm, \quad a_6^\pm = \mp \frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{22}^\pm}; \end{aligned}$$

H_i^\pm ($i = \overline{1, 6}$) – постоянные, определяемые из однородных систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} H_1^\pm C_{11}^\pm + H_2^\pm S_{11}^\pm + H_3^\pm C_{12}^\pm + H_4^\pm S_{12}^\pm &= 0, \\ H_1^\pm \gamma_{11}^\pm S_{11}^\pm - H_2^\pm \gamma_{11}^\pm C_{11}^\pm + H_3^\pm \beta_{12}^\pm S_{12}^\pm - H_4^\pm \beta_{12}^\pm C_{12}^\pm &= 0, \\ H_2^\pm \gamma_{11}^\pm + H_4^\pm \beta_{12}^\pm \pm H_5^\pm \gamma_{21}^\pm \frac{S_{21}^\pm}{C_{21}^\pm} \pm H_6^\pm \beta_{22}^\pm \frac{S_{22}^\pm}{C_{22}^\pm} &= 0, \\ GH_1^\pm (\kappa_{12}^\pm)^2 + 2GH_3^\pm (\gamma^\pm)^2 - H_5^\pm (\kappa_{22}^\pm)^2 \frac{C_{21}^\pm}{S_{21}^\pm} - 2H_6^\pm (\gamma^\pm)^2 \frac{C_{22}^\pm}{S_{22}^\pm} &= 0, \\ 2H_2^\pm \gamma_{11}^\pm + H_4^\pm \alpha_{12}^\pm = 0, \quad 2H_5^\pm \gamma_{21}^\pm \frac{S_{21}^\pm}{C_{21}^\pm} + H_6^\pm \alpha_{22}^\pm \frac{S_{22}^\pm}{C_{22}^\pm} &= 0, \quad (5) \\ S_{mj}^\pm &= \sin \gamma_{mj}^\pm \lambda_m, \quad C_{mj}^\pm = \cos \gamma_{mj}^\pm \lambda_m \quad (j, m = 1, 2), \\ \alpha_{m2}^\pm &= \frac{(\kappa_{m2}^\pm)^2}{\gamma_{m2}^\pm}, \quad (\kappa_{m2}^\pm)^2 = (\gamma^\pm)^2 + (\gamma_{m2}^\pm)^2, \quad \beta_{m2}^\pm = \frac{(\gamma^\pm)^2}{\gamma_{m2}^\pm}. \end{aligned}$$

В результате решения этих систем выражения для коэффициентов H_i^\pm получаются такими:

$$\begin{aligned}
H_1^\pm &= \left((\gamma^2 + \gamma_{12}^2) (\gamma_{11}\gamma_{12}C_{11}C_{12} + \gamma^2S_{11}S_{12}) - 2\gamma^2\gamma_{11}\gamma_{12} \right) \gamma_{21}\Omega_2^2 \frac{S_{21}}{C_{21}} \frac{S_{22}}{C_{22}}, \\
H_2^\pm &= (\gamma^2 + \gamma_{12}^2) \Delta \gamma_{21}\Omega_2^2 \frac{S_{21}}{C_{21}} \frac{S_{22}}{C_{22}}, \\
H_3^\pm &= \gamma_{11}\gamma_{12} \left(2(\gamma_{11}\gamma_{12}S_{11}S_{12} + \gamma^2C_{11}C_{12}) - (\gamma^2 + \gamma_{12}^2) \right) \gamma_{21}\Omega_2^2 \frac{S_{21}}{C_{21}} \frac{S_{22}}{C_{22}}, \\
H_4^\pm &= -2\gamma_{11}\gamma_{12}\Delta\gamma_{21}\Omega_2^2 \frac{S_{21}}{C_{21}} \frac{S_{22}}{C_{22}}, \quad H_5^\pm = \mp\gamma_{11}\Omega_1^2\Delta(\gamma^2 + \gamma_{22}^2) \frac{S_{22}}{C_{22}}, \\
H_6^\pm &= \pm 2\gamma_{11}\Omega_1^2\Delta\gamma_{21}\gamma_{22} \frac{S_{21}}{C_{21}},
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = \gamma_{11}\gamma_{12}S_{11}C_{12} - \gamma^2C_{11}S_{12}.$$

Из условия равенства нулю определителей систем (5) для нахождения собственных значений γ^\pm получаем дисперсионные уравнения

$$\begin{aligned}
F^+(\gamma, \Omega) &\equiv \frac{\eta}{G} \gamma_{11} (t_1S_{11}C_{12} - \gamma^2C_{11}S_{12}) (\xi_2C_{21}S_{22} - \tau_2S_{21}C_{22}) + \\
&\quad + G (t_1(4\gamma^4 + \xi_1)C_{11}C_{12} + \gamma^2(4t_1^2 + \xi_1)S_{11}S_{12} - \tau_1\zeta_1) \gamma_{21}S_{21}S_{22} = 0, \\
F^-(\gamma, \Omega) &\equiv \frac{\eta}{G} \gamma_{11} (t_1S_{11}C_{12} - \gamma^2C_{11}S_{12}) (\xi_2S_{21}C_{22} - \tau_2C_{21}S_{22}) - \\
&\quad - G (t_1(4\gamma^4 + \xi_1)C_{11}C_{12} + \gamma^2(4t_1^2 + \xi_1)S_{11}S_{12} - \tau_1\zeta_1) \gamma_{21}C_{21}C_{22} = 0, \quad (6)
\end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \tau_m = 4\gamma^2\gamma_{m1}\gamma_{m2}, \quad t_m = \gamma_{m1}\gamma_{m2}, \\
\zeta_m &= \gamma^2 + \gamma_{m2}^2, \quad \xi_m = \zeta_m^2.
\end{aligned}$$

Для определения частот запираания [10] полагаем в соотношениях (6) $\gamma = 0$ и получаем трансцендентные уравнения

$$\begin{aligned}
F^+(0, \Omega) &= (Gk_2\Omega_1c_{11}s_{21} + k_1\Omega_2s_{11}c_{21})c_{12}s_{22}, \\
F^-(0, \Omega) &= (Gk_2\Omega_1c_{11}c_{21} - k_1\Omega_2s_{11}s_{21})c_{12}c_{22}, \quad (7)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
s_{m1} &= \sin k_m\Omega_m\lambda_m, \quad s_{m2} = \sin \Omega_m\lambda_m, \\
c_{m1} &= \cos k_m\Omega_m\lambda_m, \quad c_{m2} = \cos \Omega_m\lambda_m.
\end{aligned}$$

Каждое из уравнений (7) определяет по три независимые серии частот запираания. Причем частоты вторых и третьих серий находятся в явном виде и не зависят от значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 в отличие от частот первых семейств, которые находятся численно.

Асимптотический анализ уравнений и предельные соотношения. Для определения корней дисперсионных уравнений (6) важным является поиск точек их пересечения с плоскостью $\Omega = 0$. Предельный переход к задачам статики осуществляется с помощью разложений функции $F^\pm(\gamma, \Omega)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\Omega = 0$. Если $\Omega \rightarrow 0$, то из уравнений (6) получаем

$$\begin{aligned} F^+(\gamma, 0) &\equiv \left((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1 \right) (\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) + \\ &+ 4G \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \left((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma\lambda_1 - (\gamma\lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2 \right) \sin^2 \gamma\lambda_2 = 0, \\ F^-(\gamma, 0) &\equiv \left((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1 \right) (\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) - \\ &- 4G \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \left((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma\lambda_1 - (\gamma\lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2 \right) \cos^2 \gamma\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Для симметричных колебаний в особом положении оказывается первая мнимая ветвь дисперсионного спектра уравнения (6), проходящая через начало координат $\gamma = 0, \Omega = 0$. Соответствующая дисперсная мода оказывается распространяющейся при любой частоте Ω . Для анализа скоростей этой моды при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить первое дисперсионное уравнение (6) за счет малости величин $v = \text{Im } \gamma, \Omega$. При этом для безразмерной фазовой скорости $v_p = c_p / c_{2S} = \Omega_2 / v$ имеем

$$v_p^+ = \sqrt{\frac{4\lambda_1 k_1^2 (1 - k_2^2) + G\lambda_2}{\lambda_1 k_1^2 + G\lambda_2 k_2^2}}.$$

Из этой формулы следует, что в низкочастотном диапазоне симметричная волна является бездисперсной, и ее групповая скорость совпадает с фазовой.

При $\gamma \rightarrow \infty$ из обоих уравнений (6) для первой бегущей моды получаем уравнение

$$r_1 \frac{\eta}{G} \left((1 + s_2^2)^2 - 4r_2 s_2 \right) + G r_2 \left((1 + s_1^2)^2 - 4r_1 s_1 \right) = 0, \quad (8)$$

где

$$r_m = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{mP}^2}}, \quad s_m = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{mS}^2}},$$

c_{mP}, c_{mS} — соответственно скорости продольных и сдвиговых волн в ма-

териале m -го слоя.

Уравнение (8) совпадает с известным [10] для нахождения скорости c_{St} волны Стоунли вблизи поверхности раздела двух упругих полупространств с условиями проскальзывания по поверхности контакта. Поэтому для коротких волн границы пластины не влияют на характер волнового процесса, и вид граничных условий на торцах не имеет значения. Фазовая скорость первой распространяющейся моды в коротковолновом высокочастотном пределе получается такой же, как и скорость поверхностной волны Стоунли. Для остальных ветвей при $\gamma \rightarrow \infty$ имеем

$$c = \min \{c_{1S}, c_{2S}\}.$$

Рассмотрим случай соотношений параметров упругости в слоях: $G = 1$, $\eta = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Тогда дисперсионные уравнения (6) имеют вид

$$\begin{aligned} F^+(\gamma, \Omega) &= 2(tS_1C_2 - \gamma^2C_1S_2)(\xi C_1S_2 - \tau S_1C_2) + \gamma^2(2tS_1 - \zeta S_2)^2 = 0, \\ F^-(\gamma, \Omega) &= 2(tS_1C_2 - \gamma^2C_1S_2)(\xi S_1C_2 - \tau C_1S_2) - t(2\gamma^2C_1 - \zeta C_2)^2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} C_j &= \cos \frac{\gamma_j}{2}, \quad S_j = \sin \frac{\gamma_j}{2} \quad (j = 1, 2), \quad t = \gamma_1\gamma_2, \\ \xi &= (\gamma^2 + \gamma_2^2)^2, \quad \tau = 4\gamma^2\gamma_1\gamma_2, \quad \zeta = \gamma^2 + \gamma_2^2, \\ \gamma_1^2 &= \gamma^2 + k^2\Omega^2, \quad \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2, \quad k^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}. \end{aligned}$$

Из уравнений (9) получаются предельные соотношения, описывающие асимптотические значения фазовой скорости на низких и высоких частотах, к которым должны стремиться численные решения этих уравнения. Упрощенное уравнение (9) для симметричного случая в области низких частот сводится к виду

$$2k^2\Omega^2 + (4k^2 - 4k^4 + 1)\gamma^2 = 0,$$

Из данного уравнения получаем, что предельным значением безразмерной фазовой скорости v_p в области низких частот является значение

$$v_p^+ = \sqrt{2(1 - k^2) + \frac{1}{2k^2}}.$$

В области высоких частот уравнения (9) для первой мнимой ветви сводятся к уравнению для скорости волны Рэлея

$$(2 - v_p^2)^2 - 4\sqrt{1 - k^2v_p^2}\sqrt{1 - v_p^2} = 0.$$

Таким образом, безразмерная фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом пределе значение безразмерной скорости волны Рэлея $v_R = c_R/c_S$, и величина v_p для симметричных колебаний остается больше v_R .

Спектры частот загибания мод уравнений (9) получаются такими:

$$\Omega_*^+ = \left\{ p\pi; \frac{p\pi}{k} \right\}_{p=1}^{\infty}, \quad \Omega_*^- = \left\{ \frac{\pi(2p-1)}{2k}; \pi(2p-1) \right\}_{p=1}^{\infty}.$$

Здесь вторая серия частот загибания кососимметричных мод является двухкратной.

Рассмотрим некоторые частные предельные случаи дисперсионных уравнений (6).

Если $G = 0$ (внешние слои – абсолютно мягкие), то корни уравнений (6) асимптотически приближаются к множеству корней уравнений

$$\begin{aligned} (\gamma_{11}\gamma_{12} \sin \gamma_{11}\lambda_1 \cos \gamma_{12}\lambda_1 - \gamma^2 \cos \gamma_{11}\lambda_1 \sin \gamma_{12}\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) &= 0, \\ (\gamma_{11}\gamma_{12} \sin \gamma_{11}\lambda_1 \cos \gamma_{12}\lambda_1 - \gamma^2 \cos \gamma_{11}\lambda_1 \sin \gamma_{12}\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) &= 0. \end{aligned}$$

В результате каждый спектр собственных значений состоит из двух множеств. Первое множество соответствует колебаниям однослойной пластины, один торец которой жестко закреплен, а второй находится в условии скользящей заделки. Второе множество описывает упругое равновесие пластины при отсутствии напряжений на плоских гранях [12].

Если $G = \infty$ (внутренний слой – абсолютно мягкий), то множество собственных значений γ^\pm трансформируется к совокупности корней уравнений

$$\begin{aligned} \left((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma\lambda_1 - (\gamma\lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2 \right) \sin \gamma_{21}\lambda_2 \sin \gamma_{22}\lambda_2 &= 0 \\ \left((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma\lambda_1 - (\gamma\lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2 \right) \cos \gamma_{21}\lambda_2 \cos \gamma_{22}\lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из данных уравнений следует, что каждый из спектров колебаний состоит из двух спектров, соответствующих колебаниям внутреннего слоя с граничными условиями типа плоского торца и равновесию внешних слоев со смешанными краевыми условиями (один торец жестко зажат, другой – свободен от напряжений) [1].

В случае $\lambda_1 = 0$ дисперсионные уравнения (6) сводятся к следующим

$$\sin \gamma_{21}^+ \sin \gamma_{22}^+ = 0, \quad \cos \gamma_{21}^- \cos \gamma_{22}^- = 0.$$

Таким образом, получаем спектры соответственно симметричных и кососимметричных колебаний внутреннего слоя с учетом граничных условий типа плоского торца [8].

При $\lambda_2 \rightarrow 0$ из уравнений (6) следует

$$\begin{aligned} & \left(\gamma_{11} \gamma_{12} \sin \gamma_{11} \cos \gamma_{12} - \gamma^2 \cos \gamma_{11} \sin \gamma_{12} \right) \left(\Omega_2^2 + \frac{2}{1-\nu_2} \gamma^2 \right) = 0, \\ & \gamma_{11} \gamma_{12} \left(4\gamma^4 + (\gamma^2 + \gamma_{12}^2)^2 \right) \cos \gamma_{11} \cos \gamma_{12} + \gamma^2 \left(4\gamma_{11}^2 \gamma_{12}^2 + (\gamma^2 + \gamma_{12}^2)^2 \right) \times \\ & \quad \times \sin \gamma_{11} \sin \gamma_{12} - 4\gamma^2 \gamma_{11} \gamma_{12} (\gamma^2 + \gamma_{12}^2) = 0. \end{aligned}$$

В этом случае полный спектр симметричных колебаний состоит из бездисперсной моды $\Omega_2 = -i\gamma\sqrt{2/(1-\nu_2)}$, зависящей только от коэффициента Пуассона ν_2 , и спектра колебаний внешнего слоя, одна грань которого жестко закреплена, а на другой имеет место условие плоского торца. Причем фазовая скорость этой моды лежит в интервале между скоростями поперечной и продольной волн. Спектр кососимметричных колебаний соответствует случаю однослойной пластины, один торец которой жестко закреплен, а второй – свободен от напряжений [2].

Численные исследования дисперсионных уравнений. Пусть внешние слои пластины изготовлены из алюминия и характеризуются параметрами среды $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_1 = 0,35$, $c_{S1} = 3110$ м/с, а внутренний – из вольфрама с постоянными $\rho_2 = 18,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_2 = 0,29$, $c_{S2} = 2860$ м/с. Расчеты производились для варианта $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. При этом входящие в уравнения (6) частоты Ω_1 , Ω_2 , Ω связаны соотношениями $\Omega_1 = \Omega c_{S2}/c_{S1}$, $\Omega_2 = \Omega$.

Каждое из дисперсионных уравнений (6) определяет счетное множество спектральных кривых – зависимостей безразмерной частоты Ω от параметра γ . На рис. 1 представлены полные дисперсионные спектры симметричных (рис. 1, а) и кососимметричных (рис. 1, б) колебаний пластины, обусловленных потенциальным решением. На диаграммах сплош-

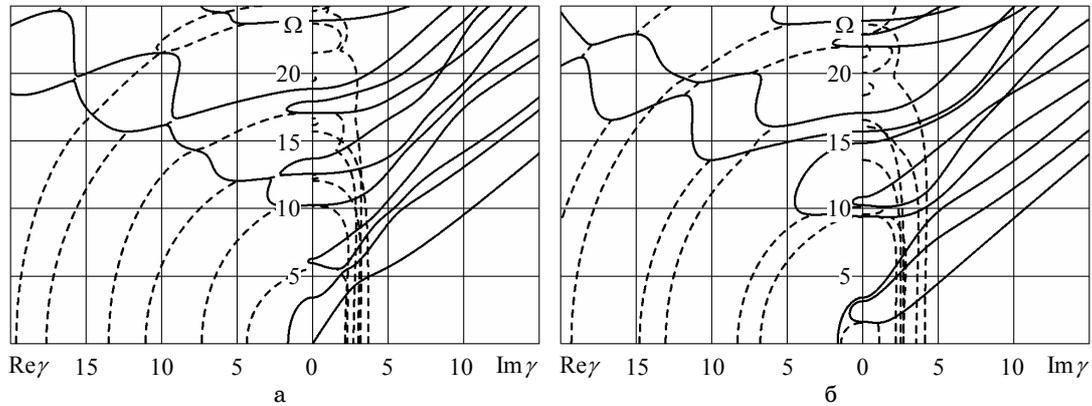


Рис. 1

ные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действи-

тельную ($\text{Re}\gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im}\gamma, \Omega$) плоскости. Видно, что дисперсионные уравнения (6) при фиксированной частоте имеют конечное число действительных и мнимых корней и счетное множество комплексных корней.

На рис. 2 показаны зависимости безразмерных фазовых $v_p = c_p / c_{S2}$ (рис. 2, а, в) и групповых $v_g = c_g / c_{2S}$ (рис. 2, б, г) скоростей первых трех распространяющихся мод от безразмерной частоты Ω . Данные

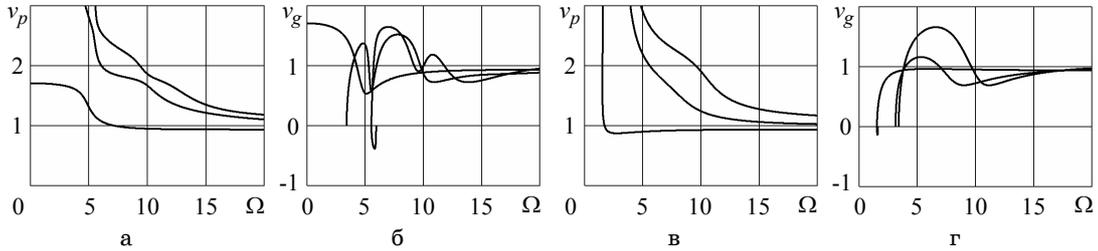


Рис. 2

рис. 2, а, б соответствуют симметричным колебаниям, рис. 2, в, г – кососимметричным.

В таблице приведены вычисленные на основе уравнений (7) значе-

№ частоты	Номера задач							
	1	2	3	4	1	2	3	4
	Симметричные колебания				Кососимметричные колебания			
1	0	0	0,7864	0	1,6254	0	1,6254	2,8883
2	3,4148	4,6993	5,7306	3,1416	3,1416	3,1416	3,1762	3,1416
3	5,9478	6,2832	5,9478	5,7766	3,4148	6,8296	6,7487	3,1416
4	6,2832	6,8296	7,3776	6,2832	9,4248	6,8638	9,5315	8,6648
5	10,244	8,1545	12,182	9,4248	10,244	9,4248	10,851	9,4248
6	12,566	12,566	13,691	11,553	10,851	11,916	13,490	9,4248
7	13,691	13,659	14,034	12,566	14,854	13,659	14,854	14,441
8	17,074	16,893	17,933	15,708	15,708	15,708	15,896	15,708
9	17,933	18,850	18,588	17,330	17,074	20,433	20,213	15,708
10	18,850	20,489	20,735	18,850	21,991	20,489	22,280	20,218
11	23,903	21,659	24,966	21,991	22,874	21,991	22,874	21,991
12	25,133	25,133	27,026	23,106	23,903	24,041	26,905	21,991
13	27,026	27,318	27,464	25,133	28,274	27,318	28,515	25,995
14	30,301	28,826	30,301	28,274	28,515	28,274	28,695	28,274
15	30,733	31,416	31,328	28,883	30,733	33,419	33,547	28,274
16	31,416	34,148	34,208	31,416	34,558	34,148	34,772	31,771
17	37,563	35,382	37,682	34,558	34,772	34,558	35,162	34,558
18	37,699	37,699	39,623	34,659	37,563	36,762	40,120	34,558
19	39,623	40,730	40,957	37,699	40,841	40,841	41,697	37,548
20	43,411	40,977	43,411	40,436	42,226	40,977	42,226	40,841

ния первых двадцати частот запираания для симметричных и кососимметричных колебаний. Столбцы с номером 1 соответствуют рассматриваемой задаче, столбцы 2 – свободным от напряжений плоским граням и скользящему контакту слоев [6, 17], столбцы 3 – жесткой заделке торцов и идеальному контакту слоев [7]. Значения частот запираания уравнений (7) для слоев из одинаковых материалов ($\nu = 0,29$) представлены в столбце 4, которые свидетельствуют о том, что в такой пластине из-за неидеального контакта слоев невозможен переход к однородной [3].

Анализ дисперсионных кривых, частот запираания, графиков изменения безразмерных фазовых и групповых скоростей показывает, что по сравнению с аналогичными задачами для трехслойной пластины с идеальным контактом слоев [4, 5, 7, 18] и скользящим контактом [6, 17] в данном случае происходят количественные и качественные изменения характеристик волнового процесса. В частности, для симметричных колебаний первая мнимая мода дисперсионного спектра оказывается распространяющейся при любой частоте и в низкочастотном пределе является бездисперсной. Для идеального контакта слоев в дисперсионном спектре отсутствует подобная мода. Изменяются также значения и количество частот запираания, например, на интервале $0 \leq \Omega \leq 25$. Однако для разных краевых условий, как на торцах, так и на плоскостях контакта, имеются одинаковые подмножества частот запираания (см. таблицу).

Одной из особенностей дисперсионных соотношений (6) является то, что кривизна мнимых ветвей для определенных частот запираания становится отрицательной – дисперсионная ветвь опускается ниже частоты запираания (см. рис. 1), а вычисление групповой скорости v_g приводит к возникновению отрицательных участков на графике ее зависимости от Ω (см. рис. 2, б, г). Комплексные и действительные участки дисперсионных ветвей пересекают плоскость $\Omega = 0$ и ось $\gamma = 0$ под прямым углом, что подтверждает известные факты.

Вблизи ненулевых частот запираания фазовая скорость $c_p \rightarrow \infty$, а групповая $c_g = 0$. Для нулевой частоты запираания находим $c_p^+(0) = c_g^+(0) = 1,708$. В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными, и значения групповой скорости мало отличаются от значений фазовой.

Уравнение (8) имеет вещественный корень, что указывает на существование поверхностной волны Стоунли вблизи плоскостей контакта слоев. Значение ее скорости v_{St} , отнесенной к c_{2S} , равно 0,936. В случае симметричных колебаний величина фазовой скорости v_p для первой моды в коротковолновом пределе остается больше асимптотического значения v_{St} (см. рис. 2, а), а для кососимметричных колебаний – меньше (см. рис. 2, в). Остальные кривые приближаются к асимптоте $v_p = 1$ сверху.

В задаче кососимметричных колебаний (при определенном сочетании упругих и геометрических параметров материалов составляющих пластину слоев) могут появляться двухкратные частоты запираания, что

не противоречит физическому смыслу задачи.

РЕЗЮМЕ. У просторовій постановці розв'язано задачу теорії пружності про усталені коливання тришарових ізотропних пластин симетричної будови з жорстким закріпленням плоских граней. На межі поділу шарів виконуються умови ковзного контакту без відриву. Одержано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Здійснено асимптотичний аналіз і чисельні дослідження дисперсійних рівнянь. Наведено діаграми спектральних кривих, графіки зміни фазових і групових швидкостей.

Ключові слова: дисперсійні спектри, жорстке закріплення, метод однорідних розв'язків, ковзний контакт, тришарова пластина, усталені коливання, фазові та групові швидкості.

SUMMARY. In spatial statement the elasticity theory problem of steady-state vibrations of three-layer isotropic plates of symmetric structure with rigidly clamped flat faces is solved. Conditions of sliding contact without separation are fulfilled on the interface of layers. The homogeneous solutions of the system of equations of motion in displacements are got. The asymptotic analysis and computational investigations of dispersive equations are carried out. Diagrams of spectral curves and curves of phase and group velocities are represented.

Key words: dispersion spectra, rigid clamping, method of homogeneous solutions, sliding contact, three-layer plate, steady-state vibrations, phase and group velocities.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алтухов Е. В.* Деформация изотропных пластин при смешанных краевых условиях // Вестн. Донецк. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. – 1997. – № 1 – С. 56–60.
2. *Алтухов Е. В., Мысовский Ю. В., Панченко Ю. В.* Смешанная пространственная задача об установившихся колебаниях пластин // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 10–17.
3. *Алтухов Е. В., Мысовский Ю. В., Панченко Ю. В.* Трехмерные задачи установившихся колебаний изотропных пластин // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 13–19.
4. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2009. – № 1. – С. 117–124.
5. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146–153.
6. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Симметричные упругие колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 3. – С. 78–88.
7. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 3–10.
8. *Алтухов Є. В., Панченко Ю. В., Богатчук А. Ю.* Коливання ізотропних пластин з урахуванням крайових умов типу плоского торця або діафрагми // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2000. – № 1. – С. 41–45.
9. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г.* Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 870–876.
10. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
11. *Крауклис П. В., Крауклис Л. А.* Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта // Математические вопросы теории распространения волн. – 1988. – Вып. 18. – С. 113–122.
12. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // Прикладная математика и механика. –

1942. – Т. 6, вып. 2–3. – С. 151–168.

13. *Марчук А. В.* Трехмерное аналитическое решение для слоистых плит с учетом проскальзывания слоев // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 9. – С. 10–14.

14. *Пискунов В. Г., Рассказов А. О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22–56.

15. *Устинов Ю. А.* Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.

16. *Устинов Ю. А.* Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755–758.

17. *Фоменко М. В.* Кососимметричные колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 188–195.

18. *Шевченко В. П., Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца // Доп. НАН України. – 2011. – № 9. – С. 70–77.

19. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.

20. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 15–56.

21. *Altenbach H.* Theories for laminated and sandwich plates. A review // Mech. of Composite Mater. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243–252.

22. *Carrera E.* Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mechan. Rev. – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287–308.

Донецкий национальный университет

Поступила 31.10.2011

УДК 620.179

В. Р. БОГДАНОВ, канд. физ.-мат. наук

**О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С
ПРОФИЛЕМ ФОРМЫ КОМПАКТНОГО ОБРАЗЦА**

Разработана аналитико-численная методика решения пространственных задач в упругопластической динамической и квазистатической постановках. Численное решение получено для материала с поперечным сечением в форме прямоугольника с пропилом трещиной посередине (компактный профиль) при трехточечном изгибе с использованием метода конечных разностей. Квазистатическая упругопластическая постановка сравнивается с динамической постановкой.

Ключевые слова: Компактный профиль, пластическая деформация, трещина.

В статье [2] решена пространственная задача о концентрации пластических деформаций. В работе [3] решена аналогичная задача о плоском напряженном состоянии пластинки с трещиной, а в [5] – задача о плоском деформированном состоянии. В работах [4] и [12] вязкость разрушения определяется соответственно на основе решения плоского деформированного состояния и пространственной задач в предположении, что трещина неподвижна. Указанные модели дают возможность значительно повысить уровень адекватности получаемых теоретических подходов. На их основе в статье [8] исследовалось напряженно-деформированное состояние жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием при динамическом нагружении.

В данной статье в отличие от [2, 4] решаются и сравниваются упругопластические трехмерные квазистатическая и динамическая задачи без учета роста трещины.

Постановка задачи. Рассмотрим деформирование изотропного бруса $\{ |x| \leq L/2, 0 \leq y \leq B, 0 \leq z \leq H \}$, имеющего в плоскости поперечного сечения форму прямоугольника $\Sigma = L \times B \times H$ длины L , ширины B , толщины H с пропилом-трещиной длиной l вдоль прямоугольника (рис. 1) $\{ x = 0, 0 \leq y \leq l, 0 \leq z \leq H \}$ посередине (компактный профиль). Брус контактирует с двумя неподвижными опорами по области $\{ L_* \leq |x| \leq L_* + a, y = 0, 0 \leq z \leq H \}$. Сверху на брус падает абсолютно твердый ударник, который контактирует с брусом по области $\{ |x| \leq A, y = B, 0 \leq z \leq H \}$ в течение короткого

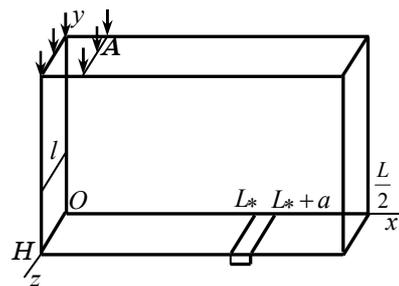


Рис.1

промежутка времени. Действие последней нагрузки заменим равномерно распределенной в зоне контакта нормальной нагрузкой $-P$, которая изменяется со временем как линейная функция ($P = p_{01} + p_{02}t$). Будем считать, что на протяжении всего промежутка времени взаимодействия область контакта остается постоянной. Вследствие симметрии процесса деформирования относительно плоскости $x=0$ далее будем рассматривать только правую часть бруса.

На рис. 1 приведена схема расчетной области. Пусть $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ – вектор смещений, компоненты которого связаны с компонентами тензора деформаций соотношениями Коши.

Уравнения равновесия среды в случае квазистатической постановки имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

а уравнения динамики в случае динамической постановки представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Граничные условия будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 && \text{при } x = 0, \quad 0 < y < l, \quad 0 < z < H, \\ u_x &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 && \text{при } x = 0, \quad l < y < B, \quad 0 < z < H, \\ \sigma_{xx} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 && \text{при } x = L/2, \quad 0 < y < B, \quad 0 < z < H, \\ \sigma_{yy} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 && \text{при } y = 0, \quad 0 < x < L_*, \quad 0 < z < H, \\ u_y &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 && \text{при } y = 0, \quad L_* < x < L_* + a, \quad 0 < z < H, \\ \sigma_{yy} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 && \text{при } y = 0, \quad L_* + a < x < L/2, \quad 0 < z < H, \\ \sigma_{yy} &= -P, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 && \text{при } y = B, \quad 0 < x < A, \quad 0 < z < H, \\ \sigma_{yy} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 && \text{при } y = B, \quad A < x < L/2, \quad 0 < z < H, \\ u_z &= 0, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 && \text{при } z = 0, \quad 0 < x < L/2, \quad 0 < y < B, \\ \sigma_{zz} &= 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 && \text{при } z = H, \quad 0 < x < L/2, \quad 0 < y < B. \quad (1) \end{aligned}$$

В качестве физической модели принята модель, основанная на теории неизотермического пластического течения для среды с упрочнением

и условием текучести Мизеса в сочетании с гипотезой кратковременной ползучести [10]. Уравнения связи между напряжениями и деформациями в соответствии с этой моделью имеют вид [1]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \phi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda. \quad (2)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девиатор тензора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль сдвига; $K = 3K_1$, $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$ – модуль объемного сжатия, связывающий объемное расширение 3ε , среднее напряжение $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ и ϕ – температурное удлинение в соотношении $\varepsilon = K\sigma + \phi$ (в данном случае $\phi \equiv 0$); ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости Юнга; $d\lambda$ – некоторая скалярная функция, определяемая формой поверхности нагружения. Считается, что эта скалярная функция является квадратичной функцией девиатора напряжений s_{ij} [10].

Пусть в результате пластической деформации происходит упрочнение материала по температурной зависимости [7]

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0} \right)^{\eta^*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}. \quad (3)$$

где T – температура, $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ – параметр Одквиста, $T_0 = 20^\circ C$, η^* – коэффициент упрочнения, $\sigma_S(T)$ – предел текучести после упрочнения материала при температуре T .

В развернутой форме уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= d \left(\frac{\sigma_{ij} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{ij} - \sigma) d\lambda \quad (i = j), \\ d\varepsilon_{ij} &= d \left(\frac{\sigma_{xy}}{2G} \right) + \sigma_{xy} d\lambda \quad (i \neq j), \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} d\lambda &= \left\{ 0 \quad (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0), \quad \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (f = 0, df = 0) \right\}, \\ d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 6 \left((d\varepsilon_{xy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yz}^p)^2 \right) \right]^{1/2}, \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ 6 \left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \right)^{1/2}.$$

Методика решения. Пусть нестационарное взаимодействие происходит на интервале времени $[0, t_*]$. Для численного интегрирования по времени используем квадратурную формулу Грегори [11] порядка $m_1 = 3$ с коэффициентами D_n . Разбиение по времени равномерное с шагом разбиения Δt . Тогда для момента времени $t \in [0, t_*]$, $t = k\Delta t$ в случае квазистатической постановки приращения деформаций запишем в виде

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{xx} &= \psi \left(\sigma_{xx}(t) - \sigma(t) \right) + K\sigma(t) - b_{xx}(t_0), \\ \Delta \varepsilon_{yy} &= \psi \left(\sigma_{yy}(t) - \sigma(t) \right) + K\sigma(t) - b_{yy}(t_0), \\ \Delta \varepsilon_{zz} &= \psi \left(\sigma_{zz}(t) - \sigma(t) \right) + K\sigma(t) - b_{zz}(t_0), \\ \Delta \varepsilon_{xy} &= \psi \sigma_{xy}(t) - b_{xy}(t_0), \\ \Delta \varepsilon_{xz} &= \psi \sigma_{xz}(t) - b_{xz}(t_0), \\ \Delta \varepsilon_{yz} &= \psi \sigma_{yz}(t) - b_{yz}(t_0), \end{aligned} \quad (6)$$

где t_0 – момент времени, предшествующий моменту времени t ,

$$\begin{aligned} b_{ij}(t_0) &= \frac{\sigma_{ij}(t_0)}{2G} - \delta_{ij} \left(\frac{1}{2G} - K \right) \sigma(t_0), \\ \sigma(t_0) &= \left(\sigma_{xx}(t_0) + \sigma_{yy}(t_0) + \sigma_{zz}(t_0) \right) / 3 \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned}$$

В динамической постановке после дискретизации для приращений деформаций получаем

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{xx,k} &= B_1 \sigma_{xx,k} + B_2 \left(\sigma_{yy,k} + \sigma_{zz,k} \right) - \tilde{b}_{xx}, \\ \Delta \varepsilon_{yy,k} &= B_1 \sigma_{yy,k} + B_2 \left(\sigma_{xx,k} + \sigma_{zz,k} \right) - \tilde{b}_{yy}, \\ \Delta \varepsilon_{zz,k} &= B_1 \sigma_{zz,k} + B_2 \left(\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k} \right) - \tilde{b}_{zz}, \\ \Delta \varepsilon_{xy,k} &= B_3 \sigma_{xy,k} - \tilde{b}_{xy}, \quad \Delta \varepsilon_{xz,k} = B_3 \sigma_{xz,k} - \tilde{b}_{xz}, \\ \Delta \varepsilon_{yz,k} &= B_3 \sigma_{yz,k} - \tilde{b}_{yz} \end{aligned} \quad (7)$$

$$B_1 = \frac{1}{3} \left(K + \frac{1}{G} + 2D_0 \Delta \lambda_k \right), \quad B_2 = \frac{1}{3} \left(K - \frac{1}{2G} - D_0 \Delta \lambda_k \right),$$

$$B_3 = \frac{1}{2G} + D_0 \Delta \lambda_k.$$

Здесь

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij} \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma_{k-1} - \sum_{n=1}^{m_1} D_n \left(\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij} \sigma_{k-n} \right) \Delta \lambda_{k-n}.$$

Если ввести обозначение $\psi = 1/(2G) + \Delta\lambda$, то напряженное состояние в момент времени t определяется при учете условий текучести, которые на основе (5) запишем в следующем виде:

$$\psi = \left\{ \frac{1}{2G} \quad (f < 0), \quad \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (f = 0, df = 0) \right\}, \quad (8)$$

$$\Delta\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\left(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p \right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p \right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p \right)^2 + 6 \left(\left(\Delta\varepsilon_{xy}^p \right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{xz}^p \right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{yz}^p \right)^2 \right) \right]^{1/2},$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^e, \quad \Delta\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} + \delta_{ij} \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma \quad (i, j = x; y; z).$$

Для учета нелинейности, содержащихся в условиях (8), применим метод последовательных приближений, который позволяет решение упругопластической задачи свести к решению ряда линейных задач:

$$\psi^{(n+1)} = \left\{ \psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} (Q_i < -Q); \quad \psi^{(n)} (|Q_i| < Q); \quad \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)} (Q_i > Q) \right\},$$

$$Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T). \quad (9)$$

Здесь Q – величина наибольшего отклонения интенсивности напряжений от упроченного предела текучести, $0 \leq p \leq 1$.

В случае квазистатической постановки из системы (6) для напряжений найдем выражения вида

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= A_1 \Delta\varepsilon_{xx} + A_2 \Delta\varepsilon_{yy} + A_2 \Delta\varepsilon_{zz} + Y_{xx}, \\ \sigma_{yy} &= A_2 \Delta\varepsilon_{xx} + A_1 \Delta\varepsilon_{yy} + A_2 \Delta\varepsilon_{zz} + Y_{yy}, \\ \sigma_{zz} &= A_2 \Delta\varepsilon_{xx} + A_2 \Delta\varepsilon_{yy} + A_1 \Delta\varepsilon_{zz} + Y_{zz}, \\ \sigma_{xy} &= A_3 \Delta\varepsilon_{xy} + Y_{xy}, \quad \sigma_{xz} = A_3 \Delta\varepsilon_{xz} + Y_{xz}, \\ \sigma_{yz} &= A_3 \Delta\varepsilon_{yz} + Y_{yz}. \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} Y_{xx} &= A_1 b_{xx} + A_2 b_{yy} + A_2 b_{zz}, \\ Y_{yy} &= A_2 b_{xx} + A_1 b_{yy} + A_2 b_{zz}, \\ Y_{zz} &= A_2 b_{xx} + A_2 b_{yy} + A_1 b_{zz}, \\ Y_{xy} &= A_3 b_{xy}; \quad Y_{xz} = A_3 b_{xz}, \quad Y_{yz} = A_3 b_{yz}, \\ A_1 &= (\psi + 2K)/(3\psi K), \quad A_2 = (\psi - K)/(3\psi K), \quad A_3 = 1/\psi. \end{aligned}$$

В случае динамической постановки из системы (7) найдем выраже-

ния для напряжений в дискретизированном виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx,k} &= \tilde{A}_1 \Delta \varepsilon_{xx,k} + \tilde{A}_2 \Delta \varepsilon_{yy,k} + \tilde{A}_2 \Delta \varepsilon_{zz,k} + \tilde{Y}_{xx}, \\
\sigma_{yy,k} &= \tilde{A}_2 \Delta \varepsilon_{xx,k} + \tilde{A}_1 \Delta \varepsilon_{yy,k} + \tilde{A}_2 \Delta \varepsilon_{zz,k} + \tilde{Y}_{yy}, \\
\sigma_{zz,k} &= \tilde{A}_2 \Delta \varepsilon_{xx,k} + \tilde{A}_2 \Delta \varepsilon_{yy,k} + \tilde{A}_1 \Delta \varepsilon_{zz,k} + \tilde{Y}_{zz}, \\
\sigma_{xy,k} &= \tilde{A}_3 \Delta \varepsilon_{xy,k} + \tilde{Y}_{xy}, \quad \sigma_{xz,k} = \tilde{A}_3 \Delta \varepsilon_{xz,k} + \tilde{Y}_{xz}, \\
\sigma_{yz,k} &= \tilde{A}_3 \Delta \varepsilon_{yz,k} + \tilde{Y}_{yz}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_{xx} &= \tilde{A}_1 \tilde{b}_{xx} + \tilde{A}_2 \tilde{b}_{yy} + \tilde{A}_2 \tilde{b}_{zz}, \\
\tilde{Y}_{yy} &= \tilde{A}_2 \tilde{b}_{xx} + \tilde{A}_1 \tilde{b}_{yy} + \tilde{A}_2 \tilde{b}_{zz}, \\
\tilde{Y}_{zz} &= \tilde{A}_2 \tilde{b}_{xx} + \tilde{A}_2 \tilde{b}_{yy} + \tilde{A}_1 \tilde{b}_{zz}, \\
\tilde{Y}_{xy} &= \tilde{A}_3 \tilde{b}_{xy}, \quad \tilde{Y}_{xz} = \tilde{A}_3 \tilde{b}_{xz}, \quad \tilde{Y}_{yz} = \tilde{A}_3 \tilde{b}_{yz}, \\
\tilde{A}_1 &= \frac{B_1 + B_2}{(B_1 - B_2)(B_1 + 2B_2)}, \\
\tilde{A}_2 &= -\frac{B_2}{(B_1 - B_2)(B_1 + 2B_2)}, \quad \tilde{A}_3 = \frac{1}{B_3}.
\end{aligned}$$

Приведенные выше интенсивности напряжений и деформаций, определялись для каждой ячейки из решения трехмерной квазистатической задачи. В качестве основного независимого параметра для выявления развития величин выбиралось расчетное значение коэффициента интенсивности напряжений K_I (КИН) для трещины в упруго деформированном компактном образце статической задачи. КИН в каждый момент времени $t_k = k\Delta t$ определяется по формуле [9]

$$K_I = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right), \tag{12}$$

в которой $F = 2AP$ – контактная сила, $4B$ – длина между опорами.

Численные результаты и их анализ. Численные исследования проводились для брусков с компактным профилем из стали 15Х2НМФА. Для расчетов применялся метод конечных разностей [11] с переменным шагом разбиения. Использование этого метода для волновых уравнений обосновано в [6], причем им обеспечивается точность расчетов с погрешностью не больше чем $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta t)^2)$. Характерный размер ячейки вблизи вершины трещины принимался равным среднему размеру зерна испытуемого металла и составлял 0,05 мм. На рис. 2–5 представлены результаты расчетов для брусков длиной 60 мм, шириной 10 мм, толщиной 50 мм и глубиной пропила в центре 3 мм, с коэффициентом упрочнения

$\eta^* = 0,05$. Расстояние между опорными точками составляло 40 мм, коэффициенты $p_{01} = 8 \text{ МПа}$, $p_{02} = 10 \text{ МПа}$, температура $T = 50^\circ$.

На рис. 2 – 4 приведены графики распределения нормальных напряжений в МПа, возникающих вблизи вершины трещины трехмерного

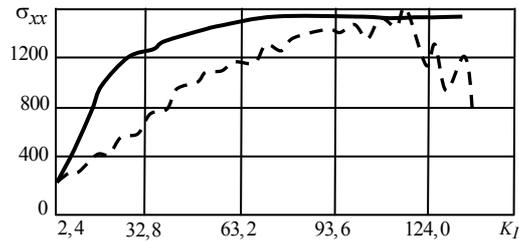


Рис.2

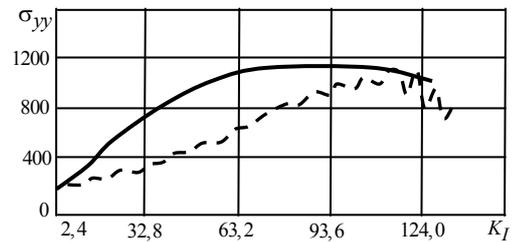


Рис.3

бруса с компактным профилем в плоскости, отстоящей от боковой поверхности бруса на 8,7 мм. На рис. 5 изображены графики значений па-

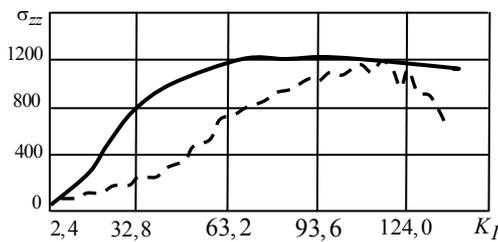


Рис.4

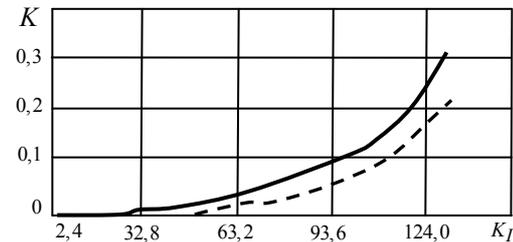


Рис.5

раметра Одкависта k в $\text{МПа}\sqrt{\text{м}}$. Последние вычислены в такой же плоскости около вершины трещины пространственного бруса с компактным профилем. Сплошная и пунктирная линии на рисунках относятся к решениям задач в квазистатической и динамической постановках.

Как видно из рис. 2 – 5, значения напряжений и параметра Одкависта значительно отличаются друг от друга. В квазистатической постановке напряжения быстро растут, когда КИН $K_I < 45 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, после этого не изменяются. Кроме этого, когда $K_I > 120 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, в квазистатической постановке необходимо значительно увеличивать число итераций (процесс начинает плохо сходиться). В динамической постановке, начиная с $K_I = 93,5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, значения напряжений заметно колеблются, что свидетельствует о неустойчивости процесса деформирования и необходимости учета роста трещины и разгрузки материала. Квазистатическая модель не может использоваться для адекватного моделирования процессов концентрации пластических деформаций и напряжений и разрушения образцов (компактного, Шарпи, др.).

Решение трехмерной задачи [2, 4] о напряженно-деформированном состоянии для материала с поперечным сечением в форме прямоугольника с пропилом-трещиной посередине (компактного профиля) для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе в динамической

упругопластической постановке дает возможность точнее определять поля пластических деформаций и напряжений, чем при решении квазистатической упругопластической пространственной задачи.

РЕЗЮМЕ. Розроблено аналітико-числову методику щодо розв'язку просторових задач у пружно-пластичній квазістатичній і динамічній математичних постановках. Чисельне рішення було отримано для матеріалу з поперечним перетином у формі прямокутника з пропилом тріщиною посередині (компактний профіль) при тригочковому згині з використанням метода скінчених різниць. Квазістатична пружно-пластична постановка порівнюється із динамічною.

Ключові слова: Компактний профіль, пластична деформація, вершина тріщини.

SUMMARY. The solution of three dimension problem and method of solution in quasi-static and dynamic elastic-plastic mathematical model has been developed. The numerical solution has calculated for three point band of material with transversal profile of shape of rectangle with middle notch-crack (compact profile) by method of finite differences. The quasi-static elastic-plastic model has compared to dynamic model.

Key words: Compact profile, plastic deformation, the top of crack.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г. Теория пластичности. – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
2. Богданов В. Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини. // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки – 2009. – Вип. 2. – С. 51–56.
3. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.
4. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2010. – № 33. – С. 153–166.
5. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – № 1 (47). – С. 59–66.
6. Зюкина Е. Л. Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения // Тр. мат. центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань. – Т. 26. – 2004 – С. 151–160.
7. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
8. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием // Прикладная механика – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 70–76.
9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с. (Механика разрушения и прочность материалов: В 2 т., Т. 2)
10. Генки Г. Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. – 460 с.
11. Хемминг Р. В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с.
12. Bohdanov V. R., Sulym G. T. Evaluation of crack resistance based on the numerical modeling of the plane strained state // Material Science. – 2011. – Vol. 46, № 6. – P. 723–732.

Национальный транспортный университет, г. Киев

Поступила 13.09.2011

УДК 539.37

И. С. СКОРОДИНСКИЙ,
А. В. МАКСИМУК, д-р физ.-мат. наук

ОБОБЩЕННАЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ ИЛИ ПОКРЫТИЯ

Построена обобщенная двухпараметрическая модель термовязкоупругого промежуточного слоя (покрытия), на основе которой изучено поведение вязкоупругого слоя на жестком основании при действии нормальной сосредоточенной силы, зависящей от времени. Рассмотрены случаи постоянной и кратковременной циклической нагрузки.

Ключевые слова: термовязкоупругий слой, обобщенная двухпараметрическая модель, работа на сжатие и поперечный сдвиг, сосредоточенная сила, необратимые вязкоупругие деформации

В современном машиностроении, в строительстве и на транспорте механический и тепловой контакты между твердыми телами осуществляются через тонкие промежуточные слои или покрытия с собственными физико-механическими свойствами и характеристиками. К таким объектам относятся дорожные покрытия и основания, различные амортизирующие прослойки на транспорте и при прокладке трубопроводов, многое другое. При проектировании таких объектов большое значение имеет учет их физико-механического поведения при различных видах и условиях нагружения и адекватный выбор математической модели. До 40-х годов XX в. одной из наиболее распространенных моделей оснований, прослоек и т.п. была модель Фусса-Винклера [1, 6, 7]. Эта модель является простейшей упругой моделью, не учитывающей сопротивления основания поперечному сдвигу. Ее главный недостаток состоит в том, что перемещения равны нулю вне области действия нагрузки. В 40–50-х годах XX в. появились двухпараметрические модели Филоненко-Бородича, Пастернака, а чуть позже – Власова [3, 4, 6, 7, 9]. Эти модели учитывают работу основания как на сжатие, так и на поперечный сдвиг. Перемещения в этом случае не равны нулю вне области действия нагрузки (так называемая распределительная способность основания). Почти одновременно с упругими моделями оснований появляются их обобщения на вязкоупругий случай [6, 8, 12]. Дальнейшее развитие одно- и двухпараметрических моделей оснований, прослоек и покрытий состоит, в частности, в учете их неупругого поведения [1, 2, 5, 7, 11], в построении моделей более высоких порядков типа пластин и оболочек и в распространении модели Винклера и более сложных моделей на касательное направление [1], а также в рассмотрении более сложных конструкций, например двухслойных оснований с толщинами слоев разного порядка [1, 2, 5].

Целью данной работы является получение обобщенной двухпараметрической модели термовязкоупругой прослойки или покрытия из упрощенных термомеханических условий сопряжения твердых тел через тер-

мвязкоупругий промежуточный слой, работающий на сжатие и поперечный сдвиг, а также изучение с помощью этой модели поведения вязкоупругого слоя на жестком основании при действии нормальной сосредоточенной силы, зависящей от времени.

1. Обобщенная двухпараметрическая модель термовязкоупругого промежуточного слоя (покрытия). В работе [10] выведены обобщенные термомеханические условия сопряжения твердых тел через термовязкоупругий промежуточный слой, работающий на сжатие и поперечный сдвиг. Пренебрегая в этих условиях кривизнами, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
& 2[\tau_n] + \rho_s^*(F_\tau) = \rho_s^*(\ddot{u}_\tau), \\
& 6((\tau_n) - G\nabla_s(u_n) - 2\mu_e[u_\tau] - 2\mu_v[\dot{u}_\tau] - \mu_0\nabla_s(\dot{u}_n) - \\
& \quad - \mu_1\nabla_s[\dot{u}_n]) + \rho_s^*[F_\tau] = \rho_s^*[\ddot{u}_\tau], \\
& 2\left\{\nabla_s \cdot [G([u_\tau] + h\nabla_s(u_n)) + \mu_0([\dot{u}_\tau] + h\nabla_s(\dot{u}_n)) + \right. \\
& \quad \left. + h\mu_1\nabla_s[\dot{u}_n]] + [\sigma_n]\right\} + \rho_s^*(F_n) = \rho_s^*(\ddot{u}_n), \\
& 2h\nabla_s \cdot [G\nabla_s[u_n] + 2\mu_{v1}[\dot{u}_\tau] + 3(\mu_1\nabla_s(\dot{u}_n) + \mu_2\nabla_s[\dot{u}_n])] - \\
& \quad - 6\left(\mathbf{T}_E \cdot \nabla_s(\mathbf{u}_\tau) + \mathbf{T}_{Z0} \cdot \nabla_s(\dot{\mathbf{u}}_\tau) + \mathbf{T}_{Z1} \cdot \nabla_s[\dot{\mathbf{u}}_\tau] + \frac{E_n}{h}[u_n] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{Z_n}{h}[\dot{u}_n] - \beta_n(\theta) - (\sigma_n)\right) + \rho_s^*[F_n] = \rho_s^*[\ddot{u}_n]; \tag{1.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_s^*(\dot{\theta}) &= \nabla_s \cdot (\Lambda\nabla_s(\theta)) - 2[q_n] + (\mathbf{T}_{Z0} \cdot \nabla_s(\dot{\mathbf{u}}_\tau) + \mathbf{T}_{Z1} \cdot \nabla_s[\dot{\mathbf{u}}_\tau])[\dot{u}_n] + \\
& + 2C_Z^0[\dot{u}_n]^2 + h(\nabla_s(\dot{u}_n) \cdot \mu_0\nabla_s(\dot{u}_n) + 2\nabla_s(\dot{u}_n) \cdot \mu_1\nabla_s[\dot{u}_n] + \\
& + \nabla_s[\dot{u}_n] \cdot \mu_2\nabla_s[\dot{u}_n]) + 2([\dot{\mathbf{u}}_\tau] \cdot (\mu_0\nabla_s(\dot{u}_n) + \mu_1\nabla_s[\dot{u}_n]) + \\
& + [\dot{\mathbf{u}}_\tau]^T \cdot \mu_v[\dot{\mathbf{u}}_\tau]) - 2\Theta_0(h\beta_s \cdot \nabla_s(\dot{\mathbf{u}}_\tau) + \beta_n[\dot{u}_n]) + 2w_0, \\
c_s^*[\dot{\theta}] &= \nabla_s \cdot (\Lambda\nabla_s[\theta]) - 6(q_n) - 12h_\theta[\theta] + 3(\mathbf{T}_{Z1} \cdot \nabla_s(\dot{\mathbf{u}}_\tau) + \\
& + \mathbf{T}_{Z2} \cdot \nabla_s[\dot{\mathbf{u}}_\tau])[\dot{u}_n] + 2C_Z^1[\dot{u}_n]^2 + 3h(\nabla_s(\dot{u}_n) \cdot \mu_1\nabla_s(\dot{u}_n) + \\
& + 2\nabla_s(\dot{u}_n) \cdot \mu_2\nabla_s[\dot{u}_n] + \nabla_s[\dot{u}_n] \cdot \mu_3\nabla_s[\dot{u}_n]) + 2[3[\dot{\mathbf{u}}_\tau] \cdot (\mu_1\nabla_s(\dot{u}_n) + \\
& + \mu_2\nabla_s[\dot{u}_n]) + [\dot{\mathbf{u}}_\tau]^T \cdot \mu_{v1}[\dot{\mathbf{u}}_\tau]) - 2h\Theta_0\beta_s \cdot \nabla_s[\dot{\mathbf{u}}_\tau] + 2w_1(\xi^1, \xi^2) \in S_0, \tag{1.2}
\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}_\tau^{(i)}$, $u_n^{(i)}$ – касательные и нормальные компоненты перемещений граничных поверхностей сопрягаемых тел; $\tau_n^{(i)}$, $\sigma_n^{(i)}$ – соответствующие компоненты векторов напряжений; $\theta^{(i)}$ – температуры граничных поверхностей сопрягаемых тел ($i = 1, 2$); полужирные квадратные и круглые скобки обозначают скачки и суммы соответствующих граничных значений, например, $[\sigma_n] = \sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{(2)}$, $(\sigma_n) = \sigma_n^{(1)} + \sigma_n^{(2)}$ и т.д.; S_0 – срединная

поверхность промежуточного слоя; (ξ^1, ξ^2) – ее гауссовы параметры; $\nabla_s = \mathbf{r}^\alpha \nabla_\alpha$ – двумерный набла-оператор Гамильтона; \mathbf{r}^α – векторы взаимного базиса на S_0 , ∇_α – символы ковариантного дифференцирования по ξ^α ($\alpha = 1, 2$). Расшифровку остальных обозначений можно найти в работе [10].

На контуре ∂S_0 должны быть удовлетворены краевые условия

$$h \left(G^{\alpha\beta} (u_n)_{,\beta} + 2\mu_e^{\alpha\beta} [u_\beta] + 2\mu_v^{\alpha\beta} [\dot{u}_\beta] + \mu_0^{\alpha\beta} (\dot{u}_n)_{,\beta} + \mu_1^{\alpha\beta} [\dot{u}_n]_{,\beta} \right) v_\alpha^0 = \bar{N}^3, \\ h^2 \left(\frac{1}{3} G^{\alpha\beta} [u_n]_{,\beta} + \frac{2}{3} \mu_{v1}^{\alpha\beta} [\dot{u}_\beta] + \mu_1^{\alpha\beta} (\dot{u}_n)_{,\beta} + \mu_2^{\alpha\beta} [\dot{u}_n]_{,\beta} \right) v_\alpha^0 = \bar{M}^3; \quad (1.3)$$

$$v_\alpha^0 \Lambda^{\alpha\beta} (\theta)_{,\beta} + A ((\theta) - 2\theta_{c0}) = 0, \quad v_\alpha^0 \Lambda^{\alpha\beta} [\theta]_{,\beta} + A ([\theta] - 2\theta_{c1}) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь \bar{N}^3 , \bar{M}^3 – заданные перерезывающее усилие и его “момент” [10]; v_α^0 ($\alpha = 1, 2$) – компоненты единичной внешней нормали к ∂S_0 ; $A = 2h\alpha_c$ (α_c – коэффициент теплообмена, $2h$ – толщина прослойки); θ_{c0} , θ_{c1} – интегральные характеристики температуры окружающей среды.

Начальные условия на перемещения, скорости и температуры в области сопряжения тел приведены в работе [10].

Пренебрежем во втором соотношении (1.1) нормальными перемещениями, а в третьем и четвертом соотношениях – касательными. В результате в квазистатическом случае без учета массовых сил получим следующие силовые условия термомеханического сопряжения твердых тел:

$$\boldsymbol{\tau}_n^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_n^{(2)} = \boldsymbol{\tau}_n, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\mu}_e [\mathbf{u}_\tau] + \boldsymbol{\mu}_v [\dot{\mathbf{u}}_\tau]; \\ h \nabla_s \cdot (\mathbf{G} \nabla_s (u_n) + \mu_0 \nabla_s (\dot{u}_n) + \mu_1 \nabla_s [\dot{u}_n]) + [\sigma_n] = 0, \\ h \nabla_s \cdot \left[\mathbf{G} \nabla_s [u_n] + 3(\mu_1 \nabla_s (\dot{u}_n) + \mu_2 \nabla_s [\dot{u}_n]) \right] + 3 \left((\sigma_n) - \frac{E_n}{h} [u_n] - \right. \\ \left. - \frac{Z_n}{h} [\dot{u}_n] + \beta_n (\theta) \right) = 0. \quad (1.5)$$

Два последние соотношения (1.5) представляют собой обобщенную двухпараметрическую модель термовязкоупругого слоя в нормальном направлении.

Краевые условия (1.3) остаются без изменений. Заметим, что если в этих условиях пренебречь нормальными перемещениями, то первое соотношение примет вид

$$\left(\mu_e^{\alpha\beta} [u_\beta] + \mu_v^{\alpha\beta} [\dot{u}_\beta] \right) = \frac{\bar{N}^3}{2h},$$

из которого следует, что второе условие сопряжения (1.5) выполняется вплоть до ∂S_0 . В изотермическом случае при $\bar{M}^3 = 0$ все условия сопря-

жения в касательном направлении выполняются вплоть до контура ∂S_0 . Если в (1.3) пренебречь касательными перемещениями, как это делается при построении двухпараметрических моделей оснований [3, 12], то получим краевые условия, соответствующие дифференциальным операторам второго порядка в соотношениях (1.5):

$$\begin{aligned} h \left(G^{\alpha\beta} (u_n)_{,\beta} + \mu_0^{\alpha\beta} (\dot{u}_n)_{,\beta} + \mu_1^{\alpha\beta} [\dot{u}_n]_{,\beta} \right) v_\alpha^0 &= \bar{N}^3, \\ h^2 \left(\frac{1}{3} G^{\alpha\beta} [u_n]_{,\beta} + \mu_1^{\alpha\beta} (\dot{u}_n)_{,\beta} + \mu_2^{\alpha\beta} [\dot{u}_n]_{,\beta} \right) v_\alpha^0 &= \bar{M}^3. \end{aligned}$$

Отметим, что, как видно из третьего соотношения (1.5), учет сдвиговой жесткости и вязкости промежуточного слоя (покрытия) приводит к ненулевому скачку нормальных напряжений.

2. Примеры. Пусть термоупругое тело 1 вдавливается в жесткое основание (тело 2) через термовязкоупругую прослойку (покрытие), которая описывается моделью Кельвина-Фойгта [10]. Тогда, учитывая, что $u_n^{(2)} = 0$, $[u_n] = u_n^{(1)}$, $(u_n) = u_n^{(1)}$ и исключая в двух последних соотношениях (1.5) нормальное напряжение $\sigma_n^{(2)}$, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= \frac{E_n}{2h} u_n^{(1)} + \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(1)} - \frac{\beta_n}{2} (\theta) - \frac{2h}{3} \nabla_s \cdot \left(\mathbf{G} \nabla_s u_n^{(1)} \right) - \\ &\quad - \frac{h}{2} \nabla_s \cdot \left(\boldsymbol{\mu}_0 \nabla_s \dot{u}_n^{(1)} \right) - h \nabla_s \cdot \left(\boldsymbol{\mu}_1 \nabla_s \dot{u}_n^{(1)} \right) - \frac{h}{2} \nabla_s \cdot \left(\boldsymbol{\mu}_2 \nabla_s \dot{u}_n^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) является обобщением двухпараметрической модели упругого основания на случай анизотропного термовязкоупругого слоя (покрытия). Если материал промежуточного слоя (покрытия) является трансверсально-изотропным, причем ось анизотропии совпадает с нормалью \mathbf{n} , то

$$\mathbf{G} = G' \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\mu}_k = \mu_k \mathbf{a} \quad (k = 0, 1, 2),$$

где \mathbf{a} – тензор первой квадратичной формы срединной поверхности промежуточного слоя. В этом случае соотношение (2.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= \frac{E_n}{2h} u_n^{(1)} + \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(1)} - \frac{\beta_n}{2} (\theta) - \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(1)} - \\ &\quad - h \left(\frac{\mu_0 + \mu_2}{2} + \mu_1 \right) \Delta_s \dot{u}_n^{(1)} - h \nabla_s \left(\frac{\mu_0 + \mu_2}{2} + \mu_1 \right) \cdot \nabla_s \dot{u}_n^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\Delta_s = \nabla_s^2$ – двумерный оператор Лапласа.

В изотермическом случае формула (2.2) упрощается:

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{E_n}{2h} u_n^{(1)} + \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(1)} - \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(1)} - \frac{2h\eta'}{3} \Delta_s \dot{u}_n^{(1)}. \quad (2.3)$$

Здесь η' – вязкость промежуточного слоя при поперечном сдвиге. Из

формулы (2.3) видно, что второй параметр $2hG'/3$ и его вязкостный аналог $2h\eta'/3$ характеризуют работу промежуточного слоя (покрытия) на поперечный сдвиг.

Если материал прослойки (покрытия) упругий, то из (2.3) получаем классическую двухпараметрическую модель [3]

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{E_n}{2h} u_n^{(1)} - \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(1)} \quad (2.4)$$

Как видно из формулы (2.4), если $u_n^{(1)} < 0$ и функция $u_n^{(1)}(\xi^1, \xi^2)$ выпукла вниз (относительно координат ξ^1, ξ^2), то $\Delta_s u_n^{(1)} > 0$, и реакция основания по модулю больше, чем в случае модели Винклера.

Пусть теперь нагретый жесткий штамп (тело 1) вдавливаются в термоупругое основание (тело 2) через термовязкоупругий промежуточный слой (покрытие). Тогда $u_n^{(1)} = -\delta = const$, $[u_n] = -(u_n^{(2)} + \delta)$, $(u_n) = u_n^{(2)} - \delta$ ($\delta > 0$ – осадка штампа). Исключая в двух последних соотношениях (1.5) нормальное напряжение $\sigma_n^{(1)}$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(2)} = & -\frac{E_n}{2h} (u_n^{(2)} + \delta) - \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(2)} - \frac{\beta_n}{2} (\theta) + \frac{2h}{3} \nabla_s \cdot (\mathbf{G} \nabla_s u_n^{(2)}) + \\ & + \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_0 \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}) - h \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_1 \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}) + \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_2 \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для трансверсально-изотропного слоя (покрытия) соотношение (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(2)} = & -\frac{E_n}{2h} (u_n^{(2)} + \delta) - \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(2)} - \frac{\beta_n}{2} (\theta) + \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(2)} + \\ & + h \left(\frac{\mu_0 + \mu_2}{2} - \mu_1 \right) \Delta_s \dot{u}_n^{(2)} + h \nabla_s \cdot \left(\frac{\mu_0 + \mu_2}{2} - \mu_1 \right) \cdot \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В изотермическом случае условие (2.6) упрощается:

$$\sigma_n^{(2)} = -\frac{E_n}{2h} (u_n^{(2)} + \delta) - \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(2)} + \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(2)} + \frac{2h\eta'}{3} \Delta_s \dot{u}_n^{(2)}. \quad (2.7)$$

Как и в предыдущем примере, второй коэффициент постели и его вязкостный аналог характеризуют работу промежуточного слоя (покрытия) на поперечный сдвиг.

Если материал слоя (покрытия) упругий, то из (2.7) получается классическая двухпараметрическая модель [3]

$$\sigma_n^{(2)} = -\frac{E_n}{2h} (u_n^{(2)} + \delta) + \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(2)}. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.8) видно, что если $-\delta < u_n^{(2)} < 0$ и функция $u_n^{(2)}(\xi^1, \xi^2)$ вы-

пукла вниз относительно ξ^1 , ξ^2 , то $\Delta_s u_n^{(2)} > 0$, и нормальная реакция основания получается по модулю меньшей, чем в простейшей модели Винклера.

3. Вязкоупругий слой при действии нормальной сосредоточенной силы, зависящей от времени. Рассмотрим вязкоупругий слой, покоящийся на жестком основании и подверженный действию нормальной сосредоточенной силы, зависящей от времени (рис. 1). Задачу будем рассматривать в рамках плоской деформации. При этом

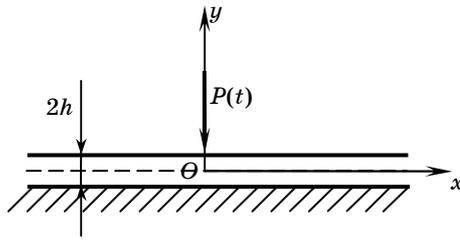


Рис. 1

$\xi^1 = x$, $\xi^3 = y$, $\xi^2 = -z$, $u_n^{(1)} = v$, $u_n^{(2)} = 0$, $\sigma_n^{(1)} = -P(t)\delta(x)$ (t – время). Материал слоя будем считать изотропным. Тогда уравнение (2.3) примет вид

$$2t_e v'' + 2t_\eta \dot{v}'' - k_e v - k_\eta \dot{v} = P(t)\delta(x), \quad (3.1)$$

где $\delta(x)$ – δ -функция Дирака;

$$k_e = \frac{E_0}{2h(1-\nu_0^2)}, \quad t_e = \frac{Gh}{3} = \frac{E_0 h}{6(1+\nu_0)}, \quad k_\eta = \frac{2\eta}{3h}, \quad t_\eta = \frac{\eta h}{3},$$

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Здесь $G = E/[2(1+\nu)] = E_0/[2(1+\nu_0)]$ – модуль сдвига материала слоя; η – вязкость. Штрихами обозначены производные по x , а точками – по t . Разделив уравнение (3.1) на $2t_e$, получим

$$v'' + \tau_K \dot{v}'' - \alpha_e^2 v - \frac{\tau_K}{h^2} \dot{v} = \frac{P(t)\delta(x)}{2t_e}, \quad (3.2)$$

где $\tau_K = \eta/G$ – время запаздывания; $\alpha_e^2 = k_e/2t_e = 3/[2h^2(1-\nu_0)]$. Решение уравнения (3.1) или (3.2) должно затухать на бесконечности. Начальное условие примем нулевым.

Применим к уравнению (3.1) или (3.2) интегральное преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа по t . Учитывая условия затухания решения на бесконечности и нулевое начальное условие, для трансформанты функции $v(x, t)$ получаем следующее выражение:

$$V(\xi, s) = -\frac{P^L(s)}{(k_\eta + 2t_\eta \xi^2)s + k_e + 2t_e \xi^2}. \quad (3.3)$$

Здесь ξ , s – параметры преобразований Фурье и Лапласа соответственно; $P^L(s)$ – преобразование Лапласа функции $P(t)$. Обращая формулу (3.3), получим решение уравнения (3.1) или (3.2) в виде

$$v(x, t) = - \int_0^t G(x, t - \tau) P(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

где

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi t \eta} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + h^{-2}}\right)}{\xi^2 + h^{-2}} \cos x\xi d\xi \quad (3.5)$$

– функция Грина.

Для случая постоянной во времени сосредоточенной силы $P(t) = P_0 H(t)$ ($H(t)$ – функция Хевисайда) из (3.4), (3.5) получим следующее выражение для вертикального перемещения:

$$v(x, t) = - \frac{P_0}{4\alpha_e t_e} e^{-\alpha_e |x|} + \frac{P_0}{2\pi t_e} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + \alpha_e^2}\right)}{\xi^2 + \alpha_e^2} \cos x\xi d\xi. \quad (3.6)$$

Первый член выражения (3.6) в точности соответствует упругому решению [3], второй член, быстро убывающий со временем, характеризует вязкоупругое запаздывание реакции слоя на внешнее механическое воздействие. Введем безразмерные координату $\bar{x} = x/h$, время $\bar{t} = t/\tau_0$ (τ_0 – характерное время), а также безразмерное время запаздывания $\bar{\tau}_K = \tau_K/\tau_0$ и вертикальное перемещение $\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = 2t_e v(x, t)/(h P_0) = 2G v(x, t)/(3P_0)$. Тогда, опуская верхние риски, вместо (3.6) получим формулу

$$v(x, t) = - \frac{e^{-\alpha|x|}}{2\alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + \alpha^2}\right)}{\xi^2 + \alpha^2} \cos x\xi d\xi, \quad (3.7)$$

где $\alpha^2 = 3/[2(1 - \nu_0)]$.

На рис. 2 приведены графики зависимости безразмерного вертикального перемещения от безразмерной координаты x в разные моменты времени, полученные с помощью формулы (3.7). В качестве материала вязкоупругого слоя был выбран асфальтобетон со следующими упругими постоянными при $T = 20$ °C: $E = 570$ МПа, $\nu = 0,12$. Рис. 2а соответствует песчаному асфальтобетону без добавок с вязкостью $\eta = 5$ ГПа·с и временем запаздывания $\tau_K = 19,65$ с, а рис. 2б – песчаному асфальтобетону с активированным минеральным порошком на высоковязком битуме. В этом случае $\eta = 54$ ГПа·с, а $\tau_K = 212,2$ с. Характерное время в обоих случаях $\tau_0 = 10$ с. Как видно из рис. 2, вязкоупругие верти-

кальные перемещения в точках, близких к точке приложения сосредоточенной силы, всегда по модулю меньше упругих (пунктирные линии на

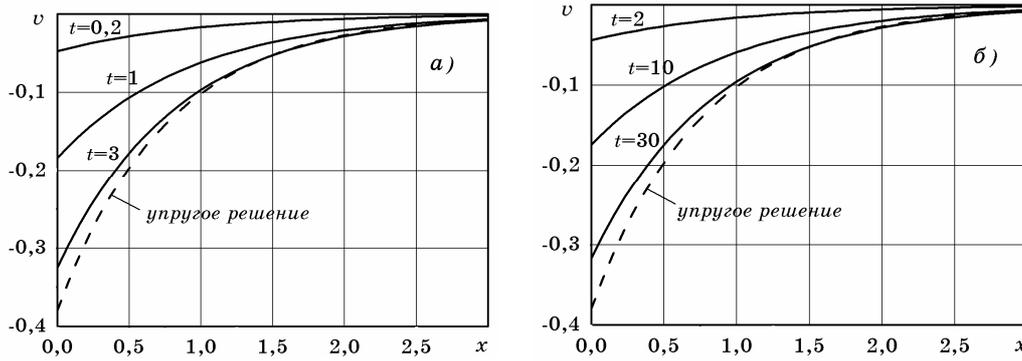


Рис. 2

рис. 2 а, б), а значит в точке приложения сосредоточенной силы конечны. При $t \rightarrow \infty$ вязкоупругое решение приближается к упругому, причем при $t > \tau_K$ для точек, удаленных от точки приложения нагрузки на величину, большую h , разность между соответствующими решениями становится незначительной. Увеличение вязкости асфальтобетона примерно на порядок приводит примерно к такому же увеличению запаздывания реакции вязкоупругого слоя на внешнее силовое воздействие. Наконец, распределительная способность у вязкоупругого слоя несколько лучше, чем у упругого.

На рис. 3 показаны зависимости вязкоупругого вертикального перемещения от продольной координаты x в разные моменты времени при

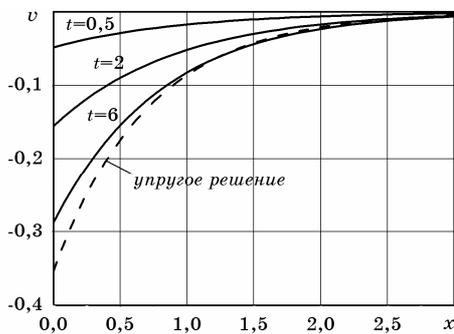


Рис. 3

$T = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ (материал слоя – песчаный асфальтобетон без добавок). При этом

$E = 300 \text{ МПа}$, $\nu = 0,2$,
 $\eta = 600 \text{ МПа} \cdot \text{с}$, $\tau_K = 4,8 \text{ с}$, $\tau_0 = 1 \text{ с}$.

Как видно из рис. 3, в этом случае вязкоупругие перемещения стремятся к упругим намного скорее. Уже через 6 с после начала действия силы разность между вязкоупругим и упругим перемещениями в точке ее приложения составляет менее 20% от упругого перемещения. Из рис. 2, 3 следует, что в вязкоупругом слое, который описывается моделью Кельвина–

Фойгта, при нулевом начальном условии вязкоупругие деформации (перемещения) развиваются не мгновенно, как в упругом слое, а с определенным запаздыванием, зависящим от времени запаздывания τ_K .

Поэтому, если необходимо избежать деформаций, близких к упругим (в окрестности точки приложения сосредоточенной силы), время действия нагрузки должно быть небольшим (по крайней мере меньшим τ_K).

должно быть небольшим (по крайней мере меньшим τ_K).

Изучим накапливание необратимых вязкоупругих деформаций в рассматриваемом слое. Для этого рассмотрим следующий закон изменения во времени сосредоточенной силы:

$$P(t) = P_0 \sum_{i=1}^n [H(t - t_i) - H(t - t_i - \Delta t)]. \quad (3.8)$$

Здесь $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ – выбранные моменты времени, а $\Delta t \ll t_{i+1} - t_i$ ($i = \overline{1, n-1}$) – время действия нагрузки. Подставив функцию (3.8) в (3.4), (3.5), для безразмерного вертикального перемещения в точке приложения сосредоточенной силы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} v(0, t) = & -\frac{1}{2\alpha} [H(t) - H(t - \Delta t)] + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + 1}\right) \frac{d\xi}{\xi^2 + \alpha^2} \times \\ & \times \sum_{i=1}^n [H(t - t_i) - H(t - t_i - \Delta t)] - \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^n \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t_i}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + 1}\right) \frac{d\xi}{\xi^2 + \alpha^2} \times \\ & \times [H(t - t_i) - H(t - t_i - \Delta t)] + \sum_{i=1}^{n-1} v_{ci} [H(t - t_i - \Delta t) - \\ & - H(t - t_{i+1} - \Delta t)] + v_{cn} H(t - t_n - \Delta t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Постоянные v_{ci} ($i = \overline{1, n}$) вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} v_{c1} = & -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + 1}\right) \frac{d\xi}{\xi^2 + \alpha^2}, \\ v_{ci} = & v_{ci-1} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t_i}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + 1}\right) \times \\ & \times \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + 1}\right) - 1 \right] \frac{d\xi}{\xi^2 + \alpha^2} \quad (i = \overline{2, n}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

На рис. 4 показаны зависимости от времени вертикальных вязкоупругих перемещений в точке приложения сосредоточенной силы. Моменты времени t_i ($i = \overline{1, 6}$) выбраны равноотстоящими друг от друга с интервалом 5 с. Время действия силы – 0,3 с. Кривые 1 соответствуют случаю, когда материалом вязкоупругого слоя является обычный асфальтобетон без добавок; кривые 2 соответствуют песчаному асфальтобетону с активированным минераль-

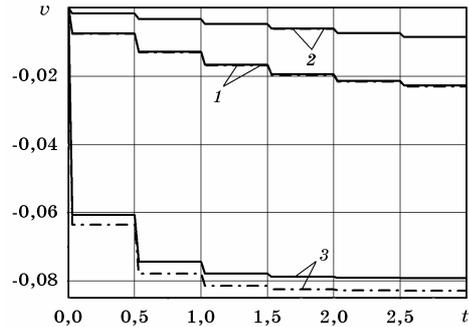


Рис. 4

ным порошком ($\eta = 22 \text{ ГПа} \cdot \text{с}$, $\tau_K = 86,46 \text{ с}$). В обоих случаях температура асфальтобетона $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Кривые 3 соответствуют случаю обычного асфальтобетона без добавок при $T = 50 \text{ }^\circ\text{C}$. Во всех случаях характерное время $\tau_0 = 10 \text{ с}$. Для перехода к безразмерным перемещениям использовался модуль сдвига при $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Штрихпунктирные ломаные линии представляют соответствующие графики, построенные при помощи приближенных формул, получающихся из (3.9), (3.10) разложением экспонент типа $\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + 1}\right)$, $\exp\left(-\frac{t - t_i}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha^2}{\xi^2 + 1}\right)$ в ряды с сохранением

первых двух членов. Как видно из рис. 4, наименьшее и наиболее равномерное накопление необратимых вязкоупругих деформаций (перемещений) имеет место во втором случае. Наибольшее и наиболее неравномерное накопление необратимых деформаций (почти 100% за половину времени наблюдения) имеет место в случае нагретого асфальтобетона, причем около 75% этих деформаций (перемещений) накапливается после первого действия сосредоточенной силы. Следует отметить, что приближенные формулы всегда дают несколько завышенное по модулю значение вертикального перемещения. При этом максимальное относительное отклонение от точного решения имеет место в случае 3 и составляет не более 5%. В случае 1 это отклонение крайне незначительно, а в случае 2 практически равно нулю. Отметим, что применение приближенных формул значительно сокращает время расчетов и упрощает их.

Таким образом, построена обобщенная двухпараметрическая модель термовязкоупругого анизотропного промежуточного слоя (покрытия), в которой учет его работы на поперечный сдвиг приводит к ненулевому скачку нормальных напряжений. Показано, что когда одно из сопрягаемых тел является абсолютно жестким, из обобщенной модели (1.5) получаются модели Власова [3, 7] и Муравского [7, 8] для квазистатического случая при линейном распределении перемещений по толщине слоя. Установлены основные закономерности деформирования во времени вязкоупругого изотропного слоя на жестком основании при действии постоянной нормальной сосредоточенной силы в случае плоской деформации. Изучено накапливание необратимых вязкоупругих деформаций в точке приложения сосредоточенной силы, циклически изменяющейся во времени. Полученные результаты позволяют более адекватно описать характер деформирования вязкоупругого промежуточного слоя (покрытия) в рамках обобщенной двухпараметрической модели.

РЕЗЮМЕ. Побудовано узагальнену двопараметричну модель термов'язкопружного анізотропного проміжкового шару (покриття), на основі якої вивчено поведінку в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії нормальної зосередженої сили, що залежить від часу. Розглянуто випадки сталого та короткочасного циклічного навантаження.

Ключові слова: термов'язкопружний шар, узагальнена двопараметрична модель, робота на стиснення та поперечний зсув, зосереджена сила, незворотні в'язкопружні деформації

SUMMARY. Generalized two-parameter model of thermoviscoelastic interphase layer (coating) is constructed. The behaviour of viscoelastic layer on the rigid foundation

under the action of the normal concentrated force depending on the time has been studied on the base of this model. The cases of constant loading as well as of short time cyclic loading are considered.

Key words: thermoviscoelastic layer, generalized two-parameter model, the shrinkage and transverse shear work, the concentrated force, irreversible viscoelastic strain

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 487 с.
2. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
4. Гудрамович В. С. Механика контактных взаимодействий оболочечных систем при локальном нагружении // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 7. – С. 24–51.
5. Казаков К. Е., Манжиров А. В. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 227–240.
6. Керр (A. D. Kerr) Упругие и вязкоупругие модели оснований // Тр. Амер. об-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикладная механика. – 1964. – Т. 31, № 3. – С. 139–148.
7. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.
8. Муравский Г. Б. О модели упругого основания // Строит. механика и расчет сооружений. – 1967. – № 6. – С. 14–17.
9. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.–Л.: Гос. изд-во лит. по стр-ву и архитектуре, 1954. – 56 с.
10. Скородинський І. С. Термов'язкопружна модель шару між двома тілами та умови їх спряження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 3. – С. 35–43.
11. Kim S. M., Won M. C., McCullough B. F. Behavior of Plate on Viscoelastic Foundation under Moving Harmonic Loads // Trans. of the 15-th ASCE Engineering Mechanics Conference, June 2–5, 2002. – NY: Columbia University, 2002 – P. 1–8 (CD-ROM).
12. Reissner E. A Note on Deflections of Plates on a Viscoelastic Foundation // Trans. ASME. J. of Appl. Mech. – 1958. – Vol. 25, No. 1. – P. 144–145.

*Институт прикладных проблем
механики и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 22.10.2011

УДК 539.375

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
Л. А. КИПНИС, д-р физ.-мат. наук,
Г. А. ХАЗИН, канд. физ.-мат. наук, Т. В. ПОЛИЩУК

О РАЗВИТИИ НАЧАЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛОС ОТ НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Решена симметричная задача о расчете начальных пластических полос вблизи угловой точки границы раздела изотропных сред. Пластическая полоса моделируется линией разрыва касательного смещения. Решение соответствующей задачи теории упругости построено методом Винера-Хопфа. Определены длина и направление развития пластической полосы.

Ключевые слова: угловая точка, граница раздела сред, пластические полосы, метод Винера-Хопфа.

В литературе по механике разрушения опубликовано большое число работ, посвященных решению задач о расчетах пластических зон предразрушения вблизи концов трещин [2, 6–10]. Менее изучены в этом плане другие остроконечные концентраторы напряжений и, в частности, угловые точки однородных и кусочно-однородных тел. В работе [1] дано решение задачи о расчете начальных пластических полос-зон вблизи вершины линейного жесткого включения. Для угловой точки границы однородного изотропного упругопластического тела такой расчет выполнен в работе [4] при различных краевых условиях на сторонах угла. В данной работе решена задача о расчете начальных пластических полос-зон вблизи угловой точки границы раздела изотропных сред, развивающихся под углом к этой границе.

Постановка задачи. В условиях плоской деформации в рамках симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное изотропное упругопластическое тело с границей раздела сред в форме сторон угла. С ростом внешней нагрузки вблизи угловой точки границы раздела сред, представляющей собой остроконечный концентратор напряжений, появляется и развивается пластическая зона, расположенная в более пластичном материале. Будем изучать лишь начальный этап развития пластической зоны, считая внешнюю нагрузку достаточно малой. Тогда размер зоны будет значительно меньше размеров тела.

Известно, что на начальной стадии своего развития пластические деформации вблизи угловых точек – концентраторов напряжений (в частности, вблизи концов трещин) локализованы в тонких слоях материала – узких пластических полосах, которые принято моделировать прямыми линиями разрыва смещения, исходящими из этих угловых точек [2, 6]. Ниже используется широко распространенная в настоящее время модель пластической зоны с двумя боковыми линиями скольжения. На линии допускается разрыв лишь касательного смещения, а касательное напряжение равно пределу текучести на сдвиг τ .

Ставится задача определение длины начальных пластических полос,

моделируемых линиями скольжения, и направлений их развития.

Основываясь на вышеизложенном и учитывая малость пластической зоны, приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей два прямолинейных разреза конечной длины (линии разрыва касательного смещения), исходящих из угловой точки и расположенных внутри одного из углов (рис. 1).

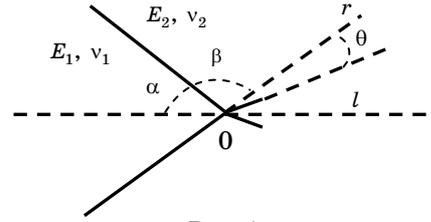


Рис.1

На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача К), порождаемое единственным на интервале $(-1; 0)$ корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная C , входящая в это решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \theta = \alpha + \beta, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0, \\ \theta = \alpha + \beta - \pi, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \\ \theta = \beta, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \\ \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1; \\ \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = Cgr^{\lambda_0} + o(1/r) \quad (3)$$

Здесь $\alpha + \beta - \pi \leq \theta \leq \alpha + \beta$, $\langle a \rangle$ – скачок a ; λ_0 – единственный в интервале $(-1; 0)$ корень уравнения;

$$\begin{aligned} \Delta(-\lambda - 1) = 0, \quad \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2, \\ \delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) [\chi_2 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha], \\ \delta_1(z) = (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \sin^2 z\pi - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] (\chi_1 \sin 2z\alpha - \\ - z \sin 2\alpha) - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) [\chi_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha], \\ \delta_2(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] (\chi_1 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha), \\ e = \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2} e_0, \quad e_0 = \frac{E_2}{E_1}, \quad \chi_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}, \end{aligned}$$

(E_1, E_2 – модули Юнга, ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона); $\tau_1 = \tau$, если $Cg > 0$, $\tau_1 = -\tau$, если $Cg < 0$; $g(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2)$ – известная функция.

Решение сформулированной задачи теории упругости представляет

собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого из условий (2) имеем

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1 - Cgr^{\lambda_0}, \quad (4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача – задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения решения первой задачи будем использовать метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [3–5].

Решение уравнения Винера-Хопфа. Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе из условий (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} &= ctgp\pi G(p)\Phi^-(p) \\ G(p) &= \frac{[a_o(p) + a_1(p)e + a_2(p)e^2] \sin p\pi}{[b_o(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi}, \\ a_o(p) &= -(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \{ [\cos 2p(\pi - \alpha - \beta) - \cos 2(\alpha + \beta)] \times \\ &\quad \times [4(\chi_2 \sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta) - (1 + \chi_2)^2] + 2[\sin 2p(\pi - \alpha - \beta) - \\ &\quad - p \sin 2(\alpha + \beta)](\chi_2 \sin p\beta - p \sin \beta) \}, \\ a_1(p) &= [\sin 2p(\pi - \alpha - \beta) - p \sin 2(\alpha + \beta)] \{ 2(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\ &\quad \times (\chi_2 \sin 2p\beta - p \sin \beta) + 2(\chi_1 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha)(\sin 2p\beta + \\ &\quad + p \sin 2\beta) + (1 + \chi_1)(1 + \chi_2)[\cos 2p(\alpha + \beta) - \cos 2(\alpha + \beta)] \} - \\ &\quad - [\cos 2p(\pi - \alpha - \beta) - \cos 2(\alpha + \beta)] \{ (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\ &\quad \times [(1 + \chi_1)(1 + \chi_2) - 4(\chi_2 \sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta)] - 4(\chi_1 \sin 2p\alpha - \\ &\quad - p \sin 2\alpha)(\sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta) - (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \times \\ &\quad \times [\sin 2p(\alpha + \beta) + p \sin 2(\alpha + \beta)] \}, \\ a_2(p) &= -2(\chi_1 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \{ [\sin 2p(\pi - \alpha - \beta) - p \sin 2(\alpha + \beta)] \times \\ &\quad \times (\sin 2p\beta + p \sin 2\beta) + 2[\cos 2p(\pi - \alpha - \beta) - \cos 2(\alpha + \beta)] \times \\ &\quad \times (\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta) \}, \\ b_o(p) &= 2(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\chi_2 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha], \\ b_1(p) &= 2 \{ (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \sin^2 p\pi - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\chi_1 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\
& \times [\chi_2 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] \}, \\
b_2(p) &= 2 [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\chi_1 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \quad \tau_2 = -Cgl^{\lambda_0}, \\
\Phi^+(p) &= \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_2}{4(1-\nu_2^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial U_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho \quad (5)
\end{aligned}$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа.

Подобные уравнения решены, например, в [3, 4].

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) &= K^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\
\Phi^-(p) &= \frac{pG^-(p)}{K^-(p)} \left[\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} + \right. \\
& \left. + \frac{\tau_2}{(p+\lambda_0+1)K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0), \\
\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] &= \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)} \quad (6)
\end{aligned}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Определение длины и направлений развития начальных пластических полос. С помощью (6) получаем выражение для коэффициента K_{II} интенсивности напряжений в конце разреза

$$K_{II} = \frac{\sqrt{2} g \Gamma(\lambda_0 + 3/2)}{\Gamma(\lambda_0 + 2) G^+(-\lambda_0 - 1)} C l^{\lambda_0 + 1/2} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} G^+(-1)} \tau_1 \sqrt{l}. \quad (7)$$

Длина пластической полосы определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линии разрыва касательного смещения, т.е. из условия равенства нулю коэффициента K_{II} .

Приравнивая к нулю правую часть (7), получаем следующую формулу для определения длины l начальных пластических полос:

$$l = L \left(\frac{|C|}{\tau} \right)^{-1/\lambda_0}, \quad L = \left[\frac{2|g| \Gamma(\lambda_0 + 3/2) G^+(-1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda_0 + 2) G^+(-\lambda_0 - 1)} \right]^{-1/\lambda_0}. \quad (8)$$

Следуя [6], направление развития пластической полосы будем опре-

делять из условия максимума ее длины.

Согласно (8), в качестве угла наклона пластической полосы к границе раздела сред должно быть выбрано то значение $\beta \in [0; \pi - \alpha]$, которое доставляет наибольшее значение функции $L(\beta)$.

Зависимость $L(\beta)$ ($\beta \in [0; \pi - \alpha]$) качественно изображена на рис. 2 ($E_1/E_2 > 1, \nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

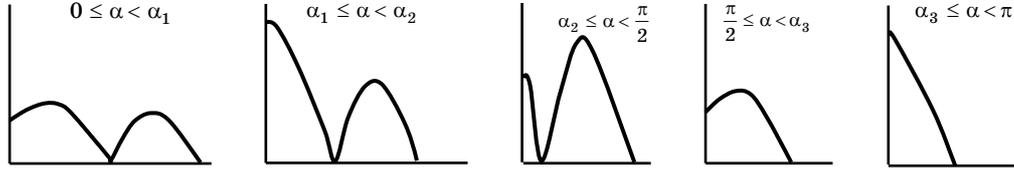


Рис.2

Значениям E_1/E_2 , равным 2; 3; 5; 10, соответствуют значения угла

$\alpha, \text{ рад.}$	E_1 / E_2			
	2	3	5	10
100	32,1	29,4	18,1	10,2
150	25,8	22,3	10,9	3,5
200	20,2	15,7	5,2	0
250	14,3	11,5	0	0
300	8,6	6,1	0	0
350	4,4	1,2	0	0
400	0	0	0	0
450	88,3	87,8	86,3	85,4
500	84,1	83,4	81,5	81,1
550	79,1	78,3	77,3	76,2
600	74,5	73,3	72,4	71,8
650	69,3	68,6	68,2	67,3
700	64,4	64,2	63,1	62,9
750	59,2	58,9	58,7	58,4
800	55,3	55,1	54,4	54,2
850	50,2	49,8	49,6	48,7
950	40,5	39,4	38,3	37,7
1000	34,4	34,1	32,5	31,3
1050	28,7	28,3	26,2	25,1
1100	23,1	22,4	20,3	18,4
1150	18,3	17,2	14,1	11,8
1200	12,9	12,2	8,4	6,2
1250	8,4	7,5	3,3	0
1300	3,2	1,7	0	0

α_1 , равные $37,3\theta$; $35,9\theta$; $22,4\theta$; $16,5\theta$, значения α_2 , равные $43,8\theta$; $43,2\theta$; $42,6\theta$; $41,3\theta$, и значения α_3 , равные $132,2\theta$; $130,7\theta$; $127,1\theta$; $123,4\theta$. При этом $\theta = \pi/180$ рад.

Некоторые значения угла наклона пластической полосы к границе раздела сред приведены в таблице. Если $\alpha \geq \frac{3\pi}{4}$, то значение угла наклона равно нулю.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. С ростом модуля параметра нагружения C длина начальных пластических полос возрастает по степенному закону. Чем больше предел текучести на сдвиг τ , тем меньше длина пластических полос.

Пусть $E_1/E_2 > 1$ фиксировано ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). При $\alpha < \alpha_1$ начальные пластические полосы развиваются под углом к границе раздела сред, уменьшающимся с увеличением α . При $\alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2$ они развиваются вдоль границы раздела сред. При $\alpha_2 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \alpha_3$ развивающиеся начальные пластические по-

лосы снова составляют с границей раздела сред угол, уменьшающийся с увеличением α , а при $\alpha \geq \alpha_3$ – развиваются вдоль нее.

Если $E_1 / E_2 > 1$ возрастает, то угол наклона начальных пластических полос к границе раздела сред уменьшается, а область $[\alpha_1; \alpha_2) \cup [\alpha_3; \pi)$ значений α , при которых начальные пластические полосы развиваются вдоль границы раздела сред, расширяется.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано симетричну задачу про розрахунок початкових пластичних смуг біля кутової точки межі поділу ізотропних середовищ. Пластична смуга моделюється лінією розриву дотичного переміщення. Розв'язок відповідної задачі теорії пружності побудовано методом Вінера-Хопфа. Визначені довжина і напрямок розвитку пластичної смуги.

Ключові слова: кутова точка, межа поділу середовищ, пластичні смуги, метод Вінера-Хопфа.

SUMMARY. The symmetric problem on calculation of the initial plastic strips near the corner point of the interface of isotropic media is solved. The plastic strip modeled by the line of rupture of tangential displacement. The solution of corresponding problem of theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method. The length and the direction of development of plastic strip are determined.

Key words: corner point, interface of media, plastic strips, Wiener-Hopf method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. *Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М.* О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения // Проблемы прочности. – 1982. – № 11. – С. 66–69.
2. *Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (обзор) // Там же. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
3. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А.* Об устойчивости равновесия трещины Коттрелла // Прикладная механика. – 2010. – Т 46, № 2. – С. 13–23.
4. *Кипнис Л.А., Черепанов Г.П.* Применение принципа выбора к проблеме развития линий скольжения из угловой точки // Прикладная математика и механика. – 1989. – Т.53, № 1. – С. 159–164.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
6. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68.
7. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
8. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
9. *Kaminsky A. A., Kurchakov E. E., Gavrillov G. V.* Study of the plastic zone near a crack in an anisotropic body // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 7. – P. 749–764.
10. *Kaminsky A. A., Kurchakov E. E., Gavrillov G. V.* Formation of a plastic zone in an anisotropic body under loads acting a long a crack // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 7. – P. 475–490.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Уманский государственный педагогический университет*

Поступила 22.10.2011

УДК 539.376

Ю. М. КОБЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук

**МОДЕЛЬ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ
В УСЛОВИЯХ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ**

Предложена модель разрушения, в основу которой положено увеличение истинной плотности вещества в процессе ползучести. Расчетные значения времен разрушения качественно и количественно согласуются с данными экспериментов.

Ключевые слова: модель разрушения, хрупкое разрушение, длительная прочность, критерий разрушения, время разрушения.

В линейной механике разрушения материал с трещиной под действием растягивающей нагрузки остается упругим и неповрежденным всюду, кроме зоны вблизи кончика трещины, где он становится пластическим. В разных аспектах изменение размеров трещины, ее продвижение, конфигурация, длина пластической зоны изучены в работах [5, 8, 9]. В механике рассеянного разрушения доминирующим процессом является образование межзеренных микротрещин, растущих путем слияния пор, возникающих вследствие диффузии вакансий (точечных дефектов) из тела зерна к его границам. При этом рост микротрещин считается накоплением повреждений с характерным параметром поврежденности, который означает уменьшение эффективной площади сечения образца [3]. Сочетание предыдущих подходов для случая усталостных трещин дает возможность учитывать перед фронтом макротрещины возникновение и рост микротрещин, позволяет находить длительность инкубационного периода, скорость продвижения макротрещины и время разрушения тела [2].

В настоящей работе предлагается модель разрушения материалов, находящихся в условиях длительной прочности при уровнях напряжений, меньших предела пропорциональности. Определяется время хрупкого разрушения, исходя из предположения о сохранении массы при изменяющемся объеме. Скорости деформаций ползучести моделируются с помощью теории течения Давенпорта. Неизвестные реологические параметры находятся с использованием регрессионного анализа и статистической обработки кривых ползучести.

1. Постановка задачи. Пусть на прямоугольный стержень длительное время действует растягивающая нагрузка $P(t)$, приложенная на торцах образца при постоянной температуре θ_i . В каждый фиксированный момент времени t нагрузка $P(t)$ поддерживается постоянной и определяется соотношением

$$P(t) = Ph(t), \quad (1.1)$$

где $h(t)$ – функция Хэвисайда ($h = 0$ при $t < 0$ и $h = 1$ при $t \geq 0$), P – постоянная величина. Упруго деформированный стержень объемом V находится в состоянии ползучести, во время которого происходит приращение микротрещин, т.е. рост малых деформаций ползучести за счет слияния пор при диффузии вакансий из тела зерна к его границам. Причиной образования точечных дефектов (вакансий) являются движения дислокаций. На границах зерен в результате слияния пор образуются микротрещины, вследствие чего растет суммарный объем микротрещин ΔV (вначале, при $t = 0$, он был принят равным нулю) внутри стержня, часть из которых выклинивается на поверхность.

Будем предполагать, что при малых деформациях стержня зависимость скорости ползучести от напряжений при одноосном растяжении описывается уравнением течения [6, 7]

$$\frac{d\varepsilon_x^c}{dt} = B(t)\sigma^n(t), \quad (1.2)$$

где $B(t)$ – функция времени; n – характерный параметр.

2. Модель разрушения. Объемная деформация ползучести Θ^c стержня связана с продольной линейной деформацией ползучести ε_x^c соотношением

$$\Theta^c = (1 - 2\mu)\varepsilon_x^c, \quad (2.1)$$

в котором μ – коэффициент Пуассона.

В начальный момент времени $t = 0$ тело объемом V и массой m упруго деформировано под действием нагрузки (1.1). В процессе ползучести ($t > 0$) изменяются его плотность и объем, но сохраняется масса, и этому состоянию соответствуют равенства

$$m = \rho_0 F_0 l_0 = \rho_0 V = \rho(t) F(t) l(t) = \rho(t)(V - \Delta V(t)), \quad (2.2)$$

где ρ_0 , $\rho(t)$ – соответственно начальная и текущая плотности материала. Зависимость между плотностью $\rho(t)$ и объемной деформацией $\Theta^c(t)$ получается из равенств (2.2) и будет такой:

$$\frac{\rho_0}{\rho(t)} = 1 - \frac{\Delta V(t)}{V} = 1 - \Theta^c(t). \quad (2.3)$$

Скорость линейной деформации и скорость изменения плотности с учетом равенств (2.1) и (2.3) связаны соотношением

$$\frac{d\varepsilon_x^c}{dt} = \frac{\rho_0}{(1 - 2\mu)\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.4)$$

Из тождества $P = P$ после его деления на соответствующие части равенств (2.2) следует, что

$$\frac{\sigma_{x0}}{\rho_0 l_0} = \frac{\sigma(t)}{\rho(t) l(t)}. \quad (2.5)$$

Здесь $\sigma_{x0} = P/F_0$, $\sigma(t) = P/F(t)$ – начальное и текущее значения нормальных напряжений в стержне. Предполагается, что $\sigma_{x0} \leq \sigma_{nu}$, где σ_{nu} – предел пропорциональности.

С другой стороны, на основе равенства $l(t)/l_0 = 1 + \varepsilon_x^c(t)$ зависимость между напряжениями (2.5) приобретает вид

$$\sigma(t) = \left(1 + \varepsilon_x^c\right) \frac{\rho(t)}{\rho_0} \sigma_{x0}. \quad (2.6)$$

Линейную деформацию ползучести ε_x^c и отношение плотностей $\rho_0 / \rho(t)$ связывает равенство

$$1 + \varepsilon_x^c = \left(2(1 - \mu) - \frac{\rho_0}{\rho(t)}\right) / (1 - 2\mu), \quad (2.7)$$

полученное из (2.1) и (2.3).

Зависимость (2.6), где множитель $1 + \varepsilon_x^c$ заменен в соответствии с (2.7), представляется равенством

$$\sigma(t) = \sigma_{x0} \left(2(1 - \mu) \frac{\rho(t)}{\rho_0} - 1\right) / (1 - 2\mu). \quad (2.8)$$

После замен скорости ползучести на скорость изменения плотности (2.4), текущего напряжения на начальное, как в зависимости (2.8), уравнение ползучести (1.2) примет вид

$$\frac{\rho_0}{(1 - 2\mu)\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = B(t) \left(\frac{2(1 - \mu)\rho/\rho_0 - 1}{1 - 2\mu} \sigma_{x0}\right)^n, \quad (2.9)$$

который для удобства представим в форме

$$-\frac{dq}{(1/q - a)^n} = \frac{B(t)}{a^n (1 - 2\mu)^{n-1}} \sigma_{x0}^n dt, \quad (2.10)$$

где $q = \rho_0 / \rho$, $a = 1/2(1 - \mu)$.

Критерием разрушения принято предельное состояние материала стержня, при котором он становится бесконечно плотным в каком-то условно сингулярном объеме. Величина q , обратная отношению плотностей $\rho(t)/\rho_0$, изменяется от единицы в момент времени $t=0$, когда в упругом состоянии материала $\rho(t) = \rho_0$, до нуля, когда плотность $\rho(t)$ в момент t_D разрушения стержня достигает бесконечности. Интегрируя уравнение

(2.10), правую часть в выше указанных пределах изменения q и левую по времени $(t=0, t_D)$, найдем

$$-\int_1^0 \frac{dq}{(1/q - a)^n} = \frac{\sigma_{x0}^n}{a^n (1 - 2\mu)^{n-1}} \int_0^{t_D} B(t) dt. \quad (2.11)$$

Пусть

$$B(t) dt = d\Omega. \quad (2.12)$$

Тогда

$$-\int_1^0 \frac{dq}{(1/q - a)^n} = \sigma_{x0}^n \frac{\Omega(t_D) - \Omega(0)}{a^n (1 - 2\mu)^{n-1}}, \quad (2.13)$$

причем $\Omega(0) = 0$, что будет видно из дальнейшего.

Из соотношения (2.13) для функции времени $\Omega(t_D)$ в момент длительного разрушения находим

$$\Omega(t_D) = (1 - 2\mu)^{n-1} \frac{a^n}{\sigma_{x0}^n} \int_0^1 \frac{dq}{(1/q - a)^n}. \quad (2.14)$$

Функция (2.14) является аналогом функции податливости, причем неизвестный параметр n и функция $\Omega(t_D)$ определяются из экспериментов на ползучесть.

Если выражение (2.12) подставить в уравнение (1.2), то получим уравнение кривой ползучести в виде

$$\varepsilon_x^c(t) = \Omega(t) \sigma_{x0}^n. \quad (2.15)$$

Здесь учтено, что на участке кривой, где скорость ползучести убывает, изменение напряжения $\sigma(t)$ по сравнению с начальным напряжением σ_{x0} настолько мало, что это напряжение можно принять равным начальному.

Делением уравнений (2.15) соответствующих каждой $i+k$ -й кривой ползучести, на уравнение i -й кривой ползучести, получают линейно независимые отношения

$$\frac{\varepsilon_{xi+k}^c(t_j)}{\varepsilon_{xi}^c(t_j)} = \left(\frac{\sigma_{x0i+k}}{\sigma_{x0i}} \right)^{n_i}. \quad (2.16)$$

В результате статистической обработки каждого соотношения (2.16) находят значения n_i . Общий показатель n будет их средним значением.

Отношения, аналогичные функциям податливости i -й кривой ползучести

$$\frac{\varepsilon_x^c(t)}{\sigma_{x0}^n} = \Omega_i(t) \quad (2.17)$$

задают функции времени $\Omega_i(t)$. Их количество равно количеству кривых ползучести. Полученные функции $\Omega_i(t)$ с учетом характера их изменения методами регрессивного анализа можно аппроксимировать линейной или степенной зависимостями. При этом находятся параметры приближения B_1 и m . Отметим, что при $t=0$ из уравнения (2.17) следует, что $\Omega(0)=0$. В случае принятия степенной зависимости

$$\Omega(t) = B_1 t^m, \quad (2.18)$$

для времени разрушения t_D находим

$$t_D = \left((1-2\mu)^{n-1} \frac{a^n}{B_1 \sigma_{x0}^n} \int_0^1 \frac{dq}{(1/q-a)^n} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (2.19)$$

Если принять линейную зависимость

$$\Omega(t) = B_1 t, \quad (2.20)$$

то время разрушения вычисляется по формуле

$$t_D = (1-2\mu)^{n-1} \frac{a^n}{B_1 \sigma_{x0}^n} \int_0^1 \frac{dq}{(1/q-a)^n}. \quad (2.21)$$

3. Расчет времени разрушения. Апробация модели разрушения (2.14) при линейной зависимости (2.20) проводилась на задачах расчета времени разрушения стержней (при различных уровнях нагрузок согласно (1.1), не превышающих предела пропорциональности σ_{nu}). Результаты расчетов сопоставлялись с экспериментальными данными по длительному разрушению гладких цилиндрических прутков.

В уравнении модели (2.21) коэффициент Пуассона μ подлежит определению из стандартного испытания на упругость при одноосном растяжении цилиндрического образца. Характеристические параметры ползучести B_1 , n , входящие в уравнения (2.21), определялись из стандартных испытаний на ползучесть при постоянной температуре θ_i . В испытаниях неизменными оставались напряжения. Это имело место в той части эксперимента, где скорость ползучести убывает.

Были обработаны все кривые ползучести с соответствующими начальными напряжениями σ_{x0} при заданных температурах. Показатель n получен путем осреднения по описанной методике, в основе которой положены соотношения (2.16). Используя значение показателя n , найдены функции времени (2.17) для каждой температуры. Характер поведения позволил аппроксимировать их прямой линией (2.20). При этом, была

определена константа B_1 , как среднее значение констант B_{1i} по каждой функции времени $\Omega_i(t)$. Сравнение выполнено для образцов, изготовленных из жаропрочного сплава ЭИ826 на хромоникелевой основе [1]. Значение материальных констант и реологических параметров для исследованного сплава приведено в таблице.

$T, ^\circ C$	$\sigma_{nc}, МПа$	μ	$B_1, 10^8 \text{ час}^{-1} (\text{м}^2 / \text{МН})^n$	n
700	539,550	0,3	$0,4289657826 \cdot 10^{-15}$	1,517264369
800	441,450	0,3	$0,9988412221 \cdot 10^{-21}$	2,241811753
900	309,015	0,3	$0,7299006162 \cdot 10^{-24}$	2,688568897

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов времени разрушения (сплошные линии), выполненные согласно формулам (2.21). Здесь же даны и экспериментальные данные. Круглые точки отвечают экспериментальным значениям времени разрушения цилиндрических прутков из

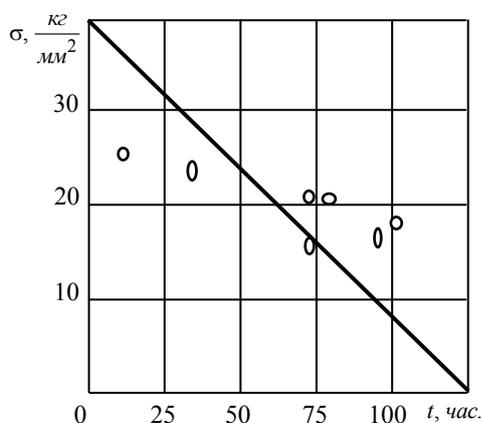


Рис. 1

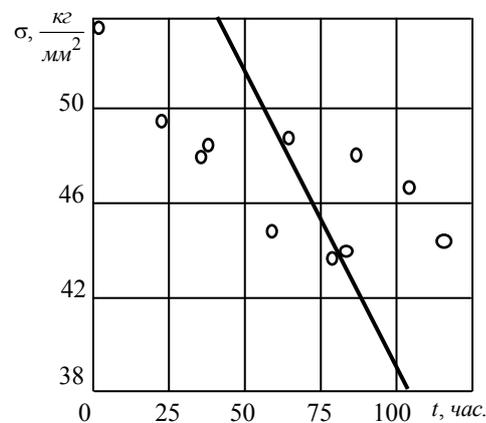


Рис. 2

сплава ЭИ826. Диаметр прутков составлял 45 мм, а температуры нагрева имели значения $\theta=900^\circ$ (рис. 1) и $\theta=800^\circ$ (рис. 2). Расчеты показывают несколько большее охрупчивание материала, чем происходит в экспериментах. Возможно, это связано с изменением коэффициента Пуассона, которое не учитывает предложенная модель.

РЕЗЮМЕ. Запропонована модель руйнування, в її основу покладено збільшення істинної щільності речовини в процесі повзучості. Отримані розрахунки, якісно та задовільно кількісно узгоджуються з експериментальними даними.

Ключові слова: модель руйнування, крихке руйнування, довготривала міцність, критерій руйнування, час руйнування.

SUMMARY. The model of destruction, in its based increase in the real density of matter in the process of creep. These calculations qualitatively and quantitatively satisfactory agreement with experimental data.

Key words: model of fracture, brittle fracture, long-term strength, criterion destruction, time destruction.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булыгин И. П., Власова П.Т., Горбодей А.Т., Селиверстова П.М., Чупахин С.Е. Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей. – М.: Гос. изд-во оборонной промышленности, 1957 – 173 с.
2. Голуб В. П., Плащинская А. В., Шатило Л. В. О влиянии двухосности напряженного состояния в вершине усталостной трещины на кинетику роста трещины в идеально пластичных материалах // Теорет. и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С.162–167.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 455 с.
4. Кобзарь Ю.М., Кобзарь А.Ю. Модель хрупкого разрушения стержней в условиях ползучести при растяжении // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Сб. докл. 2-й Всерос. конф., Новосибирск, 5-6 апреля 2011г. – Новосибирск, 2011. – С.162–169.
5. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. – 1959. – Т.5. №4. – С.
6. Малинин Н. Н. Ползучесть в обработке металлов. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.
7. Davenport C. C. Correlation of creep and relaxation properties of copper // Appl. Mech. – 1938. – Vol. 5, № 2 – P. 55–60.
8. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids//Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. – 1920. – Vol. 221. – P. 163–198.
9. Orowan E. O. Fundamentals of brittle behavior in metals // Simp. Fatigue and Fracture of Metals. N.Y. – Willey, 1952. – P. 139–167.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 29.09.2011.

УДК 539.3

Н. П. СЕМЕНЮК, д-р техн. наук,
Н. Б. ЖУКОВА, канд. физ.-мат. наук,
Н. И. ИВАНОВА, канд. физ.-мат. наук

ОБ УЧЕТЕ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ДЛИННЫХ ГОФРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Разработана методика расчета нелинейного деформирования длинных цилиндрических продольно гофрированных оболочек при внешнем давлении. В основу методики положены уравнения теории оболочек типа Тимошенко при малых деформациях и неограниченных углах поворота. Приведены примеры расчета оболочек с синусоидальным гофрированием. Показана эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: устойчивость, закритическое поведение, внешнее давление, гофрированные цилиндрические оболочки, теория оболочек типа Тимошенко, метод дискретной ортогонализации

Одним из опасных механизмов разрушения длинных цилиндрических оболочек-трубопроводов является образование под действием внешнего давления вмятин и их распространение с большой скоростью [9]. Задача о выпучивании и послекритическом деформировании кольца, к решению которой сводится задача об устойчивости бесконечных цилиндрических оболочек, рассмотрена в работе [10]. Были установлены условия, при которых закритическое деформирование кольца происходит при уменьшающейся нагрузке. Этот процесс имеет сходство с распространением вмятин.

В предлагаемой работе рассматривается выпучивание и закритическое поведение трубопроводов некругового поперечного сечения. Она является продолжением ранее выполненного исследования по устойчивости гофрированных оболочек [2, 6]. Эффекты, которые приносит гофрирование в поведение оболочечных конструкций, представляют значительный интерес как с практической, так и с теоретической точек зрения.

1. Соотношения одномерного варианта нелинейной теории оболочек типа Тимошенко при больших углах поворота. У оболочки бесконечной длины с произвольной цилиндрической поверхностью приведения при независимых от длины механических характеристиках и нагрузке каждое поперечное сечение находится в одинаковых условиях, вследствие чего напряжения и перемещения не зависят от координаты x , совпадающей с образующей рассматриваемой поверхности. Кривая, описывающая форму поперечного сечения оболочки, может быть задана в полярной системе координат радиусом R и углом φ . При заданной функции $R(\varphi) = R_0 \rho(\varphi)$ необходимые геометрические характеристики координатной кривой y – параметр Ламе A_2 и кривизна $1/R_2$ – определяются по известным формулам дифференциальной геометрии. Так как рассмат-

ривается плоская деформация цилиндра, то компонентами вектора перемещения будут проекции на окружную и нормальную к поверхности оси соответственно v и w .

Для целей настоящей работы необходимо иметь только выражения для деформации элемента координатной оси y – ε_{22} , деформации удлинения нормального элемента ε_{33} , деформации сдвига ε_{23} и приращения кривизны κ_{22} . Эти выражения получаются такими [2]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_2^2 + \theta_2^2), & \varepsilon_{23} &= \psi + \theta_2(1 + \chi) + \psi\varepsilon_2, \\ \varepsilon_{33} &= \chi + \frac{1}{2}(\chi^2 + \varphi^2), & \kappa_{22} &= \kappa_2(1 + \varepsilon_2) + \theta_2\kappa_{23},\end{aligned}\quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{R_2}, & \theta_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{dw}{d\varphi} + \frac{v}{R_2}, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{\chi}{R_2} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_2, & \kappa_{23} &= \frac{1}{A_2} \frac{d\chi}{d\varphi} + \frac{\psi}{R_2} + \frac{\theta_2}{R_2}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

При исследовании устойчивости и начального закритического поведения цилиндрических оболочек [2, 10] было показано, что для длинных оболочек из традиционных композиционных материалов при $\varepsilon_{33} = 0$ нельзя считать функцию χ равной нулю. Если принять $\varepsilon_{33} = 0$, то изменение прогибов по толщине определяется значением

$$\chi = -1 + \sqrt{1 - \psi^2}. \quad (1.3)$$

Подстановка (1.3) в выражения деформаций (1.1) дает точные выражения деформации ε_{23} и кривизны κ_{22} в рамках гипотез Тимошенко

$$\begin{aligned}\varepsilon_{23} &= \psi(1 + \varepsilon_2) + \theta_2\sqrt{1 - \psi^2}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} \left(1 + \varepsilon_2 - \frac{\theta_2\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} \right) + \frac{1}{R_2} (\varepsilon_2 + 1 - \\ &\quad - \sqrt{1 - \psi^2}) (1 + \varepsilon_2) + \frac{\theta_2}{R_2} (\psi + \theta_2),\end{aligned}\quad (1.4)$$

при тех же значениях (1.2) функций ε_2 и θ_2 и, следовательно, деформации ε_{22} .

Соотношения упругости запишем для произвольного строения оболочки по толщине [1]

$$T_{22} = C_{22}\varepsilon_{22} + B_{22}\kappa_{22}, \quad M_{22} = B_{22}\varepsilon_{22} + D_{22}\kappa_{22}, \quad T_{23} = C_{44}\varepsilon_{23}, \quad (1.5)$$

где

$$C_{ij} = C_{ij}^{(0)} - 2HB_{ij}^{(0)} + kD_{ij}, \quad B_{ij} = B_{ij}^{(0)} - 2HD_{ij}^{(0)},$$

$$H = \frac{1}{2R_2}, \quad k = 0.$$

Уравнения равновесия в проекциях на оси координат до деформации имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dT_{22}^*}{d\varphi} - \frac{A_2}{R_2} T_{23}^* - A_2 q \theta_2 &= 0, \\ \frac{dT_{23}^*}{d\varphi} + \frac{A_2}{R_2} T_{23}^* + A_2 q (1 + \varepsilon_2) &= 0, \\ \frac{dM_{22}^*}{d\varphi} - A_2 \bar{T}_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выражения усилий T_{22}^* , T_{23}^* и момента M_{22}^* приводятся ниже.

Совокупность соотношений (1.1) – (1.4) с учетом выражений ε_2 и θ_2 через перемещения (1.2) и уравнений (1.6) с граничными условиями при $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_N$ относительно трех разрешающих функций достаточна для исследования напряженно-деформированного состояния замкнутых или открытых длинных цилиндрических оболочек с произвольной формой поперечного сечения на траектории нагружения при больших перемещениях и углах поворота.

В случае малых углов поворота уравнения существенно упрощаются, так как поправкой, вносимой учетом нелинейных слагаемых в выражения деформаций поперечного сдвига ε_{23} и кривизны κ_{22} , предполагается возможным пренебречь. При линейных выражениях ε_{23} и κ_{22} будем иметь

$$\begin{aligned} T_{22}^* &= T_{22} + \frac{1}{R_2} M_{22}, \quad T_{23}^* = T_{23} + \left(T_{22} + \frac{1}{R_2} M_{22} \right) \theta_2, \\ M_{22}^* &= M_{22}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Разрешающая система уравнений. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом дискретной ортогонализации [4]. Совокупность приведенных выше соотношений позволяет получить систему уравнений, разрешенных относительно первых производных от функций, которые могут быть найдены указанным методом. Первым этапом вывода такой системы является линеаризация исходных уравнений. Полагаем, что разрешающие функции

$$\begin{aligned} z_1 &= T_{22}^*, \quad z_2 = T_{23}^*, \quad z_3 = M_{22}^*, \\ z_4 &= v, \quad z_5 = w, \quad z_6 = \psi \end{aligned} \quad (2.1)$$

зависят от некоторого параметра λ . Нагрузка, которой в данном случае

является интенсивность внешнего давления q , также зависит от этого параметра.

Линеаризованные выражения деформаций (1.1) запишем в виде

$$\dot{\varepsilon} = M_c \dot{\varepsilon}_l, \quad (2.2)$$

где использованы векторы $\varepsilon = (\varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \kappa_{22})^T$, $\varepsilon_l = (\varepsilon_2, \theta_2, \kappa_2, \psi)^T$ и матрица $M_c = (c_{ij})$ $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 4$.

Компоненты этой матрицы имеют значения

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 + \varepsilon_2, & c_{12} &= \theta_2, & c_{21} &= \psi, \\ c_{22} &= \sqrt{1 - \psi^2}, & c_{24} &= 1 + \varepsilon_2 - \frac{\theta_2 \psi}{\sqrt{1 - \psi^2}}, & c_{33} &= c_{24}, \\ c_{31} &= k_2 + \frac{2}{R_2}(1 + \varepsilon_2) - \frac{1}{R_2}(2\theta_2 + \psi) - \frac{k_2 \psi}{\sqrt{1 - \psi^2}}, \\ c_{34} &= \frac{1}{R_2} \left[\theta_2 + (1 + \varepsilon_2) \frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} \right] - \frac{k_2 \theta_2}{(1 - \psi^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Точка над функцией обозначает производную по параметру λ . Буквой «Т» над строкой или матрицей обозначено транспонирование.

Если ввести векторы $T = (T_{22}, T_{23}, M_{22})^T$, $T^* = (T_{22}^*, T_{23}^*, M_{22}^*)^T$, то можем записать

$$\begin{pmatrix} T^* \\ \bar{T}_{23} \end{pmatrix} = M_c^T T. \quad (2.4)$$

Также в векторно-матричных обозначениях представим соотношения (1.5):

$$T = A \varepsilon, \quad (2.5)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} c_{22} & 0 & B_{22} \\ 0 & C_{44} & 0 \\ B_{22} & 0 & D_{22} \end{pmatrix}.$$

После дифференцирования зависимостей (2.4) и (2.5), получаем

$$M_c^T \dot{T} + M_p \dot{\varepsilon}_c = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \bar{T}_{23} \end{pmatrix},$$

$$\dot{T} - AM_c \dot{\varepsilon}_c = 0. \quad (2.6)$$

В первом уравнении этой системы введена матрица $M_p = (P_{ij})$ $i, j = 1, 2, 3, 4$. Для ненулевых коэффициентов этой матрицы получены выражения

$$\begin{aligned} p_{11} &= T_{22} + \frac{2}{R_2} M_{22}, & p_{13} &= M_{22}, \\ p_{14} &= T_{23} + \frac{1}{R_2} \frac{\Psi}{\sqrt{1-\Psi^2}} M_{22}, & p_{22} &= T_{22} + \frac{2}{R_2} M_{22}, \\ p_{23} &= -\frac{\Psi}{\sqrt{1-\Psi^2}} M_{22}, & p_{24} &= -T_{23} \frac{\Psi}{\sqrt{1-\Psi^2}} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{k_2}{(1-\Psi^2)^{\frac{3}{2}}} \right) M_{22}, \\ p_{32} &= -\frac{\Psi}{\sqrt{1-\Psi^2}} M_{22}, & p_{34} &= -\frac{\theta_2}{\sqrt{1-\Psi^2}} M_{22}, \\ p_{44} &= -T_{23} \frac{\theta_2}{(1-\Psi^2)^{\frac{3}{2}}} + M_{22} \frac{1}{(1-\Psi^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1+\varepsilon_2}{R_2} - \frac{3k_2\theta_2\Psi}{1-\Psi^2} \right), \\ p_{ij} &= p_{ji}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При их выводе используется равенство

$$\dot{M}_c^T T = M_p \dot{\varepsilon}_l. \quad (2.8)$$

При покомпонентном представлении матриц и векторов системы уравнений (2.6) можно в явной форме записать выражение функции \bar{T}_{23} :

$$\bar{T}_{23} = c_{41} \dot{T}_{22} + c_{42} \dot{T}_{23} + c_{43} \dot{M}_{22} + p_{41} \dot{\varepsilon}_2 + p_{42} \dot{\theta}_2 + p_{43} \dot{k}_2 + p_{44} \dot{z}_6.$$

Остальные шесть уравнений запишем в виде

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ A_{22} & 0 & A_{23} & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ 0 & A_{77} & 0 & -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \\ A_{23} & 0 & A_{44} & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_{22} \\ \dot{T}_{23} \\ \dot{M}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 - p_{14} \dot{z}_6 \\ \dot{z}_3 - p_{24} \dot{z}_6 \\ \dot{z}_4 - p_{34} \dot{z}_6 \\ c_{14} \dot{z}_6 \\ c_{24} \dot{z}_6 \\ c_{34} \dot{z}_6 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Если обозначить коэффициенты матрицы, обратной к матрице, стоящей слева в равенстве (2.9), как b_{ij} , то получим

$$\begin{aligned}
\dot{T}_{22} &= \sum_{i=1}^3 b_{1i} \dot{z}_i + d_1 \dot{z}_6, & \dot{T}_{23} &= \sum_{i=1}^3 b_{2i} \dot{z}_i + d_2 \dot{z}_6, \\
\dot{M}_{22} &= \sum_{i=1}^3 b_{3i} \dot{z}_i + d_3 \dot{z}_6, & \dot{\varepsilon}_2 &= \sum_{i=1}^6 b_{4i} \dot{z}_i + d_4 \dot{z}_6, \\
\dot{\theta}_2 &= \sum_{i=1}^3 b_{5i} \dot{z}_i + d_5 \dot{z}_6, & \dot{k}_2 &= \sum_{i=1}^3 b_{6i} \dot{z}_i + d_6 \dot{z}_6,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{pi}(i) &= p_{ij}, & b_p(i+1) &= c_{i4} \quad (i = 1, 2, 3), \\
d_i &= -\sum_{j=1}^3 b_{ij} p_{j4} + \sum_{j=4}^6 b_{ij} c_{j-3,4} \quad i = 1, \dots, 6.
\end{aligned}$$

С учетом выражений (2.10) функция $\dot{\bar{T}}_{23}$ приобретает вид

$$\dot{\bar{T}}_{23} = \sum_{i=1}^3 F_{3i} z_i + F_{36} z_6,$$

при таких значениях коэффициентов F_{3i} :

$$\begin{aligned}
F_{3i} &= (c_{41}, c_{42}, c_{43}) \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix} + (p_{41}, p_{42}, p_{43}) \begin{pmatrix} b_{4i} \\ b_{5i} \\ b_{6i} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \\
F_{36} &= (c_{41}, c_{42}, c_{43}) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + (p_{41}, p_{42}, p_{43}) \begin{pmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} + p_{44}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Полученные представления (2.10), (2.11) компонентов векторов \dot{T} , \dot{T}_3 , $\dot{\varepsilon}_{1,2}$ через разрешающие функции z_i позволяют записать разрешающую систему уравнений в таком виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\dot{z}_1}{d\varphi} &= \frac{A_2}{R_2} \dot{z}_1 + A_2 \dot{q} \theta_2 + A_2 q \dot{\theta}_2, \\
\frac{d\dot{z}_2}{d\varphi} &= -\frac{A_2}{R_2} \dot{z}_1 - A_2 \dot{q} (1 + \varepsilon_2) - A_2 q \varepsilon_2, \\
\frac{d\dot{z}_3}{d\varphi} &= A_2 \dot{\bar{T}}_{23}, & \frac{d\dot{z}_4}{d\varphi} &= A_2 \dot{\varepsilon}_2 + \frac{1}{R_2} \dot{z}_5, \\
\frac{d\dot{z}_5}{d\varphi} &= A_2 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{R_2} \dot{z}_4, & \frac{d\dot{z}_6}{d\varphi} &= A_2 \dot{k}_2,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где, кроме введенных выше шести разрешающих функций, присутствует также седьмая функция $\dot{z}_7 = \dot{q}$. Однородная система шести уравнений

(2.12) содержит семь неизвестных функций z_i . Вектор \dot{Z} определяет направление касательной к кривой множества решений системы (2.12). Этот вектор имеет единичную длину [3]. Присоединив к системе (2.12) условие $\sum_{i=1}^7 z_i^2 = 1$, получаем возможность найти решение задачи.

Следующий шаг алгоритма состоит в решении задачи Коши

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \dot{Z} \quad (2.13)$$

с нулевыми начальными условиями при $\lambda = 0$.

Процедура получения численного решения подобной задачи изложена в работах [1, 3, 7].

3. Результаты расчета. Рассмотрим арку, осевая линия которой в полярной системе координат R, φ описывается уравнением

$$R = R_0 \left(1 - \gamma \cos m\pi \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_N - \varphi_0} \right), \quad (3.1)$$

где R_0 – радиус исходной окружности, которой придается волнистость в виде синусоиды из m полувольт с амплитудой γR_0 , φ_0 и φ_N – начальные и конечные значения координаты φ .

Пусть арка нагружена следящим внешним давлением интенсивностью q . Критическое значение давления для круговой оболочки определяется формулой

$$q_c = \frac{D_{22}}{R_0^3} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right) p, \quad (3.2)$$

где $p \leq 1$ – коэффициент влияния поперечной сдвиговой жесткости. Его значение равняется

$$p = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} \frac{D_{22}}{R_0^2 C_{44}}}. \quad (3.3)$$

Ниже при исследовании деформирования гофрированных оболочек нагрузку будем определять по отношению к величине (3.2).

При $\varphi_N = \pi$ формулой (3.2) определяется критическое давление полукольца и замкнутого кольца [8]. Если полярная система координат выбрана так, что при $\varphi = 0$ радиус совпадает с горизонтальным диаметром, то форма потери устойчивости полукольца будет симметрична относительно диаметра, образующего с горизонтальным диаметром угол $\frac{\pi}{4}$. В

случае кольца этот угол может быть произвольным, в том числе и равным нулю. Поэтому при численном методе расчета на устойчивость замк-

нутого кольца граничные условия надо заменить условиями симметрии формы выпучивания относительно горизонтального диаметра. В случае цилиндрических оболочек конечной длины условий симметрии достаточно, чтобы получить решение задачи численным методом дискретной ортогонализации [4]. Для кольца единичной ширины так же, как и для бесконечно длинной цилиндрической оболочки решение указанным численным методом возможно только при закреплении одной точки поперечного сечения. Положим

$$\begin{aligned} v = w = \psi = 0 \text{ при } \varphi = 0, \\ v = \psi = T_{23}^* = 0 \text{ при } \varphi = \pi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если судить о критическом значении давления q_{kp} для рассматриваемого кольца или оболочки, сравнивая ее со значением q_c (3.2), то численный расчет дает $\alpha_c = q_{kp} / q_c = 1$. Что касается закритического поведения, то кривая равновесных состояний при граничных условиях (3.4) близка по виду к определяемой другим методом [10].

При четном m форма поперечного сечения (3.1) симметрична относительно горизонтального диаметра.

Шарнирно опертая арка с $m = 6$ теряет устойчивость при $\alpha_c = 0,71$, если $\gamma = 0,1$, и $\alpha_c = 0,67$, если $\gamma = -0,1$. Гофрированная оболочка, попе-

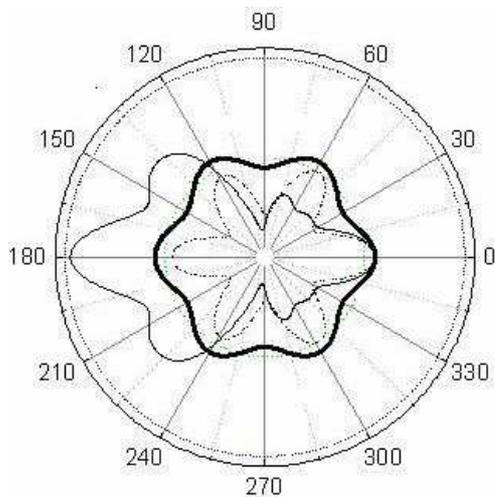


Рис. 1

речное сечение которой имеет вид (3.1) при $m = 6$ и $\gamma = \pm 0,1$, имеет критическую нагрузку, определяемую отношением $\alpha_c = 0,79$. Тот факт, что на величину α_c не влияет знак γ , свидетельствует о возможности использования условий периодичности (3.4) для расчета замкнутой оболочки. На рис. 1 толстая сплошная кривая дает представление о виде поперечного сечения оболочки, когда в выражении (3.1) $m = 6$, $\gamma = 0,1$. Штрихпунктирная кривая соответствует виду деформированного поперечного сечения в докритическом состоянии, тонкая сплошная – в закритическом состоянии. Процесс равномерного обжатия оболочки в критической точке

сменяется резким выпучиванием в окрестности $\varphi = \pi$ и смятием в окрестности $\varphi = \pi/2$.

Из-за наложения условия $w = 0$ в точке $\varphi = 0$ нарушается симметрия поперечного сечения в деформированном состоянии относительно вертикального диаметра.

На рис. 2 приведены графики зависимости нагрузки от прогибов в

точке $\varphi = \pi$ (кривая 1) и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (кривая 2). Сплошные кривые вычислены с использованием точных соотношений, штрих-пунктирные – соотношений простейшего квадратичного варианта. Как видим, кривые в докритическом состоянии и критические нагрузки практически совпадают. При удалении от критической точки различие между сплошными и пунктирными кривыми становится весьма существенным. При больших перемещениях $\left(\frac{w}{t} > 65\right)$ согласно точной

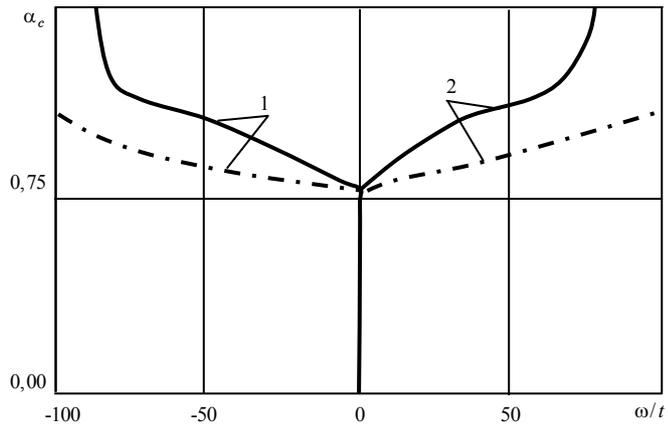


Рис.2

теории оболочка становится более жесткой, в то время как приближенное решение показывает рост прогибов почти без увеличения нагрузки.

Предложенная методика расчета позволяет рассмотреть множество различных вариантов гофрирования оболочек и их нагружения, однако, даже ограничившись приведенным примером, можно прийти к заключению, что для исследования больших перемещений численными методами разработанный вариант теории является весьма полезным. Докритическое состояние и критические нагрузки во многих задачах могут быть определены с помощью упрощенных соотношений.

РЕЗЮМЕ. Розроблено методику розрахунку нелінійного деформування довгих циліндричних поздовжньо гофрованих оболонок при зовнішньому тиску. В основу методики покладені рівняння теорії оболонок типу Тимошенко при малих деформаціях та необмежених кутах повороту. Наведені приклади розрахунку оболонок з синусоїдальним гофруванням. Показано ефективність запропонованого підходу.

Ключові слова: стійкість, закритична поведінка, зовнішній тиск, гофровані циліндричні оболонки, теорія оболонок типу Тимошенка, метод дискретної ортогоналізації.

SUMMARY. The calculation method of non-linear deformation of the long cylindrical longitudinally corrugated shells under external pressure is worked out. In the basis of method the equations of Timoshenko type shells theory at small strains and unlimited turning angles are put. The examples of calculation of shell with sinusoidal corrugation. The efficiency of the offered approach is shown.

Key words: stability, postbuckling behavior, external pressure, corrugated cylindrical shells, Timoshenko type shells theory, discrete-orthogonalization method

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В. А., Семенюк Н. П., Трач В. М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. Ванін Г. Л., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.

3. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, – 1988. – 232 с.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами // Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 615-650. (Успехи механики: В 6 т.; Т. 3)
5. Семенюк Н. П., Жукова Н. Б. О точности нелинейных соотношений теории оболочек типа Тимошенко в случае пренебрежения поперечным обжатием // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 10. – С. 30–36.
6. Семенюк Н. П., Жукова Н. Б., Несходовская Н. А. Устойчивость ортотропных гофрированных цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Механика композитных материалов. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 371–386.
7. Семенюк Н. П., Трач В. М., Жукова Н. Б. Об исследовании нелинейного поведения тонких оболочек шаговым методом // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 9. – С. 85–93.
8. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 567 с.
9. Palmer A. C., Martin J. H. Buckle propagation in submarine pipelines // Nature. – 1975. – Vol. 254. – P. 46–48.
10. Kyriakides S., Babcock C. D. Large deflection collapse analyses of an inelastic inextensional ring under external pressure // Int. J. of Sol. and Str. – 1981. – Vol. 17. – P. 981–993.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 22.10.2011

УДК 539.3

Н. П. ПОДЧАСОВ, канд. физ.-мат. наук
И. В. ЯНЧЕВСКИЙ, канд. техн. наук

УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПОЛУПАССИВНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ СЕКЦИОНИРОВАННОМ ЭЛЕКТРОДИРОВАНИИ ПЬЕЗОСЛОЯ

На основе обобщенных классических гипотез получены уравнения неосесимметричных колебаний бесконечно длинной цилиндрической оболочки, образованной упругим и частично электродированным пьезоактивным слоями. Представлено численно-аналитическое решение задачи определения электрического сигнала, обеспечивающего движение некоторой точки оболочки по заданному закону. При построении устойчивого решения рассматриваемой некорректной задачи используются метод итераций и регуляризирующий алгоритм Тихонова. Эффективность идентификации профиля управляющего воздействия оценена на конкретном примере.

Ключевые слова: электроупругость, биморфная цилиндрическая оболочка, нестационарные неосесимметричные колебания, управление, система интегральных уравнений, метод регуляризации

В настоящее время для управления деформированным состоянием тонкостенных элементов особое внимание уделяется развитию активных методов, основанных на включении в конструкцию пьезоэлектрических материалов. Большая часть исследований по активному управлению рассматривают демпфирование колебаний, обусловленных гармоническими во времени механическими нагрузками [5, 6, 9–11]. В данной работе условие управления обеспечивает движение некоторой точки цилиндрической оболочки по наперед заданному закону. Исследования, в которых изучаются возможности управления нестационарными процессами в электроупругих оболочках, весьма немногочисленны. Среди недавних публикаций отметим [2], где описаны процессы излучения акустических импульсов наперед заданного профиля одноименным цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем.

Постановка задачи. Рассматривается бесконечно длинная цилиндрическая оболочка из упругого материала толщиной h_m , жестко соединенная с внешним слоем из поляризованной по толщине h_p пьезокерамики. Поверхность дополнительного слоя, контактирующая с упругим, покрыта сплошным тонким электродом. На внешней поверхности пьезослоя с радиусом кривизны $R_l + h_p$ имеется N равномерно распределенных по сечению оболочки неэлектродированных секций с угловым размером $2\theta_1$ (рис. 1).

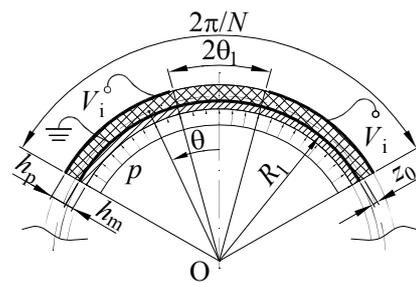


Рис. 1

Нужно определить профиль электрического сигнала V_i , который необходимо подвести к внешним электродам для обеспечения движения точки $\theta = 0$ по заданному закону $f(t)$. При этом потенциал на внутреннем электроде равен нулю. Решение задачи построено в предположении, что на внутреннюю поверхность оболочки действует равномерно распределенное нестационарное давление p . Начальные условия – нулевые.

Для моделирования электроупругого состояния рассматриваемой оболочки ввиду ее тонкостенности используем механические гипотезы Кирхгофа-Лява для двухслойной структуры в целом, обобщенные на характеристики электрического поля в пьезокерамическом слое [4]. В результате задача сводится к решению уравнений [1]

$$-\frac{T_1}{R_0} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 M_1}{\partial \theta^2} + p = \rho_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{R_0} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = \rho_h \frac{\partial u_0}{\partial t^2}, \quad (1)$$

в которых w и u_0 – нормальные и тангенциальные перемещения точек поверхности приведения, положение которой определяется расстоянием z_0 относительно поверхности соединения слоев (рис. 1); $R_0 = R_1 + z_0$; $\rho_h = \rho_p h_p + \rho_m h_m$; ρ_j – плотности материалов. Соответствующим выбором z_0 [4, 8] обеспечивается наиболее простая связь между усилием T_1 , моментом M_1 и параметрами деформации поверхности приведения ($\varepsilon_1(\theta, t)$ и $\kappa_1(\theta, t)$):

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + b_{31}V, \quad M_1 = D_{11}\kappa_1 + b_{31}aV, \quad (2)$$

где

$$C_{11} = B_{11}h_p + B_{11}^S h_m, \quad D_{11} = \frac{h_p^3}{12} \left(B_{11}\delta_p + B_{11}^S \delta_m + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} \right),$$

$$\delta_p = \frac{4}{h_p^3} \left(z_0^3 - (z_0 - h_p)^3 \right), \quad \delta_m = \frac{4}{h_p^3} \left((z_0 + h_m)^3 - z_0^3 \right),$$

$a = -z_0 + \frac{h_p}{2}$ – смещение срединной поверхности пьезокерамического слоя относительно поверхности приведения. Расчетные выражения для постоянных коэффициентов B_{11} , B_{11}^S , b_{31} и b_{33} совпадают с представленными в [5].

Функция $V(\theta, t)$, входящая в соотношения (2), может быть записана следующим образом ($|\theta| < \pi/N$, рис. 1)

$$V = V_1(\theta, t) \cdot H(\theta_1 - |\theta|) + V_i(t) \cdot H(|\theta| - \theta_1), \quad (3)$$

где V_i – искомая управляющая разность потенциалов; V_1 – функция, обеспечивающая равенство нулю нормальной составляющей вектора ин-

дукции электрического поля D_r в секции с неэлектропроводящей поверхностью пьезоактивного слоя. Определяющее выражение для D_r с учетом принятых гипотез имеет вид:

$$D_r = b_{31}(\varepsilon_1 + z\kappa_1) + b_{33}E_r,$$

где z – толщинная координата, отсчитываемая от поверхности приведения; $E_r = -\partial\varphi/\partial z$, φ – напряженность и потенциал электрического поля.

Отметим, что для рассматриваемой схемы электромеханического нагружения оболочки и геометрии электропроводящего слоя справедливо равенство $\{w; u_0; V; D_r\}(\theta, t) = \{w; u_0; V; D_r\}(\theta + 2\pi n/N, t)$, $n = 1, N-1$.

В соответствии с принятым допущением о постоянстве электрической индукции по толщине электроупругого слоя ($\partial D_r/\partial z = 0$) и электрическим граничным условиям ($\varphi|_{z=-z_0} = 0$; $\varphi|_{z=-z_0+h_p} = V$) получим:

$$D_r = b_{31}(\varepsilon_1 + a\kappa_1) - b_{33}V/h_p. \quad (4)$$

Выразив ε_1 и κ_1 через перемещения w и u_0 [1] исходные уравнения (1)–(4) можно представить в виде системы дифференциальных уравнений в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \delta \frac{\partial^3 u_0}{\partial \theta^3} + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w &= p + V - \frac{a}{R_0} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - (1 + \delta) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} &= -\left(1 + \frac{a}{R_0}\right) \frac{\partial V}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

которую дополним электрическими граничными условиями:

$$V|_{\theta_1 < \theta < \pi/N} = V_i, \quad V|_{\theta < \theta_1} = V_1 = \gamma_2 \left[\left(1 + \frac{a}{R_0}\right) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \left(w - \frac{a}{R_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \right]. \quad (6)$$

К уравнениям движения (5) и условиям (6) необходимо добавить нулевые начальные условия и условие управления

$$w|_{\theta=0} = f(t). \quad (7)$$

В системе уравнений (5)–(6), которые записаны в безразмерных величинах (время t отнесено к $R_0\sqrt{\rho_h/C_{11}}$, механическая нагрузка p – к R_0^2/C_{11} , функция V – к $-b_{31}R_0/C_{11}$), используются постоянные $\delta = D_{11}/R_0^2C_{11}$ и $\gamma_2 = -b_{31}^2h_p/b_{33}C_{11}$.

Метод решения. Для решения задачи применяется интегральное преобразование Лапласа по времени. В пространстве изображений неизвестные ищутся в виде рядов по собственным формам колебаний:

$$w^L = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^L(s) \cos kN\theta, \quad u_0^L = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) \sin kN\theta. \quad (8)$$

Здесь индексом L обозначены соответствующие трансформанты; s – комплексный параметр преобразования.

После подстановки (8) в трансформированную в пространство изображений систему (5), получим алгебраическую систему уравнений относительно коэффициентов b_k^L и c_k^L , решением которой будет

$$\begin{aligned} c_0^L &= p^L I^{(1)L} + v_0^L I^{(1)L}, \\ c_k^L &= \xi_k^{(4)} v_k^L I_k^{(3)L}, \quad b_k^L = \xi_k^{(5)} v_k^L I_k^{(7)L} \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

где v_k^L – коэффициенты разложения в ряд Фурье по четным функциям трансформанты V^L , выражения для которых несложно получить на основании представлений (8) и граничных условий (6):

$$\begin{aligned} v_0^L &= \gamma_2 \beta_1 c_0^L + \frac{\gamma_2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(9)} (c_k^L + \xi_k^{(6)} b_k^L) + \beta_2 V_i^L, \\ v_k^L &= \gamma_2 c_0^L \frac{\xi_k^{(9)}}{\xi_k^{(4)}} + \frac{\gamma_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{kn}^{(13)} (c_n^L + \xi_n^{(6)} b_n^L) - V_i^L \frac{\xi_k^{(9)}}{\xi_k^{(4)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

В формулах (9), (10) и далее введены обозначения:

$$\begin{aligned} I^{(1)L} &= \frac{1}{s^2 + 1}, \quad I^{(2)L} = \frac{1}{s^2 + \lambda^{(4)}}, \quad I_k^{(r)L} = \frac{s^2 + \lambda_k^{(r)}}{D_k} \quad (r = 3, 7), \\ D_k &= s^4 + s^2 \lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}, \\ \lambda_k^{(1)} &= \xi_k^{(2)} + \xi_k^{(3)}, \quad \lambda_k^{(2)} = \xi_k^{(2)} \xi_k^{(3)} - \xi_k^{(1)2}, \quad \lambda_k^{(3)} = \xi_k^{(3)} - \xi_k^{(1)} \xi_k^{(6)}, \\ \lambda^{(4)} &= 1 - \gamma_2 \beta_1, \quad \lambda_k^{(7)} = \xi_k^{(2)} - \frac{\xi_k^{(1)}}{\xi_k^{(6)}}, \quad \beta_1 = \frac{N\theta_1}{\pi}, \quad \beta_2 = 1 - \beta_1, \\ \xi_k^{(1)} &= kN(1 + \delta k^2 N^2), \quad \xi_k^{(2)} = 1 + \delta k^4 N^4, \quad \xi_k^{(3)} = k^2 N^2(1 + \delta), \\ \xi_k^{(4)} &= 1 + \frac{a}{R_0} k^2 N^2, \quad \xi_k^{(5)} = kN \left(1 + \frac{a}{R_0} \right), \quad \xi_k^{(6)} = \frac{\xi_k^{(5)}}{\xi_k^{(4)}}, \\ \frac{\xi_k^{(9)}}{\xi_k^{(4)}} &= \frac{2 \sin kN\theta_1}{k\pi}, \\ \xi_{kn}^{(13)} &= 2\xi_n^{(4)} \begin{cases} \beta_1 + \sin 2kN\theta_1 / 2k\pi, & k = n; \\ 2(k \sin kN\theta_1 \cos nN\theta_1 - n \sin nN\theta_1 \cos kN\theta_1) / \pi(k^2 - n^2), & k \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Подстановка равенств (10) в соотношения (9) и исключение c_0^L с учетом условия управления (7), которое в пространстве изображений

примет вид $f^L = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^L$, позволяет записать алгебраические уравнения относительно искомым трансформант b_k^L , c_k^L и V_i^L . Последующий переход в область оригиналов выполнен аналитически с использованием таблиц операционного исчисления. В результате обращения получим систему, связывающую коэффициенты бесконечных рядов:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k + \frac{\gamma_2}{2} \xi_k^{(9)} (c_k + \xi_k^{(6)} b_k) * I^{(2)} \right) + \beta_2 V_i * I^{(2)} = f - p * I^{(2)}, \\
& c_k - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \xi_n^{(6)} b_n) * \left(\frac{\gamma_2}{2} \xi_k^{(4)} \xi_{kn}^{(13)} I_k^{(3)} + \frac{\gamma_2^2}{2} \xi_k^{(9)} \xi_n^{(9)} I_k^{(2,3)} \right) + \\
& \quad + \xi_k^{(9)} V_i * [I_k^{(3)} - \gamma_2 \beta_2 I_k^{(2,3)}] = \gamma_2 \xi_k^{(9)} p * I_k^{(2,3)}, \\
& b_k - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \xi_n^{(6)} b_n) * \left(\frac{\gamma_2}{2} \xi_k^{(5)} \xi_{kn}^{(13)} I_k^{(7)} + \frac{\gamma_2^2}{2} \xi_k^{(6)} \xi_n^{(9)} \xi_n^{(9)} I_k^{(2,7)} \right) + \\
& \quad + \xi_k^{(6)} \xi_k^{(9)} V_i * [I_k^{(7)} - \gamma_2 \beta_2 I_k^{(2,7)}] = \gamma_2 \xi_k^{(6)} \xi_k^{(9)} p * I_k^{(2,7)}, \tag{11}
\end{aligned}$$

в которой используется обозначение $X * Y = \int_0^t X(\tau) Y(t-\tau) d\tau$, а ядра имеют вид:

$$\begin{aligned}
I^{(2)} &= \frac{1}{\alpha^{(3)}} \sin(\alpha^{(3)} t), \quad I_k^{(r)} = \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_k^{(r,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t), \\
I_k^{(2,r)} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\beta_k^{(r+1,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t), \\
\beta_k^{(r,j)} &= \frac{\lambda_k^{(r)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(1)2} - \alpha_k^{(j)2}} \quad (j, \iota = 1, 2; \iota \neq j), \\
\beta_k^{(r+1,j)} &= \frac{\lambda_k^{(r)} - \alpha_k^{(j)2}}{\prod_{\iota=1, \iota \neq j}^3 (\alpha_k^{(\iota)2} - \alpha_k^{(j)2})} \quad (j = \overline{1, 3}),
\end{aligned}$$

где $\pm i\alpha_k^{(j)}$ ($j = 1, 2$) – чисто мнимые корни уравнения $D_k = 0$; $\alpha_k^{(3)} = \sqrt{\lambda^{(4)}}$.

Система интегральных уравнений (11) решалась численно. Для этого она подвергалась усечению и с применением квадратурных формул заменялась дискретным аналогом в виде системы алгебраических уравнений (СЛАУ). Последующее нахождение подвекторов СЛАУ c_k , b_k и V_i , аппроксимирующих соответствующие функции c_k , b_k и V_i , основано на методе последовательных приближений [7]. При этом ввиду высокой степени некорректности рассматриваемой задачи [3], обусловленной специфи-

кой формирования исходных данных (точное решение задачи может и не существовать), для построения устойчивого приближенного решения использовался регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова [3].

К последним двум выражениям системы (11) может быть сведена задача о неосесимметричных колебаниях рассматриваемой оболочки в случае, когда законы изменения во времени электрического V_i и механического p нагружений известны.

Имея полный набор величин c_k , b_k и V_i по обращенным разложениям (8) рассчитывается деформированное состояние оболочки в результате заданного нестационарного электромеханического нагружения. При этом для коэффициента c_0 на основании инверсии равенств (9) и (10) будет справедливым выражение:

$$c_0 = p * I^{(2)} + \beta_2 V_i * I^{(2)} + \frac{\gamma_2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(9)} (c_k + \xi_k^{(6)} b_k) * I^{(2)}. \quad (12)$$

При численном решении (12) также использовался метод квадратур.

Из системы (11) несложно получить уравнение для управляющего воздействия V_i в случае сплошного электродирования пьезокерамического слоя ($\theta_1 = 0$) –

$$V_i * I^{(2)} = f - p * I^{(2)}, \quad (13)$$

когда имеют место исключительно пульсирующие колебания оболочки ($c_k, b_k = 0, k \geq 1$).

Результаты расчетов. Числовые результаты представлены для оболочки из титанового сплава ВТ-6 с $R_1 = 50$ мм и $h_m = 0.5$ мм. Внешний слой толщиной $h_p = 2 h_m$ изготовлен из пьезокерамики PZT-5. Физико-механические характеристики указанных материалов можно найти в [8]. Шаг дискретизации временного интервала для реализации метода квадратур принят равным 0.25. По критерию сходимости результатов выбирался также порядок усечения системы (11). В результате в рядах Фурье (8) удерживалось 5 членов, что обеспечило приемлемую точность. Параметр регуляризации в алгоритме А.Н. Тихонова вычислялся на основании принципа невязки [3] с относительным уровнем невязки 0.1. При проведении расчетов полагалось, что оболочка механически не нагружена ($p = 0$).

На рис. 2 показаны результаты решения задачи для $\theta_1 = \pi/2N$ и различных значений N . При этом штриховая линия иллюстрирует закон $f(t)$ (7). На основании изложенной в настоящей работе методики вычислены как управляющий электрический сигнал V_i (рис. 2, б), так и возникающие при этом радиальные перемещения $w(0, t)$ (рис. 2, а). Отметим, что номер кривой на этих рисунках соответствует количеству электродированных секций N , а через T обозначен период основной формы изгибных колебаний рассматриваемой оболочки при $N = 3$ (для принятых зна-

чений геометрических характеристик оболочки и ее электродирования $T=93.57$). Кривая $\theta_1=0$ (рис. 2, б) является численным решением интегрального уравнения (13).

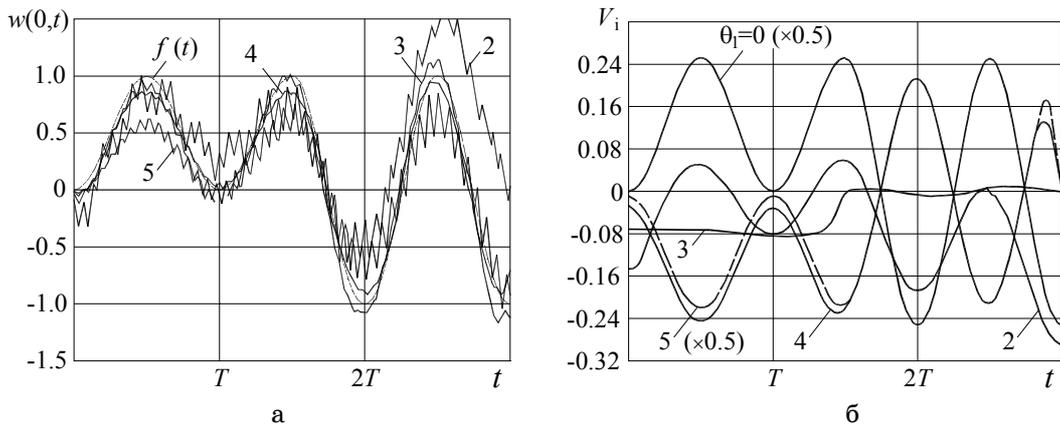


Рис. 2

Из рисунка видно, для рассматриваемого закона $f(t)$ наиболее эффективным по критерию точности управления (7) при минимальных энергетических затратах на формирование управляющего воздействия V_i можно считать результат при $N=3$. И для выбранных физических и геометрических параметров оболочки и ее электродирования функция V_i с достаточной точностью может быть аппроксимирована выражением $V_i = -0.078 \cdot H(t - 1.5T)$. Приложение расчетного нагружения V_i для оболочки с $N=4$ также дает вполне удовлетворительный результат по критерию (7). При сплошных электродах вычисленный на основании уравнения (13) сигнал V_i возбуждает радиальные колебания, мало отличающиеся от требуемых ($w(\theta, t) \approx f(t)$). Однако в этом случае, а также при $N=5$, значения V_i максимальны. Для удобства отображения этих результатов, соответствующие им кривые ($\theta_1 = 0$ и 5) построены с масштабным коэффициентом 0.5 (рис. 2, б). Отметим, что при больших N управление V_i может быть представлено как инверсия решения (13). При $N=2$ и $N=5$ и принятого углового размера токопроводящих покрытий расчетный электрический потенциал V_i не устраняет высокочастотные пульсирующие колебания оболочки (рис. 2, а). Однако в целом, полученные результаты свидетельствуют об эффективности изложенного механизма управления нестационарными колебаниями рассматриваемой цилиндрической оболочки.

Выполненные расчеты показали, что по критерию точности управления наилучшие результаты получены при сплошных токопроводящих покрытиях. Управляющий сигнал при этом определяется из интегрального уравнения Вольтерра. Секционное электродирование внешней поверх-

ности пьезокерамического слоя позволяет существенно уменьшить амплитудные значения управляющего нагружения. Однако точность управления в этом случае зависит от ряда факторов. В частности, от существования решения бесконечной системы интегральных уравнений, к которой сводится задача о неосесимметричных колебаниях исследуемой полупасивной оболочки. Используемая в настоящей работе процедура построения решения этой системы основана на итерационных и регулярных методах, обеспечивающие, прежде всего, устойчивость результата к вычислительным погрешностям и возможной некорректности в исходных данных. Приложение идентифицированной электрической нагрузки дает движение контролируемой точки, несколько отличающееся от требуемого. Выбором геометрических параметров рассматриваемой цилиндрической оболочки и ее электродирования можно существенно влиять на эффективность управления.

РЕЗЮМЕ. На основі узагальнених класичних гіпотез отримані рівняння неосесиметричних коливань нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка утворена пружним і частково електродованим п'єзоактивним шарами. Представлено числено-аналітичне розв'язання задачі визначення електричного сигналу, що забезпечує рух деякої точки оболонки за заданим законом. При побудові стійкого розв'язку розглянутої некоректної задачі використовуються метод ітерацій і регуляризуючий алгоритм Тихонова. Ефективність ідентифікації профілю керуючого впливу оцінена на конкретному прикладі.

Ключові слова: електропружність, біморфна циліндрична оболонка, нестационарні неосесиметричні коливання, керування, система інтегральних рівнянь, метод регуляризації.

SUMMARY. Equations of nonaxisymmetric vibration of infinitely long two-layered shell formed by elastic and sectionally electroded piezoceramic layers have been obtained on the basis of the generalized classical hypotheses. The numerically-analytical solution of the problem of electric signal definition which provides some shell point movement due the set law is presented. The method of iterations and Tikhonov's regularization algorithm are used for steady solution construction of the considered ill-posed problem. Efficiency of controlling action profile identification has been estimated on a specific example.

Key words: electroelasticity, bimorph shell, non-stationary nonaxisymmetric vibration, controlling, system of integral equation, regularization method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабаев А. Э.* Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – К.: Наук. думка, 1990. – 176 с.
2. *Бабаев А. Э., Савин В. Г., Кожемяка Ю. В.* Излучение акустических импульсов заданного профиля электроупругой цилиндрической оболочкой // Теор. и прикл. мех. – 2001. – Вып. 33. – С. 186–191.
3. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 199 с.
4. *Евсейчик Ю. Б., Рудницкий С. И., Шаранов В. Л., Шульга Н. А.* Чувствительность биморфного преобразователя типа металл-керамика // Прикл. механика – 1990. – Т. 26, № 12. – С. 67–75.
5. *Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В.* Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов // Теор. и прикл. мех. – 2009. – Вып. 46. – С. 132–140.
6. *Козлов В. І., Карнаухова Т. В., Пересунько М. В.* Демпфірування вимушених осесиметричних коливань жорстко закріпленої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів // Вісн. Дон. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 142–145.

7. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В. Осесимметричная задача удара затупленного твердого тела о поверхность сжимаемой жидкости с учетом отлипания // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 9–16.

8. Янчевский И. В. Нестационарные колебания асимметричного дискового биморфа в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 13, № 6. – С. 42–52.

9. Ng T. Y., He X. Q., Liew K. M. Finite element modeling of active control of functionally graded shells in frequency domain via piezoelectric sensors and actuators // Comput. Mech. – 2002. – Vol. 28, N 1. – P. 1–9.

10. Sheng G. G., Wang X. Active control of functionally graded laminated cylindrical shells // Composite Structures – 2009. – Vol. 90, Iss. 4. – P. 448–457.

11. Wang C. Y., Vaicaitis R. Active control of vibrations and noise of double wall cylindrical shells // J. of Sound and Vibration. – 1998. – Vol. 216, Iss. 5. – P. 865–888.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 30.06.2011

УДК 539.3:537.228.1:534.1

М. О. ШУЛЬГА, д-р физ.-мат. наук

К АНАЛИЗУ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ УПРУГОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИ- НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Система уравнений электроупругости для кристаллов гексагональной системы класса $mt6$ сведена к восьми уравнениям в операторной гамильтоновой форме по пространственной координате. Для периодически-неоднородной среды построено решение задачи о распространении гармонических волн, указаны формулы для определения коэффициентов характеристического уравнения матрицы монодромии, проанализирована структура общего решения для неограниченных, полугограниченных и сильноограниченных областей.

Ключевые слова: кристаллы гексагональной системы, операторная гамильтонова форма уравнений электроупругости, периодически-неоднородные среды, структура общего решения для областей различной ограниченности

Исследованию упругоэлектрических волн в периодически-неоднородных средах посвящено значительное количество работ, основные результаты которых проанализированы в обзорах [9, 10]. В этих работах рассматривались упругоэлектрические волны отдельных поляризаций (волны в направлении периодичности, волны сдвига и, частично, плоскополяризованные волны). Общий случай поляризации объемных волн не рассматривался. Разработка общего алгоритма исследования таких волн в периодически-неоднородных структурах со свойствами кристаллов гексагональной системы класса $mt6$ предлагается в данной статье.

Постановка задачи. В линейной теории электроупругости механические напряжения $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ и перемещения $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворяют [1, 3, 6, 7] уравнениям колебаний

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

а вектор электрической индукции – уравнению Гаусса

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0. \quad (2)$$

Для пьезоэлектрических материалов гексагональной системы класса *тт6* (ось симметрии шестого порядка совпадает с направлением x_3) материальные зависимости [1, 3, 6, 7] имеют следующую форму

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}^E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}^E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}^E \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ \sigma_{22} &= c_{21}^E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}^E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}^E \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ \sigma_{33} &= c_{31}^E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{31}^E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{33}^E \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ \sigma_{23} &= c_{55}^E \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + e_{51} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ \sigma_{31} &= c_{55}^E \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + e_{51} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \\ \sigma_{12} &= c_{66}^E \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ D_1 &= -\varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + e_{15} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \\ D_2 &= -\varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + e_{15} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ D_3 &= -\varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{31} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + e_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (3)$$

причем $2c_{66}^E = c_{11}^E - c_{12}^E$.

Материальные параметры $\rho(x_3)$, $c_{ij}^E(x_3)$, $e_{ij}(x_3)$, $\varepsilon_{ij}^S(x_3)$ могут быть кусочно-непрерывными функциями координаты x_3 . На плоскостях разрыва (недифференцируемости) этих функций при совершенном механическом и электрическом контактах должны оставаться непрерывными функции σ_{3j} , u_j , D_3 , φ .

Операторная гамильтонова система. Преобразуем [5, 9, 10] совокупность уравнений (1) – (3) к смешанной операторной нормальной системе Коши относительно функций σ_{33} , u_1 , u_2 , D_3 , u_3 , σ_{31} , σ_{32} , φ (здесь и дальше верхние индексы E и S опущены):

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{31}}{c_{55}} - \frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{32}}{c_{55}} - \frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial D_3}{\partial x_3} &= -\frac{e_{15}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} - \frac{e_{15}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \varepsilon_{11^*} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{11^*} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{1}{c_{33^*}} \sigma_{33} - \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33^*}} D_3, \\
\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= -\frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_1} + \left[\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} + e_{13} \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \right. \\
&\quad \left. - c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right] + \left(-c_{66} - c_{12} + c_{13} \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} - e_{13} \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \frac{\partial D_3}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= -\frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_2} + \left(-c_{66} - c_{12} + c_{13} \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} - e_{13} \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \\
&\quad + \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \left(-c_{11} - c_{13} \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} + e_{13} \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \frac{\partial D_3}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= -\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33^*}} \sigma_{33} + \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{1}{\varepsilon_{33^*}} D_3. \tag{4}
\end{aligned}$$

В уравнениях (4) используются обозначения

$$c_{i3^*} = c_{i3} + \frac{e_{13} e_{33}}{\varepsilon_{33}}, \quad \varepsilon_{ii^*} = \varepsilon_{ii} + \frac{e_{i,6-i}^2}{c_{6-i,6-i}}, \quad e_{i3^*} = e_{i3} - \frac{c_{i3} e_{33}}{c_{33}}. \tag{5}$$

Величины σ_{33} , u_1 , u_2 , D_3 , u_3 , σ_{31} , σ_{32} , φ будем называть основными разрешающими функциями.

Не вошедшие в систему (4) механические напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} и компоненты D_1 , D_2 вектора электрической индукции выражаются через основные разрешающие функции системы (4) по таким формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} \sigma_{33} + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} + e_{13} \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\
&\quad + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13^*}}{c_{33^*}} + e_{13} \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{e_{13^*}}{\varepsilon_{33^*}} D_3, \\
\sigma_{12} &= c_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} &= \frac{c_{13*}}{c_{33*}} \sigma_{33} + \left(c_{21} - c_{13} \frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13} \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\
&+ \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13} \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} D_3, \\
D_1 &= \frac{e_{13}}{c_{55}} \sigma_{31} - \varepsilon_{11*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad D_2 = \frac{e_{15}}{c_{55}} \sigma_{32} - \varepsilon_{11*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Следуя работам [5, 8–11], можно показать, что система восьми уравнений (4) является операторной гамильтоновой системой [4] по пространственной координате x_3

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_3} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_3} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{7}$$

если за гамильтоновы (канонические) переменные принять величины

$$\mathbf{q} = \text{col}[\sigma_{33}, u_1, u_2, D_3], \quad \mathbf{p} = \text{col}[u_3, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \varphi], \tag{8}$$

а операторную функцию Гамильтона определить квадратичной формой

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{P}} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{p}. \tag{9}$$

Значения элементов операторных матриц $\hat{\mathbf{Q}}$ и $\hat{\mathbf{P}}$ легко установить по сравнению системы (4) с ее матричной записью

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{Q}} \\ -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Операторную гамильтонову систему (10) по пространственной координате можно получить из функционала

$$\begin{aligned}
I(\sigma_{33}, u_1, u_2, D_3, u_3, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \varphi) &= \int_a^b \left(u_3 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\
&+ \sigma_{32} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \varphi \frac{\partial D_3}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \hat{Q}_{11} u_3^2 - \hat{Q}_{12} \sigma_{31} u_3 - \hat{Q}_{13} \sigma_{32} u_3 - \hat{Q}_{14} \varphi u_3 - \\
&- \frac{1}{2} \hat{Q}_{22} \sigma_{31}^2 - \hat{Q}_{23} \sigma_{32} \sigma_{31} - \hat{Q}_{24} \varphi \sigma_{31} - \frac{1}{2} \hat{Q}_{33} \sigma_{32}^2 - \hat{Q}_{34} \sigma_{32} \varphi - \\
&- \frac{1}{2} \hat{Q}_{44} \varphi^2 - \frac{1}{2} \hat{P}_{11} \sigma_{33}^2 - \hat{P}_{12} \sigma_{33} u_1 - \hat{P}_{13} \sigma_{33} u_2 - \hat{P}_{14} \sigma_{33} D_3 - \\
&\left. - \frac{1}{2} \hat{P}_{22} u_1^2 - \hat{P}_{23} u_1 u_2 - \hat{P}_{24} u_1 D_3 - \frac{1}{2} \hat{P}_{33} u_2^2 - \hat{P}_{34} u_2 D_3 - \frac{1}{2} \hat{P}_{44} D_3^2 \right) dx_3 \tag{11}
\end{aligned}$$

при “изохронных” вариациях.

При дифференцировании функции Гамильтона в формуле (7) и вы-

полнении варьирования в функционале (11) операторы P_{ij} , Q_{ij} следует считать “замороженными” и перестановочными с вариациями

$$\begin{aligned}\delta(P_{ij}, Q_{ij})a_m b_n &= (P_{ij}, Q_{ij})(a_m \delta b_n + b_n \delta a_m) = \\ &= \delta b_n (P_{ij}, Q_{ij})a_m + \delta a_m (P_{ij}, Q_{ij})b_n.\end{aligned}$$

Гармонические волны. В задачах о распространении волн решение систем (4), (10) ищем в виде

$$\begin{aligned}[\sigma_{33}, u_1, u_2, D_3, u_3, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \varphi] &= \text{Re} [ic_{00}q_1(\xi), h_{00}q_2(\xi), \\ h_{00}q_3(\xi), i\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}q_4(\xi), -ih_{00}p_1(\xi), c_{00}p_2(\xi), c_{00}p_3(\xi), \\ -ih_{00}\sqrt{c_{00}/\varepsilon_{00}}p_4(\xi)] \exp i(k_1x_1 + k_2x_2 - \omega t).\end{aligned}\quad (12).$$

Формально заменяя в зависимостях (4), (10) соответственно производные по x_1 , x_2 , t на ik_1 , ik_2 , $-i\omega$ и x_3 на $h_{00}\xi/2\pi$ получим гамильтонову систему по ξ

$$\frac{dq_i}{d\xi} = Q_{ik}(\xi)p_k, \quad \frac{dp_i}{d\xi} = -P_{ik}(\xi)q_k.\quad (13)$$

Для построения решения этой системы необходимо найти ее матрицант $\mathbf{M}(\xi, 0)$ на отрезке $(0, 2\pi)$, удовлетворяющий условию $\mathbf{M}(0, 0) = \mathbf{I}_8$ (\mathbf{I}_8 – единичная матрица восьмого порядка) а также собственные числа и соответствующие собственные векторы матрицы $\mathbf{M}(0, 2\pi)$ из однородной системы уравнений

$$(\mathbf{M}(2\pi, 0) - \rho\mathbf{I}_8)\mathbf{d} = 0.\quad (14)$$

Для определения собственных чисел матрицы $\mathbf{M}(0, 2\pi) = [m_{ij}]_{i,j=1,\dots,8}$ необходимо выразить коэффициенты характеристического уравнения

$$\rho^8 - a_1\rho^7 + a_2\rho^6 - a_3\rho^5 + a_4\rho^4 - a_5\rho^3 + a_6\rho^2 - a_7\rho + a_8 = 0\quad (15)$$

через элементы m_{ij} матрицы $\mathbf{M}(0, 2\pi)$. Можно показать, что для коэффициентов a_1, \dots, a_8 уравнения (15) имеют место следующие формулы

$$\begin{aligned}a_1 &= \sum_{i=1}^8 m_{ii}, \quad a_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^8 \det \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix}, \\ a_3 &= \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^8 \det \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i < j < k < l}}^8 \det \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} & m_{il} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} & m_{jl} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} & m_{kl} \\ m_{li} & m_{lj} & m_{lk} & m_{ll} \end{bmatrix}, \\
a_5 &= \sum_{\substack{i,j,k,l,n=1 \\ i < j < k < l < n}}^8 \det \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} & m_{il} & m_{in} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} & m_{jl} & m_{jn} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} & m_{kl} & m_{kn} \\ m_{li} & m_{lj} & m_{lk} & m_{ll} & m_{ln} \\ m_{ni} & m_{nj} & m_{nk} & m_{nl} & m_{nn} \end{bmatrix}, \\
a_6 &= \sum_{\substack{i,j,k,l,n,p=1 \\ i < j < k < l < n < p}}^8 \det \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} & m_{il} & m_{in} & m_{ip} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} & m_{jl} & m_{jn} & m_{jp} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} & m_{kl} & m_{kn} & m_{kp} \\ m_{li} & m_{lj} & m_{lk} & m_{ll} & m_{ln} & m_{lp} \\ m_{ni} & m_{nj} & m_{nk} & m_{nl} & m_{nn} & m_{np} \\ m_{pi} & m_{pj} & m_{pk} & m_{pl} & m_{pn} & m_{pp} \end{bmatrix}, \\
a_7 &= \sum_{\substack{i,j,k,l,n,p,r=1 \\ i < j < k < l < n < p < r}}^8 \det \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} & m_{il} & m_{in} & m_{ip} & m_{ir} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} & m_{jl} & m_{jn} & m_{jp} & m_{jr} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} & m_{kl} & m_{kn} & m_{kp} & m_{kr} \\ m_{li} & m_{lj} & m_{lk} & m_{ll} & m_{ln} & m_{lp} & m_{lr} \\ m_{ni} & m_{nj} & m_{nk} & m_{nl} & m_{nn} & m_{np} & m_{nr} \\ m_{pi} & m_{pj} & m_{pk} & m_{pl} & m_{pn} & m_{pp} & m_{pr} \\ m_{ri} & m_{rj} & m_{rk} & m_{rl} & m_{rn} & m_{rp} & m_{rr} \end{bmatrix}, \\
a_8 &= \det [m_{ij}]_{i,j=1,\dots,8}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Очевидно, что коэффициент a_1 имеет восемь слагаемых, a_2 – двадцать восемь слагаемых, a_3 – пятьдесят шесть слагаемых, a_4 – семьдесят слагаемых, a_5 – пятьдесят шесть слагаемых, a_6 – двадцать восемь слагаемых, a_7 – восемь слагаемых, a_8 и $a_0 = 1$ имеют по одному слагаемому.

Если собственные значения ρ_i ($i=1,\dots,8$) матрицы $\mathbf{M}(0, 2\pi)$ каким-то образом определены непосредственно, то согласно теоремы Безу коэффициенты a_1, \dots, a_8 будут определяться через ρ_i так

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{i=1}^8 \rho_i, & a_2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^8 \rho_i \rho_j, & a_4 &= \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i < j < k < l}}^8 \rho_i \rho_j \rho_k \rho_l, \\
y(\xi) &= \sum_{m=1}^8 K_m \rho_m^{n-1} U(\xi - 2\pi(n-1), 2\pi(n-1)) \mathbf{b}_m, \\
y(\xi) &= [\mathbf{q}(\xi), \mathbf{p}(\xi)], & a_6 &= \sum_{\substack{i,j,k,l,n,p=1 \\ i < j < k < l < n < p}}^8 \rho_i \rho_j \rho_k \rho_l \rho_n \rho_p, \\
a_7 &= \sum_{\substack{i,j,k,l,n,p,r=1 \\ i < j < k < l < n < p < r}}^8 \rho_i \rho_j \rho_k \rho_l \rho_n \rho_p \rho_r, & a_8 &= \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 \rho_6 \rho_7 \rho_8.
\end{aligned} \tag{17}$$

Формулы (16) и (17) взаимно подтверждают правильность расчетов по ним.

Элементы симметричных матриц $\mathbf{Q}(\xi)$, $\mathbf{P}(\xi)$ для стратифицированной (неоднородной по одной координате) среды зависят от переменной ξ . Если физико-математические свойства среды будут периодическими функциями ξ с периодом 2π , то $\mathbf{Q}(\xi + 2\pi) = \mathbf{Q}(\xi)$, $\mathbf{P}(\xi + 2\pi) = \mathbf{P}(\xi)$. Согласно теореме Ляпунова-Пуанкаре [2] характеристическое уравнение матрицы монодромии $\mathbf{M}(2\pi, 0)$ периодической гамильтоновой системы (13) является возвратным, т.е. $a_8 = 1$, $a_1 = a_7$, $a_2 = a_6$, $a_3 = a_5$. В таком случае характеристическое уравнение (15) заменой $\rho + \rho^{-1} = 2b$ приводится к уравнению четвертого порядка относительно b

$$16b^4 - 8a_1b^3 + (4a_2 - 16)b^2 + (6a_1 - 2a_3)b + 2 - 2a_2 + a_4 = 0. \tag{18}$$

Определив корни уравнения (18), для нахождения восьми мультипликаторов ρ_1, \dots, ρ_8 получим четыре квадратных уравнения

$$\rho^2 - 2b_j\rho + 1 = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{19}$$

Отсюда найдем четыре пары взаимно обратных корней ρ_j, ρ_j^{-1} , $j = 1, 2, 3, 4$.

Обозначим соответствующие собственные векторы через $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_8$, считая, что характеристические числа (мультипликаторы) матрицы монодромии удовлетворяют условиям $|\rho_j| \leq 1$, $j = 1, 2, 3, 4$.

При разных мультипликаторах или существовании линейно независимых собственных векторов для равных мультипликаторов общее решение системы (13) при произвольном ξ из интервала периодичности $2\pi(n-1) \leq \xi \leq 2\pi n$ (n – целое) можно записать в виде

$$y(\xi) = \sum_{m=1}^8 K_m \rho_m^{n-1} \mathbf{M}(\xi - 2\pi(n-1), 2\pi(n-1)) \mathbf{b}_m, \tag{20}$$

где $y(\xi) = \text{col}[\mathbf{q}(\xi), \mathbf{p}(\xi)]$, K_m – постоянные интегрирования.

Пользуясь формулой (20), проанализируем структуру решения основных типов краевых волновых задач. Прежде всего отметим, что при $-\infty < \xi < +\infty$ (объемные волны в неограниченной области) зоны существования объемных волн определяются областями существования всех одновременно равных по модулю единице мультипликаторов (мультипликаторы должны лежать на единичной окружности вокруг начала координат и не совпадать между собой). Для полуограниченной области $0 < \xi < +\infty$

прежде всего имеем $y(0) = \sum_{m=1}^8 K_m \mathbf{b}_m$, но поскольку при $\xi = 0$ физически

возможными являются лишь четыре условия, то на решение (20) необходимо наложить условие ограниченности при $\xi \rightarrow +\infty$. Для поверхностных волн вектор $y(+\infty)$ должен затухать [1, 3, 8–10], т.е. решение необходимо

искать в области $|\rho_j| < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$, положив $K_{4+j} = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$. В

случае, когда решение должно удовлетворять только условиям ограниченности при $\xi \rightarrow +\infty$, мультипликаторы необходимо выбирать согласно правилу отбора мод [8–10]. В таких случаях волны не будут чисто поверхностными, так как будет происходить отток энергии от плоскости $\xi = 0$.

И, наконец, в случае ограниченной по ξ области $0 < \xi < 2\pi N$ необходимо

воспользоваться формулами $y(0) = \sum_{m=1}^8 K_m \mathbf{b}_m$ и $y(2\pi N) = \sum_{m=1}^8 K_m \rho_m^{N-1} \mathbf{b}_m$, в

которых все восемь постоянных K_1, \dots, K_8 определяются из краевых условий при $\xi = 0$ (четыре условия) и $\xi = 2\pi N$ (четыре условия).

РЕЗЮМЕ. Система рівнянь електропружності для кристалів гексагональної системи класу mm6 зведена до восьми рівнянь в операторній гамільтоновій формі по просторовій координаті. Для періодично-неоднорідного середовища побудовано розв'язок задачі про поширення гармонічних хвиль, наведені формули для визначення коефіцієнтів характеристичного рівняння матриці монодромії, проаналізована структура загального розв'язку для необмежених, напівобмежених і сильнообмежених областей.

Ключові слова: кристали гексагональної системи, операторна гамільтонова форма рівнянь електропружності, періодично-неоднорідні середовища, структура загального розв'язку для областей різної обмеженості.

SUMMARY. The system of the equations of electroelasticity for crystals hexagonal system class mm6 is shown to eight equations in operator Hamiltonian form on spatial coordinate. The task solution for the periodically inhomogeneous medium for of harmonic wave propagation formulate, formulas for definition of factors of the characteristic equation of a monodromic matrix are specified, the structure general solution for unbounded, semi-bounded and strongly bounded domains is analysed.

Key words: crystals hexagonal system, operator Hamiltonian form electroelasticity equations, periodically inhomogeneous medium, structure general solution for domains different constraint

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 239 с.

2. Демидович Б.П. Лекции по теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – М: Наука, 1982. – 424 с.
4. Павловський М.А. Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.
5. Шульга В.М., Шульга О.М. До теорії акустоелектричних хвиль в стратифікованих періодичних структурах // Вісник Київського університету. Серія мат. і мех. – 1997. – Вип. 3. – С. 111–116.
6. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К: Наук. думка, 1990. – 228 с.
7. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наукова думка, 2008. – 270 с.
8. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
9. Шульга Н. А. Распространение связанных волн в периодически-неоднородных средах при взаимодействии с электромагнитным полем // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 10. – С. 38–68.
10. Schul'ga N.A. Theory of dynamic processes in mechanical systems and materials of regular structure // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 12. – P. 1301–1338.
11. Schul'ga N.A. On certain mixed system of equations of theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, № 3. – P. 271–275.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 22.04.2011

УДК 539.3

Е. В. БОЙЧУК, канд. физ.-мат. наук, *Н. Д. ОКСЕНЧУК*,
О. П. ЧЕРВИНКО, канд. физ.-мат. наук

ЭФФЕКТ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ СВЯЗАННОСТИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Методом конечно-элементного моделирования решена задача о распространении волн в вязкопластическом полупространстве при импульсном нагружении. Исследованы температурные эффекты термомеханической связанности термоупругой и диссипативной природы. Установлено, что при воздействии короткоимпульсным лазерным лучом на поверхность тела повышение температуры вследствие этих эффектов не превышает 30⁰С.

Ключевые слова: вязкопластичность, температурный эффект связанности, модель Боднера-Партома, импульсное нагружение

Исследования динамических связанных процессов стимулируются интенсивным внедрением новых материалов, на элементы конструкций из которых могут воздействовать мощные кратковременные тепловые или механические импульсы. Анализ этих процессов приводит к решению трех задач: изучению структуры и физико-механических свойств материалов; определению предельных параметров динамического разрушения или неустойчивости конструкций; оценке параметров режима технологической обработки, которые обеспечивают ее положительный эффект. К таким технологиям относятся сваривание взрывом, импульсная правка тонкостенных, в частности, сварных конструкций, поверхностное упрочнение, закалка и т.п. Разработка систем импульсной обработки требует детальной информации о связанных термомеханических процессах, которые происходят при облучении и дальнейшем охлаждении материала. Исследование динамических эффектов при импульсном нагружении является необходимым при определении свойств материала с помощью методики акустического неразрушающего контроля. Значительный теоретический и практический интерес для оценки прочности облучаемых элементов конструкций представляет исследование остаточного напряженно-деформированного состояния, которое возникает вследствие действия импульса, и изучение влияния облучения на свойства материала. Эти эффекты, как правило, исследуются экспериментально. Тем не менее для оценки полученных результатов и их интерпретации необходимо численное моделирование процессов импульсного температурного нагружения с учетом всех особенностей реологии материала, геометрии тела и действующих на него нестационарных нагрузок. Разработка теоретических основ таких процессов невозможна без применения адекватных моделей динамического термомеханического поведения физически нелинейных материалов при импульсном тепловом нагружении с учетом связанности механических и тепловых полей.

В данной статье дается оценка температурных эффектов связанности обратимой и необратимой природы при импульсном нагружении упруговязкопластического полупространства.

Постановка и решение задачи. Постановка динамической осесимметричной связанной задачи в общем виде состоит из:

– соотношений Коши для осесимметричного случая

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \quad (1)$$

– уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_r, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_z; \end{aligned} \quad (2)$$

– уравнений теплопроводности

$$c_V \dot{\theta} + 3\alpha\theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\dot{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - D' = 0, \quad (3)$$

где u_r и u_z – компоненты вектора перемещений; ε_{rr} , ε_{zz} , ε_{rz} и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора деформации; σ_{rr} , σ_{zz} , σ_{rz} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала; θ – температура; α , c_V и k – коэффициенты линейного теплового расширения и теплоемкости при постоянном объеме и теплопроводности соответственно; K_V – модуль объемного сжатия; $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$, D' – скорость внутренней диссипации. Объемные источники тепла считаем отсутствующими. Второе слагаемое в (3) отражает эффект термоупругой связанности.

Уравнения модифицированной модели Боднера – Партома содержат

– уравнение аддитивности деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta, \quad i, j = r, z, \varphi, \quad (4)$$

– записанные для шаровой и девiatorной частей уравнения закона Гука

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^\theta), \quad (5)$$

– ассоциированный закон течения Прандтля – Рейсса с условием неупругой несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0; \quad (6)$$

– кинетическое уравнение

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left[- \left(\frac{Z^2}{3J_2} \right)^n \right], \quad (7)$$

– уравнение эволюции для внутренней переменной изотропного упрочнения

$$\dot{K}' = m_1 (K_1' - K') \dot{W}^p, \quad K'(0) = 0. \quad (8)$$

При этом тепловая деформация принимается в виде

$$\varepsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta') d\theta'; \quad (9)$$

θ_0 – начальная температура; δ_{ij} – символ Кронекера; s_{ij} и e_{ij} – девиаторы тензоров напряжений и деформации соответственно; G – модуль сдвига; $Z = K_0 + K'$, $D_2^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 2$, $J_2 = s_{ij} s_{ij} / 2$, $\lambda^2 = D_2^p / J_2$; $\dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$.

В уравнении эволюции (8) отсутствуют слагаемые, которые определяют тепловой возврат, так как исследуемые процессы являются достаточно быстрыми, поэтому при описании поведения материала этим эффектом можно пренебречь. Также пренебрегается направленное упрочнение. Величины D_0 , K_0 , K_1 , m_1 и n – параметры модели. Параметр D_0 является граничным значением скорости неупругой деформации при сдвиге. Для скоростного динамического нагружения принимается значение $D_0 = 10^8 \text{ c}^{-1}$. Параметры K_0 , K_1 , m_1 и n в общем случае зависят от температуры. В постановку задачи также входят начальные условия

$$\dot{u}_r = \dot{u}_z = 0, \quad u_r = u_z = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } t = 0, \quad (10)$$

где θ_0 – начальная температура.

Постановка задачи (1) – (10) является нелинейной. Задачи в такой постановке можно решать лишь численно. С этой целью в работе использован подход, развитый в статьях [1, 4].

Схема численного решения базируется на двойном итерационном процессе. Первый, внутренний, связан с интегрированием системы нелинейных уравнений модели течения с использованием неявной временной схемы Эйлера, а второй, внешний, связан с решением уравнений движения и теплопроводности. В рамках внутреннего итерационного процесса на каждом шаге по времени учитывается зависимость параметров модели от температуры.

При реализации внешнего итерационного процесса для решения на каждой итерации полученных линеаризованных задач движения и теплопроводности используется конечно-элементная методика, развитая в работах [3, 4]. Используются четырехугольные восьмиузловые изопараметрические конечные элементы. Для ускорения сходимости итерационных схем используется процедура Стефенсена-Эйткена.

Точность расчета зависит от плотности разбивки области на конечные элементы и величины шага по времени. Для контроля точности используется критерий практической сходимости.

Для проверки точности методики расчета рассматривалась задача Стернберга-Чакраворти [5, 10]. В этой задаче в качестве краевого условия на границе $z = 0$ упругого полупространства $z > 0$ принимается условие линейного изменения температуры от значения $\theta = 0$ до значения $\Delta\theta$ за время t_0 , т.е.

$$\theta(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \Delta\theta t/t_0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ \Delta\theta & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (11)$$

Граничные условия представляются такими, что компоненты перемещений u_r , u_z и температура θ имеют вид

$$u_z = u_z(z, t) = u(z, t), \quad u_r = 0, \quad \theta = \theta(z, t).$$

При этих условиях деформации и напряжения имеют вид

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1-2\nu} \left[\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha\theta \right], \quad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{rz} = 0; \quad (12)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} \neq 0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-2\nu} \left[\left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha\theta \right], \quad (13)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Напряженно-деформированное состояние (12) – (13) для полупространства было реализовано в тонком стержне $0 < r < R$, $z > 0$, на боковой поверхности и на торце которого выполняются граничные условия

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (r = R, z > 0); \quad (14)$$

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (0 < r < R, z = 0), \quad (15)$$

а также условия (11).

В случае стержня конечной длины L решение отвечает исходной задаче для времени $t < t_L$, $t_L = L/c_1$, где $c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$ – скорость продоль-

ных волн. Такой переход к телу конечных размеров позволяет решать задачу численным методом конечных элементов.

Задача решалась в безразмерной формулировке. При применении численных методов использование безразмерных переменных предотвращает потерю точности из-за конечности разрядной сетки при представлении действительных чисел в компьютерах [2]. В качестве материала принималась сталь с такими параметрами: модуль Юнга $E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$, плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$, температуропроводность $a = \lambda/c_v = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Скорость волн расширения $c_1 = 6,0 \text{ км/с}$.

На рис. 1 и 2 изображены графики изменения во времени $\tau = tc_1^2/a$ безразмерных температуры $\theta/\Delta\theta$ и осевого напряжения $\sigma_{zz}/(\Delta\theta\beta)$ (где $\beta = E\alpha/(1-2\nu)$), которые вычислены в сечении $\zeta = zc_1/a = 1,0$ для продолжительности нагрева $\tau = 1$ при трех значениях параметра связанности

$\delta = \frac{E(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c_V}$, а именно $\delta = 0$ (кривая 1), $\delta = 0,431$ (кривая 2) и $\delta = 1$ (кривая 3). Сплошные линии соответствуют значениям величин, полу-

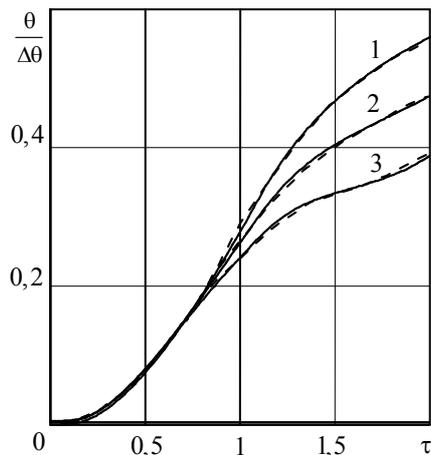


Рис. 1

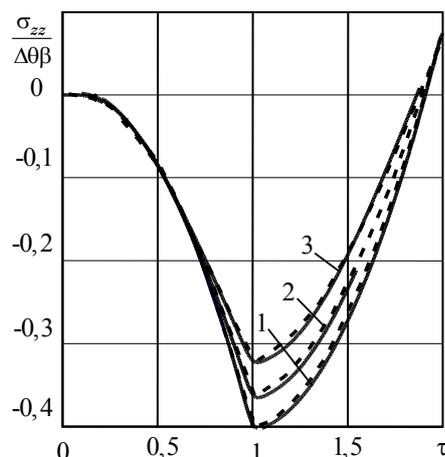


Рис. 2

ченным с использованием модели, развитой в данной работе, штриховые кривые взяты из работы [2] и отвечают численному решению связанной задачи методом конечных элементов на основе использования обобщенного (единого) функционала термомеханической связанности, сформулированного в свертках. Как установлено, расхождение результатов не превышает 1%.

Таким образом, итерационная схема последовательного решения задач движения и теплопроводности имеет достаточно высокую точность и оперирует матрицами значительно меньшего порядка.

Исследование температурных эффектов термомеханической связанности. Для оценки эффектов термомеханической связанности рассматривалось полупространство $z > 0$, $0 < r < \infty$, на поверхности которого заданы граничные условия импульсной механической нагрузки и тепловой изоляции:

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -p_0 \sin \frac{\pi}{t_\sigma} t, & t \leq t_\sigma, \\ 0, & t > t_\sigma; \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (17)$$

где p_0 – пиковые значения нагрузки, t_σ – время действия импульса. На боковой поверхности эквивалентного стержня использованы условия (14).

Расчеты проводились для стержней с радиусом $R = 10^{-6} \text{ м}$ и длиной $L = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. При вычислениях принималось $p_0 = 8 \text{ ГПа}$, $t_\sigma = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. Начальный шаг по времени был равен 10^{-10} с . Скорость внутренней диссипации определялась соотношением

$$D' = \chi \dot{W}^p, \quad (17)$$

где χ – постоянный коэффициент, $0 < \chi < 1$.

Параметр χ характеризует часть рассеянной механической неупругой мощности, которая переходит в тепло. Для большинства металлов он меняется в границах $0,6 < \chi < 0,9$ [7, 8, 9]. В расчетах принималось $\chi = 0,8$.

Для определения вклада различных механизмов термомеханической связанности в суммарный температурный эффект рассматривались три случая:

- 1) действует лишь термоупругий механизм ($D' = 0, \alpha \neq 0$);
- 2) действует лишь эффект внутренней диссипации ($D' \neq 0, \alpha = 0$);
- 3) действуют оба механизма ($D' \neq 0, \alpha \neq 0$).

На рис. 3 номера сплошных кривых отвечают изменениям по времени температуры на поверхности полупространства для соответствующих случаев 1), 2) и 3). Штриховая кривая соответствует изменению осевого напряжения σ_{zz} в импульсе, который задан на границе.

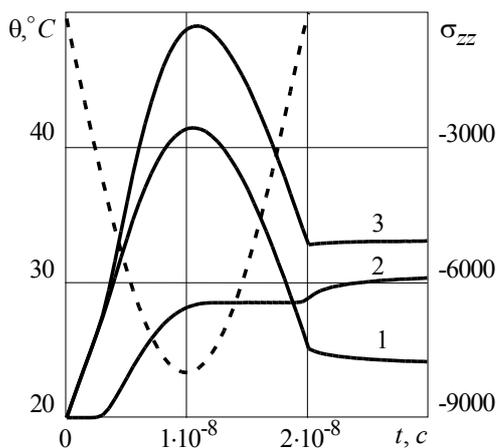


Рис. 3

Однако в процессах, которые сопровождаются критическими явлениями, например структурными превращениями, эти эффекты вблизи критических температур могут внести количественные или даже качественные изменения в волновой процесс.

РЕЗЮМЕ. Методом скінченно-елементного моделювання розв'язана задача про розповсюдження хвиль у в'язкопластичному півпросторі при імпульсному навантаженні. Досліджено температурні ефекти термомеханічної зв'язаності термопружної і дисипативної природи. Встановлено, що при дії короткоімпульсним лазерним променем на поверхню тіла підвищення температури внаслідок цих ефектів не перевищує 30°C.

Ключові слова: в'язкопластичність, температурний ефект зв'язаності, модель Боднера-Партома, імпульсне навантаження

SUMMARY. Wave propagation problem in viskoplastic half-space induced by pulse loading is considered with using of finite element approach. Thermoelastic and internal dissipation temperature effects of thermomechanical coupling are studied. A temperature increase of 30°C is established under typical loading induced by short pulse laser surface action.

Key words: viskoplasticity, temperature effect of coupling, Bodner-Partom model, pulse loading

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрушко Н.Ф., Сенченков И.К., Бойчук Е.В. Нестационарные волны в неупругом диске при импульсном радиальном нагружении // Прикладная механика. -2005. – Т. 41, №11. – С.108–115.
2. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанные динамические задачи термоупругости. – М.: Машиностроение, 1984. – 184 с.
3. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций : в 5 т.; т. 1).
4. Осесимметричная динамическая связанная задача термовязкопластичности / Я. А. Жук, И. К. Сенченков, В. И. Козлов, Г. А. Табиева // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, №10. – С.83–89.
5. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 312 с.
6. Червинко О.П., Сенченков И.К., Бойчук Е.В. Численное моделирование импульсного термомеханического нагружения полупространства из физически нелинейного материала // Прикладная механика. - 2009. – Вып. 45, №11. – С.42–51.
7. Bever M.D., Holt D.L., Titchener A.L. The stored energy of cold work / M. D. Bever, // Progress in Materials Science / Ed. B. Chalmers et al. – 1973. – Vol. 17. – P. 1–192.
8. Dillon O.W.Jr. The Heat Generation During the Torsional Oscillations of Copper Tubes // Int. J. Solids and Struct. – 1966. – Vol, 2, №2. – P. 181–204.
9. Heaque M.M., Hashmi M.S.J. Stress-strain Properties of structural Steel at Strain Rates of up to 10⁵ per Second at Sub-Zero, Room and High Temperatures // Mech. Materials. – 1984. – Vol. 3. – P. 245–256.
10. Sternberg E., Chakravorty J.G. On inertial effects in a transient thermoelastic problem // ASME. J. Appl. Mech. – 1959. – Vol. 26, №4. – P. 503–509.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Николаевский национальный университет*

Поступила 05.11.2011

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,
 Д. А. ДОБРЯК, канд. физ.-мат. наук, О. А. ДОБРЯК

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Даны основные соотношения для комплексных потенциалов плоской задачи термоупругости. С использованием этих функций получены точные аналитические решения задач для пластинки с эллиптическим отверстием, тонким жестким кольцом, теплопроводящим мягким, жестким или упругим ядром. Описаны результаты численных исследований, установлен ряд новых термомеханических закономерностей и, в первую очередь, закономерностей влияния свойств материалов пластинки и включения на значения напряжений и КИН.

Ключевые слова: термоупругость, кусочно-однородная пластинка, трещина, линейное включение, поток тепла.

Несмотря на большую потребность в исследованиях температурных напряжений, для анизотропных тел он до сих пор остается малоизученным. Широкие исследования для анизотропных пластин были начаты работами Уздалева А.И. [13]. В работе [8] были получены и исследованы общие представления комплексных потенциалов термоупругости для многосвязных пластин, положившие начало многочисленным исследованиям температурных напряжений в анизотропных однородных [5, 10]. В данной статье приведены основные соотношения для кусочно-однородных пластин, получены точные аналитические решения задач для пластинки и эллиптическим отверстием или теплопроводящим ядром. Проведены численные исследования, получен ряд новых закономерностей распределения напряжений и изменения КИН.

1. Постановка задачи. Рассмотрим кусочно-однородную анизотропную пластинку с отверстиями, тонкими абсолютно жесткими кольцами, абсолютно жесткими теплопроводящими включениями, находящимися с

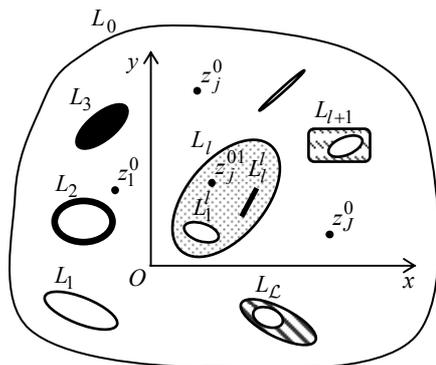


Рис. 1

пластинкой в условиях идеального теплового контакта, и многосвязными упругими включениями, находящимися с пластинкой в условиях идеального теплового и механического контактов. Пластинка занимает многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Упругие включения занимают конечные многосвязные области S^l , ограниченные внешними контурами L_l и внутренними контура-

ми отверстий L_j^l . Будем считать, что на внешнем контуре пластинки-матрицы, на контурах отверстий и абсолютно жестких колец как пластинки-матрицы, так и упругих включений заданы температура, плотность потока тепла или теплообмен с окружающей средой; в отдельных точках пластинки-матрицы и упругих включений действуют сосредоточенные источники тепла. Как частный, когда контур L_0 уходит полностью в бесконечность, будем рассматривать случай бесконечной пластинки. В последнем случае будем считать, что на бесконечности температура ограничена или задан однородный тепловой поток плотности q , направленный под произвольным углом α к оси Ox .

Решение рассматриваемой несвязанной задачи термоупругости для пластинки-матрицы и каждого из включений сводится к решению двух задач: задачи теплопроводности и задачи термоупругости.

2. Решение задачи теплопроводности. Определение температурного поля в рассматриваемой кусочно-однородной пластинке сводится к нахождению комплексных потенциалов теплопроводности $F_3(z_3)$ для пластинки-матрицы и $F_3^l(z_3^l)$ для каждого из включений из соответствующих граничных условий. При известных комплексных потенциалах температура и плотность потока тепла в пластинке-матрице через площадку с нормалью \vec{n} вычисляются по формулам [5]

$$T(x, y) = T_H + T^* + 2 \operatorname{Re} F_3(z_3); \quad (2.1)$$

$$q_n = q_n^* - 2 \operatorname{Re} [i \alpha \delta_3 F_3'(z_3)]. \quad (2.2)$$

Здесь

$$T^*(x, y) = q(t_x x + t_y y); \quad (2.3)$$

$$q_n^* = -q(\cos \alpha \cos nx + \sin \alpha \cos ny); \quad (2.4)$$

$$t_x = (k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha) / \alpha^2, \quad t_y = (k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha) / \alpha^2;$$

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad \mu_3 = (-k_{12} + i\alpha) / k_{22}, \quad \alpha^2 = k_{11}k_{22} - k_{12}^2, \quad \delta_3 = \mp dz_3/ds;$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала; верхние знаки относятся к внешнему контуру области, нижние – к внутренним, т.е. к контурам отверстий или тонких жестких колец.

Аналогичные формулы имеют место для каждого из жестких или упругих включений:

$$T^l(x, y) = T_H + 2 \operatorname{Re} F_3^l(z_3^l); \quad (2.5)$$

$$q_n^l = -2 \operatorname{Re} [i \alpha^l \delta_3^l F_3^{l'}(z_3^l)]; \quad (2.6)$$

$$z_3^l = x + \mu_3^l y, \quad \mu_3^l = (-k_{12}^l + i\alpha^l) / k_{22}^l, \quad (\alpha^l)^2 = k_{11}^l k_{22}^l - (k_{12}^l)^2, \quad \delta_3^l = \mp dz_3^l/ds.$$

Здесь и далее величины со значком l вверху относятся к l -му включе-

нию, без такого значка – к пластинке-матрице. Учтено, что для включений с конечными областями $T^* = 0$, $q^* = 0$.

Для внешнего контура пластинки-матрицы, контуров ее отверстий и тонких жестких колец граничные условия имеют вид [5, 8, 10]

$$2 \operatorname{Re} F_3(t_3) = T_l - T^* - T_H \quad (2.7)$$

в случае задания на контуре температуры T_l ,

$$2 \operatorname{Re} [i \varkappa F_3(t_3)] = \pm \int_0^s [q_{nl} - q_n^*(t)] ds + c \quad (2.8)$$

при задании плотности потока тепла q_{nl} , где c – постоянная.

Аналогичные граничные условия имеют место и для контуров отверстий и жестких колец включений, причем для них, как и в (2.5), (2.6), $T^* = 0$, $q^* = 0$. На контурах же контактов пластинки-матрицы и включений граничные условия записываются так:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [F_3(t_3) - F_3^l(t_3^l)] &= -T^*(t), \\ 2 \operatorname{Re} [i (\varkappa F_3(t_3) - \varkappa^l F_3^l(t_3^l))] &= \int_0^s q_n^*(t) ds + c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Комплексный потенциал теплопроводности $F_3(z_3)$ для пластинки-матрицы определен в области S_3 , получаемой из заданной области S аффинным преобразованием $z_3 = x + \mu_3 y$ и ограниченной контурами L_{3l} , соответствующими контурам L_l области S . При этом в общем случае функция $F_3(z_3)$ имеет вид [7, 10]

$$\begin{aligned} F_3(z_3) &= g c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}-g} D_{3l} [\ln(z_3 - z_{3l}) - g \ln(z_3 - z_{3\mathcal{L}})] + \\ &+ \sum_{j=1}^J \delta_{3j}^0 [\ln(z_3 - z_{3j}^0) - g \ln(z_3 - z_{3\mathcal{L}})] + F_{30}(z_3), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $D_{3l} = -q_l/4\pi\varkappa$, $\delta_{3j}^0 = -q_j^0/4\pi\varkappa$; $g = 0$ для конечной области, $g = 1$ для бесконечной области; c_0 – вещественная константа, равная нулю для конечной области и определяемая из граничных условий в случае бесконечной области; q_l – суммарный поток тепла через контур L_l в область S ; z_{3l} – точка, соответствующая при аффинном преобразовании произвольной точке z_l внутри контура L_l ; q_j^0 – мощность сосредоточенного источника тепла в точке $z_j^0(x_j^0, y_j^0)$; $F_{30}(z_3)$ – функция, однозначная в много-

связной области S_3 . При этом из ограниченности температуры на бесконечности следует условие $\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} + \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} \delta_{3j}^0 = 0$.

По аналогии с (2.10) комплексные потенциалы теплопроводности для включений имеют вид

$$F_3^l(z_3^l) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l}^l \ln(z_3^l - z_{3l}^l) + \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} \delta_{3j}^{0l} \ln(z_3^l - z_{3j}^{0l}) + F_{30}^l(z_3^l), \quad (2.11)$$

где D_{3l}^l , δ_{3j}^{0l} – величины, определяемые по формулам для D_{3l} , δ_{3j}^0 , в которых нужно заменить q_l , q_j^0 и α на q_l^l , q_j^{0l} и α^l .

3. Решение задачи термоупругости. Определение термонапряженного состояния рассматриваемой кусочно-однородной пластинки сводится к нахождению комплексных потенциалов термоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) для пластинки и $\Phi_k^l(z_k^l)$ для каждого включения из соответствующих граничных условий. После нахождения комплексных потенциалов напряжения и перемещения в пластинке-матрице вычисляются по формулам [10]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi_k'(z_k); \quad (3.1)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k) + (u^* - \omega_3 y + u_0, v^* + \omega_3 x + v_0). \quad (3.2)$$

Здесь

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (3.3)$$

μ_k ($k = 1, 2$) – корни характеристического уравнения

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0; \quad (3.4)$$

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k; \quad (3.5)$$

$$p_k = a_{11} \mu_k^2 + a_{12} - a_{16} \mu_k + \frac{\delta_3^k \alpha_1}{r_3}, \quad q_k = a_{12} \mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} + \frac{\delta_3^k \alpha_2}{r_3 \mu_k}; \quad (3.6)$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3; \quad (3.7)$$

$$r_3 = \frac{-\alpha_1 \mu_3^2 + \alpha_6 \mu_3 - \alpha_2}{a_{11} (\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)(\mu_3 - \bar{\mu}_1)(\mu_3 - \bar{\mu}_2)}; \quad (3.8)$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения пластинки как целого; ω_3 – угол поворота против часовой стрелки, причем $\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; u_0 ,

v_0 – компоненты поступательного перемещения.

Аналогичные формулы для напряжений и перемещений имеют место и для включений, только для них $u^* = v^* = 0$, а остальные величины вычисляются по формулам (3.5)–(3.8), в которых соответствующие величины заменяются такими же величинами со значками l сверху.

Функции $\Phi_k(z_k)$ для пластинки и аналогичные функции $\Phi_k^l(z_k^l)$ для каждого включения должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Для внешнего контура пластинки-матрицы, контуров ее отверстий и жестких включений граничные условия имеют вид [10]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = f_i(t) \quad (i = 1, 2). \quad (3.9)$$

При этом для первой основной задачи (неподкрепленные контуры) $g_{k1}^0 = \lambda_{6k}$, $g_{k2}^0 = \lambda_{2k}$, $f_i = c_i$; для второй основной задачи (жестко подкрепленные контуры) $g_{k1}^0 = p_k$, $g_{k2}^0 = q_k$, $f_1(t) = -u^* - \omega_3^l y + u_*^l + \omega_3 y - u_0$, $f_2(t) = -v^* + \omega_3^l x + v_*^l - \omega_3 x - v_0$. Учтено, что перемещения точек границы контактов представляются формулами $u_* = -\omega_3^l y + u_*^l$, $v_* = \omega_3^l x + v_*^l$, в которых ω_3^l – угол жесткого поворота всего включения. Аналогичные условия имеют место для контуров отверстий и жестких включений в упругих включениях.

На контурах контактов пластинки-матрицы и упругих включений граничные условия для $\Phi_k(z_k)$ записываются так:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) \Phi_k(z_k) - (\lambda_{6k}^l, \lambda_{2k}^l, p_k^l, q_k^l) \Phi_k^l(z_k^l) \right] = \\ = (c_1, c_2, -u^* - \omega_3^l y + u_0^l + \omega_3 y - u_0, -v^* + \omega_3^l x + v_0^l - \omega_3 x - v_0). \quad (3.10)$$

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ для пластинки-матрицы, определенные в областях S_k , получаемых из S аффинными преобразованиями (3.3) и ограниченных контурами L_{kl} , в общем случае имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \\ + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 (z_k - z_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + \Phi_{k0}(z_k). \quad (3.11)$$

Здесь Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , α_{kj}^0 – постоянные, определяемые из систем [8, 10]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0); \quad (3.12)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0); \quad (3.13)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0); \quad (3.14)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) i \alpha_{kj}^0 = (0, 0, 0, 0); \quad (3.15)$$

$\Gamma_3 = 0$ в случае конечной области, $\Gamma_3 = r_3 c_0$ для бесконечной области; $A_{3l} = r_3 D_{3l}$; $B_{3l} = r_3 (b_{3l} - z_{3l} D_{3l})$; $\alpha_{3p}^0 = r_3 \delta_{3p}^0$; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k . Комплексные потенциалы для упругих включений по аналогии с (3.11) представляются в виде

$$\Phi_k^l(z_k^l) = \sum_{l=1}^L (A_{kl}^l z_k^l + B_{kl}^l) \ln(z_k^l - z_{kl}^l) + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^{l0} (z_k^l - z_{kj}^{l0}) \ln(z_k^l - z_{kj}^{l0}) + \Phi_{k0}^l(z_k^l), \quad (3.16)$$

где A_{kl}^l , B_{kl}^l , α_{kj}^{l0} – величины, определяемые из аналогичных (3.12)–(3.15) систем для включений.

4. Пластинка с эллиптическим отверстием или с тонким жестким кольцом. Рассмотрим бесконечную анизотропную пластинку с эллиптическим отверстием (рис. 2) или с эллиптическим тонким жестким кольцом (рис. 3). Обозначим полуоси и контур отверстия (кольца) теплоизолирован или на нем задана постоянная температура, которую, не теряя общности, будем полагать равной нулю. На бесконечности действует однородный поток тепла плотности q , составляющий с осью Ox угол α . Угол жесткого поворота ω_3 пластинки как целого равен нулю.

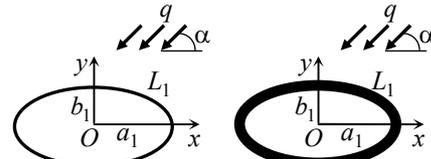


Рис. 2

Рис. 3

В данном случае функции (2.10) и (3.11) имеют вид

$$F_3(z_3) = c_0 + F_{30}(z_3), \quad \Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_{k1} \ln z_k + \Phi_{k0}(z_k). \quad (4.1)$$

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_k| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{1k} [6]

$$z_k = R_k (\zeta_k + m_k / \zeta_k), \quad (4.2)$$

$$R_k = (a_1 - i\mu_k b_1) / 2, \quad m_k = (a_1 + i\mu_k b_1) / (a_1 - i\mu_k b_1) \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Разложив функции $F_{30}(z_3)$ и $\Phi_{k0}(z_k)$, голоморфные вне единичного круга $|\zeta_k| \geq 1$, в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_k и удовлетворив граничным условиям на контуре отверстия или жесткого кольца, полу-

чим, что все коэффициенты рядов равны нулю, кроме коэффициента первого члена ряда функции $F_{30}(z_3)$ и второго – функции $\Phi_{k0}(z_k)$. Окончательно для функций получаются выражения

$$F_3(z_3) = \frac{c_{31}}{\zeta_3}; \quad (4.3)$$

$$\Phi_k(z_k) = B_{k1} \ln \zeta_k + \frac{a_{k2}}{\zeta_k^2}, \quad (4.4)$$

где $c_{31} = -q(t_x a_1 + i t_y b_1)/2$, если на контуре $T=0$, $c_{31} = iq(a_1 \sin \alpha - i b_1 \cos \alpha)/2\alpha$ в случае теплоизолированного контура; $a_{32} = r_3 c_{31} R_3 m_3/2$;

$$a_{k2} = \frac{g_{k+1} f_k^* - f_{k+1} g_k^*}{g_{k+1} f_k - g_k f_{k+1}}; \quad (4.5)$$

$g^* = -g_3 a_{32} - s_4$, $f^* = -f_3 a_{32} - s_5$, причем для первой основной задачи $g_k = \lambda_{6k}$, $f_k = \lambda_{2k}$, $\chi = 0$, $\eta = 0$, $s_4 = 0$, $s_5 = 0$, для второй основной задачи $g_k = p_k$, $f_k = q_k$, $\chi = \omega_3^1 b_1 i/2$, $\eta = -\omega_3^1 a_1/2$, $s_4 = q(\alpha_1 a_1^2 t_x + \alpha_2 b_1^2 t_x - \alpha_6 b_1^2 t_y + 2\alpha_1 a_1 b_1 t_y i)/8$, $s_5 = q(-\alpha_1 a_1^2 t_y + \alpha_6 a_1^2 t_x - \alpha_2 b_1^2 t_y + 2\alpha_2 a_1 b_1 t_x i)/8$; k – индекс, принимающий значения 1, 2, причем значение индекса $k+1$ при $k=2$ формально полагается равным единице. Заметим, что условия (2.7), (2.8) в данном случае записываются в виде

$$2 \operatorname{Re} [s F_3(t_3)] = -q(r_x x + r_y y), \quad (4.6)$$

в котором $r_x = t_x$, $r_y = t_y$, $s = 1$, если на контуре задана температура, $r_x = -\sin \alpha/\alpha$, $r_y = -\cos \alpha/\alpha$, $s = i$ в случае теплоизолированного контура.

Если в приведенных формулах принять $b_1 = 0$, то получится решение задачи для разреза (трещины или линейного «тонкого жесткого кольца»). Тогда можно вычислять КИН, для которых получаются формулы [4]

$$(k_1^\pm; k_2^\pm) = \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1; -\mu_k) \frac{B_{k1} - 2a_{k2}}{\sqrt{a_1}}. \quad (4.7)$$

Были проведены численные исследования распределения температур и напряжений в пластинке. Пластинка считалась изготовленной из материалов: КАСТ-В изотропный (материал М1) [2]; КАСТ-В (М2) [2]; стеклопластик косоугольной намотки (М3) [11, 12, 14, 15]; молибдат свинца $PbMoO_4$ (М4) [1]; дигидрофосфат аммония $NH_4H_2PO_4$ (М5) [1]. Теплофизические постоянные этих материалов приведены в табл. 1. Для изотропной пластинки, которая также рассчитывалась как анизотропная, в качестве «анизотропного» материала принимался изотропный КАСТ-В с увеличением значений параметров a_{12}/a_0 и k_{22}/k_0 на 0,05 и 0,005 соответ-

Таблица 1

Материал	Постоянные материала							
	$a_{11} \cdot a_0$	$a_{22} \cdot a_0$	$a_{12} \cdot a_0$	$a_{66} \cdot a_0$	$\alpha_1 \cdot \alpha_0$	$\alpha_2 \cdot \alpha_0$	$k_{11} \cdot k_0$	$k_{22} \cdot k_0$
M1	72,100	72,100	-8,600	161,500	3,0	3,0	0,2095	0,2100
M2	72,100	49,800	-8,650	139,000	4,0	3,0	0,3352	0,2095
M3	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,9	0,8	0,3000	0,6000
M4	0,210	0,166	-0,049	0,375	1,0	2,5	1,5000	1,5000
M5	0,435	0,175	-0,115	1,150	0,4	3,7	0,7123	1,2570

$$a_0 = 10^4, \text{ МПа}^{-1}, \quad \alpha_0 = 10^5, \text{ К}^{-1}, \quad k_0 = 1, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$$

ственно. Ниже описаны некоторые из полученных результатов. При этом значения величин приведены с точностью до значения q как множителя.

На рис. 4 и 5 при действии потока тепла под углом $\alpha = \pi/2$ для пластинки с круговым отверстием из различных материалов изображены графики распределения нормальных напряжений σ_s вблизи контура на площадках, перпендикулярных к контуру, соответственно для случаев,

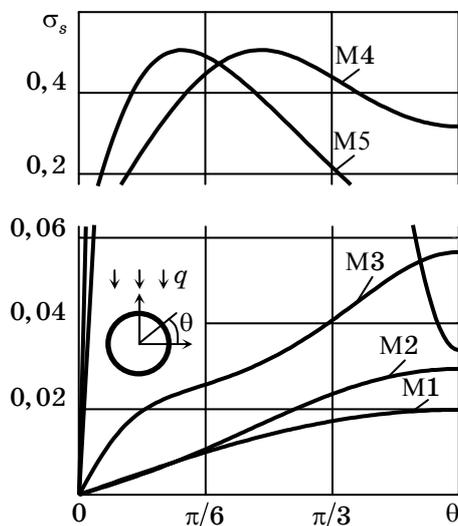


Рис. 4

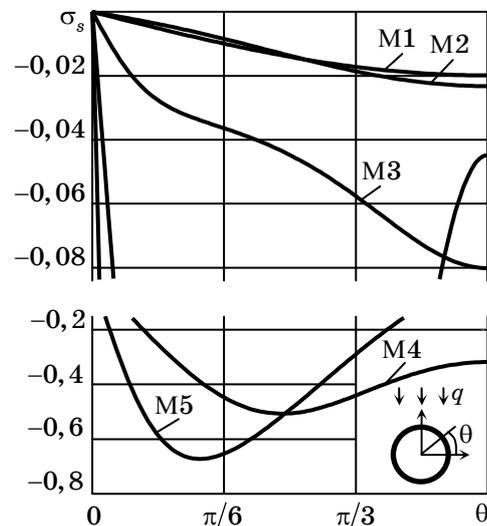


Рис. 5

когда на контуре отверстия задана нулевая температура, и когда он теплоизолирован. В табл. 2 для случаев пластинки с круговым отверстием и пластинки с отверстием, подкрепленным тонким жестким кольцом, приведены значения напряжения σ_s в некоторых точках пластинки из изотропного материала M1 и наиболее сильно анизотропного (как видно из рис. 4, 5) материала M5.

Из рис. 4 и 5 и табл. 2 видно, что под действием потока тепла в пластинке около отверстия или тонкого жесткого кольца возникают достаточно большие напряжения. При этом, чем больше жесткость материала пластинки (чем меньше значения коэффициентов деформации, см.

табл. 1), тем больше концентрация напряжений σ_s . Так, для пластинки из материалов М4, М5, у которых коэффициенты деформации на два по-

Таблица 2

Температурные условия на контуре	Условия термоупр. на контуре	θ , рад.			
		$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
		Материал М1			
$T = 0$ Теплоизолир.	Не подкреплён	0,0099	0,0140	0,0172	0,0198
	Подкреплён кольцом	0,0011	0,0015	0,0018	0,0021
	Не подкреплён	-0,0099	-0,0140	-0,0172	-0,0198
	Подкреплён кольцом	-0,0188	-0,0265	-0,0325	-0,0375
		Материал М5			
$T = 0$ Теплоизолир.	Не подкреплён	0,4916	0,3703	0,2174	0,0337
	Подкреплён кольцом	-0,1555	0,0121	0,0962	0,1131
	Не подкреплён	-0,6530	-0,4919	-0,2888	-0,0448
	Подкреплён кольцом	-0,9786	-0,6880	-0,3946	-0,1010

рядка меньше, чем у М1, М2, максимальные значения этих напряжений отличаются также в сотни раз. Подкрепление контура отверстия тонким жестким кольцом приводит к уменьшению концентрации напряжений, если на этом контуре задана нулевая температура, и к ее росту, если он теплоизолирован. При этом значительно изменяется и характер распределения напряжений, что особенно заметно для случая задания на контуре температуры.

Численные исследования были проведены и для пластинки с эллиптическим отверстием. Исследованиями, как и в других работах, установлено, что если отношение полуосей эллипса меньше 10^{-3} , то эллипс можно считать разрезом и для него считать КИН. В дальнейшем под трещиной или линейным включением понимается такой эллипс, для которого это отношение равно 10^{-4} . В табл. 3 для пластинки из различных материалов приведены значения КИН k_1^+ и k_2^+ для правой вершины раз-

Таблица 3

Температурные условия на контуре	Условия термоупр. на контуре	α , рад.	КИН $\cdot 10^2$	Материал				
				М1	М2	М3	М4	М5
$T = 0$ Теплоизолир.	Не подкреплён	0	k_1^+	0,496	0,387	2,479	21,654	52,328
		$\pi/2$	k_2^+	-0,119	-0,132	-0,512	-2,166	0,427
	Подкреплён кольцом	$\pi/2$	k_2^+	-0,271	-0,413	-0,863	-4,479	-0,673
		0	k_1^+	0,496	0,470	2,120	12,727	11,513
	Не подкреплён	$\pi/2$	k_2^+	-0,271	-0,258	-1,726	-4,479	-1,188
		0	k_1^+	-0,119	-0,285	-0,650	2,727	7,003

реза (трещины или предельного случая тонкого жесткого кольца). Равные нулю КИН в табл. 3 не приведены. В табл. 3 не приведены также k_1^- , k_2^- , т.к. для них, имеют место равенства $k_1^- = -k_1^+$, $k_2^- = -k_2^+$. Из табл. 3 видно, что значения КИН, как и значения напряжений, значительно зависят от материала пластинки: для материалов М4, М5 они в десятки раз больше, чем для М1, М2. Они особенно велики для трещины. Жесткое подкрепление трещины значительно снижает значения КИН. Для пластинки из изотропного материала М1 значения полученных величин, в том числе КИН, совпадают с известными [9] (если значения КИН разделить на $\sqrt{\pi}$).

5. Пластинки с абсолютно мягким или абсолютно жестким теплопроводящим эллиптическим включением. Пусть в рассмотренной выше задаче в эллиптическое отверстие вставлено абсолютно мягкое или абсолютно жесткое включение (рис. 6, 7), т.е. когда на контуре отверстия имеют место условия идеального теплового контакта, но решается либо первая, либо вторая основные задачи теории упругости.

Температурное поле в пластинке, как и в предыдущем случае определяется функцией $F_3(z_3)$, представляемой рядом Лорана, а во включении – функцией $F_3^1(z_3^1)$, голоморфной в эллипсе L_3^1 , получаемом из L_1 аффинным преобразованием $z_3^1 = x + \mu_3^1 y$. Последнюю функцию, учитывая конформное отображение внешности единичного круга на внешность контура L_3^1

$$z_3^1 = R_3^1 \left(\zeta_3^1 + m_3^1 / \zeta_3^1 \right), \quad (5.1)$$

$$R_3^1 = (a_1 - i\mu_3^1 b_1) / 2, \quad m_3^1 = (a_1 + i\mu_3^1 b_1) / (a_1 - i\mu_3^1 b_1),$$

можно представить разложением в ряд по полиномам Фабера вида [10]

$$F_3^1(z_3^1) = c_{30}^1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n}^1 \left((\zeta_3^1)^n + (m_3^1)^n / (\zeta_3^1)^n \right), \quad (5.2)$$

Из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \left[F_3(z_3) - F_3^1(z_3^1) \right] = -q(t_x x + t_y y),$$

$$2 \operatorname{Re} \left[i \left(\varkappa F_3(z_3) - \varkappa^1 F_3^1(z_3^1) \right) \right] = q(y \cos \alpha - x \sin \alpha) + c_1 \quad (5.3)$$

на контуре включения, подставив в них функции (2.3), (2.4), и (5.2) и используя метод рядов, найдем, что только коэффициенты первых членов разложений отличны от нуля. Окончательно

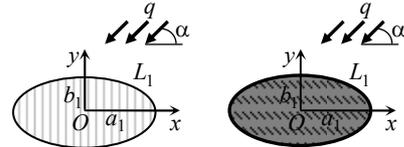


Рис. 6

Рис. 7

$$F_3(z_3) = \frac{c_{31}}{\zeta_3}, \quad F_3^1(z_3^1) = c_{31}^1 \frac{z_3^1}{R_3^1}, \quad (5.4)$$

где

$$c_{31} = \frac{(\varepsilon + \bar{\varepsilon} m_3^1)(\varkappa + \varkappa^1) - (\bar{\varepsilon} m_3^1 + \varepsilon |m_3^1|^2)(\varkappa - \varkappa^1)}{(\varkappa + \varkappa^1)^2 - |m_3^1|^2 (\varkappa - \varkappa^1)^2} - s_1; \quad (5.5)$$

$$c_{31}^1 = \frac{\bar{\varepsilon}(\varkappa + \varkappa^1) - \varepsilon \bar{m}_3^1 (\varkappa - \varkappa^1)}{(\varkappa + \varkappa^1)^2 - |m_3^1|^2 (\varkappa - \varkappa^1)^2}; \quad (5.6)$$

$$\varepsilon = s_1 \varkappa + i \bar{s}_2, \quad s_1 = \frac{q}{2}(t_x a_1 + i t_y b_1), \quad s_2 = \frac{q}{2}(a_1 \sin \alpha + i b_1 \cos \alpha). \quad (5.7)$$

Пусть коэффициенты теплопроводности материалов включения k_{ij}^1 и пластинки k_{ij} линейно связаны друг с другом равенством

$$k_{ij}^1 = \lambda_T^1 k_{ij}, \quad (5.8)$$

в котором λ_T^1 – параметр относительной теплопроводности. В этом случае

$$\begin{aligned} \mu_3^1 &= \mu_3, \quad \varkappa^1 = \lambda_T^1 \varkappa, \quad R_3^1 = R_3, \quad m_3^1 = m_3, \\ c_{31} &= e \left(s_1 + \frac{i \bar{s}_2}{\varkappa} \right) - s_1, \quad c_{31}^1 = \frac{\bar{\varepsilon} (1 + \lambda_T^1) - \varepsilon \bar{m}_3 (1 - \lambda_T^1)}{\varkappa \left[(1 + \lambda_T^1)^2 - |m_3|^2 (1 - \lambda_T^1)^2 \right]}, \\ e &= \frac{1 - |m_3|^2 + \lambda_T^1 (1 + |m_3|^2 + 2m_3 \bar{\varepsilon}/\varepsilon)}{1 - |m_3|^2 + 2\lambda_T^1 (1 + |m_3|^2) + (\lambda_T^1)^2 (1 - |m_3|^2)}. \end{aligned}$$

Интересны случаи предельных значений параметра λ_T^1 , когда он равен нулю, бесконечности или единице.

При $\lambda_T^1 = 0$ имеем «тепло непроводящее» включение. В этом случае из приведенных формул получаем

$$\varkappa^1 = 0, \quad e = 1, \quad c_{31} = \frac{iq}{2\varkappa}(a_1 \sin \alpha - i b_1 \cos \alpha), \quad c_{31}^1 = \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{m}_3}{\varkappa (1 - |m_3|^2)}.$$

Значение коэффициента c_{31} , как и следовало ожидать, совпадает с приведенным выше выражением, полученным при решении задачи для пластинки с теплоизолированным отверстием. Что в данном случае решение совпадает с приведенным ранее решением для пластинки с теплоизолиро-

ванным отверстием, можно получить и из анализа математической постановки задачи. Действительно, в этом случае второе граничное условие (5.3) становится граничным условием по определению $F_3(z_3)$ для пластинки с отверстием, контур которого теплоизолирован, а первое условие (5.3) (по известной функции $F_3(z_3)$) становится условием для определения функции $F_3^1(z_3^1)$.

При $\lambda_T^1 = \infty$ имеем «абсолютно теплопроводящее» включение, не изменяющее температурное поле. В этом случае

$$\alpha^1 = \infty, \quad e = 0, \quad c_{31} = -\frac{q}{2}(t_x a_1 + i t_y b_1), \quad c_{31}^1 = 0, \quad F_3^1(z_3^1) = 0.$$

Коэффициент c_{31} разложения функции теплопроводности $F_3(z_3)$ совпадает с приведенным выше выражением, полученным при решении задачи для пластинки с заданной нулевой температурой на контуре. К этому же результату можно прийти из граничных условий (5.3). Действительно, в этом случае из второго условия (5.3) следует граничное условие с нулевой правой частью для определения функции $F_3^1(z_3^1)$, из которого с учетом того, что в сплошной пластинке в начале координат температура $T = 0$, следует $F_3^1(z_3^1) = 0$, и первое условие (5.3) переходит в граничное условие для определения функции $F_3(z_3)$ в случае заданной на контуре нулевой температуры.

Если $\lambda_T^1 = 1$, то по тепловым свойствам имеем сплошную пластинку. В этом случае из приведенных формул следует, что

$$\alpha^1 = \alpha, \quad c_{31} = 0, \quad c_{31}^1 = \frac{\bar{\varepsilon}}{2\alpha} = \frac{\bar{s}_1 \alpha - i s_2}{2\alpha}.$$

Учитывая выражения (5.7), для c_{31}^1 находим

$$c_{31}^1 = \frac{q \left[\alpha t_x a_1 + b_1 \cos \alpha - i (\alpha t_y b_1 + a_1 \sin \alpha) \right]}{4\alpha},$$

и для функции $F_3^1(z_3^1)$ окончательно получаем

$$F_3^1(z_3^1) = c_{31}^1 \frac{z_3^1}{R_3^1} = \frac{q}{2} \left[t_x x + t_y y + i (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \right]. \quad (5.9)$$

Сравнивая (5.9) и (2.3), заключаем, что температурное поле в пластинке и во включении задаются одними и теми же формулами, т.е. температурное поле в пластинке такое же, как и в бесконечной пластинке без включения.

Зная функции (5.4), можно решить задачу термоупругости. Это решение проводится таким же образом, как это сделано выше для пластин-

ки с эллиптическим неподкрепленным отверстием или тонким жестким кольцом. Для комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ получаются выражения (4.4) с постоянными B_{k1} и a_{k2} , вычисляемыми по формулам (3.14) и (4.5), но в отличие от предыдущего c_{31} находится по формуле (5.5).

Были проведены численные исследования распределения напряжений, а в случае линейного включения и изменений КИН. Ниже описаны некоторые из полученных результатов, причем значения всех величин даны с точностью до значения плотности потока тепла q как множителя.

В табл. 4 для пластинки из материала М5 с круговым включением, когда поток тепла действует под углом $\alpha = \pi/2$, приведены значения на-

Таблица 4

θ , рад.	λ_T^1										
	10^{-7}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	0,5	1	2	10	10^2	10^3	10^7
Абсолютно мягкое включение											
$\pi/12$	-0,586	-0,585	-0,573	-0,466	-0,176	0,000	0,160	0,369	0,434	0,440	0,441
$\pi/6$	-0,653	-0,652	-0,638	-0,519	-0,196	0,000	0,179	0,411	0,483	0,491	0,492
$\pi/4$	-0,492	-0,491	-0,481	-0,391	-0,148	0,000	0,135	0,310	0,364	0,370	0,370
$\pi/3$	-0,289	-0,288	-0,282	-0,230	-0,087	0,000	0,079	0,182	0,214	0,217	0,217
$\pi/2$	-0,045	-0,045	-0,044	-0,036	-0,014	0,000	0,012	0,028	0,033	0,034	0,034
Абсолютно жесткое включение											
$\pi/12$	-0,934	-0,934	-0,926	-0,855	-0,665	-0,550	-0,445	-0,308	-0,266	-0,261	-0,261
$\pi/6$	-0,979	-0,978	-0,968	-0,882	-0,650	-0,509	-0,381	-0,213	-0,162	-0,156	-0,156
$\pi/4$	-0,688	-0,687	-0,679	-0,606	-0,409	-0,289	-0,179	-0,037	0,007	0,012	0,012
$\pi/3$	-0,395	-0,394	-0,388	-0,337	-0,199	-0,115	-0,038	0,062	0,093	0,096	0,096
$\pi/2$	-0,101	-0,101	-0,098	-0,076	-0,016	0,021	0,055	0,098	0,112	0,113	0,113

пряжений σ_s в пластинке вблизи контура включения в зависимости от параметра относительной теплопроводности λ_T^1 включения. Из табл. 4 видно, что с увеличением параметра λ_T^1 концентрация напряжений σ_s сначала уменьшается, затем растет, если включение абсолютно мягкое, и всегда уменьшается, если включение абсолютно жесткое. При $\lambda_T^1 < 10^{-2}$ и $\lambda_T^1 > 10^2$ значения напряжений в пластинке с абсолютно мягким или абсолютно жестким включением становятся такими же, как для пластинки соответственно с неподкрепленным отверстием или подкрепленным тонким жестким кольцом, причем, если $\lambda_T^1 < 10^{-2}$, то напряжения совпадают с их значениями для пластинки с теплоизолированным отверстием, если $\lambda_T^1 > 10^2$, они совпадают со значениями для пластинки с нулевой температурой на контуре отверстия (ср. данные табл. 4 с данными табл. 2). При $\lambda_T^1 = 1$ напряжения в пластинке с абсолютно мягким включением (в виде пленки, одинаковой с пластинкой по тепловым свойствам) равны нулю, а в

пластинке с абсолютно жестким включением они значительны. Это связано с тем, что при действии потока тепла пластинка деформируется, а жесткое включение – нет. Если включение абсолютно мягкое, то во всех точках пластинки отношение напряжений для случаев, когда параметр относительной теплопроводности равен λ_T^1 и $1/\lambda_T^1$, постоянно, для изотропного материала это отношение равно -1 , т.е. напряжения во всех точках пластики для этих двух случаев отличаются друг от друга только знаком.

Заметим, что если в приведенном решении принять $b_1 = 0$, то получится решение задач для пластинки с абсолютно мягким или абсолютно жестким линейным включением. В этом случае c_{31} , вычисляемая по формуле (5.5), равна нулю, а постоянные a_{12} и a_{22} на основе (4.5) для абсолютно мягкого включения равны нулю, а для абсолютно жесткого включения для них получаем

$$a_{k2} = \frac{qa_1^2 \left[p_{k+1}(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) + q_{k+1} \alpha_1 t_x \right]}{8(p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1})}.$$

При этом КИН для вершин абсолютно мягкого включения равны нулю, а для вершин абсолютно жесткого включения

$$(k_1^\pm; k_2^\pm) = \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1; -\mu_k) \frac{qa_1 \sqrt{a_1} \left[p_{k+1}(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) + q_{k+1} \alpha_1 t_x \right]}{4(p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k)}.$$

При проведении расчетов, если отношение полуосей эллипса $a_1/b_1 < 10^{-3}$, включение можно считать линейным и для него вычислять КИН по формулам (4.7). Как показали расчеты, для абсолютно мягкого линейного включения с увеличением параметра λ_T^1 значения КИН k_1^+ растут, k_2^+ уменьшаются. Для абсолютно жесткого включения с ростом параметра λ_T^1 для пластинки из М1 значения КИН k_1^+ по модулю уменьшаются, k_2^+ – растут, для пластинки из М5 значения k_1^+ и k_2^+ по модулю сначала уменьшаются, затем растут. Если параметр $\lambda_T^1 > 10^6$ ($\lambda_T^1 < 10^{-6}$), то включение можно считать «абсолютно теплопроводящим» («тепло непроводящим»). В последнем случае полученные числа совпадают с числами, найденными для трещины или абсолютно жесткого «узкого кольца» с заданной нулевой температурой на контуре (с теплоизолированным контуром).

6. Решение задач для пластинки с эллиптическим термоупругим включением. Пусть в рассмотренной в п. 5 задаче в эллиптическое отверстие вставлено термоупругое включение (рис. 8), находящееся с пластинкой в условиях не только идеального теплового контакта (как в предыдущем п. 5), но и идеального механического контакта. В этом случае решение зада-

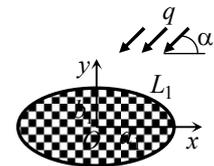


Рис. 8

чи теплопроводности будет таким же, как и в рассмотренной выше задаче для абсолютно мягкого или абсолютно жесткого включения (п. 5). Поэтому для комплексных потенциалов теплопроводности получаются опять выражения (5.4). Что же касается задачи термоупругости, то ее нужно решать и для пластинки, и для включения.

Термонапряженное состояние пластинки определяется с помощью функций

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_{k1} \ln \zeta_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kn}}{\zeta_k^n}, \quad (6.1)$$

голоморфных вне эллипсов L_{1k} , а во включении – с помощью функций $\Phi_k^1(z_k^1)$, голоморфных в эллипсах L_k^1 , получаемых из L_1 аффинным преобразованием. Последние функции, учитывая конформное отображение [6]

$$\begin{aligned} z_k^1 &= R_k^1 \left(\zeta_k^1 + m_k^1 / \zeta_k^1 \right), \\ R_k^1 &= (a_1 - i\mu_k^1 b_1) / 2, \quad m_k^1 = (a_1 + i\mu_k^1 b_1) / (a_1 - i\mu_k^1 b_1), \end{aligned} \quad (6.2)$$

можно представить разложением в ряды по полиномам Фабера вида [10]

$$\Phi_k^1(z_k^1) = a_{k0}^1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^1 \left((\zeta_k^1)^n + (m_k^1)^n / (\zeta_k^1)^n \right), \quad (6.3)$$

причем функция $\Phi_3^1(z_3^1)$ получается из (5.4) ее интегрированием:

$$\Phi_3^1(z_3^1) = r_3^1 \int F_3^1(z_3^1) dz_3^1 = a_{30}^1 + a_{32}^1 \left(\frac{z_3^1}{R_3^1} \right)^2, \quad (6.4)$$

где $a_{32}^1 = r_3^1 c_{31}^1 R_3^1 / 2$.

На основе (3.10) эти функции должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) \Phi_k(z_k) - (\lambda_{6k}^1, \lambda_{2k}^1, p_k^1, q_k^1) \Phi_k^1(z_k^1) \right] = \\ = \{ c_1, c_2, -u^* + c_3, -v^* + c_4 \}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь учтено, что угол поворота упругого включения ω_3^1 равен нулю (это можно показать на основе тождественного удовлетворения в силу идеального механического контакта условия равенства нулю главного момента усилий, действующих со стороны включения на пластинку).

Подставляя функции (6.1), (6.3) в граничные условия (6.5) и используя метод рядов, находим $a_{k0}^1 = a_{kn}^1 = a_{kn}^1 = 0$ ($n \neq 2$), а для определения a_{k2} и a_{k2}^1 получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) a_{k2} - (\lambda_{6k}^1, \lambda_{2k}^1, p_k^1, q_k^1) a_{k2}^1 (m_k^1)^2 - \right. \\ & \left. - (\bar{\lambda}_{6k}^1, \bar{\lambda}_{2k}^1, \bar{p}_k^1, \bar{q}_k^1) \bar{a}_{k2}^1 \right] = -(\lambda_{63}, \lambda_{23}, p_3, q_3) a_{32} + \\ & + (\lambda_{63}^1, \lambda_{23}^1, p_3^1, q_3^1) a_{32}^1 (m_3^1)^2 + (\bar{\lambda}_{63}^1, \bar{\lambda}_{23}^1, \bar{p}_3^1, \bar{q}_3^1) \bar{a}_{32}^1 - (0, 0, s_4, s_5). \quad (6.6) \end{aligned}$$

Комплексные потенциалы термоупругости для пластинки и включения будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = B_{k1} \ln \zeta_k + \frac{a_{k2}}{\zeta_k^2}, \quad \Phi_k^1(z_k^1) = a_{k2}^1 \left(\frac{z_k^1}{R_k^1} \right)^2 \quad (k = 1, 2). \quad (6.7)$$

Зная функции $F_3(z_3)$, $F_3^1(z_3^1)$, $\Phi_k(z_k)$ и $\Phi_k^1(z_k^1)$, можно вычислять температуру (2.1), а также напряжения в пластинке и во включении.

Как видно из приведенного решения, напряжения во включении являются линейными функциями координат.

Если отношение полуосей эллипса $a_1/b_1 < 10^{-3}$, то включение можно считать линейным и для него вычислять КИН по формулам (4.7).

При проведении численных исследований, как и ранее, коэффициенты теплопроводности включения и пластинки связывались друг с другом соотношениями (5.8). Аналогичные соотношения принимались для коэффициентов деформации и линейного расширения включения:

$$a_{ij}^1 = \lambda_a^1 a_{ij}, \quad \alpha_i^1 = \lambda_\alpha^1 \alpha_i, \quad (6.8)$$

где λ_a^1 и λ_α^1 – параметры относительной деформируемости и тепловой расширяемости включения. Можно показать, что в этом случае $p_k^1 = \lambda_a^1 p_k$, $q_k^1 = \lambda_a^1 q_k$, $r_3^1 = \lambda_\alpha^1 r_3 / \lambda^1$, $m_k^1 = m_k$. Тогда (6.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) a_{k2} - (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) a_{k2}^1 m_k^2 - (\bar{\lambda}_{6k}, \bar{\lambda}_{2k}) \bar{a}_{k2}^1 \right] = -(\lambda_{63}, \lambda_{23}) a_{32} + \\ & + \lambda_\alpha^1 (\lambda_{63}, \lambda_{23}) r_3 c_{31}^1 R_3 m_3^2 / 2 \lambda_a^1 + \lambda_\alpha^1 (\bar{\lambda}_{63}, \bar{\lambda}_{23}) \bar{r}_3 \bar{c}_{31}^1 \bar{R}_3 / 2 \lambda_a^1, \quad (6.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[(p_k, q_k) a_{k2} - \lambda_a^1 (p_k, q_k) a_{k2}^1 m_k^2 - \lambda_a^1 (\bar{p}_k, \bar{q}_k) \bar{a}_{k2}^1 \right] = -(p_3, q_3) a_{32} + \\ & + \lambda_\alpha^1 (p_3, q_3) r_3 c_{31}^1 R_3 m_3^2 / 2 + \lambda_\alpha^1 (\bar{p}_3, \bar{q}_3) \bar{r}_3 \bar{c}_{31}^1 \bar{R}_3 / 2 - (s_4, s_5). \quad (6.10) \end{aligned}$$

Для абсолютно жесткого включения $\lambda_a^1 = 0$, $\lambda_\alpha^1 = 0$. В этом случае из (6.10) получим систему

$$\sum_{k=1}^2 (p_k, q_k) a_{k2} = -(p_3, q_3) a_{32} - (s_4, s_5), \quad (6.11)$$

решение которой совпадает с ранее полученным для пластинки с абсолютно жестким включением.

Для абсолютно мягкого включения $\lambda_a^1 = \infty$. Для того, чтобы в этом случае во включении не возникали напряжения (из физических соображений), нужно, чтобы $\lambda_\alpha^1 \ll \lambda_a^1$. Исходя из сказанного, из (6.10) имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^2 \left[(p_k, q_k) a_{k2}^1 (m_k^1)^2 + (\bar{p}_k, \bar{q}_k) \bar{a}_{k2}^1 \right] = (0, 0) \quad (6.12)$$

с отличным от нуля определителем, следовательно, $a_{12}^1 = a_{22}^1 = 0$. Тогда из (6.9) найдем

$$\sum_{k=1}^2 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) a_{k2} = -(\lambda_{63}, \lambda_{23}) a_{32}. \quad (6.13)$$

Решение этой системы совпадает с приведенным выше для пластинки с абсолютно мягким включением.

Ниже описаны некоторые из полученных результатов численных исследований. При этом значения всех величин даны с точностью до значения плотности потока тепла q как множителя.

Как показали исследования наибольшее влияние на значения напряжений оказывает параметр теплопроводности λ_T^1 , меньше влияния параметра деформируемости λ_a^1 и совсем незначительно влияние параметра тепловой расширяемости λ_α^1 , причем последний параметр из физических соображений должен согласовываться с параметром деформируемости λ_a^1 . Действительно, во-первых, для жесткого включения он одновременно с λ_a^1 должен равняться нулю, т.к. абсолютно жесткое включение не может расширяться от действия температуры; во-вторых, если λ_a^1 велико (имеет место абсолютно мягкое включение), то он должен быть значительно меньше λ_a^1 ($\lambda_\alpha^1 \ll \lambda_a^1$), чтобы, как следует из уравнений закона Гука, напряжения в абсолютно мягком включении обращались в ноль. Исходя из того, что влияние λ_α^1 на значение напряжений мало, и учитывая указанные выше замечания, что при больших λ_a^1 нужно принимать $\lambda_\alpha^1 \ll \lambda_a^1$, в дальнейшем при проведении расчетов полагалось, что $\lambda_\alpha^1 = 10^{-4} \lambda_a^1$.

На рис. 9 и 10 для пластинки из материала М5 с круговым упругим включением приведены графики распределения в пластинке нормальных напряжений σ_s для различных λ_T^1 (при $\lambda_a^1 = 0,5$) и λ_a^1 (при $\lambda_T^1 = 2$). Считалось, что поток тепла действует по направлению оси Oy (угол $\alpha = \pi/2$). Приведенные значения величин для случая λ_T^1 , равного ∞ и 0,

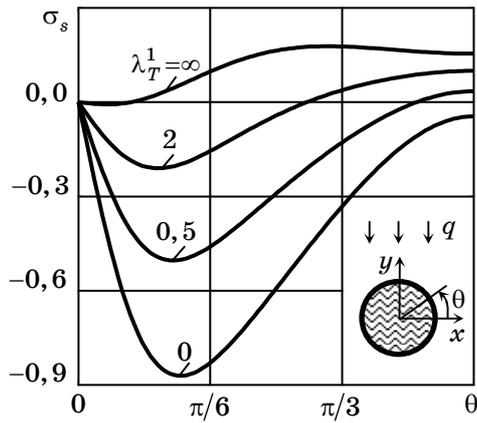


Рис. 9

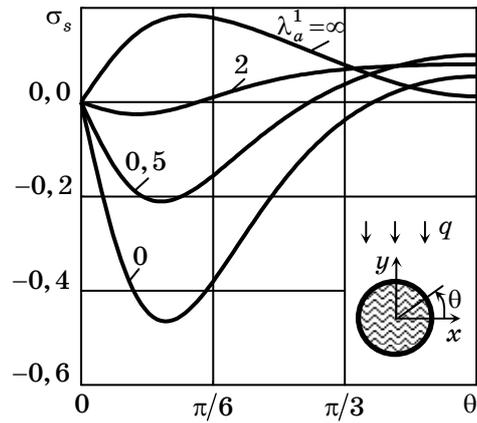


Рис. 10

относятся к пластинке с «абсолютно теплопроводящим» и «тепло непроводящим» включением, а значения для $\lambda_a^1 = \infty$ и $\lambda_a^1 = 0$ относятся к абсолютно мягкому и абсолютно жесткому включению. Как видно, максимальная концентрация напряжений возникает вблизи точки $\theta = \pi/9$ (кроме абсолютно теплопроводящего включения, когда максимальная концентрация возникает в точке $\theta = \pi/4$). Как отмечалось, на изменение напряжений больше влияет λ_T^1 , чем λ_a^1 . Наибольшая концентрация напряжений возникает при $\lambda_T^1 = \lambda_a^1 = 0$. При $\lambda_T^1 > 10^2$ ($\lambda_T^1 < 10^{-2}$) включение становится «абсолютно теплопроводящим» («тепло непроводящим») и дальнейшее увеличение (уменьшение) этого параметра не изменяет термонапряженное состояние; при $\lambda_a^1 > 10^2$ ($\lambda_a^1 < 10^{-2}$) включение можно считать абсолютно мягким (абсолютно жестким). Последнее утверждение легко увидеть и из рис. 11 и 12, где изображены графики изменения максимального значения напряжений σ_s (в точке $\theta = \pi/9$) в зависимости от

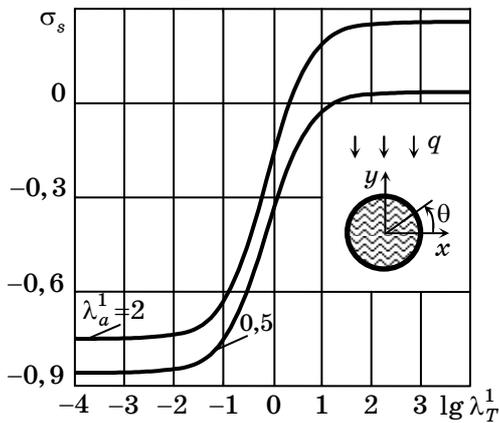


Рис. 11

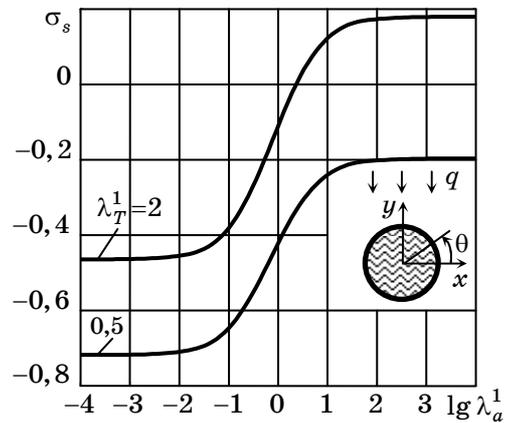


Рис. 12

значений λ_T^1 и λ_a^1 . При этом для $\lambda_a^1 = \infty$ и $\lambda_a^1 = 0$ получаемые значения совпадают с найденными выше при решении соответствующих задач для абсолютно мягкого или абсолютно жесткого включения.

На рис. 13, 14 для пластинки из материала М1 изображены графики, аналогичные данным рис. 9, 10 для материала М5. Видно, что для пластинки из материала М1 выводы такие же, как и для пластинки из

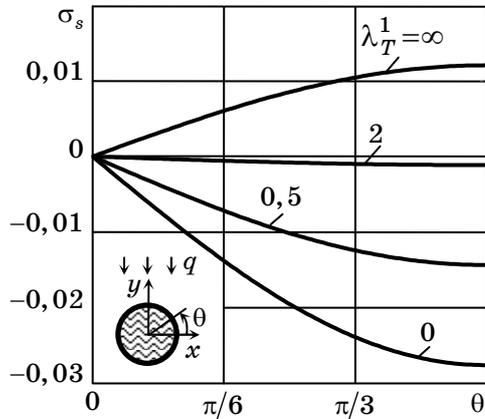


Рис. 13

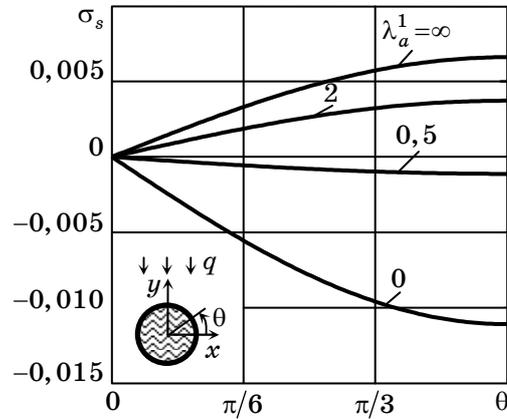


Рис. 14

М5. Отличие заключается лишь в том, что максимальная концентрация напряжений σ_s возникает в точке $\theta = \pi/2$.

С целью изучения влияния упругого включения на термонапряженное состояние пластинки для различных сочетаний реальных материалов пластинки и включения (параметры которых представлены в табл. 1) в

Таблица 5

Пластинка – включение	Напряжение	θ , рад,				
		$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
М1 – М2	σ_s	-0,0005	-0,0005	0,0001	0,0011	0,0024
	σ_n	-0,0006	-0,0010	-0,0012	-0,0011	-0,0009
М2 – М1	σ_s	0,0007	0,0007	-0,0001	-0,0012	-0,0024
	σ_n	0,0006	0,0011	0,0012	0,0011	0,0009
М1 – М5	σ_s	0,0008	0,0010	0,0002	-0,0011	-0,0029
	σ_n	0,0044	0,0082	0,0113	0,0134	0,0149
М5 – М1	σ_s	-0,4000	-0,4460	-0,3350	-0,1950	-0,0270
	σ_n	-0,0010	-0,0010	-0,0020	-0,0020	-0,0010
М5 – М4	σ_s	-0,1040	-0,0840	-0,0238	0,0330	0,0975
	σ_n	-0,0276	-0,0379	-0,0241	0,0068	0,0496
М4 – М1	σ_s	-0,1920	-0,3380	-0,3810	-0,3310	-0,2370
	σ_n	-0,0010	-0,0010	-0,0010	-0,0010	-0,0010

табл. 5 приведены значения напряжений σ_s и σ_n в пластинке с круговым включением, когда $\alpha = \pi/2$. Из табл. 5 видно, что сочетание пластинка–включение в виде М5–М1 может рассматриваться как пластинка из М5 с включением с параметрами $\lambda_T^1 = 0,1$, $\lambda_a^1 = 10^2$.

Заметим, что результаты численных исследова-

ний для изотропной пластинки (из материала М1) с круговым включением хорошо согласуются с известными, найденными другими авторами иными методами [3, 16, 17].

Для пластинки с линейным упругим включением изучены зависимости КИН от параметров теплопроводности λ_T^1 и деформируемости λ_a^1 . На рис. 15 и 16 для пластинок из материалов М5 и М1 соответственно в зависимости от параметра λ_a^1 при различных значениях λ_T^1 изображены

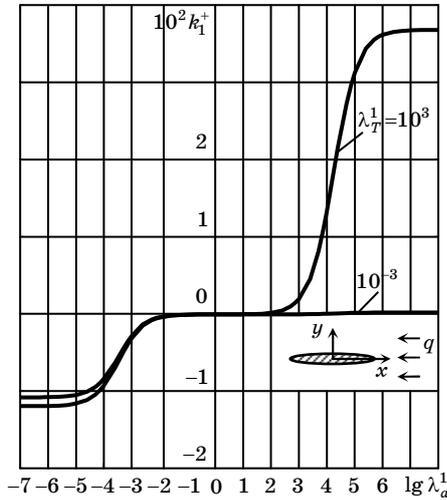


Рис. 15

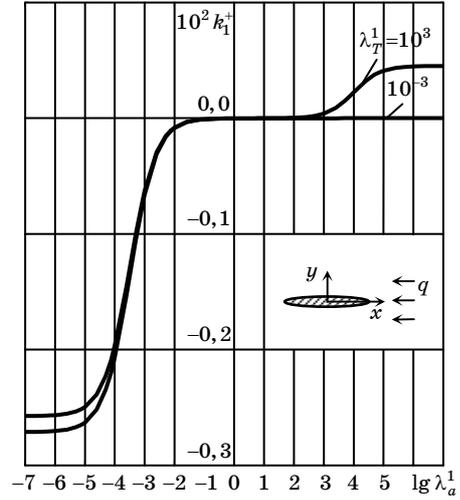


Рис. 16

графики изменения k_1^+ при действии потока тепла по направлению оси Ox (в данной случае $k_2^\pm = 0$), а на рис. 17, 18 – аналогичные графики изменения k_2^+ для случая действия потока тепла по направлению оси Oy

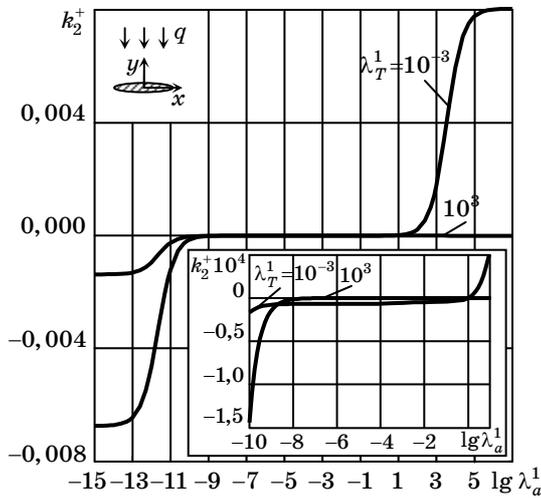


Рис. 17

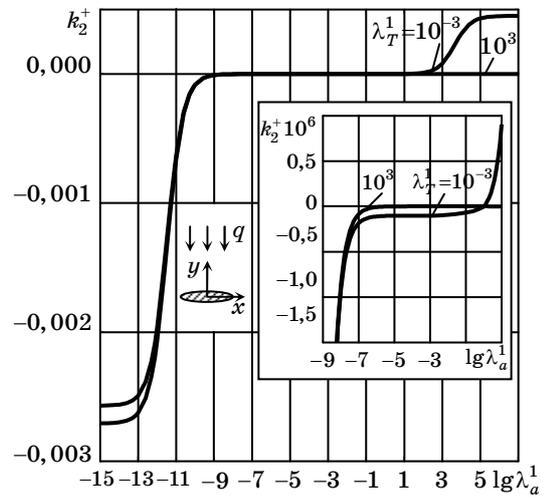


Рис. 18

(для этого случая $k_1^\pm = 0$). Как следует из рис. 15–18, при $10^{-1} < \lambda_a^1 < 10^1$ значения отличных от нуля КИН при любых λ_T^1 весьма малы и ими можно пренебречь, а при $\lambda_a^1 = 1$ они вообще равны нулю, что следует из аналитического решения задачи. Поэтому говорить о КИН для упругих линейных включений, когда жесткость материала включения отличается от жесткости материала пластинки менее 10 раз, а для действия потока перпендикулярно к включению даже для более широкого диапазона, нет смысла. Если поток тепла направлен по линии включения (угол $\alpha = 0$), то при $\lambda_a^1 > 10^6$ включение можно считать абсолютно мягким, при $\lambda_a^1 < 10^{-5}$ – абсолютно жестким. Если поток тепла направлен перпендикулярно линии включения (угол $\alpha = \pi/2$), то этот диапазон гораздо шире: абсолютно мягкому включению соответствует опять же $\lambda_a^1 > 10^6$, но абсолютно жесткое получается при весьма малых λ_a^1 , при $\lambda_a^1 < 10^{-13}$. Заметим, что для последнего случая КИН мал, и его переход в предельное значение осуществляется медленнее.

РЕЗЮМЕ. Надано основні співвідношення для комплексних потенціалів плоскої задачі термопружності. З використанням цих функцій отримано точні аналітичні розв'язки задач для пластинки з еліптичним отвором, тонким жорстким кільцем, теплопроводячим м'яким, жорстким або пружним ядром. Описано результати числових досліджень, встановлено низку нових термомеханічних закономірностей і, в першу чергу, закономірностей впливу властивостей матеріалів пластинки та включення на значення напружень та КИН.

Ключові слова: термопружність, кусочно-однорідна пластинка, тріщина, лінійне включення, потік тепла.

SUMMARY. The basic parities for complex potentials of the plane thermoelasticity problem are given. With use of these functions exact analytical solutions of problems for a plate with an elliptic hole, a thin rigid ring, a heat-conducting soft, rigid or elastic kernel are received. The results of numerical researches are described, a number of new thermomechanical laws and, first of all, laws of influence of materials properties of a plate and inclusion on stress values and SIF are established.

Key words: thermoelasticity, piecewise-homogeneous plate, crack, linear inclusion, heat flow.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акустические кристаллы: Справочник / А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, В.В. Чкалова и др.; Под ред. М.П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
2. Амбарцумян С.А., Дургарьян С.М. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – №3. – С. 120–127.
3. Гайвась И.В. Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока в окрестности макровключений // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, №2. – С. 81–90.
4. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих многосвязных сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
5. Калоеров С.А., Антонов Ю.С. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с

отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.

6. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. - К.: А.С.К., 1997. – С. 10-26. (Механика композитов: В 12 т., Т.7).

7. Калоеров С.А., Добряк Д.А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 77-88.

8. Калоеров С.А., Космодамианский А.С. Представления комплексных потенциалов С.Г. Лехницкого в задачах термоупругости многосвязных анизотропных пластин // Теорет. и прикладная механика. – 1977. – Вып. 8. – С. 8-13.

9. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.

10. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк, 1983. – 160 с.

11. Справочник по композиционным материалам: В 2 кн. Кн.1 / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

12. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.

13. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов: Изд-во СГУ, 1967. – 167 с.

14. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 2. – С. 3–17.

15. Хорошун Л.П., Меликбян А.Х., Шишкин П.Г. Термоупругие постоянные стеклопластика косоугольной намотки // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 13–18.

16. Chao C.K., Shen M.H. On bonded circular inclusions in plane thermoelasticity // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 64. – P. 1000-1004.

17. Kattis M.A., Meguid S.A. Two-phase potentials for the treatment of an elastic inclusion in plane thermoelasticity // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1995. – Vol. 62, № 1. – P. 7-12.

Донецкий национальный университет

Поступила 01.11.2011

Вниманию авторов статей

1. В журнале публикуются статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области двумерной и трехмерной механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, механики разрушения, а также гидромеханики.

2. Статья, подготовленная в текстовом редакторе Word, направляется по e-mail: journaltam@matfak.dongu.donetsk.ua, kaloerov@mail.ru

3. При подготовке статьи необходимо соблюдать структуру изложения: в начале приводится УДК, авторы (с указанием научной степени) и название статьи, затем аннотация и ключевые слова, потом введение (история вопроса и место данной работы), постановка задачи (физическая, математическая), метод и построение решения (без анализа результатов других работ), анализ полученных теоретических и числовых результатов с выводами. В конце статьи приводится список литературы, а также на украинском и английском языках – резюме и ключевые слова (переводы аннотации в начале статьи). Статья должна быть научно и литературно обработана. Особое внимание нужно уделять правильному использованию общепринятой терминологии. Авторам нужно учитывать правильное использование понятий «величина» и «значение» и не допускать стилистических и терминологических погрешностей. Все числовые значения используемых величин должны приводиться в системе Си. В десятичных дробях целая часть должна отделяться от дробной запятой (а не точкой).

4. Текст статьи в редакторе Word набирается шрифтом UkrainianSchoolBook (размером 11), аннотация, ключевые слова, резюме и список литературы, табличный материал – тем же шрифтом размером 9. Формулы набираются с использованием Microsoft Equation или MathType шрифтом UkrainianSchoolBook и Symbol: Full – 11 pt, subscript /superscript – 70 %, sub-subscript/ superscript – 60 %, symbol – 150 %, sub-symbol – 100 %; текст и переменные – курсивом. Указанным способом набираются также все буквы латинского и греческого алфавитов, встречающиеся в тексте. Межстрочный интервал – одинарный. Каждая формула отделяется от основного текста интервалом в 5 пунктов. Параметры страницы: формат – В5 (176×250 мм), поля зеркальные; сверху – 1,7 см, снизу – 2,2 см, внутри – 1,8 см, снаружи – 1,5 см, абзацный отступ 1 см

5. Группы формул отделяются друг от друга знаком точки с запятой, внутри группы формулы отделяются друг от друга знаком запятой. Каждая строка формул набирается отдельным объектом Microsoft Equation. Во всех случаях после знаков препинания ставится один (в объектах Microsoft Equation – два) пробел. Если в строке за формулой в скобках приведены расшифровки величин, то перед скобкой знак запятой или точки с запятой не ставится, но ставятся один пробел. В тех случаях, когда скобки или знаки арифметических действий внутри формул сливаются с соседними символами, нужно ставить пробелы внутри объекта Microsoft Equation. Номер формулы или группы формул ставится в конце последней строки формул. Если подряд приводятся несколько групп формул, то они отделяются друг от друга знаком точки с запятой.

6. Рисунки изготавливаются с использованием графического редактора и представляются в электронном виде в двух экземплярах: «немой» (в формате jpg, bmp и т. д., без подписей), для редактирования при необходимости, и с обозначениями. Сканированные рисунки не принимаются. На рисунки наносятся негустые равномерные сетки, основные линии выполняются толще, чем линии сетки и осей координат; буквенные обозначения набираются размером 9.

7. К статье прилагаются на отдельном листе данные об авторе (авторах) – фамилия, имя, отчество, адрес, телефон, а также на украинском и английском языках фамилии и инициалы авторов и название статьи.