

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

**№ 1 (82)**

**2023**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**  
**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**  
**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** М.Н. Пачева

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р техн. наук, проф. **В.Е. Болнокин**, д-р техн. наук, проф. **Н.И. Болонов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватулян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р техн. наук, проф. **В.А. Глазунов**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**, д-р техн. наук, проф. **В.В. Губанов**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.М. Ковалев**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносевич**, д-р физ.-мат. наук, проф. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Мущанов**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыши**, д-р техн. наук, проф. **А.А. Петраков**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **С.Н. Судаков**, д-р техн. наук, проф. **Г.М. Улитин**, д-р физ.-мат. наук, проф. **В.А. Шалдырван**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

**EXECUTIVE SECRETARY:** M.N. Pacheva

**EDITORIAL BOARD:**

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of tech., prof. **V.E. Bolnokin**, Dr. of tech., prof. **N.I. Bolonov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of tech., prof. **V.A. Glazunov**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**, Dr. of tech., prof. **V.V. Gubanov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., prof. **A.M. Kovalev**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., prof. **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of tech., prof. **V.N. Pavlysh**, Dr. of tech., prof. **A.A. Petrakov**, Dr. of tech., doc. **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., senior researcher **S.N. Sudakov**, Dr. of tech., prof. **G.M. Ulitin**, Dr. of phys. and math., prof. **V.A. Shaldyrvan**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

Тел. 302 92 71, E-mail: jtam\_donnru@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим научным специальностям: 1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.1.9 — Строительная механика (технические науки); 2.8.6 — Геомеханика, разрушение горных пород,рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

№ 1 (82) / 2023

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Механика деформируемого твердого тела

<i>Калоеров С.А., Сероштанов А.В., Мироненко А.Б.</i> Исследование электромагнитоупругого состояния тонкой многоугольной плиты с отверстиями и трещинами.....	5
<i>Глушанков Е.С.</i> Приближенное решение задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязной пластинки из пьезоматериала при скачках температуры на контурах.....	21
<i>Глухов А.А., Сторожев В.И., Шалдырван В.А.</i> Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полу-пространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью».....	32
<i>Моисеенко И.А., Моисеенко В.А., Мельничук Н.Ю.</i> Модели функциональной неоднородности изотропного цилиндрического волновода для случая осесимметричных нормальных волн.....	40
<i>Глухова Ж.Л.</i> О сопряженных явлениях при диффузии водорода в металлах.....	62
<i>Закора С.В., Чехов В.Н.</i> Исследование напряжённого состояния трансверсально-изотропной сферической оболочки с жёстким включением, нагруженным совместно усилием и моментом.....	69

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

<i>Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В.</i> Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в расчетных моделях термоупругого деформирования балок.....	81
---	----

**Геомеханика, разрушение горных пород,  
рудничная аэrogазодинамика и горная теплофизика**

<i>Дрибан В.А., Хохлов Б.В., Хламов Д.М., Антипенко А.В.</i> Анализ возможности возникновения провалов земной поверхности при затоплении горных выработок на примере шахты им. В.М. Бажанова.....	93
<i>Канин В.А., Пивень Ю.А., Васютина В.В.</i> Экспериментальные исследования изменения напряженно-деформированного состояния призабойной части угольного пласта при вибрационном воздействии на горный массив.....	108
<i>Глухов А.А.</i> О методике сейсмического прогноза пространственного расположения разрывных тектонических нарушений из горных выработок.....	116
<i>К 100-летию со дня рождения академика А.С. Космодамианского.....</i>	123

**CONTENTS**

**Solid Mechanics**

<i>Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V., Mironenko A.B.</i> Investigation of the electro-magneto-elastic state of a thin polygonal plate with holes and cracks.....	5
<i>Glushankov E.S.</i> The approximate solution of the thermo-electro-magneto-elasticity problem for multiply connected piezoelectric plate in case of temperature jump discontinuities on the contours.....	21
<i>Glukhov A.A., Storozhev V.I., Shaldyryan V.A.</i> Love waves in the structure "homogeneous isotropic layer on a transversal-isotropic half-space with double exponential inhomogeneity" .....	32
<i>Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A., Melnichuk N.I.</i> Models of functional inhomogeneity of an isotropic cylindrical waveguide for the case of axisymmetric normal waves.....	40
<i>Glukhova Zh.L.</i> On connected phenomena in the diffusion of hydrogen in metals.....	62
<i>Zakora S.V., Chekhov V.N.</i> Investigation of the stress state of a transversally isotropic spherical shell with a rigid inclusion loaded jointly by force and moment.....	69

**Mathematical Modeling,  
Numerical Methods and Program Complexes**

<i>Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V.</i> Fuzzy-set analysis of parametric uncertainty in computational models of thermoelastic deformation of beams.....	81
--	----

**Geomechanics, Rock Damage,  
Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics**

<i>Driban V.A., Khokhlov B.V., Khlamov D.M., Antipenko A.V.</i> Analysis of the possibility of sinkholes of the earth's surface during flooding of mine workings on the example of the mine named after V.M. Bazhanov.....	93
<i>Kanin V.A., Piven Y.A., Vasyutina V.V.</i> Experimental studies of changes in the stress-strain state of the bottom-hole part of a coal seam under vibration impact on a mountain range.....	108
<i>Glukhov A.A.</i> On the methodology of seismic prediction of the spatial location of discontinuous tectonic disturbances from mine workings.....	116
 On to the 100th birthday of the academician A.S. Kosmodamiansky.....	 123

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-5-20

EDN:APLKBS



©2023. С.А. Калоеров<sup>1</sup>, А.В. Сероштанов<sup>2</sup>, А.Б. Мироненко<sup>3</sup>

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ МНОГОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит дано решение задачи об изгибе многоугольной плиты с произвольными отверстиями и трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана или по полиномам Фабера и удовлетворением граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Описаны результаты численных исследований для квадратной плиты с отверстием, трещиной, с отверстием и краевой трещиной. Исследованы закономерности влияния на значения изгибающих моментов и коэффициентов интенсивности моментов для концов трещины физико-механических свойств материала плиты и геометрических характеристик отверстия и трещины.

**Ключевые слова:** пьезоплита с отверстиями, трещины и разрезы, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, изгибающие моменты.

<sup>1</sup> Калоеров Стефан Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup> Сероштанов Александр Владимирович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: aleks.serosht@gmail.com.

Seroshtanov Aleksandr Vladimirovich – Postgraduate, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup> Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: a.mironenko@donnu.ru.

Mironenko Andrey Borisovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

**Введение.** Тонкие плиты из пьезоматериалов с отверстиями широко используются в качестве элементов конструкций современного научного оборудования и технических устройств [1–9]. Под действием различных изгибающих воздействий в них могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании конструкций. Следовательно, необходимо иметь надежные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) тонких многосвязных пьезоплит. В работах [10–12] предложены различные методы определения ЭМУС пьезоплит несложной геометрической формы из материалов простейшей микроструктуры. Но в большинстве случаев элементы конструкций изготавливаются из материалов, обладающих общими анизотропными свойствами. Достаточно надежные результаты по определению ЭМУС многосвязных тонких плит дают методы, использующие комплексные потенциалы. Эти функции сначала были введены для решения плоских задач электромагнитоупругости [13, 14], а в работах [15, 16] они распространены на решение задач изгиба тонких пьезоплит.

В данной статье с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости построено общее решение задачи об изгибе конечной пьезоплиты с произвольными отверстиями и трещинами. При этом комплексные потенциалы представлены рядами Лорана и рядами по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемым из граничных условий на контурах обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [17]. Для квадратной плиты с отверстием или трещиной, с отверстием и краевой трещиной проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС в зависимости от физико-механических постоянных материала плиты и геометрических характеристик отверстия и трещины.

**1. Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим находящуюся в состоянии поперечного изгиба тонкую многосвязную пьезоплиту, ограниченную внешним контуром и контурами отверстий произвольной конфигурации. При наличии в плите криволинейных отверстий (отличных от круговых и эллиптических) их контуры будем аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов-трещин, которые также будем рассматривать как эллипсы, одна из полуосей которых равна нулю. Поэтому достаточно рассматривать плиту с эллиптическими контурами. Итак, рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$  пьезоплиту, занимающую многосвязную область  $S$ , ограниченную произвольным внешним контуром  $L_0$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосами  $a_l, b_l$  (рис. 1), причем в локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах эллипсов  $L_l$  и направлениями осей  $O_l x_l$

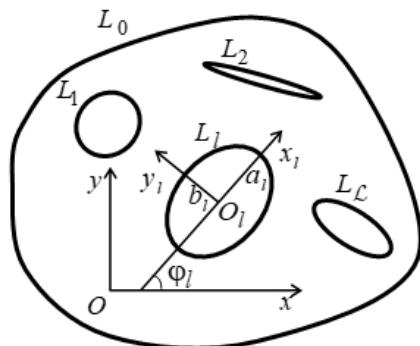


Рис. 1.

Электромагнитоупругое состояние тонкой многоугольной плиты с отверстиями и трещинами

вдоль полуосей  $a_l$  их параметрические уравнения будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат  $Oxy$  имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi_l$  — угол между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от положительного направления  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}$ ,  $y_{0l}$  — координаты начала локальной системы  $O_l x_l y_l$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\theta$  — угловой параметр в описании эллипса, изменяющийся от 0 до  $2\pi$ .

Плита находится под действием приложенных к ее контурам  $L_l (l = \overline{0, L})$  механических изгибающих моментов  $m_l (s)$ , поперечных сил  $p_l (s)$ , моментов электрической индукции  $m_{dl} (s)$  и магнитной индукции  $m_{bl} (s)$ , причем для упрощения вида приводимых соотношений будем считать, что главные векторы поперечных усилий и главные моменты механических и электромагнитных воздействий равны нулю на каждом из контуров отверстий.

Если для решения задачи об определении ЭМУС плиты использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости [15, 16], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций  $W'_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где  $\mu_k$  — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0;$$

$l_{ij}(\mu)$  — полиномы вида

$$l_{4s}(\mu) = - (D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}),$$

$$l_{3g}(\mu) = C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11},$$

$$l_{3p}(\mu) = C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11};$$

$$\nu_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$D_{ij}$  и  $C_{gij}$ ,  $C_{p_{ij}}$ ,  $C_{\beta_{ij}}$ ,  $C_{\nu_{ij}}$ ,  $C_{\chi_{ij}}$  – упругие и электромагнитные жесткости пли-ты [15], которые выражаются через  $s_{ij}$  (коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электромагнитного поля),  $g_{ij}$ ,  $p_{ij}$  (пьезо-электрические и пьезомагнитные модули деформаций и напряженостей, изме-ренные при постоянных напряжениях и индукциях),  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  (коэффициенты диэлектрической, магнитной, электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях).

Комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  определены в многосвязных областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими контурам  $L_l$  области  $S$  при аффинных преобразованиях (3), и на основании их общих представлений [15, 16] в рассматриваемом случае имеют вид

$$W'_k(z_k) = a_{k00} + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kl n} \varphi_{kl n}(z_k),$$

где

$$\varphi_{k0n}(z_k) = (z_k - z_{k0n})^n, \quad \varphi_{kl n}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

$\zeta_{kl}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) – переменные, определяемые из конформных отображений внешно-сти единичного круга  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$  [18]

$$\begin{aligned} z_k &= z_{k0} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \\ z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2 R_{kl}}; \end{aligned}$$

$a_{kl n}$  – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты. В случае многосвязной плиты этим условиям удобнее удовлетворить в дифферен-циальной форме, имеющей при заданных на контуре  $L_l$  механических изгибаю-щих моментах  $m_l(s)$ , поперечных усилиях  $p_l(s)$ , моментах индукций электриче-ской  $m_{dl}(s)$  и магнитной  $m_{bl}(s)$  вид

$$2Re \sum_{k=1}^4 g_{ikl} \delta_{k,s} W''_k(t_{klm}) = \frac{df_i(t_{lm})}{ds} \quad (i = \overline{1, 4}; \quad l = \overline{0, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_l}), \quad (4)$$

в котором

$$\delta_{k,s} = \frac{dt_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

$$\begin{aligned}
 (g_{1kl}, g_{2kl}, g_{3kl}, g_{4kl}) &= \left( \frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right), \\
 p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)\nu_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k)\rho_k, \\
 q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)\nu_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k)\rho_k, \\
 d_{yk} &= C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (C_{\beta12} + C_{\beta22}\mu_k)\nu_k - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k)\rho_k, \\
 b_{yk} &= C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k)\nu_k - (C_{\chi12} + C_{\chi22}\mu_k)\rho_k; \\
 \frac{df_{1l}}{ds} &= \mp \left( m_l \frac{dy}{ds} + f_l \frac{dx}{ds} \right) - c_l \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{2l}}{ds} = \mp \left( m_l \frac{dx}{ds} - f_l \frac{dy}{ds} \right) + c_l \frac{dy}{ds}, \\
 \frac{df_{3l}}{ds} &= \pm m_{dl}, \quad \frac{df_{4l}}{ds} = \pm m_{bl}; \quad f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds; \\
 W_k''(z_k) &= \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \tag{5}
 \end{aligned}$$

$$\varphi'_{k0n}(z_k) = n(z_k - z_{k0})^{n-1},$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

$x', y'$  – производные переменных (2) по угловому параметру  $\theta$  задания эллипсов (1);  $c_l$  – вещественная постоянная; верхние знаки относятся к внешнему контуру  $L_0$  области  $S$ , нижние – к контурам отверстий  $L_l$ ;  $s$  – длина дуги контура при обходе против часовой стрелки.

Границным условиям (4) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [17, 19, 20]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$  ( $p = \overline{0, \mathcal{L}}$ ;  $m = \overline{1, M_p}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (5) в граничные условия (4) в точках  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ , для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2Re \sum_{k=1}^4 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} = \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} - 2Re \sum_{k=1}^2 g_{ikp} \delta_{kps} \Gamma_k \tag{6}$$

$$(i = \overline{1, 4}; p = \overline{0, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}).$$

Кроме уравнений (6), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2Re \sum_{k=1}^4 ia_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \tag{7}$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий  $L_p$ .

Систему (6), дополненную уравнениями (7), для определения постоянных  $a_{kln}$  и  $c_j$ , будем решать методом сингулярных разложений [21, 22]. После нахождения псевдорешений этой системы функции  $W'_k(z_k)$  будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, механические моменты находятся по формулам [15]

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2Re \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k), \quad (8)$$

в которых

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k) \lambda_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \nu_k,$$

$$q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k) \lambda_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k) \nu_k,$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k) \lambda_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \nu_k.$$

Зная основные характеристики, можно найти также моменты и перерезывающие силы на произвольных площадках с нормалью  $n$  и касательной  $s$ . В частности, для механических моментов имеем

$$M_n = M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny,$$

$$M_s = M_x \cos^2 ny + M_y \cos^2 nx - 2H_{xy} \cos nx \cos ny;$$

$$H_{ns} = (M_y - M_x) \cos nx \cos ny + H_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny).$$

При этом, если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в частности, на основе формул [23, 24]

$$k_{1M}^{\pm} = 2Re \sum_{k=1}^4 q_k M_k, \quad k_{2M}^{\pm} = 2Re \sum_{k=1}^4 r_k M_k,$$

в которых

$$M_k = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kl n}.$$

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). При проведении численных исследований решения всех этих задач можно получить по программе решения задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad \nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij},$$

где  $\lambda_g$ ,  $\lambda_p$ ,  $\lambda_{gp}$  – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$ , а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими:  $\lambda_g = 1$ ,  $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ЭУ;  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач МУ;  $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ТУ.

Как показали исследования, учет электрических свойств материала незначительно влияет на значения основных характеристик ЭМУС (значения величин для задач ЭУ и ТУ близки друг другу), тогда как учет магнитных свойств существенно влияет на эти значения (значения величин для задач ЭМУ и МУ близки друг другу). Поэтому при проведении численных исследований будем ограничиваться решениями только задач ЭМУ и ТУ.

**2. Исследования для квадратной плиты с отверстиями, трещинами и разрезами.** Численные исследования были проведены для плит различной многоугольной конфигурации с отверстиями и трещинами при различных внешних воздействиях. При проведении численных исследований количество членов в бесконечных суммах рядов (5) и количество точек  $M_p$  на каждом из контуров  $L_p$ , в которых удовлетворялись граничные условия при получении системы уравнений (6), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал  $10^{-3}$ ). Как показали численные исследования, для такого удовлетворения краевым условиям в рассмотренных задачах в зависимости от близости концентраторов напряжений друг к другу в рядах (5) достаточно оставлять от 10 до 100 членов для каждого отверстия и брать на каждом из контуров от 100 до 1000 точек.

Численные исследования проводились для плит из композита на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  (материал М1) [25, 26]; композита, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия  $CdSe$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $BaTiO_3$  (М2) [27]; композита, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют  $PZT - 4$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $CoFe_2O_4$  (М3) [27]. Постоянны для этих материалов приведены в таблице 1. При этом не указанные в таблице 1 постоянные  $s_{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$ , равны нулю.

Ниже описаны некоторые из полученных результатов для квадратной плиты, отнесенной к прямоугольной системе координат с началом в центре плиты и осями координат вдоль направлений сторон. В совокупности стороны квадрата образуют внешний контур  $L_0$ , для которого  $x_{00} = y_{00} = \varphi_0 = 0$ .

В таблице 2 для изгиба квадратной плиты из наиболее пьезоактивного материала М2 с центральным круговым отверстием контура  $L_1$  радиуса  $a_1$  равномерно распределенными вдоль горизонтальных сторон изгибающими моментами  $M_y$  интенсивности  $m_0$  (рис. 2) приведены значения изгибающих моментов  $M_s/m_0$  около  $L_1$  на площадках, нормальных к контуру, а также в некоторых точках сторон в зависимости от отношения  $c/a_1$ , где  $c$  – длины перемычек между контуром отверстия и сторонами, а также от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого

от оси  $Ox$  против часовой стрелки. На рисунке 3 изображены графики распределения этих моментов около контура  $L_1$ , причем сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые – к задаче ТУ.

Таблица 1.  
Физико-механические постоянные материалов

Величина	Материалы		
	M1	M2	M3
$s_{11}/s_0 = s_{33}/s_0$	7,165	22,260	10,745
$s_{22}/s_0$	6,797	14,984	7,398
$s_{44}/s_0 = s_{66}/s_0$	19,912	47,481	7,637
$s_{55}/s_0$	19,802	69,204	32,680
$s_{12}/s_0 = s_{23}/s_0$	-2,337	-6,437	-2,542
$s_{13}/s_0$	-2,736	-11,942	-5,595
$g_{16}/g_0 = g_{34}/g_0$	2,028	109,22	2,054
$g_{21}/g_0 = g_{23}/g_0$	-0,496	-4,333	-1,159
$g_{22}/g_0$	1,157	8,016	2,458
$p_{16}/p_0 = p_{34}/p_0$	1,850	268,318	98,843
$p_{21}/p_0 = p_{23}/p_0$	0,576	17,778	12,102
$p_{22}/p_0$	1,186	31,206	22,268
$\beta_{11}/\beta_0 = \beta_{33}/\beta_0$	0,156	19,612	0,106
$\beta_{22}/\beta_0$	0,137	10,612	0,090
$\nu_{11}/\nu_0 = \nu_{33}/\nu_0$	-0,190	213,404	-14,931
$\nu_{22}/\nu_0$	-0,185	-5,534	-3,740
$\chi_{11}/\chi_0 = \chi_{33}/\chi_0$	0,336	0,590	0,805
$\chi_{22}/\chi_0$	0,119	0,575	0,704

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \text{ м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}^{-1}, \quad \chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-2}.$$

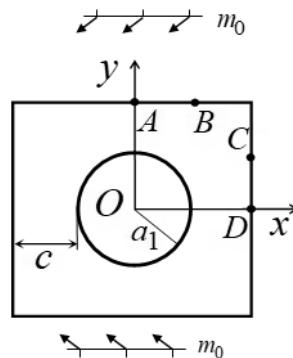


Рис. 2.

Таблица 2.

Значения моментов  $M_s/m_0$  около контура кругового отверстия и в некоторых граничных точках изгибаемой по горизонтальным сторонам квадратной плиты моментами  $M_y = m_0$  в зависимости от длины перемычек  $c/a_1$  и угла  $\theta$

$\frac{c}{a_1}$	Задача	$\theta$ , рад							Точки		
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	A	B	C
$\infty$	ЭМУ	2,184	2,003	1,457	0,767	0,336	0,229	0,231	0,000	0,000	1,000
	ТУ	1,876	1,752	1,424	0,990	0,565	0,258	0,146	0,000	0,000	1,000
10	ЭМУ	2,198	2,016	1,467	0,773	0,337	0,228	0,230	0,005	-0,001	1,013
	ТУ	1,890	1,765	1,434	0,996	0,569	0,259	0,146	-0,002	0,001	1,011
5	ЭМУ	2,233	2,049	1,492	0,786	0,340	0,226	0,225	0,013	-0,004	1,044
	ТУ	1,924	1,797	1,459	1,013	0,577	0,261	0,146	-0,008	0,004	1,036
2	ЭМУ	2,400	2,203	1,608	0,850	0,358	0,216	0,203	0,021	-0,013	1,184
	ТУ	2,092	1,951	1,577	1,087	0,612	0,271	0,146	-0,030	0,016	1,157
1	ЭМУ	2,765	2,528	1,838	0,983	0,415	0,208	0,170	-0,006	-0,002	1,457
	ТУ	2,473	2,288	1,814	1,226	0,678	0,287	0,144	-0,061	0,032	1,409
0,5	ЭМУ	3,626	3,263	2,255	1,219	0,557	0,242	0,146	-0,065	0,050	1,981
	ТУ	3,371	3,035	2,268	1,462	0,798	0,323	0,137	-0,092	0,046	1,982
0,3	ЭМУ	4,876	4,185	2,715	1,456	0,724	0,290	0,116	-0,069	0,068	2,590
	ТУ	4,656	4,022	2,761	1,682	0,929	0,375	0,132	-0,105	0,053	2,521
0,1	ЭМУ	11,454	8,142	3,931	1,931	1,223	0,559	0,091	-0,079	0,077	4,461
	ТУ	11,274	8,087	4,128	2,139	1,305	0,620	0,124	-0,116	0,070	4,345
0,01	ЭМУ	106,93	15,286	-2,489	-2,839	2,189	-2,780	3,546	-4,191	3,351	9,893
	ТУ	101,13	21,944	5,981	2,537	1,833	1,482	0,096	-0,095	0,142	7,221
											100,77

В таблице 3 для таких же плит из всех указанных материалов М1, М2, М3 приведены значения тех же изгибающих моментов для случая всестороннего изгиба плиты моментами  $M_y = m_0$  по горизонтальным сторонам и моментами  $M_x = m_0$  по вертикальным сторонам (рис. 4), а в таблице 4 приведены аналогичные данные для случая, когда на горизонтальных сторонах квадрата с круговым отверстием действуют магнитные индукционные моменты интенсивности  $m_{b0}$ .

Из данных таблиц 2 – 4, рисунка 3 и других полученных результатов следует, что с уменьшением длины перемычки значения изгибающих моментов около контуров растут. При длинах перемычек, больших диаметра отверстия ( $c/a_1 > 2$ ), влияние сторон квадрата на ЭМУС около контура отверстия мало, им можно пренебречь и считать плиту бесконечной. При уменьшении длины перемычек (уменьшении  $c/a_1$ ) значения моментов около контура отверстия в зонах перемычек резко растут. Наибольшие изгибающие моменты возникают в плите из наиболее «сильно анизотропного» по упругим свойствам материала М2. В случае всестороннего изгиба наибольшие изгибающие моменты возникают вблизи перемычек вдоль мягких волокон (для которых  $s_{ii}$  больше). На значения

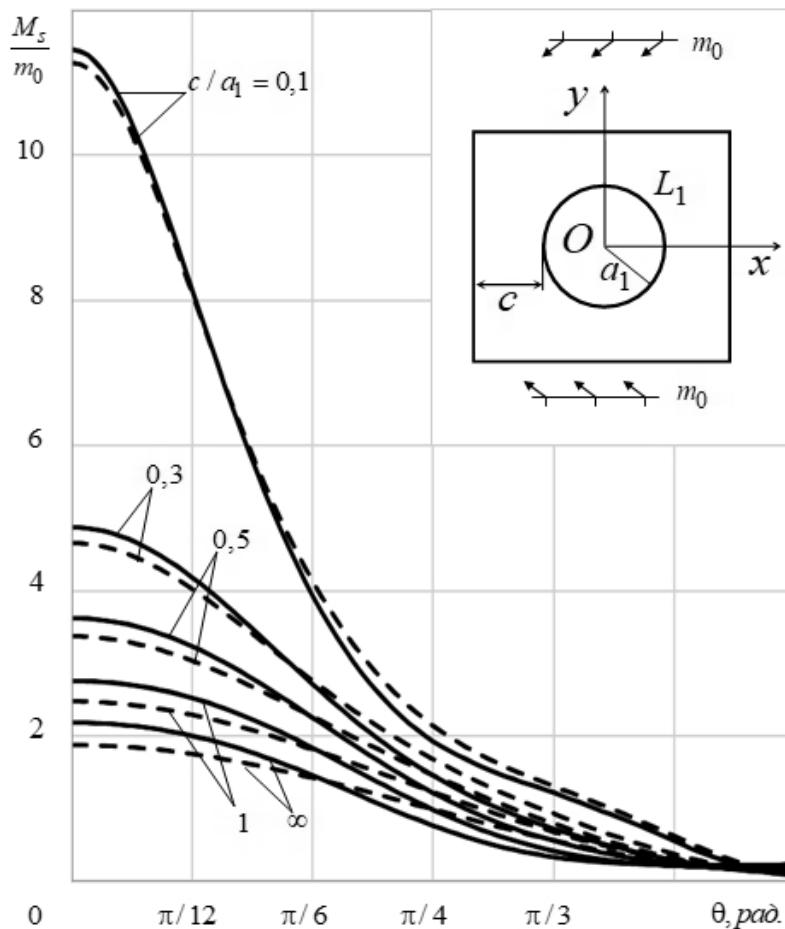


Рис. 3. Графики распределения моментов  $M_s/m_0$  вблизи контура центрального кругового отверстия в квадратной плите из материала М2 для некоторых значений  $c/a_1$ . Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, а штриховые – ТУ.

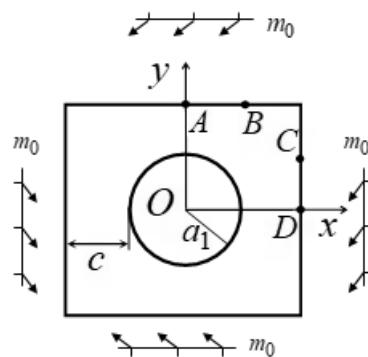


Рис. 4.

Таблица 3.

Значения моментов  $M_s/m_0$  около контура кругового отверстия и в некоторых точках сторон изгибаемой по всем сторонам квадратной плиты моментами  $m_0$  в зависимости от длины перемычек  $c/a_1$  и угла  $\theta$

Материал	$\frac{c}{a_1}$	$\theta$ , рад							Точки			
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	A	B	C	D
M1	$\infty$	2,076	2,047	1,986	1,948	1,963	2,006	2,029	1,000	1,000	1,000	1,000
	5	2,125	2,095	2,032	1,993	2,009	2,054	2,077	1,062	1,040	1,040	1,060
	2	2,296	2,259	2,184	2,138	2,160	2,218	2,247	1,271	1,173	1,173	1,263
	1	2,678	2,614	2,483	2,410	2,461	2,574	2,631	1,714	1,431	1,446	1,698
	0,5	3,574	3,397	3,046	2,868	3,029	3,361	3,530	2,684	1,974	1,980	2,662
	0,1	11,460	8,725	5,376	4,188	5,395	8,713	11,421	10,689	4,425	4,448	10,654
	0,01	101,48	23,508	7,715	5,001	7,846	23,712	101,24	100,87	7,316	7,343	100,74
M2	$\infty$	2,793	2,586	2,015	1,534	1,567	1,881	2,042	1,000	1,000	1,000	1,000
	5	2,845	2,635	2,053	1,567	1,611	1,917	2,062	1,127	1,013	1,050	1,026
	2	3,016	2,797	2,193	1,687	1,716	2,040	2,199	1,429	1,091	1,215	1,138
	1	3,388	3,136	2,463	1,925	1,989	2,346	2,522	1,902	1,342	1,542	1,451
	0,5	4,245	3,867	2,948	2,336	2,547	3,114	3,394	2,853	1,957	2,151	2,296
	0,1	11,993	8,957	5,000	3,601	5,010	8,443	11,221	10,903	4,376	4,807	10,292
	0,01	108,00	17,001	0,529	-8,001	6,484	5,107	106,13	95,315	20,854	10,629	87,021
M3	$\infty$	1,844	2,241	2,439	2,236	1,869	1,566	1,456	1,000	1,000	1,000	1,000
	5	1,891	2,297	2,500	2,295	1,927	1,625	1,517	1,157	1,001	1,039	1,078
	2	2,057	2,476	2,680	2,464	2,100	1,819	1,726	1,521	1,039	1,169	1,328
	1	2,440	2,853	3,011	2,757	2,417	2,215	2,164	2,054	1,254	1,433	1,825
	0,5	3,344	3,662	3,611	3,244	3,017	3,049	3,115	3,047	1,850	1,955	2,841
	0,1	11,244	9,052	5,959	4,660	5,551	8,565	11,064	11,025	4,278	4,340	10,862
	0,01	101,16	24,163	8,347	5,526	8,156	23,781	101,06	101,03	7,036	7,217	100,80

изгибающих моментов значительно влияет учет пьезо свойств материала (средние значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ), особенно в зонах наибольшей концентрации моментов. Поэтому при исследованиях концентрации напряжений (следовательно, и моментов) в элементах конструкций из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ, тем более при действии только моментов электрической и магнитной индукций в плите возникают значительные изгибающие моменты, что можно определять, только решая задачу ЭМУ. В случае изгиба индукционными моментами в зонах около перемычек возникают отрицательные изгибающие моменты (возникают зоны сильного сжатия в этих зонах). Они особенно велики (по модулю) в зонах вдоль мягких волокон (в зонах меньших  $s_{ii}$ ).

Таблица 4.

Значения моментов  $M_s/m_0$  около контура кругового отверстия и в некоторых точках сторон изгибающейся по горизонтальным сторонам квадратной плиты моментами  $m_0$  в зависимости от длины перемычек  $c/a_1$  и угла  $\theta$

Материал	$\frac{c}{a_1}$	$\theta$ , рад							Точки			
		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	A	B	C	D
M1	$\infty$	-0,529	-0,297	0,278	0,798	0,652	-0,479	-1,373	0,000	0,000	0,000	0,000
	1	-0,405	-0,105	0,608	1,210	1,004	-0,327	-1,363	0,332	-0,215	-0,164	0,356
	0,1	-0,220	0,717	1,836	1,905	0,982	-0,076	-1,099	0,956	-0,679	-0,049	0,276
M2	$\infty$	-7,583	0,613	15,549	19,906	3,516	-20,254	-31,046	0,000	0,000	0,000	0,000
	1	-9,499	-1,672	13,355	20,429	5,045	-20,432	-32,200	20,550	-9,625	0,542	15,174
	0,1	-2,190	5,087	12,964	14,202	8,182	-2,885	-10,307	9,647	-7,682	-0,158	7,703
M3	$\infty$	-17,810	5,493	24,511	22,330	1,671	-25,814	-38,655	0,000	0,000	0,000	0,000
	1	-15,821	13,057	34,107	29,318	6,277	-21,468	-33,973	21,104	-13,481	-2,047	7,728
	0,1	-8,236	76,116	87,594	42,879	12,886	-9,646	-29,277	28,223	-12,588	-4,226	7,928

Исследовано ЭМУС квадратной плиты с трещиной. Установлено, что в этом случае значительные изменения претерпевают КИМ для концов трещин. Эти величины особенно велики в случае краевых трещин. В таблице 5 для квадратной плиты со стороной  $2h$  и краевой трещиной длины  $l$  вдоль средней линии квадрата (рис. 5) при ее изгибе механическими моментами  $M_s = m_0$  по горизонтальным сторонам в зависимости от  $l/2h$  приведены значения моментов  $M_s/m_0$  (в данном случае  $M_y/m_0$ ) в точке А напротив вершины трещины и КИМ  $k_1^-$  для этой вершины.

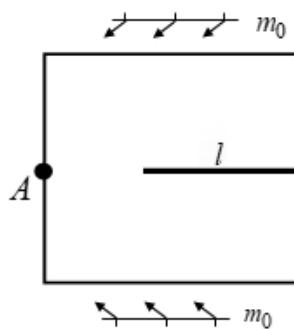


Рис. 5.

В таблице 6 для квадратной плиты с центральным круговым отверстием радиуса  $a_1$ , стороной длины  $4a_1$  и выходящей из контура отверстия трещиной длины  $l$ , при изгибе плиты распределенными моментами  $M_y = m_0$  по горизонтальным сторонам (рис. 6)

приведены значения моментов  $M_s/m_0$  по контуру отверстия в зависимости от отношения  $l/a_1$  и от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного

Электромагнитоупругое состояние тонкой многоугольной плиты с отверстиями и трещинами

Таблица 5.

Значения деформационных характеристик для квадратной плиты с краевой трещиной в зависимости от отношения  $l/2h$  длины трещины к длине стороны квадрата

Величина	$l/2h$							
	0,01	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$M_s/m_0$ в точке А	1,000	1,004	1,052	1,262	1,515	1,983	2,934	5,573
КИМ $k_1^-$	0,126	0,643	1,196	1,714	1,998	2,351	2,897	4,155

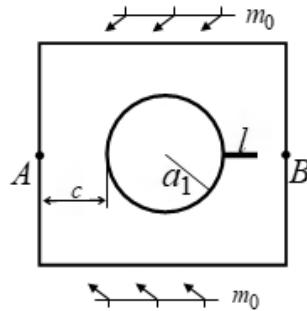


Рис. 6.

Таблица 6.

Значения моментов  $M_s/m_0$  около контура кругового и в некоторых точках плиты с круговым отверстием и краевой трещиной и КИМ для плиты из материала М2 в зависимости от отношения  $l/a_1$  длины трещины к радиусу отверстия

Величина	$\theta$ , рад. или точка	$l/a_1$						
		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	1
$M_s/m_0$	$\pi/180$		0,391	0,235	0,147	0,125	0,023	0,001
	$\pi/12$	2,528	2,324	1,588	1,124	0,911	0,998	-0,183
	$\pi/6$	1,838	1,790	1,542	1,262	1,085	1,392	-0,460
	$\pi/4$	0,983	0,965	0,873	0,789	0,665	0,709	-0,669
	$\pi/3$	0,415	0,406	0,369	0,336	0,305	-0,149	-0,580
	$5\pi/12$	0,208	0,203	0,192	0,270	0,266	-0,455	-0,245
	$\pi/2$	0,170	0,167	0,168	0,195	0,359	-0,204	0,170
	$7\pi/12$	0,208	0,208	0,221	0,275	0,472	0,351	0,662
	$3\pi/4$	0,415	0,418	0,442	0,471	0,636	0,834	1,418
	$2\pi/3$	0,983	0,990	1,027	1,018	1,108	1,060	2,654
	$5\pi/6$	1,838	1,848	1,900	1,950	1,968	1,633	4,165
	$11\pi/12$	2,528	2,537	2,600	2,690	2,797	2,603	5,297
	$\pi$	2,765	2,774	2,840	2,958	3,132	3,153	5,674
	т. А	1,649	1,680	1,690	1,716	1,794	1,983	3,183
	т. В	1,649	1,656	1,880	2,265	3,294	4,215	—
КИМ $k_1^+$		—	0,804	1,180	1,406	2,014	2,112	—

направления оси  $Ox$ . Приведены также значения моментов в точках на сторонах и КИМ для вершины трещины против часовой стрелки, в точках  $A$  и  $B$  на сторонах плиты вдоль оси  $Ox$  и КИМ для вершины трещины. На рисунке 7 изображены графики распределения  $M_s/m_0$  по контуру отверстия.

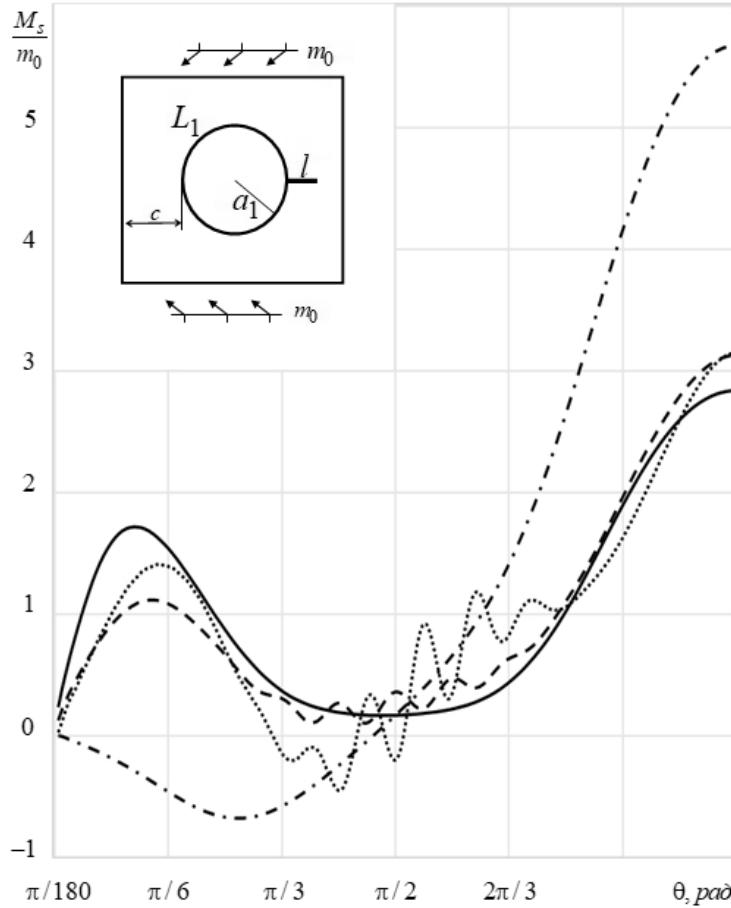


Рис. 7. Графики распределения моментов  $M_s/m_0$  вблизи контура кругового отверстия в квадратной плите из М2 для некоторых значений длины трещины. Сплошная линия –  $l/a_1 = 0,3$ , штриховая –  $l/a_1 = 0,7$ , пунктирная –  $l/a_1 = 0,8$ , штрихпунктирная –  $l/a_1 = 1$ .

Из таблицы 6 и рисунка 7 видно, что с ростом длины краевой трещины из контура отверстия значения моментов около отверстия в небольшой окрестности перемычки противоположной трещине растут, а в остальных точках они убывают. Особенно большое уменьшение моментов наблюдается вблизи точки выхода трещины на контур отверстия, причем для весьма малых расстояний между трещиной и стороной квадрата наблюдается нестабильное изменение этих моментов около точки выхода трещины на контур отверстия. Для предельного значения длины трещины (для случая щели между отверстием и стороной квадрата) около отверстия в противоположной трещине перемычке возникает весьма высокая

## Электромагнитоупругое состояние тонкой многоугольной плиты с отверстиями и трещинами

концентрация изгибающих моментов, с увеличением длины трещины растет и значение КИМ для ее конца.

**Выводы.** Таким образом, с использованием комплексных потенциалов в статье решена задача электромагнитоупругости для многосвязной пьезопластинки с произвольным количеством и взаиморасположением отверстий. Описаны результаты численных исследований для пластинки из различных материалов с треугольным или квадратным отверстием. Изучено влияние геометрических характеристик отверстий и свойств материалов на значения возникающих в рассматриваемых пьезопластинах напряжений.

1. *Берлинкур Д.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностр. лит., 1949. – 717 с.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов др. – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
4. *Пятаков А.П.* Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. *Rahmoune M.* New thin piezoelectric plate models / M. Rahmoune, A. Benjeddou, R. Ohayon // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1998. – Vol. 9. – P. 1017–1029.
6. *Srinivas S.* The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142.
7. *Vel S.S.* Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators / S.S. Vel, R.C. Batra // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – P. 240–251. doi: 10.1088/0964-1726/10/2/309
8. *Бочкарев С.А.* Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала / С.А. Бочкарев, С.В. Лекомцев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 35–48. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.04
9. *Шляхин Д.А.* Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра / Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. – С. 181–190. doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.16
10. *Eringen A.C.* Theory of electromagnetic elastic plates / A.C. Eringen // International journal of engineering science. – 1989. – Vol. 27, № 4. – P. 363–375.
11. *Librescu L.* Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications / L. Librescu, D. Hasanyan, D. Ambur // International journal of nonlinear mechanics. – 2004. – Vol. 39, № 5. – P. 723–739.
12. *Gales C.* On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elasticity / C. Gales, N. Baroiu // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol. 94, № 1–2. – P. 55–71.
13. *Калоеров С.А.* Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, А.В. Петренко // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 208–221.
14. *Калоеров С.А.* Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго–Восток, 2011.– 232 с.
15. *Калоеров С.А.* Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–40.
16. *Калоеров С.А.* Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты /

- С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Прикладная математика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 4.– С. 143–155.
17. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многовязных анизотропных пластин / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3. – С. 103–116.
  18. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
  19. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
  20. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
  21. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1322–1342.
  22. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1343–1362.
  23. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
  24. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика и техническая физика.– 2017. – Т. 58, № 2.– С. 141–151.
  25. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
  26. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
  27. Hou P.-F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.-F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mat. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

**S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov, A.B. Mironenko**

**Investigation of the electro-magneto-elastic state of a thin polygonal plate with holes and cracks.**

Using the complex potentials of the theory of bending of thin electro-magneto-elastic plates, the solution of the problem of bending a polygonal plate with arbitrary holes and cracks is given. At the same time, with the help of conformal maps, decompositions of holomorphic functions into Laurent series or by Faber polynomials and satisfaction of boundary conditions by the generalized least squares method, the problem is reduced to an overridden system of linear algebraic equations solved by the method of singular value decompositions. The results of numerical studies for a square plate with a hole, crack, with a hole and an edge crack are described. The regularities of the influence of the physical and mechanical properties of the plate material and geometric characteristics of the hole and crack on the values of bending moments and intensity coefficients of moments for crack ends are investigated.

**Keywords:** piezo plate with holes, cracks and cuts, complex potentials, generalized least squares method, bending moments.

Получено 12.01.2023

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-21-31

EDN:CAUKQV



©2023. Е.С. Глушанков<sup>1</sup>

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА ПРИ СКАЧКАХ ТЕМПЕРАТУРЫ НА КОНТУРАХ

В данной работе рассмотрена задача о действии температуры, имеющей конечное число скачков, на контурах бесконечной многосвязной пластинки из пьезоматериала. Численными исследованиями установлены закономерности влияния такого распределения температуры на возникающее термоэлектромагнитоупругое состояние с учетом физически реальных условий.

**Ключевые слова:** многосвязная пластинка, термоэлектромагнитоупругость, скачок температуры на контуре, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**Введение.** В различных типах научного оборудования, в приборах и технических устройствах в качестве конструкционных элементов находят достаточно широкое применение тонкие пластинки из пьезоматериалов [1]. Эти пластинки могут подвергаться действию внешних температурных, силовых и электромагнитных полей, в результате чего в них могут возникать значительные температурные напряжения, которые следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций [2–5]. К настоящему времени решены различные классы задач термоэлектромагнитоупругости для тел из пьезоматериалов, в т.ч. плоские задачи о действии разности температур на контурах пластинок [6], о действии линейного (однородного) потока тепла [7, 8]. А в статье [9] решена задача термоупругости для многосвязной анизотропной пластинки, на контурах которой имеют место скачки температуры.

В данной работе решена задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязной пластинки из пьезоматериала, когда на контурах пластинки температура имеет конечное число точек разрыва 1-го рода (имеют место резкие скачки температуры). При решении задачи разрывная граничная функция аппроксимируется близкой к ней непрерывной функцией. Впрочем, в реальных условиях

<sup>1</sup>Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky

температура не может быть разрывной, т.е. на контуре она и будет непрерывной функцией, а изменение температуры между двумя «предельными» значениями скачка будет происходить в достаточно малой области контура. Учитывая это, решение задачи строится с использованием известного подхода с применением аппарата конформных отображений, комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости, метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) бесконечных пластинок с одним и двумя круговыми отверстиями с установлением закономерностей влияния распределения температуры на контурах, геометрических характеристик пластиинки, свойств ее материала на значения основных характеристик ТЭМУС в пластиинке.

**1. Постановка и решение задачи.** Рассмотрим пластиинку из пьезоматериала, занимающую бесконечную многосвязную область  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с центрами  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуосами  $a_l, b_l$ , углами поворота  $\varphi_l$  (рис. 1). Контуры  $L_l$  могут располагаться произвольно относительно друг друга, в т.ч. и пересекаться, образуя криволинейные контуры. На контурах пластиинки заданы разрывные значения температуры  $T_l(\tau)$ . Контуры не подкреплены либо жестко подкреплены, потоки индукций электромагнитного поля через контуры равны нулю. На бесконечности напряжения и индукции электромагнитного поля равны нулю.

Заданные функции  $T_l(\tau) = T_l(x, y)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) являются кусочно-непрерывными на контурах  $L_l$  и имеют конечное число точек разрыва 1-го рода (скакков)  $M_{lj}^0(x_{lj}^0, y_{lj}^0)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}, j = \overline{1, \mathcal{J}_l}$ ).

Если несвязанную задачу определения ТЭМУС пластиинки решать с использованием комплексных потенциалов, то она сводится к определению сперва комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$ , а затем комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) из граничных условий соответствующих задач. После определения этих функций значения основных характеристик ТЭМУС (температура  $T$ , плотности потока тепла  $q_x, q_y$ , напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , индукции электромагнитного поля  $D_x, D_y, B_x, B_y$ , напряженности электромагнитного поля  $E_x, E_y, H_x, H_y$ , перемещения  $u, v$ , потенциалы электромагнитного поля  $\varphi, \psi$ ) в точках пластиинки можно определять по формулам [6, 7]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i \varkappa_T (\mu_5, -1) F'_5(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (3)$$

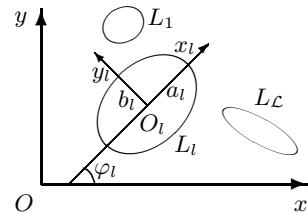


Рис. 1

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости при скачках температуры на контурах

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь

$$\varkappa_T = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2};$$

$\mu_5$  и  $\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — соответственно корни характеристических уравнений теплопроводности

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

и электромагнитоупругости [6, 7]

$$l_8(\mu) = 0, \quad (8)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{l_8(\mu_5)};$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 l_\chi(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \\
 l_\omega(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix}; \\
 l_{2\alpha}(\mu_5) &= -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2, \\
 l_{1t}(\mu_5) &= t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2; \\
 p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5}, \\
 q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5}, \\
 r_k^0 &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5}, \\
 h_k^0 &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5}; \\
 \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5;
 \end{aligned}$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластинки;  $s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемостей материала;  $\alpha_i$  — коэффициенты теплового расширения;  $t_i$  и  $m_i$  — пироэлектрические и пиромагнитные модули материала;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Функции  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) определены в многосвязных областях  $S_5$ ,  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями [6, 7]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

В общем случае эти функции имеют вид [6, 7]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь  $c_5$  — вещественная постоянная, определяемая из граничных условий;  $D_{5l} = -q_l/4\pi\kappa_T$  — вещественные постоянные, определяемые из граничных условий;  $q_l$  — суммарный тепловой поток через контур  $L_l$  в область  $S$ ;  $w_{5l}(z_5) =$

$\ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $c_{5ln}$  — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластиинки;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;  $\zeta_{5l}$  — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k),$$

$\Gamma_k, A_{kl}, B_{kl}$  — постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$ ;  $A_{5l} = r_5 D_{5l}$ ;  $B_{5l} = r_5 (c_{5l1} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$ ;  $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $\varphi_{kl}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ ;  $\zeta_{kl}$  — комплексные переменные, определяемые из соответствующих конформных отображений.

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [6, 7]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат  $Oxy$  —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

Здесь  $\theta$  — угловой параметр ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

Тогда каждой из точек скачка температуры  $M_{lj}^0 (x_{lj}^0, y_{lj}^0)$  соответствует некоторое значение этого параметра  $\theta_{lj}^0$  такое, что

$$\begin{aligned} x_{lj}^0 &= x_{0l} + a_l \cos \varphi_l \cos \theta_{lj}^0 - b_l \sin \varphi_l \sin \theta_{lj}^0, \\ y_{lj}^0 &= y_{0l} + a_l \sin \varphi_l \cos \theta_{lj}^0 + b_l \cos \varphi_l \sin \theta_{lj}^0. \end{aligned}$$

Соответственно, каждая кусочно-непрерывная функция  $T_l(x, y) = T_l(\theta)$  на контуре  $L_l$  представима в виде совокупности функций, определенных и непрерывных на каждой дуге контура  $L_l$ , ограниченной точками скачка  $M_{lj}^0$ :

$$T_l(x, y) = T_l(\theta) = \{T_{lj}(\theta) \mid j = \overline{1, \mathcal{J}_l}, \theta \in (\theta_{lj}^0, \theta_{l,j+1}^0)\}.$$

Переменные  $\zeta_{5l}$ ,  $\zeta_{kl}$  определяются из конформных отображений [6, 7]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (13)$$

внешностей единичных кругов  $|\zeta_{5l}| \geq 1$ ,  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{5l}$ ,  $L_{kl}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (9), (10). Здесь

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция  $F_5(z_5)$  должна удовлетворять граничному условию [6, 7]

$$2 \operatorname{Re} F_5(\tau_5) = T_l(\tau), \quad (14)$$

а функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — граничным условиям [6, 7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \Phi_k(\tau_k) = (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)), \quad (15)$$

где для неподкрепленных контуров  $L_l$

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (u_l, v_l, c_{l3}, c_{l4}).$$

Здесь  $c_{li}$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — произвольные постоянные;  $u_l = u_l(\tau)$ ,  $v_l = v_l(\tau)$  — заданные на контуре значения перемещений.

Неизвестные постоянные  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$  определяются из граничных условий (14) и (15) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах  $L_i$  выбирается система точек  $M_{im}$  ( $m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$ ), в которых удовлетворяются граничные условия соответствующих задач.

В задаче теплопроводности, при подстановке функции (11) в граничное условие (14), для определения неизвестных постоянных  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений [6, 7]

$$\begin{aligned} 2c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} w_{5l}(\tau_{5im}) D_{5l} + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{5ln}(\tau_{5im}) c_{5ln} &= T_i(\tau_{im}) \\ (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\tau_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$ ,  $\tau_{im} = \tau_{im}(x_{im}, y_{im})$ . Систему (16) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [10, 11]. После решения этой системы постоянные  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$ , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции можно в любой точке найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1)–(2).

В задаче термоэлектромагнитоупругости граничным условиям (15) будем удовлетворить в дифференциальной форме [6, 7]. Тогда при подстановке функций (11) и (12) в продифференцированные условия (15) для определения неизвестных постоянных  $a_{klm}$  получается следующая система линейных алгебраических уравнений [6, 7]:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{ki\alpha} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{klm}(\tau_{kim}) a_{klm} = \\ & -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{ki\alpha} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - 2 \operatorname{Re} d_{5i\alpha} \delta_{5,s}(\tau_{5im}) r_5 F_5(\tau_{5im}) + \\ & + \frac{df_{i\alpha}}{ds}(\tau_{im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, \alpha = \overline{1, 4}) \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$ ,  $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$ . Систему (17) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [10, 11]. После решения этой системы постоянные  $a_{klm}$ , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12) будут известны, и по ним можно находить значения основных характеристик ТЭМУС в точках пластинки по формулам (3)–(6) [6, 7].

**2. Численные исследования.** При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (11) и (12) и точек на контурах  $L_i$ , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (16) и (17), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических и упругих характеристик пластинок, необходимо было в указанных рядах оставлять от 120 до 200 членов, на каждом из контуров брать от 1500 до 2500 точек.

Были проведены численные исследования для пластинки из композита на основе титаната бария-феррита (II) кобальта  $BaTiO_3\text{-}CoFe_2O_4$  [12]. Физико-механические постоянные этого материала:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 7,165 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{22} = 6,797 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{66} = 19,912 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \\ s_{12} &= -2,337 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_{16} = 2,028 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\ g_{21} &= -0,496 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad g_{22} = 1,157 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\ p_{16} &= 1,850 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{21} = 0,576 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{22} = 1,186 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \\ \beta_{11} &= 0,156 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \beta_{22} = 0,137 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \\ \nu_{11} &= -0,190 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \quad \nu_{22} = -0,185 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{11} &= 0,336 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \quad \chi_{22} = 0,119 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \\ \alpha_1 &= 8,530 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 1,990 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \\ t_2 &= 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1}, \quad m_2 = 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \\ k_{11} &= 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_{22} = 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}.\end{aligned}$$

В таблицах 1 и 2 для пластиинки из материала М1 с одним круговым отверстием радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a$ ) (рис. 2, a), на контуре которого задана температура  $T_1(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \beta \\ 0, & \beta < \theta < 2\pi \end{cases}$ , приведены отнесенные к величине  $10^6 \text{ МПа}$  значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых точках контура отверстия с центральным углом  $\theta$  на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения угла  $\beta$ . Представлены данные для случаев задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала, и задачи

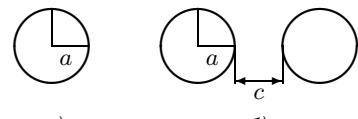


Рис. 2

Таблица 1.

Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура отверстия (задача ТЭМУ)

$\theta$ , рад.	Значение $\beta$					
	$\pi$	$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$
0	(-0,395)	(-0,153)	( 0,039)	( 0,144)	( 0,148)	( 0,067)
	0,000	0,242	0,432	0,534	0,538	0,453
	( 0,395)	( 0,635)	( 0,825)	( 0,927)	( 0,925)	( 0,835)
$\pi/6$	0,607	0,836	0,979	1,000	0,863	( 0,287) -0,387 (-0,398)
$\pi/3$	0,368	0,512	0,513	0,279	(-1,064) -1,699 (-0,942)	0,029
$\pi/2$	-0,536	-0,691	-0,874	(-1,313) -0,161 ( 0,746)	0,336	0,155
$2\pi/3$	0,368	0,340	( 1,363) 2,080 ( 1,368)	0,086	-0,147	-0,143
$5\pi/6$	0,607	( 1,054) 0,917 ( 0,290)	-0,256	-0,393	-0,371	-0,227
$\pi$	( 0,395)					
	0,000	-0,453	-0,539	-0,534	-0,431	-0,241
	(-0,395)					
$7\pi/6$	-0,607	-0,658	-0,684	-0,630	-0,481	-0,256
$4\pi/3$	-0,368	-0,478	-0,548	-0,527	-0,405	-0,209
$3\pi/2$	0,536	0,419	0,336	0,268	0,199	0,115
$5\pi/3$	-0,368	-0,158	0,038	0,160	0,180	0,109
$11\pi/6$	-0,607	-0,351	-0,125	0,023	0,077	0,050

Таблица 2.

Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура отверстия (задача ТУ)

$\theta$ , рад.	Значение $\beta$					
	$\pi$	$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$
0	(-0,138)	(-0,203)	(-0,247)	(-0,252)	(-0,212)	(-0,131)
	0,000	-0,064	-0,106	-0,109	-0,067	0,014
	( 0,138)	( 0,074)	( 0,034)	( 0,034)	( 0,077)	( 0,158)
$\pi/6$	-0,169	-0,215	-0,214	-0,168	-0,105	(-0,188)
$\pi/3$	-0,542	-0,568	-0,533	-0,464	(-0,558)	
$\pi/2$	-0,726	-0,705	-0,612	(-0,512)	-0,115	-0,021
$2\pi/3$	-0,542	-0,437	(-0,133)	-0,078	-0,009	0,027
$5\pi/6$	-0,169	( 0,155)	-0,064	-0,001	0,045	0,047
$\pi$	( 0,138)	0,000	-0,014	0,067	0,109	0,106
	(-0,138)					
$7\pi/6$	0,169	0,268	0,294	0,258	0,178	0,082
$4\pi/3$	0,542	0,558	0,495	0,373	0,225	0,090
$3\pi/2$	0,726	0,666	0,535	0,363	0,191	0,060
$5\pi/3$	0,542	0,452	0,317	0,169	0,047	-0,016
$11\pi/6$	0,169	0,086	-0,010	-0,089	-0,125	-0,099

термоупругости (ТУ), когда не учитываются его электромагнитные свойства. Для точек, являющихся точками скачка температуры, также приведены значения одноименных напряжений в точках, отстоящих от данной на угол  $\pi/180$  рад. против часовой стрелки и по часовой стрелке; эти значения приводятся соответственно выше или ниже значения напряжений в данной точке скачка и взяты в скобки.

В таблице 3 для пластинки из материала М2 с двумя круговыми отверстиями радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$ ) (рис. 2, б), на контурах которых задана температура  $T_1(\theta) = T_2(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$ , приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых точках контура левого отверстия в зависимости от значения отношения  $c/a$  расстояния  $c$  между контурами отверстий к их радиусу.

Таблица 3.

Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контура левого отверстия

Тип задачи	$\theta$ , рад.	Значение $c/a$					
		0,01	0,1	1	10	100	$\infty$
ТЭМУ	$\pi/180$	0,066	0,431	0,406	0,397	0,395	0,395
	$\pi/6$	0,022	0,035	0,348	0,628	0,612	0,607
	$\pi/3$	-0,391	-0,409	-0,429	0,244	0,353	0,368
	$\pi/2$	-0,673	-0,678	-0,717	-0,573	-0,535	-0,536
	$2\pi/3$	0,510	0,513	0,519	0,427	0,373	0,368
	$5\pi/6$	0,646	0,647	0,644	0,602	0,609	0,607
	$179\pi/180$	0,396	0,396	0,394	0,395	0,395	
ТУ	$\pi/180$	0,016	0,132	0,150	0,143	0,139	0,138
	$\pi/6$	0,022	0,030	0,097	-0,069	-0,157	-0,169
	$\pi/3$	-0,297	-0,311	-0,387	-0,464	-0,533	-0,542
	$\pi/2$	-0,753	-0,759	-0,805	-0,743	-0,726	-0,726
	$2\pi/3$	-0,669	-0,674	-0,713	-0,627	-0,553	-0,542
	$5\pi/6$	-0,263	-0,267	-0,294	-0,241	-0,178	-0,169
	$179\pi/180$	0,135	0,135	0,134	0,135	0,138	0,138

**Выводы.** Из данных таблиц и других результатов следует, что на значения основных характеристик ТЭМУС в пластинке влияют расстояния между точками скачков температуры, а также особенности распределения температуры. При увеличении расстояния между точками скачков концентрация напряжений в пластинке возрастает. Кроме того, в точках скачков температуры на контурах наблюдается резкие изменения значений напряжений. При этом, чем выше величина скачка температуры, тем выше значения напряжений и тем резче они изменяются. На расстоянии около 20 радиусов от отверстий в пластинке устанавливается температурное состояние, близкое к однородному, и напряжения здесь очень малы. В случае пластинки с несколькими отверстиями, если расстояние между контурами отверстий превосходит 20 – 30 радиусов, то влияние одного отверстия на ТЭМУС около другого отверстия является незначительным и им можно пренебречь. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала приводит к существенному искажению результатов, поэтому при расчётах следует учитывать все свойства материала.

1. *Берлинкур Д.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. *Желудев И.С.* Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
3. *Можсен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
4. *Гринченко В. Т.* Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Нauк. думка, 1989. – 280 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
5. *Партон В.З.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.

6. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
7. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
8. Калоеров С.А. Определение термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных куточно-однородных пьезопластин / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 88–101.
9. Глушанков Е.С. Приближенное решение задачи термоупругости для многосвязной анизотропной пластиинки при скачках температуры на контурах / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 5–13. – doi:10.24412/0136-4545-2022-3-5-13. – EDN:BEKNUR.
10. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

**E.S. Glushankov**

**The approximate solution of the thermo-electro-magneto-elasticity problem for multiply connected piezoelectric plate in case of temperature jump discontinuities on the contours.**

A problem of the temperature with finite number of discontinuities acting on the contours of infinite multiply connected piezoelectric plate is considered in this article. The regularities of the influence of considered thermal loading on the originated thermo-electro-magneto-elastic state with this thermal are obtained with the numerical studies.

**Keywords:** *multiply connected plate, thermo-electro-magneto-elasticity, temperature jump discontinuity on the contour, thermal stresses, complex potentials.*

Получено 16.01.2023

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-32-39

EDN:ENGOVX



©2023. А.А. Глухов<sup>1</sup>, В.И. Сторожев<sup>2</sup>, В.А. Шалдырван<sup>3</sup>

## ВОЛНЫ ЛЯВА В СТРУКТУРЕ «ОДНОРОДНЫЙ ИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ДВОЙНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ»

Получено решение задачи о распространении обобщенных локализованных сдвиговых волн Лява в волноводной структуре из однородного изотропного слоя и идеально контактирующего с ним поперечно-неоднородного функционально-градиентного трансверсально-изотропного полупространства, изменение физико-механических характеристик которого по глубине задается двойной экспоненциальной функцией. Применяемый способ описания непрерывной неоднородности характеризует локализацию области интенсивных изменений физико-механических параметров материала полупространства в приграничной области и асимптотическое слаживание закона изменения свойств в глубине массива. Сформулировано основное дисперсионное соотношение и проведены численные исследования некоторых эффектов влияния показателей неоднородности материала полупространства на характеристики рассматриваемых локализованных волн, в частности на фазовые скорости волн из низшей моды.

**Ключевые слова:** локализованные волны Лява, слой на неоднородном полупространстве, двойной экспоненциальный закон неоднородности, основное дисперсионное уравнение, влияние параметров неоднородности, скорости волн низшей моды.

**Введение и цели исследования.** Обобщенные локализованные сдвигово-

<sup>1</sup> Глухов Антон Александрович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Postgraduate, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup> Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., зав. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup> Шалдырван Валерий Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: shaldyrvan.v.a@mail.ru.

Shaldyrvan Valery Anatolievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

вые волны Лява в различных модификациях волноводных структур «упругий слой на упругом полупространстве», несмотря на достаточно длительный период весьма разностороннего анализа в работах отечественных и зарубежных авторов [1, 2], по многим аспектам остаются предметом дальнейших актуальных с теоретической и прикладной точек зрения исследований. В частности, это связано с разносторонними применениями волновых движений данного типа в датчиках, измерительных приборах и акустоэлектронных устройствах [3–5], в сейсмологических и геоакустических исследованиях [6, 7], и в некоторых других научно-технических отраслях [8–10]. Для указанных приложений в самой существенной мере представляют интерес неклассические варианты постановки задач о спектре и свойствах обобщенных локализованных волн Лява, связанные с вариациями свойств материалов волноводной структуры, типами граничных условий на внешней поверхности и в плоскости контакта слоя с полупространством [11–13].

В данном контексте целью настоящей работы является получение и анализ аналитической формы дисперсионного соотношения, описывающего закономерности распространения обобщенных локализованных волн Лява в ранее не рассматривавшейся волноводной структуре, образуемой идеально контактирующими компонентами в виде однородного изотропного слоя и функционально-градиентного трансверсально-изотропного полупространства с неоднородностью по глубине, описываемой двойной экспоненциальной функцией. Выбор такого закона непрерывного изменения физико-механических свойств полупространства отвечает свойству локализации области интенсивных изменений физико-механических параметров материала в его приграничной зоне и асимптотическому сглаживанию закона изменения свойств в глубине массива.

**1. Формулировка соотношений математической модели и получение основного дисперсионного уравнения.** Рассматривается задача о распространении локализованных SH-волн в отнесенной к нормированным пространственным прямоугольным координатам волноводной структуре в виде однородного изотропного упругого слоя толщиной  $H$ , лежащего на неоднородном по глубине функционально-градиентном трансверсально-изотропном полупространстве (рис. 1). Величина  $H$  служит в последующих соотношениях рассматриваемой модели нормирующим параметром для всех характеристик с линейной размерностью расстояния. Ось изотропии и направление непрерывной неоднородности полупространства ортогональны граничной плоскости. В качестве направления распространения рассматриваемых волн без ограничения общности выбирается координатное направление  $Ox_1$ .

При описании соотношений исследуемой математической модели колебательного волнового деформирования с циклической частотой  $\omega$  комплексные функции волновых перемещений

$$u_j(x_1, x_3, t) = u_{j0}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad (1)$$

и напряжений

$$\sigma_{ij}(x_1, x_3, t) = \sigma_{ij0}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (2)$$

а также физико-механические параметры материалов и амплитудные характеристики  $u_{j0}(x_3)$ ,  $\sigma_{ij0}(x_3)$  для соответствующих полей в слое и полупространстве, соответственно отмечаются далее верхними индексами (с) и (п).

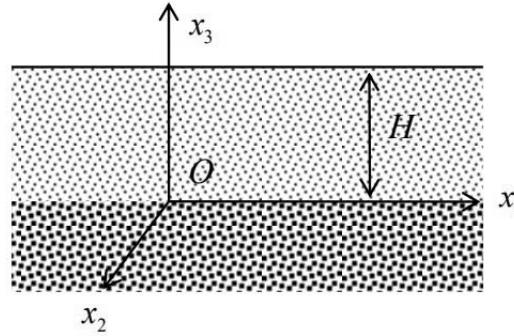


Рис. 1. Структура сечения рассматриваемого волновода

Уравнения волнового деформирования и определяющие соотношения для компонентов волновода в рассматриваемой модели имеют вид

$$\partial_1 \sigma_{21}^{(c)} + \partial_3 \sigma_{23}^{(c)} - \rho^{(c)} \ddot{u}_2^{(c)} = 0, \quad \sigma_{21}^{(c)} = \mu \partial_1 u_2^{(c)}, \quad \sigma_{23}^{(c)} = \mu \partial_3 u_2^{(c)}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{21}^{(n)} + \partial_2 \sigma_{23}^{(n)} - \rho^{(n)}(x_3) \ddot{u}_2^{(n)} &= 0, \\ \sigma_{21}^{(n)} &= c_{66n}(x_3) \partial_1 u_2^{(n)}, \quad \sigma_{23}^{(n)} = c_{44n}(x_3) \partial_3 u_2^{(n)}; \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} c_{66n}(x_3) &= c_{66}^{(n)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad c_{44n}(x_3) = c_{44}^{(n)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \\ \rho^{(n)}(x_3) &= \rho_0^{(n)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)), \quad \partial_j = \partial / \partial x_j, \end{aligned} \quad (5)$$

$\mu$ ,  $\rho^{(c)}$  – параметр Ламе и плотность материала слоя;  $c_{66}^{(n)}$ ,  $c_{44}^{(n)}$ ,  $\rho_0^{(n)}$  – параметры функционально-градиентного материала полупространства;  $\lambda$ ,  $\beta$  – охарактеризованные в работе [14] действительнозначные параметры неоднородности. Краевые условия на граничных поверхностях волновода имеют вид

$$\sigma_{230}^{(c)}(H) = 0, \quad u_{20}^{(c)}(0) = u_{20}^{(n)}(0), \quad \sigma_{230}^{(c)}(0) = \sigma_{230}^{(n)}(0). \quad (6)$$

При подстановке представлений (1), (2), (5) в (3), (4) и краевые условия (6) система соотношений рассматриваемой задачи трансформируется в однородную краевую задачу для нормированных амплитудных составляющих  $u_{20}^{(c)}(x_3)$ ,

$u_{20}^{(n)}(x_3)$ , включающую уравнения

$$u_{20}^{(c)''}(x_3) + \zeta^2 u_{20}^{(c)}(x_3) = 0, \quad (7)$$

$$u_{20}^{(n)''}(x_3) - \alpha^2 u_{20}^{(n)}(x_3) = \gamma e^{-\beta x_3} u_{20}^{(n)'}(x_3), \quad (8)$$

где

$$\zeta^2 = (\rho^{(c)} \omega^2 - \mu k^2) / \mu, \quad \alpha^2 = (c_{66}^{(n)} k^2 - \rho_0^{(n)} \omega^2) / c_{44}^{(n)}, \quad \gamma = \lambda \beta, \quad (9)$$

а также следствия из условий (6)

$$u_{20}^{(c)'}(H) = 0, \quad u_{20}^{(c)}(0) = u_{20}^{(n)}(0), \quad \mu u_{20}^{(c)'}(0) = c_{44}^{(n)}(0) u_{20}^{(n)'}(0). \quad (10)$$

Интегрирование и выбор формы решения уравнения (7) представлены в исследованиях по проблеме распространения волн Лява в классической постановке [1, 2], согласно которым

$$\begin{aligned} u_{20}^{(c)}(x_3) &= A_1 \cos(k\vartheta x_3) + A_2 \sin(k\vartheta x_3), \\ \sigma_{230}^{(c)} &= -A_1 \mu k \vartheta \sin(k\vartheta x_3) + A_2 \mu k \vartheta \cos(k\vartheta x_3), \quad \vartheta^2 = (c_L/c)^2 - 1, \end{aligned} \quad (11)$$

$A_1, A_2$  – произвольные постоянные;  $k, c_L$  – соответственно искомые параметры волнового числа и фазовой скорости обобщенных локализованных волн Лява;  $c$  – параметр фазовой скорости объемных волн сдвига в изотропном материале слоя.

Согласно описанной в работе [14] процедуре интегрирования уравнения вида (8), его решение, представляющее волновое поле в функционально-градиентном полупространстве при двойном экспоненциальном законе поперечной неоднородности, может быть записано в аналитической форме

$$u_{20}^{(n)}(x_3) = A_3 f_-(x_3), \quad (12)$$

$$\sigma_{230}^{(n)}(x_3) = A_3 c_{44}^{(n)} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) f'_-(x_3), \quad (13)$$

где

$$f_-(x_3) = e^{-\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[ \prod_{p=1}^n (-\alpha - (p-1)\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}, \quad (14)$$

$$f'_-(x_3) = -\alpha e^{-\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha \gamma^n \left[ \prod_{p=1}^n (-\alpha - p\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}.$$

Подстановка выражений (11)–(13) в краевые условия (10) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов  $A_1, A_2, A_3$

$$\begin{aligned} -A_1 c_{44}^{(c)} k \vartheta \sin(k\vartheta H) + A_2 c_{44}^{(c)} k \vartheta \cos(k\vartheta H) &= 0, \\ A_1 - A_3 f_-(0) &= 0, \\ A_2 c_{44}^{(c)} k \vartheta - A_3 c_{44}^{(n)} e^{\lambda} f'_-(0) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Равенство нулю определителя системы (15) и является формулируемым в аналитической форме дисперсионным уравнением для исследуемых обобщенных локализованных волн Лява

$$F(k, \omega) = \begin{vmatrix} -c_{44}^{(c)} k \vartheta \sin(k \vartheta H) & c_{44}^{(c)} k \vartheta \cos(k \vartheta H) & 0 \\ 1 & 0 & -f_{-}(0) \\ 0 & c_{44}^{(c)} k \vartheta & c_{44}^{(n)} e^{\lambda} f'_{-}(0) \end{vmatrix} = \quad (16)$$

$$= -(c_{44}^{(c)} k \beta)^2 \sin(k \beta H) f_{-}(0) - c_{44}^{(c)} c_{44}^{(n)} e^{\lambda} k \beta \cos(k \beta H) e^{\lambda} f'_{-}(0) = 0.$$

После определения корней  $k(\omega)$  уравнения (16) формы соответствующих волновых движений в компонентах волновода с точностью до нормирующего масштабного множителя  $A$  рассчитываются по формулам

$$u_{20}^{(c)}(x_3) = A(\cos(k \vartheta x_3) + (c_{44}^{(c)} k \vartheta \sin(k \vartheta H) / c_{44}^{(c)} k \vartheta \cos(k \vartheta H) \sin(k \vartheta x_3))), \quad (17)$$

$$u_{20}^{(n)}(x_3) = A(1/f_{-}(0)) f_{-}(x_3).$$

Распределения амплитуд напряжений в обобщенных волнах Лява по толщине компонентов волновода в свою очередь описываются соотношениями

$$\sigma_{230}^{(c)} = -A(\mu k \vartheta \sin(k \vartheta x_3) + (c_{44}^{(c)} k \vartheta \sin(k \vartheta H) / c_{44}^{(c)} k \vartheta \cos(k \vartheta H) \mu k \vartheta \cos(k \vartheta x_3))), \quad (18)$$

$$\sigma_{230}^{(n)}(x_3) = A_3 c_{44}^{(n)} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) f'_{-}(x_3),$$

**2. Результаты вычислительных экспериментов.** Численная реализация представленной методики поиска корней дисперсионного уравнения (16) с варьированием параметров циклической частоты  $\omega$  и неоднородности  $\lambda, \beta$  дана применительно к случаю выбора параметров  $H, \mu, \rho^{(c)}, c_{66}^{(n)} = c_{44}^{(n)}, \rho_0^{(n)}$ , представленного в работе [7]:

$$H = 20 \text{ м}, \quad \mu = 14 \text{ МПа}, \quad \rho^{(c)} = 1650 \text{ кг/м}^3, \quad (19)$$

$$c_{66}^{(n)} = c_{44}^{(n)} = 38 \text{ МПа}, \quad \rho_0^{(n)} = 1800 \text{ кг/м}^3,$$

и, соответственно, при  $c = 146.18 \text{ м/с}$ .

На рисунке 2 в качестве примера приведены результаты расчетов действительных и мнимых ветвей диаграммы дисперсионного спектра волн Лява для волновода рассматриваемого типа с характеристиками (19) и параметрами неоднородности  $\lambda = 0.1, \beta = 0.1$ , а в таблице 1 даны результаты расчетов фазовых скоростей  $c_L$ , м/с бегущих локализованных волн из низшей моды спектра при варьировании обоих параметров неоднородности.

Анализируя представленные в таблице результаты расчетов можно сделать вывод, что для более высоких частот влияние параметров неоднородности на скорость волн Лява из низшей моды спектра становится все менее выраженным. Относительно существенные изменения скорости волн низшей моды для рассматриваемого волновода можно наблюдать для диапазона частот от 15 до

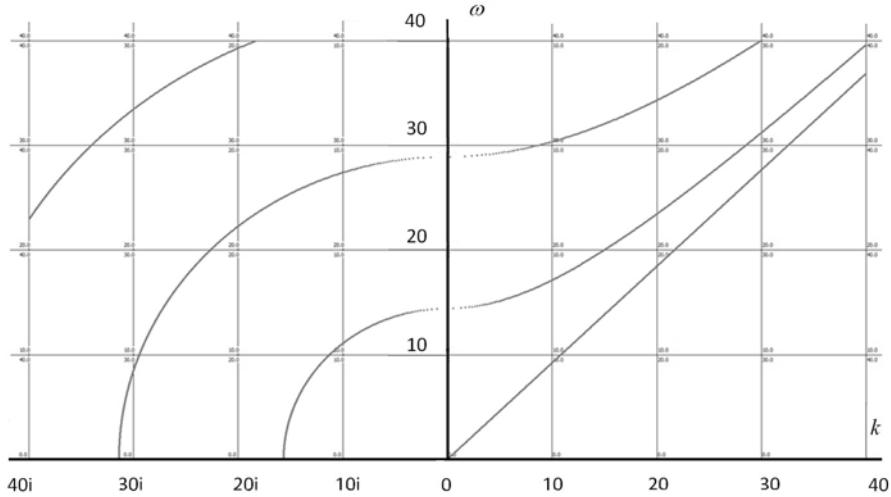


Рис. 2. Фрагмент диаграммы дисперсионного спектра исследуемых локализованных волн в волноводе с параметрами (19) и коэффициентами неоднородности  $\lambda = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$

Таблица 1.  
Значения скоростей волн Лява из низшей моды дисперсионного спектра, м/с

$\lambda$	$\beta$	$\omega$ , рад/с									
		15	16.5	18	19.5	21	22.5	24	25.5	27	28.5
0	0	349.3	191.6	154.8	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
0.1	0.5	337.27	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	337.28	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.5	337.28	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	2.0	337.29	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
1.0	0.5	279.86	179.4	148.8	137.3	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	278.59	179.0	148.3	137.1	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.5	276.99	178.5	148.1	136.6	126.9	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	2.0	275.28	178.0	143.6	136.0	126.8	120.1	115.4	111.8	109.1	106.9
2.0	0.5	256.32	189.8	144.9	137.2	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	252.32	171.9	143.8	136.5	126.9	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.5	247.50	169.9	142.5	135.4	126.6	120.1	115.3	111.7	109.0	106.8
	2.0	242.54	168.0	141.1	134.2	126.2	119.9	115.2	111.7	109.0	106.8
3.0	0.5	245.63	170.2	144.5	136.9	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	238.15	166.6	142.8	135.7	126.6	120.1	115.3	111.8	109.1	106.9
	1.5	229.46	162.1	140.8	134.1	126.1	119.8	115.2	111.7	109.0	106.8
	2.0	220.81	157.5	138.9	132.4	125.3	119.5	115.0	111.6	108.9	106.8

20 Гц. Влияние неоднородности на скорости волн более высоких мод является еще менее значительным, что дает повод говорить и об отсутствии в этом случае достаточно явных изменений в топологической структуре ветвей дисперсионного спектра.

**Заключение.** Численный анализ полученного дисперсионного соотношения для волн Лява в волноводе рассматриваемого типа, обнаруживает ряд эффектов в параметрических зависимостях фазовых скоростей изучаемых волн от характеристик локализованной неоднородности, перспективных для учета в прикладных исследованиях в области сейсмоакустики.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 142 с.
2. *Royer D.* Elastic Waves in Solids I. / D. Royer, E. Dieulesaint. – Berlin: Springer, 2000. – 306 p.
3. *Zhang S.* Frequency dispersion of Love waves in a piezoelectric nanofilm bonded on a semi-infinite elastic substrate / Sijia Zhang, Bin Gu, Hongbin Zhang, Rongying Pan, Alamus, Xiqiao Feng // Chinese Journal of Mechanical Engineering. – 2015. – V. 28, No. 6. – P. 1157–1162. DOI:10.3901/CJME.2015.0709.090
4. *Ezzin H.* Love waves propagation in a transversely isotropic piezoelectric layer on a piezomagnetic half-space / Hamdi Ezzin, Ben Amor Morched, Mohamed Hedi Ben Ghazlen // Ultrasonics. – 2016. – V. 69. – P. 83–89.
5. *Singhal A.* Surface wave propagation in functionally graded piezoelectric material: An analytical solution / Abhinav Singhal, S. A. Sahu, Soniya Chaudhary // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2017. – 29(3):1045389X1770804 DOI:10.1177/1045389X17708047
6. *Назаров Ю.П.* Расчетные модели сейсмических воздействий / Ю.П. Назаров. – М.: Наука, 2012. – 414 с.
7. *Позняк Е.В.* Моделирование пространственно-временного поля волн Лява по акселерограмме / Е.В. Позняк // Строительство и реконструкция. – 2017. – №6 (74). – С. 32–42.
8. *Jakoby B.* Properties of Love waves: application in sensors / B. Jakoby, M.J. Vellekoop // Smart Mater. Struct. – 1997. – V. 6. – P. 668–679.
9. *Mchale G.* Resonant conditions for Love wave guiding layer thickness / G. Mchale, M.I. Newton, F. Martin, E. Gizeli, K.A. Melzak // Appl. Phys. Lett. – 2001. – V. 79. – P. 3542–3543.
10. *Kalantar-Zadeh K.* Novel Love mode surface acoustic wave based immunosensors. / K. Kalantar-Zadeh, W. Włodarski, Y.Y. Chen, B.N. Fry, K. Galastis // Sensors and Actuators. B. – 2003. – V. 91. – P. 143–147.
11. *Бирюков С.В.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский. – М.: Наука, 1991. – 414 с.
12. *Кузнецов С.В.* Волны Лява в стратифицированной моноклинной среде / С.В. Кузнецов, В.Л. Мондрус // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 85, № 3. – С. 347–367.
13. *Kong Y.-P.* Propagation of love waves in the orthotropic layer/functionally graded piezoelectric half-space / Y.-P. Kong, C.-H. Chen, J.-X. Liu // Journal of Shanghai Jiaotong University. – 2013. – V. 47, No. 2. – P. 210–215.
14. *Болночин В.Е.* Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болночин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев. // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 14–19. – doi:10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN:BOBAVC.

**A.A. Glukhov, V.I. Storozhev, V.A. Shaldyrvan**

**Love waves in the structure "homogeneous isotropic layer on a transversal-isotropic half-space with double exponential inhomogeneity".**

A solution to the problem of the propagation of generalized localized shear Love waves in a waveguide structure from a homogeneous isotropic layer and a transversely inhomogeneous functionally gradient transversely isotropic half-space ideally contacting with it, the change in the physical and mechanical

characteristics of which with depth is given by a double exponential function, is obtained. The method for describing continuous inhomogeneity characterizes the localization of the region of intense changes in the physical and mechanical parameters of the material of the half-space in the near-boundary region and the asymptotic smoothing of the law of change in properties in the depth of the array is applied. The main dispersion relation is formulated and numerical studies are carried out of some effects of the influence of the inhomogeneity indices of the half-space material on the characteristics of the considered localized waves, in particular, on the phase velocities of waves from the lowest mode.

**Keywords:** *localized Love waves, layer on an inhomogeneous half-space, double exponential inhomogeneity law, main dispersion equation, influence of inhomogeneity parameters, wave velocities of first mode.*

Получено 23.01.2023

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-40-61

EDN:EWIYSR



©2023. И.А. Моисеенко<sup>1</sup>, В.А. Моисеенко<sup>2</sup>, Н.Ю. Мельничук<sup>3</sup>

## МОДЕЛИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА ДЛЯ СЛУЧАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

Определены двухфакторная для случая крутильных волн и два альтернативных варианта трехфакторной для случая волн продольно-сдвигового типа модели радиальной функциональной неоднородности физико-механических характеристик изотропного материала сплошного цилиндрического волновода. Представлены два подхода к определению функциональных составляющих указанных моделей. Для каждого из указанных подходов в рамках каждой из представленных моделей определено достаточное условие несильной радиальной неоднородности, обеспечивающее построение целевого базисного решения соответствующих уравнений классической математической модели волнового деформирования. Построены базисные решения, элементы которых выражены через аналитические функции, представленные своими разложениями с определяемыми из явных рекуррентных соотношений коэффициентами. Дан сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, поставленного для случаев однородных и функционально неоднородных изотропных свободных волноводов. Изучены эффекты влияния функциональной радиальной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей бегущих волн продольно-сдвигового типа. Приведены количественные и качественные оценки полученных численных результатов.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, изотропия, цилиндрический волновод, осесимметричные волны, многофакторная модель радиальной неоднородности, базисное решение, дисперсионные соотношения.

<sup>1</sup>Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Acad. A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Моисеенко Виктор Алексеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: v.a.moiseenko@donnasa.ru.

Moiseenko Viktor Alekseevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>3</sup>Мельничук Наталья Юрьевна – ассистент каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

Melnichuk Natalia Iurievna – Assistant, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

**Введение.** При исследовании волновых процессов в изотропных, трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных функционально радиально неоднородных протяженных круговых цилиндрах для построении базисных аналитических решений системы дифференциальных уравнений классической трехмерной математической модели волнового деформирования оказался плодотворным подход, основанный на задании с точностью до константного сомножителя единого для всех физико-механических характеристик материала волновода экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности. В рамках такой модели неоднородности в аналитическом виде построены базисные решения соответствующих уравнений математических моделей и исследованы свойства бегущих осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн в изотропных [1], трансверсально-изотропных [2, 3] и цилиндрически ортотропных [4] протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения.

Переход к рассмотрению независимых функциональных законов радиальной неоднородности для всех физико-механических характеристик материала волновода требует привлечение новых моделей, обеспечивающих построение в аналитическом виде целевых базисных решений математических моделей рассматриваемых волновых процессов, в достаточной мере свободных от принципиально сужающих область их применения ограничений. В этом направлении для трансверсально-изотропных цилиндрических волноводов в [5] на основе предложенной трехфакторной модели радиальной неоднородности построено аналитическое базисное решение и исследованы свойства бегущих упругих крутильных волн, а в [6] на основе предложенных двух вариантов шестифакторной модели радиальной неоднородности построены соответствующие аналитические базисные решения и исследованы свойства бегущих упругих волн продольно-сдвигового типа.

В данном исследовании для случаев распространяющихся осесимметричных волн крутильного и продольно-сдвигового типов представлены модели радиальной неоднородности изотропного материала сплошного цилиндрического волновода, обеспечившие построение базисных аналитических решений соответствующих уравнений математических моделей указанных волновых процессов, исследованы свойства бегущих волн.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается протяженный цилиндрический волновод, имеющий в поперечном сечении форму круга радиуса  $R_*$  (рис. 1). В нормированной параметром  $R_*$  безразмерной цилиндрической системе координат  $Or\theta z$  волновод занимает область  $V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}$ . Изотропный материал волновода считается в радиальных направлениях функционально неоднородным:

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \quad \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r).$$

Полагается, что произвольные в пределах допустимости

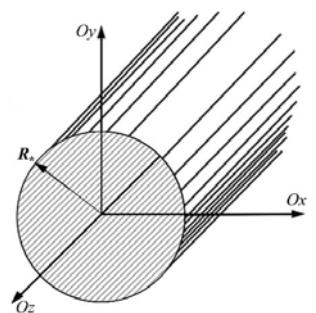


Рис. 1.

варьирования значений физико-механических характеристик функциональные законы изменения упругих модулей Ламе и плотности радиально неоднородного материала, нормированных, соответственно, параметрами  $C_* = \text{const}$  и  $\rho_* = \text{const}$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(r) > 0, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(r) > 0, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [0, \delta]), \quad (1)$$

относятся к классу  $C^1[0, \delta]$ . Для параметра  $\delta$  ( $\delta > 1$ ) границы допустимых значений будут определены ниже.

Рассматриваются нормальные упругие осесимметричные волны, распространяющиеся вдоль оси  $Oz$  с круговой частотой  $\omega$  и продольным волновым числом  $k$  ( $k \in \mathbb{C}$ ), нормированным параметром  $R_*$ . Нормированные соответственно величинами  $R_*$  и  $C_*$  отличные от тождественного нуля компоненты вектора упругих перемещений и тензора напряжений в рамках пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих изотропных тел могут быть представлены в рамках независимо исследуемых волновых процессов отдельно для волн крутильного

$$\begin{aligned} u_\theta^{(TW)}(r, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r), \\ \Sigma^{(TW)}(r, z, t) &= \begin{bmatrix} \sigma_{\theta z}^{(TW)}(r, z, t) \\ \sigma_{r\theta}^{(TW)}(r, z, t) \end{bmatrix} = \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(TW)} \tilde{\Sigma}^{(TW)}(r), \quad (2) \\ u_r^{(TW)} = u_z^{(TW)} &\equiv 0, \quad \sigma_{rr}^{(TW)} = \sigma_{\theta\theta}^{(TW)} = \sigma_{zz}^{(TW)} = \sigma_{rz}^{(TW)} \equiv 0; \end{aligned}$$

и продольно-сдвигового

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(r, z, t) &= \begin{bmatrix} u_r^{(LSW)}(r, z, t) \\ u_z^{(LSW)}(r, z, t) \end{bmatrix} = \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r), \\ \Sigma^{(LSW)}(r, z, t) &= \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(LSW)}(r, z, t) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(LSW)}(r, z, t) \\ \sigma_{zz}^{(LSW)}(r, z, t) \\ \sigma_{rz}^{(LSW)}(r, z, t) \end{bmatrix} = \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \tilde{\Sigma}^{(LSW)}(r), \quad (3) \\ u_\theta^{(LSW)} &\equiv 0, \quad \sigma_{\theta z}^{(LSW)} = \sigma_{r\theta}^{(LSW)} \equiv 0 \end{aligned}$$

типов. Здесь

$$\tilde{\Sigma}^{(TW)}(r) = \tilde{\Sigma}^{(TW)} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)} \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{M}}^{(TW)} \tilde{u}_\theta^{(TW)} \quad (r \in [0, \delta]), \quad (4)$$

где  $\tilde{u}_\theta^{(TW)} = \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r)$  и  $\tilde{\sigma}_s^{(TW)} = \tilde{\sigma}_s^{(TW)}(r)$  ( $s = \theta z, r\theta$ ) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процес-

са в случае крутильных волн;

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(LSW)} \\ \tilde{u}_z^{(LSW)} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Sigma}^{(LSW)}(r) &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)} \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)} \\ \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)} \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)} \quad (r \in [0, \delta]),\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\tilde{u}_s^{(LSW)} = \tilde{u}_s^{(LSW)}(r)$  ( $s = r, z$ ) и  $\tilde{\sigma}_s^{(LSW)} = \tilde{\sigma}_s^{(LSW)}(r)$  ( $s = rr, \theta\theta, zz, rz$ ) – вещественные радиальные амплитудные составляющие соответствующих компонент волнового процесса в случае волн продольно-сдвигового типа;  $\mathbf{P}_\Sigma^{(TW)}$ ,  $\mathbf{P}_U^{(LSW)}$  и  $\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)}$  – соответственно имеющие размерности  $2 \times 2$  и  $4 \times 4$  квадратные диагональные матрицы комплексной нормировки с элементами

$$\begin{aligned}\left[ \mathbf{P}_\Sigma^{(TW)} \right]_{1,1} &= i, \quad \left[ \mathbf{P}_\Sigma^{(TW)} \right]_{2,2} = 1, \\ \left[ \mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{1,1} &= 1, \quad \left[ \mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{2,2} = i, \\ \left[ \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad \left[ \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{4,4} = i;\end{aligned}\quad (6)$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)} = \tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(r)$  – векторный и матричный дифференциальные операторы следующего вида

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)} = \begin{bmatrix} k\tilde{\mu} \\ \tilde{\mu}(d_r - r^{-1}) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} \left( \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} \right) d_r + \tilde{\lambda}r^{-1} & -k\tilde{\lambda} \\ \tilde{\lambda}d_r + \left( \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} \right) r^{-1} & -k\tilde{\lambda} \\ \tilde{\lambda}(d_r + r^{-1}) & -k(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \\ k\tilde{\mu} & \tilde{\mu}d_r \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $d_r = d/dr$ .

Уравнения движения для рассматриваемых типов волновых процессов с учетом соотношений (1) – (7) могут быть записаны так:

$$\left( r^2 d_r^2 + r \tilde{f}_1 d_r + \tilde{f}_2 \right) \tilde{u}_\theta^{(TW)} = 0 \quad (r \in [0, \delta]), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{(1)} &= \tilde{f}^{(1)}(r) = 1 + r\tilde{\mu}'/\tilde{\mu}, \\ \tilde{f}^{(2)} &= \tilde{f}^{(2)}(r) = -1 - r\tilde{\mu}'/\tilde{\mu} + r^2 (\Omega^2 \tilde{\rho}/\tilde{\mu} - k^2); \\ \tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)} &= \mathbf{0} \quad (r \in [0, \delta]).\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)} = \tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r)$  – матричный дифференциальный оператор вида

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} r^2 d_r^2 + \tilde{f}_{11}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{11}^{(2)} & \tilde{f}_{12}^{(1)} r^2 d_r + \tilde{f}_{12}^{(2)} r^2 \\ \tilde{f}_{21}^{(1)} r^2 d_r + \tilde{f}_{21}^{(2)} r & r^2 d_r^2 + \tilde{f}_{22}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{22}^{(2)} r^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{11}^{(1)} &= \tilde{f}_{11}^{(1)}(r) = 1 + r \frac{\tilde{\lambda}' + 2\tilde{\mu}'}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \\
 \tilde{f}_{11}^{(2)} &= \tilde{f}_{11}^{(2)}(r) = -1 + r \frac{\tilde{\lambda}'}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} + r^2 \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} - k^2 \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \right), \\
 \tilde{f}_{12}^{(1)} &= \tilde{f}_{12}^{(1)}(r) = -k \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \tilde{f}_{12}^{(2)} = \tilde{f}_{12}^{(2)}(r) = -k \frac{\tilde{\lambda}'}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \\
 \tilde{f}_{21}^{(1)} &= \tilde{f}_{21}^{(1)}(r) = k \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}, \quad \tilde{f}_{21}^{(2)} = \tilde{f}_{21}^{(2)}(r) = k \left( \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} + r \frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} \right), \\
 \tilde{f}_{22}^{(1)} &= \tilde{f}_{22}^{(1)}(r) = 1 + r \frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}}, \quad \tilde{f}_{22}^{(2)} = \tilde{f}_{22}^{(2)}(r) = \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} - k^2 \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}};
 \end{aligned}$$

**О** – нулевой вектор-столбец размерности 2;  $\Omega = (\rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*)^{1/2}$  – безразмерная приведенная частота.

Представленные математические модели (1), (2), (4), (6) – (8) и (1), (3), (5) – (7), (9), (10) дополняются соответствующего вида классическими однородными граничными условиями на свободной

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(1) = 0 \quad (11)$$

$$\left[ \tilde{\Sigma}^{(LSW)}(1) \right]_{(1,4)} = \mathbf{O}, \quad (12)$$

либо жестко закрепленной

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(1) = 0 \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(1) = \mathbf{O} \quad (14)$$

граничной поверхности волновода.

**2. Модель радиальной неоднородности для случая крутильных волн.** Вводятся в рассмотрение декартова система координат  $Ox_1x_2$  и комплексная переменная  $\xi = x_1 + ix_2$ . Формально полагается, что неотрицательная часть вещественной полуоси системы координат  $Ox_1x_2$  совпадает с осью  $Or$

$$Ox_1 \equiv Or \quad (x_1 \geq 0).$$

В рамках математической модели (1), (2), (4), (6) – (8) на плоскости комплексной переменной  $\xi$  вводятся две произвольные аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции  $\varphi = \varphi(\xi)$  и  $\psi = \psi(\xi)$ . Закон радиальной неоднородности (1) с учетом вида входящих в уравнение (8) функций  $\tilde{f}^{(s)}$  ( $s = \overline{1, 2}$ ) далее определяется через введенные функции так:

$$\tilde{\mu}(r) = e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi(r) e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, \delta)). \quad (15)$$

Далее соотношения (15) называются моделью функциональной радиальной неоднородности для случая крутильных волн.

На основе модели неоднородности (15) рассматривается продолжение на плоскость комплексной переменной  $\xi$  обыкновенного дифференциального уравнения (8). Получается уравнение

$$\left( \xi^2 d_\xi^2 + \xi \hat{f}_1 d_\xi + \hat{f}_2 \right) \hat{u}_\theta^{(TW)} = 0 \quad (|\xi| < \delta), \quad (16)$$

где

$$\hat{f}^{(1)} = 1 + \xi \varphi', \quad \hat{f}^{(2)} = -1 - \xi \varphi' + \xi^2 (\Omega^2 \psi - k^2). \quad (17)$$

Здесь  $\hat{f}^{(s)} = \hat{f}^{(s)}(\xi)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ) и  $\hat{u}_\theta^{(TW)} = \hat{u}_\theta^{(TW)}(\xi)$  – аналитические продолжения на комплексную плоскость переменной  $\xi$  вещественных функций  $\tilde{f}^{(s)}(r)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ) и  $\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r)$ ;  $d_\xi = d/d\xi$ . Известно, что дифференциальное уравнение (16) имеет в области  $|\xi| < \delta$  аналитические решения [7].

Рассматриваются два подхода к определению аналитических в области  $|\xi| < \delta$  функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  по заданным функциональным законам (1) из класса  $C^1[0, \delta)$ .

Первый подход (далее аналитический подход) основан на аналитическом определении указанных функций из соотношений

$$\varphi(\xi) = \ln(\hat{\mu}(\xi)), \quad \psi(\xi) = \hat{\rho}(\xi)/\hat{\mu}(\xi) \quad (|\xi| < \delta). \quad (18)$$

Он применим, если  $\tilde{\mu}(r)$  и  $\tilde{\rho}(r)$  допускают аналитическое продолжение на комплексную плоскость переменной  $\xi$ , аналитические продолжения  $\hat{\mu}(\xi)$  и  $\hat{\rho}(\xi)$  в области  $|\xi| < \delta$  являются аналитическими функциями, выполняется достаточное (аналитическое) условие несильной радиальной неоднородности материала волновода

$$1 < \delta \leq \xi_*, \quad (19)$$

где  $\xi_*$  – наименьший по модулю корень уравнения  $\hat{\mu}(\xi) = 0$ .

Второй подход (далее численный подход) реализуется любым численным методом, обеспечивающим аппроксимацию полиномами на отрезке  $r \in [0, 1]$  искомых функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  на основании приближенных соотношений

$$\varphi(r) \approx \ln(\tilde{\mu}(r)), \quad \psi(r) \approx \tilde{\rho}(r)/\tilde{\mu}(r) \quad (r \in [0, 1]), \quad (20)$$

где

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(1)} \xi^n. \quad (21)$$

Таким образом, при численном подходе модель функциональной радиальной неоднородности (15) определяет отличающиеся от заданных (1) функциональные законы  $\tilde{\mu}^{(*)}(r)$  и  $\tilde{\rho}^{(*)}(r)$ , для которых далее строится базисное решение уравнения (16). Здесь следует отметить, что физико-механические характеристики

реальных материалов зачастую предоставлены с весьма ограниченной точностью  $\varepsilon$ , поэтому степень  $N$  полиномов (21), обеспечивающая соответствующую точность аппроксимации

$$\max_{r \in [0,1]} |\tilde{\mu}(r) - \tilde{\mu}^{(*)}(r)| < \varepsilon, \quad \max_{r \in [0,1]} |\tilde{\rho}(r) - \tilde{\rho}^{(*)}(r)| < \varepsilon,$$

может выбираться весьма небольшой.

Учитывая тот факт, что при реализуемом соотношениями (20), (21) численном подходе помимо естественных ограничений (1) отсутствуют какие-либо другие, аналогичные условию (19) ограничения на заданные функциональные законы  $\tilde{\mu}(r)$  и  $\tilde{\rho}(r)$ , второй подход может рассматриваться как предпочтительный.

Таким образом, представленная модель функциональной неоднородности (15) в случае реализации аналитического подхода при выполнении условия (19), а также численного подхода без дополнительных условий, обеспечивают аналитичность в области  $|\xi| < \delta$  определяемых соотношениями (17) функций  $\hat{f}^{(s)}(\xi)$  ( $s = \overline{1,2}$ ). Следовательно, обыкновенное дифференциальное уравнение (16) на комплексной плоскости переменной  $\xi$  в рамках обоих рассмотренных подходов к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  имеет в области  $|\xi| < \delta$  аналитическое решение.

**3. Модель радиальной неоднородности для случая волн продольно-сдвигового типа.** В рамках математической модели (1), (3), (5) – (7), (9), (10) на плоскости комплексной переменной  $\xi$  вводятся три произвольные аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции  $\varphi = \varphi(\xi)$ ,  $\psi_s = \psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1,2}$ ). Закон радиальной неоднородности (1) с учетом вида входящих в представление (10) функций  $\tilde{f}_{nm}^{(s)}$  ( $s, n, m = \overline{1,2}$ ) далее определяется через введенные функции двумя способами:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(r) &= (1 - 2 \psi_1(r)) e^{\varphi(r)}, & \tilde{\mu}(r) &= \psi_1(r) e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{\rho}(r) &= \psi_2(r) e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, \delta)), \end{aligned} \quad (22\text{-A})$$

$$\tilde{\lambda}(r) = \psi_1(r) e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\mu}(r) = e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_2(r) e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, \delta)). \quad (22\text{-B})$$

Далее соотношения (22-А) и (22-Б) называются альтернативными вариантами модели функциональной радиальной неоднородности для случая волн продольно-сдвигового типа.

На основе представленных вариантов модели неоднородности (22-А) и (22-Б) рассматривается продолжение на плоскость комплексной переменной  $\xi$  уравнений (9). Получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, записываемая в матричном виде так:

$$\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)} = \mathbf{0} \quad (|\xi| < \delta), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} &= \hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi) = \\ &= \begin{bmatrix} \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{11}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{11}^{(2)} & \hat{f}_{12}^{(1)} \xi^2 d_\xi + \hat{f}_{12}^{(2)} \xi^2 \\ \hat{f}_{21}^{(1)} \xi^2 d_\xi + \hat{f}_{21}^{(2)} \xi & \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{22}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{22}^{(2)} \xi^2 \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)} &= \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(LSW)} \\ \hat{u}_z^{(LSW)} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (24)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi)$  и  $\hat{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi)$  – соответственно аналитические продолжения на комплексную плоскость переменной  $\xi$  вещественного матричного дифференциального оператора  $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r)$  и вещественного вектора  $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r)$ . В соотношениях (24)  $\hat{u}_s^{(LSW)} = \hat{u}_s^{(LSW)}(\xi)$  ( $s = r, z$ ) и  $\hat{f}_{nm}^{(s)} = \hat{f}_{nm}^{(s)}(\xi)$  ( $s, n, m = \overline{1, 2}$ ) – аналитические продолжения на комплексную плоскость переменной  $\xi$  вещественных функций  $\tilde{u}_s^{(LSW)}(r)$  ( $s = r, z$ ) и  $\tilde{f}_{nm}^{(s)}(r)$  ( $s, n, m = \overline{1, 2}$ ). Функции  $\hat{f}_{nm}^{(s)}$  ( $s, n, m = \overline{1, 2}$ ) в соответствии с выбранным вариантом модели (22-А) или (22-Б) получают вид:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{11}^{(1)} &= 1 + \xi \varphi', \quad \hat{f}_{11}^{(2)} = -1 + \xi (\varphi' - 2\psi'_1 - 2\phi) + \xi^2 (\Omega^2 \psi_2 - k^2 \psi_1), \\ \hat{f}_{12}^{(1)} &= k (\psi_1 - 1), \quad \hat{f}_{12}^{(2)} = k (2\phi - \varphi' + 2\psi'), \\ \hat{f}_{21}^{(1)} &= k (\chi_3 - 1), \quad \hat{f}_{21}^{(2)} = k (\chi_3 - 1 + \xi (\varphi' + \chi_2)), \\ \hat{f}_{22}^{(1)} &= 1 + \xi (\varphi' + \chi_2), \quad \hat{f}_{22}^{(2)} = \Omega^2 \chi_1 - k^2 \chi_3;\end{aligned}\quad (25\text{-A})$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{11}^{(1)} &= 1 + \xi (\varphi' + \chi_2), \quad \hat{f}_{11}^{(2)} = -1 + \xi (\varphi' + \chi_2 - 2\phi) + \xi^2 (\Omega^2 \chi_1 - k^2 \chi_3), \\ \hat{f}_{12}^{(1)} &= k (\chi_3 - 1), \quad \hat{f}_{12}^{(2)} = k (2\phi - \varphi' - \chi_2), \\ \hat{f}_{21}^{(1)} &= k (\psi_1 + 1), \quad \hat{f}_{21}^{(2)} = k (1 + \psi_1 + \xi \varphi'), \\ \hat{f}_{22}^{(1)} &= 1 + \xi \varphi', \quad \hat{f}_{22}^{(2)} = \Omega^2 \psi_2 - k^2 (\psi_1 + 2).\end{aligned}\quad (25\text{-B})$$

В соотношениях (25-А) и (25-Б) использованы вспомогательные, определяемые в соответствии с выбранным вариантом модели (22-А) или (22-Б) аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \chi_1(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_2 = \chi_2(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_3 = \chi_3(\xi) = \frac{1}{\psi_1(\xi)}, \\ \phi &= \phi(\xi) = \psi_1(\xi) \varphi'(\xi) \quad (|\xi| < \delta);\end{aligned}\quad (26\text{-A})$$

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \chi_1(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2}, \quad \chi_2 = \chi_2(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2}, \\ \chi_3 &= \chi_3(\xi) = \frac{1}{\psi_1(\xi) + 2}, \quad \phi = \phi(\xi) = \chi_3(\xi) \varphi'(\xi) \quad (|\xi| < \delta).\end{aligned}\quad (26\text{-B})$$

Известно, что система дифференциальных уравнений (23) имеет аналитические в области  $|\xi| < \delta$  решения [7-8].

Рассматриваются два подхода к определению аналитических в области  $|\xi| < \delta$  функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ) по заданным функциональным законам (1).

Первый подход (далее аналитический подход) основан на аналитическом определении указанных функций из соотношений, определяемых соответственно выбранному варианту модели (22-А) или (22-Б) так:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \ln \left( \hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi) \right), \\ \psi_1(\xi) &= \frac{\hat{\mu}(\xi)}{\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)} \quad (|\xi| < \delta); \end{aligned} \quad (27\text{-A})$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \ln(\hat{\mu}(\xi)), \\ \psi_1(\xi) &= \hat{\lambda}(\xi)/\hat{\mu}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\rho}(\xi)/\hat{\mu}(\xi) \quad (|\xi| < \delta). \end{aligned} \quad (27\text{-B})$$

Он применим для обоих вариантов модели (22-А), (26-А), (27-А) и (22-Б), (26-Б), (27-Б), если  $\tilde{\lambda}(r)$ ,  $\tilde{\mu}(r)$  и  $\tilde{\rho}(r)$  допускают аналитическое продолжение на комплексную плоскость переменной  $\xi$ , аналитические продолжения  $\hat{\lambda}(\xi)$ ,  $\hat{\mu}(\xi)$  и  $\hat{\rho}(\xi)$  в области  $|\xi| < \delta$  являются аналитическими функциями, выполняется достаточное (аналитическое) условие несильной радиальной неоднородности материала волновода

$$1 < \delta \leq \min \left( \left| \xi_*^{(1)} \right|, \left| \xi_*^{(2)} \right| \right), \quad (27)$$

где  $\xi_*^{(1)}$  и  $\xi_*^{(2)}$  – соответственно наименьшие по модулю нули функций  $\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)$  и  $\hat{\mu}(\xi)$ .

Второй подход (далее численный подход) реализуется любым численным методом, обеспечивающим аппроксимацию полиномами на отрезке  $r \in [0, 1]$  исключимых функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ) на основании соответствующих выбранному варианту модели (22-А) или (22-Б) приближенных соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln \left( \tilde{\lambda}(r) + 2\tilde{\mu}(r) \right), \\ \psi_1(r) &\approx \frac{\tilde{\mu}(r)}{\tilde{\lambda}(r) + 2\tilde{\mu}(r)}, \quad \psi_2(r) \approx \frac{\tilde{\rho}(r)}{\tilde{\lambda}(r) + 2\tilde{\mu}(r)} \quad (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (29\text{-A})$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln(\tilde{\mu}(r)), \\ \psi_1(r) &\approx \tilde{\lambda}(r)/\tilde{\mu}(r), \quad \psi_2(r) \approx \tilde{\rho}(r)/\tilde{\mu}(r) \quad (r \in [0, 1]). \end{aligned} \quad (29\text{-B})$$

Здесь

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 2}). \quad (30)$$

Очевидно, что найденные согласно соотношениям (29-А), (30) и (29-Б), (30) функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ) на основании соответствующего варианта модели неоднородности (22-А) и (22-Б) фактически определяют отличающиеся от заданных (1) функциональные законы  $\tilde{\lambda}^{(*)}(r)$ ,  $\tilde{\mu}^{(*)}(r)$  и  $\tilde{\rho}^{(*)}(r)$ , для которых,

собственно, и будут строиться целевые базисные решения уравнений (23). Но, поскольку физико-механические характеристики реальных материалов могут быть предоставлены с весьма ограниченной точностью  $\varepsilon$ , то следовательно степень  $N$  полиномов (30), обеспечивающая соответствующую точность аппроксимации

$$\begin{aligned} \max_{r \in [0,1]} |\tilde{\lambda}(r) - \tilde{\lambda}^{(*)}(r)| &< \varepsilon, \quad \max_{r \in [0,1]} |\tilde{\mu}(r) - \tilde{\mu}^{(*)}(r)| < \varepsilon, \\ \max_{r \in [0,1]} |\tilde{\rho}(r) - \tilde{\rho}^{(*)}(r)| &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (31)$$

может выбираться весьма небольшой.

Следует отметить, что в случае численного подхода требование аналитичности в области  $|\xi| < \delta$  введенных представлениями (26-А) и (26-Б) вспомогательных функций  $\chi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1,3}$ ) для обоих вариантов модели (22-А) и (22-Б) является единственным, помимо естественного условия (1), ограничением, обеспечивающим возможность построения целевого аналитического в области  $|\xi| < \delta$  решения уравнений (23). Оно будет удовлетворено, если выполняется достаточное (численное) условие несильной радиальной неоднородности материала волновода

$$1 < \delta \leq |s_*|, \quad (32)$$

где  $s_*$  – наименьший по модулю нуль функции  $\psi_1(\xi)$  для модели (22-А), (26-А), (29-А), (30), либо функции  $\psi_1(\xi) + 2$  для модели (22-Б), (26-Б), (29-Б), (30). Учитывая, что для альтернативных вариантов модели неоднородности (22-А) и (22-Б) условие (32) фактически накладывает различающиеся ограничения на заданные физико-механические характеристики материала волновода (1), а также тот факт, что выбор порядка аппроксимирующих полиномов (30) также влияет на условие (32), численный подход в случае волн продольно-сдвигового типа может рассматриваться как более гибкий, а значит – предпочтительный.

Таким образом, представленные варианты модели функциональной неоднородности (22-А) и (22-Б) в случае аналитического подхода при выполнении условия (28), а также в случае численного подхода при выполнении условия (32) обеспечивают аналитичность в области  $|\xi| < \delta$  входящих в соотношения (24) функций  $\hat{f}_{nm}^{(s)}(\xi)$  ( $s, n, m = \overline{1,2}$ ). Следовательно, в рамках обоих представленных подходов к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1,2}$ ) система обыкновенных дифференциальных уравнений (23) на комплексной плоскости переменной  $\xi$  имеет в области  $|\xi| < \delta$  аналитические решения.

**4. Базисное решение и дисперсионные уравнения для случая крутильных волн.** С целью построения аналитического в области  $|\xi| < \delta$  частного решения уравнения (16) используются разложения в окрестности точки  $\xi = 0$  аналитических в указанной области функций  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi(\xi)$  и целевого частного решения  $\hat{u}_\theta^{(TW, \text{particular})}(\xi)$  в абсолютно и равномерно сходящиеся в любом круге

$|\xi| \leq s$  ( $0 < s < \delta$ ) ряды вида

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \xi^n, \\ \hat{u}_{\theta}^{(TW, \text{particular})}(\xi) &= \xi^{\eta} \sum_{p=0}^{\infty} d_p \xi^p \quad (|\xi| < \delta). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $\left\{a_n^{(m)}\right\}_{n=0}^{\infty}$  ( $m = 0, 1$ ) – определяемые соотношениями (18) при аналитическом подходе, либо соотношениями (20), (21) при численном подходе ( $a_n^{(s)} = 0$   $n = \overline{N+1, \infty}$ ;  $s = \overline{0, 1}$ ) наборы коэффициентов;  $\eta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  и  $\{d_p\}_{p=0}^{\infty}$  ( $d_0 \neq 0$ ) – подлежащие определению соответственно параметр и набор коэффициентов. В результате подстановки разложений (33) в уравнение (16) и соотношения (17) получается однородное функциональное уравнение  $F(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \vartheta_p \xi^p = 0$  ( $|\xi| < \delta$ ) относительно аналитической в области  $|\xi| < \delta$  функции  $F(\xi)$ . Следовательно указанное функциональное уравнение порождает совокупность алгебраических уравнений  $\vartheta_p = 0$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ), из которых при  $p = 0$  определяется начальное условие

$$\eta = 1, d_0 = 1, \quad (34)$$

а при  $p \geq 1$ , с учетом формально дополняющих разложения (33) определений

$$a_n^{(s)} = 0 \quad (s = \overline{0, 1}; n = \overline{-\infty, -1}), \quad d_{-1} = 0,$$

получаются явные рекуррентные соотношения для искомых коэффициентов  $d_p$  ( $p \geq 1$ ) вида

$$d_p = \frac{1}{p(p+2)} \left( k^2 d_{p-2} + \sum_{j=0}^{p-1} \left( j(j-p) a_{p-j}^{(0)} - \Omega^2 a_{p-2-j}^{(1)} \right) d_j \right) \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (35)$$

При рассмотрении аналитического продолжения на плоскость комплексной переменной  $\xi$  векторного вещественного оператора  $\tilde{\mathbf{M}}^{(TW)}(r)$ , с учетом представлений (15), определяется векторный оператор

$$\hat{\mathbf{M}}^{(TW)}(\xi) = \hat{\mathbf{M}}^{(TW)} = \begin{bmatrix} k e^{\varphi} \\ e^{\varphi} (d_{\xi} - \xi^{-1}) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Тогда на основании соотношения (4), с учетом того, что

$$\hat{u}_{\theta}^{(TW, \text{basic})}(\xi) \equiv \hat{u}_{\theta}^{(TW, \text{particular})}(\xi), \quad (37)$$

общее решение уравнений математические модели (1), (2), (4), (6) – (8) допустимо представить в таком виде (произвольный скалярный множитель полагается

равным единице)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_\theta^{(TW,general)}(r) &= \hat{u}_\theta^{(TW,basic)}(r), \\ \tilde{\Sigma}^{(TW,general)}(r) &= \left(\hat{\mathbf{M}}^{(TW)} \hat{u}_\theta^{(TW,basic)}\right)\Big|_{\xi=r} \quad (r \in [0, \delta]).\end{aligned}\quad (38)$$

Из граничных условий (11) и (13) с учетом соотношений (38) определяются соответствующего вида дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа  $k$  и приведенной частоты  $\Omega$  следующего вида:

$$\Phi_\Sigma^{(TW)}(k, \Omega) = \left(\left[\hat{\mathbf{M}}^{(TW)}\right]_2 \hat{u}_\theta^{(TW,basic)}\right)\Big|_{\xi=1} = 0; \quad (39)$$

$$\Phi_U^{(TW)}(k, \Omega) = \hat{u}_\theta^{(TW,basic)}(1) = 0. \quad (40)$$

**5. Базисное решение и дисперсионные соотношения для случая волн продольно-сдвигового типа.** С целью построения аналитических в области  $|\xi| < \delta$  частных решений уравнений (23) используются разложения в окрестности точки  $\xi = 0$  соответствующих выбранному варианту модели неоднородности (22-А) либо (22-Б) аналитических в указанной области функций  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ),  $\chi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 3}$ ) и  $\phi(\xi)$ , а также целевых частных решений  $\hat{u}_s^{(LSW,particular)}(\xi)$  ( $s = r, z$ ) в абсолютно и равномерно сходящиеся в любом круге  $|\xi| \leq s$  ( $0 < s < \delta$ ) ряды вида

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 2}), \\ \chi_s(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 3}), \quad \phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n, \\ \hat{u}_s^{(LSW,particular)}(\xi) &= \xi^{\eta + \kappa_s} \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(s)} \xi^p \quad (s = r, z), \quad (|\xi| < \delta),\end{aligned}\quad (41)$$

где  $\kappa_r = 1$ ,  $\kappa_z = 0$ . В представлениях (41)  $\left\{a_n^{(s)}\right\}_{n=0}^{\infty}$  ( $s = \overline{0, 2}$ ) – определяемые соотношениями (27-А) или (27-Б) при аналитическом подходе, либо соотношениями (29-А), (30) или (29-Б), (30) при численном подходе ( $a_n^{(s)} = 0$   $s = \overline{0, 2}$ ;  $n = \overline{N+1, \infty}$ ) наборы коэффициентов;  $\left\{b_n^{(s)}\right\}_{n=0}^{\infty}$  ( $s = \overline{1, 3}$ ) и  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  – определяе-

мые соотношениями (26-А) или (26-Б) наборы коэффициентов

$$\begin{aligned}
 b_n^{(1)} &= \left( a_n^{(2)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(1)} a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)}, \\
 b_n^{(2)} &= \left( (n+1) a_{n+1}^{(1)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(2)} a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)}, \\
 b_n^{(3)} &= \left( \delta_{0,n} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(3)} a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)}, \\
 g_n &= \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} a_m^{(1)} \quad (n = \overline{0, \infty});
 \end{aligned} \tag{42-А}$$

$$\begin{aligned}
 b_n^{(1)} &= \left( a_n^{(2)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(1)} a_{n-m}^{(1)} \right) / (a_0^{(1)} + 2), \\
 b_n^{(2)} &= \left( (n+1) a_{n+1}^{(1)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(2)} a_{n-m}^{(1)} \right) / (a_0^{(1)} + 2), \\
 b_n^{(3)} &= \left( \delta_{0,n} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(3)} a_{n-m}^{(1)} \right) / (a_0^{(1)} + 2), \\
 g_n &= \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} b_m^{(3)} \quad (n = \overline{0, \infty});
 \end{aligned} \tag{42-Б}$$

$\eta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  и  $\left\{ d_p^{(s)} \right\}_{p=0}^{\infty}$  ( $s = r, z$ ;  $|d_0^{(r)}| + |d_0^{(z)}| \neq 0$ ) – подлежащие определению соответственно параметр и наборы коэффициентов. Здесь

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}. \tag{43}$$

В результате подстановки разложений (41) в уравнения (23) и соотношения (24), (25-А) или (24), (25-Б) получается система из двух однородных функциональных уравнений

$$F^{(s)}(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \vartheta_p^{(s)} \xi^p = 0 \quad (s = r, z) \quad (|\xi| < \delta) \tag{44}$$

относительно аналитических в области  $|\xi| < \delta$  функций  $F^{(s)}(\xi)$  ( $s = r, z$ ). Следовательно, имеет место совокупность однородных систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \vartheta_p^{(r)} = 0 \\ \vartheta_p^{(z)} = 0 \end{cases} \quad (p = \overline{0, \infty}). \tag{45}$$

В случае  $p = 0$  при  $\eta = 0$  из (45) определяются два начальных условия

$$\eta^{(1)} = 0, \quad d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(z,1)} = 0, \quad (46)$$

и

$$\eta^{(2)} = 0, \quad d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1, \quad (47)$$

для двух линейно независимых частных решений

$$\hat{u}_s^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) = \xi^{\kappa_s} \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(s,q)} \xi^p \quad (s = r, z; \quad q = \overline{1, 2}), \quad (|\xi| < \delta), \quad (48)$$

а при  $p \geq 1$ , с учетом формально дополняющих разложения (41) условий

$$a_n^{(s)} = 0 \quad (s = \overline{0, 2}), \quad b_n^{(s)} = 0 \quad (s = \overline{1, 3}), \quad g_n = 0 \quad (n = \overline{-\infty, -1}),$$

получаются явные рекуррентные соотношения, которые с учетом начальных условий (46), (47) и введенных в рассмотрение матричных коэффициентов

$$\mathbf{V}_p^{(LSW)} = \begin{bmatrix} d_p^{(r,1)} & d_p^{(r,2)} \\ d_p^{(z,1)} & d_p^{(z,2)} \end{bmatrix} \quad (p = \overline{0, \infty}), \quad \mathbf{V}_0^{(LSW)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{-1}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

можно записать в виде

$$\mathbf{V}_p^{(LSW)} = \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \mathbf{V}_{p-2}^{(LSW)} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \mathbf{V}_j^{(LSW)} \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (50)$$

Элементы матриц  $\mathbf{Q}_*^{(LSW,p)}$  и  $\mathbf{Q}_j^{(LSW,p)}$  ( $p = \overline{1, \infty}$ ) с учетом выбранной модели неоднородности (22-А) либо (22-Б) определяются так:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{1,1} &= p^{-1}(p+2)^{-1}k^2 \left( 1 - a_0^{(1)} \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{1,2} = 0, \\ \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{2,1} &= p^{-1}k, \quad \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{2,2} = 0, \\ \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \right]_{1,1} &= p^{-2}(p+2)^{-1} \left( (2+j-p) \left( 1 - a_0^{(1)} \right) k^2 a_{p-2-j}^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + k^2 p a_{p-2-j}^{(1)} - \Omega^2 p a_{p-2-j}^{(2)} + (2+j)(j-p) p a_{p-j}^{(0)} + 2(p-j) p a_{p-j}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + \left( a_0^{(1)} - 1 \right) k^2 \left( b_{p-3-j}^{(2)} + (2+j) b_{p-2-j}^{(3)} \right) + 2 p g_{p-1-j} \right), \\ \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \right]_{1,2} &= p^{-2}(p+2)^{-1} \left( (p-j) \left( j a_0^{(1)} - j - p \right) k a_{p-j}^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + p(j-2p) k a_{p-j}^{(1)} + \left( 1 - a_0^{(1)} \right) k^3 b_{p-2-j}^{(3)} + \right. \\ &\quad \left. + \left( a_0^{(1)} - 1 \right) k \left( \Omega^2 b_{p-2-j}^{(1)} + j b_{p-1-j}^{(2)} \right) - 2 p k g_{p-1-j} \right), \\ \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \right]_{2,1} &= p^{-2} \left( (2+j-p) k a_{p-2-j}^{(0)} - k \left( b_{p-3-j}^{(2)} + (2+j) b_{p-2-j}^{(3)} \right) \right), \\ \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \right]_{2,2} &= p^{-2} \left( j(j-p) a_{p-j}^{(0)} + k^2 b_{p-2-j}^{(3)} - \Omega^2 b_{p-2-j}^{(1)} - j b_{p-1-j}^{(2)} \right); \end{aligned} \quad (51\text{-A})$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{1,1} &= -p^{-1}(p+2)^{-1} k^2 \left( 1 - b_0^{(3)} \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{1,2} &= 2p^{-2}(p+2)^{-1} k^3 \left( 1 - b_0^{(3)} \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{2,1} &= -p^{-1}k, \quad \left[ \mathbf{Q}_*^{(LSW,p)} \right]_{2,2} = 2p^{-2} k^2, \\
 \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW)} \right]_{1,1} &= p^{-2}(p+2)^{-1} \left( (j+2-p) \left( 1 - b_0^{(3)} \right) k^2 a_{p-2-j}^{(0)} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( b_0^{(3)} - 1 \right) (j+2) k^2 a_{p-2-j}^{(1)} + p(j+2)(j-p) a_{p-j}^{(0)} + \right. \\
 &\quad \left. + pk^2 b_{p-2-j}^{(3)} - p\Omega^2 b_{p-2-j}^{(1)} - p(j+2) b_{p-1-j}^{(2)} + 2pg_{p-1-j} \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \right]_{1,2} &= p^{-2}(p+2)^{-1} \left( k \left( b_0^{(3)} - 1 \right) \left( \Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} - k^2 a_{p-2-j}^{(1)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (p-j) \left( jb^{(3)} - j + p \right) ka_{p-j}^{(0)} + pk \left( b_{p-1-j}^{(2)} - jb_{p-j}^{(3)} \right) - 2pk g_{p-1-j} \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \right]_{2,1} &= p^{-2}k \left( (j+2-p) a_{p-2-j}^{(0)} - (2+j) a_{p-2-j}^{(1)} \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_j^{(LSW,p)} \right]_{2,2} &= p^{-2} \left( j(j-p) a_{p-j}^{(0)} + k^2 a_{p-2-j}^{(1)} - \Omega^2 a_{p-2-j}^{(2)} \right). \tag{51-Б}
 \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (49), (50), (51-А) и (49), (50), (51-Б) определяют соответственно для каждого варианта модели неоднородности (22-А) либо (22-Б) коэффициенты разложений двух линейно независимых векторных частных решений

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) \\ \hat{u}_z^{(LSW, \text{particular}, q)}(\xi) \end{bmatrix} \quad (q = \overline{1, 2}), \tag{52}$$

элементами которых являются аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции, представленные в этой области абсолютно и равномерно сходящиеся в любом круге  $|\xi| \leq s$  ( $0 < s < \delta$ ) рядами (48). Векторные частные решения (52) для каждого варианта модели неоднородности (22-А) и (22-Б) определяют матричное размерности  $2 \times 2$  базисное решение вида

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{basic})} &= \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{basic})}(\xi) = \\
 &= \left[ \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, 1)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(LSW, \text{particular}, 2)}(\xi) \right]. \tag{53}
 \end{aligned}$$

При рассмотрении аналитического продолжения на плоскость комплексной переменной  $\xi$  матричного вещественного оператора  $\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(r)$  (7), для каждого варианта модели неоднородности (22-А) и (22-Б) определяется соответствующий

матричный оператор

$$\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) = \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} e^\varphi (d_\xi + (1 - 2\psi_1) \xi^{-1}) & k e^\varphi (2\psi_1 - 1) \\ e^\varphi ((1 - 2\psi_1) d_\xi + \xi^{-1}) & k e^\varphi (2\psi_1 - 1) \\ e^\varphi (1 - 2\psi_1) (d_\xi + \xi^{-1}) & -k e^\varphi \\ k e^\varphi \psi_1 & e^\varphi \psi_1 d_\xi \end{bmatrix}; \quad (54\text{-A})$$

$$\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi) = \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} e^\varphi ((\psi_1 + 2) d_\xi + \psi_1 \xi^{-1}) & -k e^\varphi \psi_1 \\ e^\varphi (\psi_1 d_\xi + (\psi_1 + 2) \xi^{-1}) & -k e^\varphi \psi_1 \\ e^\varphi \psi_1 (d_\xi + \xi^{-1}) & -k e^\varphi (\psi_1 + 2) \\ k e^\varphi & e^\varphi d_\xi \end{bmatrix}. \quad (54\text{-B})$$

Тогда, с учетом соотношений (5), окончательно получаются представления для общего решения уравнений математической модели (1), (3), (5) – (7), (9), (10) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,general)}(r) &= \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(r) \mathbf{A}, \\ \tilde{\Sigma}^{(LSW,general)}(r) &= \left( \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} \right) \Big|_{\xi=r} \mathbf{A} \quad (r \in [0, \delta]), \end{aligned} \quad (55)$$

где  $\mathbf{A}$  – произвольный вектор-столбец размерности 2. Границные условия (12) и (14) с использованием представлений (55) определяют соответствующего вида дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа  $k$  и приведенной частоты  $\Omega$

$$\Phi_{\Sigma}^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left( \left( \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} \right]_{(1,4),(1,2)} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} \right) \Big|_{\xi=1} \right) = 0; \quad (56)$$

$$\Phi_U^{(LSW)}(k, \Omega) = \det \left( \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(1) \right) = 0, \quad (57)$$

а также соответствующего вида уравнения для нахождения вектора  $\mathbf{A}$

$$\left( \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} \right]_{(1,4),(1,2)} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} \right) \Big|_{\xi=1} \mathbf{A} = \mathbf{O}; \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(1) \mathbf{A} = \mathbf{O}. \quad (59)$$

**6. Численный эксперимент.** Анализ дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих волн продольно-сдвигового типа проводился для свободного однородного протяженного цилиндра из алюминия (*Al*)

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}, \quad (60)$$

а также для свободных неоднородных цилиндров, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала которых были заданы так:

$$\tilde{\lambda}(r) = \tilde{\lambda}^{(Al)}(1 + 0,3 r^3), \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (61\text{-A})$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(r) = \tilde{\mu}^{(Al)} (1 + 0, 3r^3), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (61\text{-Б})$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(r) = \tilde{\rho}^{(Al)} (1 + 0, 3r^3); \quad (61\text{-В})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(r) &= \tilde{\lambda}^{(Al)} (1 - 0, 25r^3), \quad \tilde{\mu}(r) = \tilde{\mu}^{(Al)} (1 + 0, 3r^3), \\ \tilde{\rho} &= \tilde{\rho}^{(Al)}. \end{aligned} \quad (61\text{-Г})$$

Здесь  $\tilde{\lambda}^{(Al)} = 5, 91$ ,  $\tilde{\mu}^{(Al)} = 2, 61$ ,  $\tilde{\rho}^{(Al)} = 2, 7$ ,  $C_* = 10^{10} \text{ H/m}^2$ ,  $\rho_* = 10^3 \text{ кг/m}^3$ . Выбор определенных соотношениями (61-А) – (61-Г) законов неоднородности был обусловлен задачей исследовать влияние на топологическую картину спектра, а также графики фазовых и групповых скоростей бегущих волн продольно-сдвигового типа фактора неоднородности по каждой физико-механической характеристике изотропного материала отдельно. Далее волновод, задаваемый физико-механическими характеристиками (60), будет называться однородным волноводом, а с характеристиками (61-А) – (61-Г) – соответственно неоднородным волноводом А, Б, В или Г.

Для неоднородных волноводов А – Г был получен конкретный вид достаточного (аналитического) условия (28), соответственно

$$1 < \delta \leq 1, 844, \quad 1 < \delta \leq 1, 493, \quad 1 < \delta < \infty, \quad 1 < \delta \leq 1, 493. \quad (62)$$

Конкретный вид достаточного (численного) условия (32) для указанных волноводов был получен при  $N = 4$  в соотношениях (30) отдельно для вариантов модели радиальной неоднородности (22-А)

$$1 < \delta \leq 1, 455, \quad 1 < \delta \leq 1, 409, \quad 1 < \delta < \infty, \quad 1 < \delta \leq 1, 461, \quad (63)$$

и (22-Б)

$$1 < \delta \leq 1, 844, \quad 1 < \delta \leq 1, 372, \quad 1 < \delta < \infty, \quad 1 < \delta \leq 1, 141. \quad (64)$$

При этом максимальная погрешность полиномиальной аппроксимации в соотношениях (31) для обоих вариантах модели неоднородности (22-А) и (22-Б) не превысила  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Основываясь на соотношениях (62) – (64) с целью оптимизации вычислительного эксперимента по времени его проведения был выбран вариант модели неоднородности (22-А) и численный подход (29-А), (30) к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ).

В области изменения параметров  $k \in [0, 35]$  и  $\Omega \in [0, 30]$  для однородного волновода и неоднородных волноводов А–Г были построены фрагменты спектров бегущих волн продольно-сдвигового типа. Указанные спектры представлены соответственно на рисунках 2–6.

Сравнение представленных фрагментов спектра позволяет сделать следующие выводы. Неоднородность только по упругому модулю  $\tilde{\lambda}(r)$  (рис. 2, б) не приводит к видимым изменениям спектра по сравнению с однородным волноводом

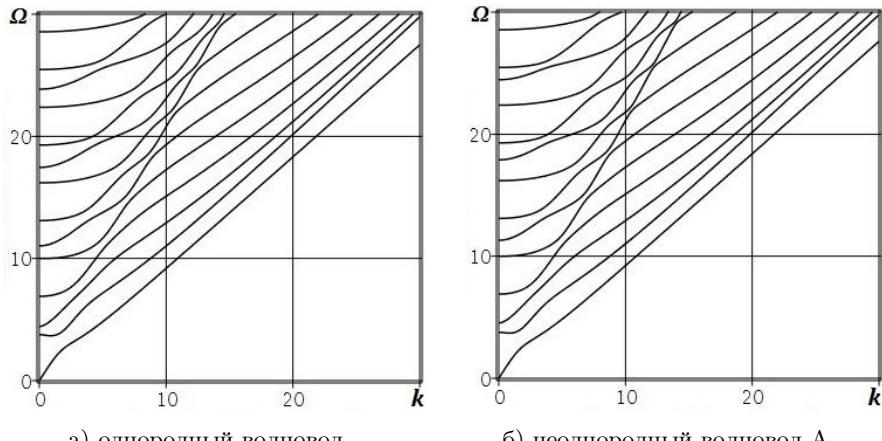


Рис. 2. Фрагменты спектров свободных волноводов

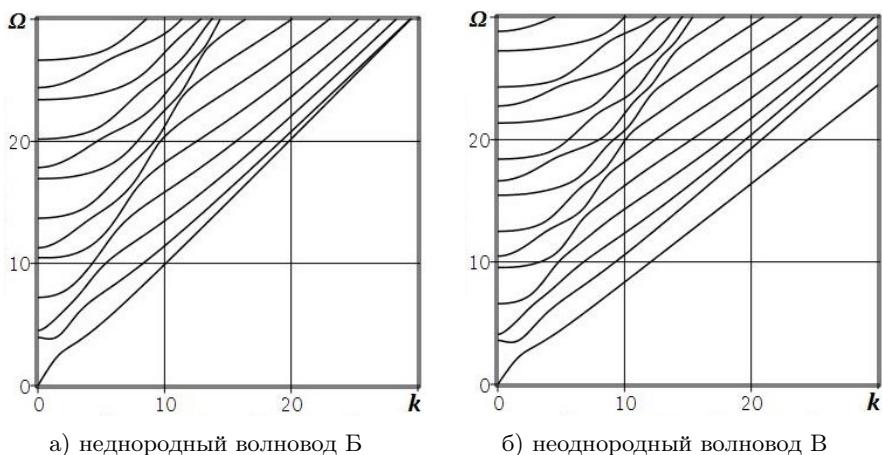


Рис. 3. Фрагменты спектров свободных волноводов

(рис. 2, а), в то время как неоднородность только по упругому модулю  $\tilde{\mu}(r)$  (рис. 3, а) и только по плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 3, б) приводит к существенной перестройке спектральной картины. Сопоставление рисунка 2, а, рисунка 3, а и рисунка 4 иллюстрирует полное доминирование фактора неоднородности по упругому модулю  $\tilde{\mu}(r)$  над модулем  $\tilde{\lambda}(r)$  при формировании спектра неоднородного волновода. В целом можно указать на характерную локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам спектра для однородного волновода (рис. 2, а), а также для волноводов с

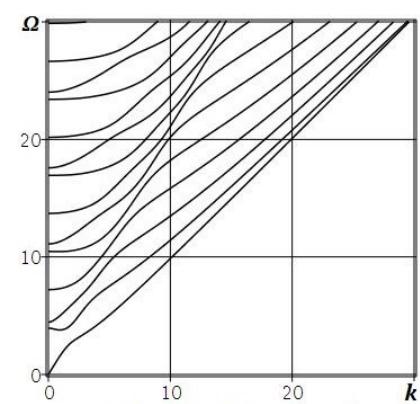


Рис. 4. Фрагмент спектра свободного неоднородного волновода Г

неоднородность только по упругому модулю  $\tilde{\lambda}(r)$  (рис. 2, б) и только по плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 3, б), в то время, как при наличии неоднородности по упругому модулю  $\tilde{\mu}(r)$  (рис. 3, а и рис. 4) указанная тенденция не проявляется.

С целью анализа количественных различий полученных спектров использовалась функция сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left( \Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (65)$$

На рисунках 5–8 представлены результаты сопоставительного анализа поведения низших пяти мод фрагментов спектров однородного и неоднородного волновода А – Г. Номера сопоставляемых мод спектров и тип соответствующей линии

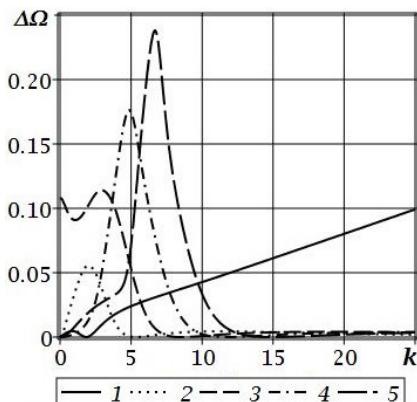


Рис. 5. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода А

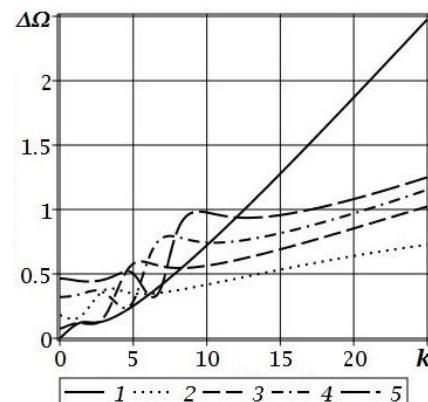


Рис. 6. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода Б

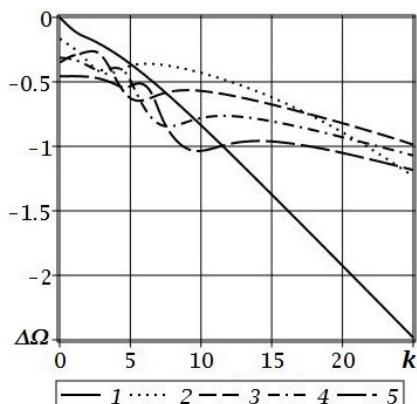


Рис. 7. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода В

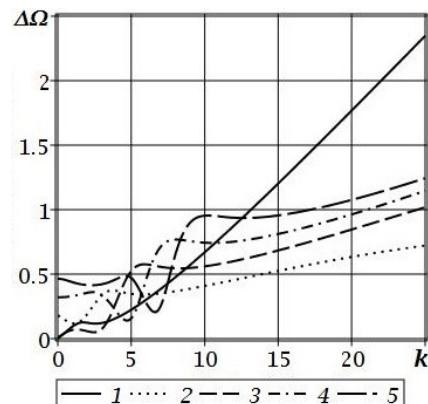


Рис. 8. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода Г

приведены в нижней части рисунков. В качестве характерных можно указать следующие закономерности. Все моды построенных фрагментов спектров неоднородных по упругим модулям волноводов А, Б и Г смешены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более высоких частот. Этот эффект иллюстрируется для низших пяти мод сопоставляемых спектров на рисунках 5, 6, 8. При этом количественные значения функции  $\Delta\Omega(k)$  при сопоставлении спектров однородного волновода и неоднородного по модулю  $\tilde{\lambda}(r)$  волновода (рис. 5) в абсолютных значениях оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении однородного волновода и неоднородных по модулю  $\tilde{\mu}(r)$  (рис. 6, 8) и плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 7) волноводов. Для неоднородного по плотности волновода В тенденция противоположная – все моды построенного фрагмента спектра неоднородного волновода смешены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более низких частот.

Для представленных на рисунках 2, а и 3 фрагментов спектров построены графики фазовых (рис. 9–11) и для низших пяти мод групповых (рис. 12–14) скоростей. На графиках  $c_p$  и  $c_g$  – соответственно пронормированные величиной  $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$  приведенные фазовая и групповая скорости.

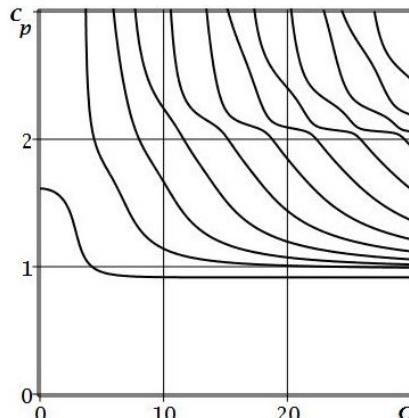


Рис. 9. Фазовые скорости волн  
в однородном волноводе

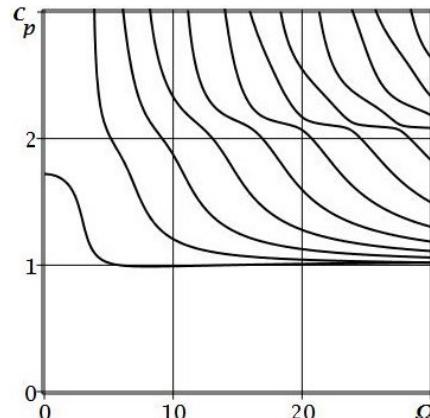


Рис. 10. Фазовые скорости волн  
в неоднородном волноводе Б

Выбранные фрагменты спектров демонстрируют, как уже было отмечено выше, существенное влияние на топологию спектра фактора радиальной неоднородности отдельно по упругому модулю  $\tilde{\mu}(r)$  (рис. 3, а) и плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 3, б). Представленные графики фазовых скоростей иллюстрируют локализацию асимптотического поведения фазовой скорости первой моды для однородного (рис. 9) и неоднородного отдельно по плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 11) волноводов относительно фазовых скоростей старших мод, в то время как асимптотическое поведение фазовых скоростей низших мод неоднородного отдельно по упругому модулю  $\tilde{\mu}(r)$  (рис. 10) волновода имеет единую тенденцию.

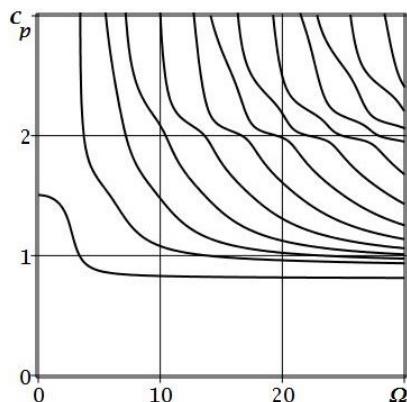


Рис. 11. Фазовые скорости волн  
в неоднородном волноводе В

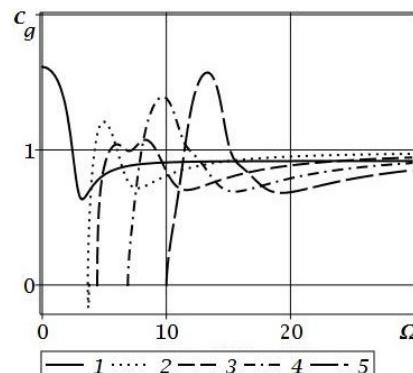


Рис. 12. Групповые скорости волн  
в однородном волноводе

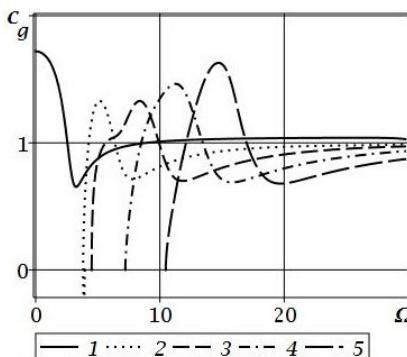


Рис. 13. Групповые скорости волн  
в неоднородном волноводе Б

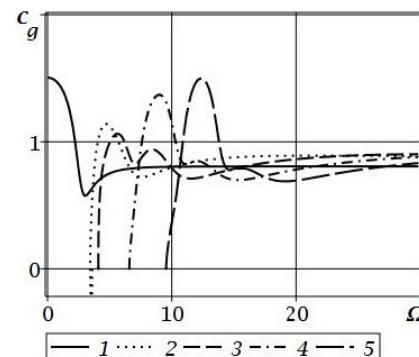


Рис. 14. Групповые скорости волн  
в неоднородном волноводе В

**Выводы.** Полученные результаты перспективны для использования в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализом моделей ультраакустической диагностики, верификацией результатов, полученных прямыми численными методами.

1. *Моисеенко И.А.* Нормальные волны в функционально-градиентных сплошных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1-2 (62-63). – С. 16–34.
2. *Моисеенко И.А.* Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 139–145.
3. *Моисеенко И.А.* Распространение нормальных волн вдоль трансверсально изотропных функционально градиентных цилиндрах // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37–54.
4. *Моисеенко И.А.* Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко

- ко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.
5. *Моисеенко И.А.* Исследование упругих волн крутильного типа с использованием трехфакторной модели функциональной неоднородности трансверсально изотропных сплошных цилиндрических волноводов / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 2(79). – С.5–15. – doi:10.24412/0136-4545-2022-2-5-15. – EDN:ATARHS.
  6. *Моисеенко И.А.* Осесимметричные продольно-сдвиговые упругие волны в протяженных сплошных цилиндрах из шестифакторно функционально неоднородного трансверсально-изотропного материала / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С.33–59. – doi:10.24412/0136-4545-2022-3-33-59. – EDN:NPEDMW.
  7. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.
  8. *Petrowsky I.G.* Sur l'analyticite des solutions des systems d'équations differentielles // Матем. сб. – 1939. – № 5(47). Р. 3–70.

**I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko, N.I. Melnichuk**

**Models of functional inhomogeneity of an isotropic cylindrical waveguide for the case of axisymmetric normal waves.**

A two-factor model for the case of torsional waves and two alternative versions of a three-factor model for the case of longitudinal-shear waves are determined for the radial functional inhomogeneity of the physical and mechanical characteristics of the isotropic material of a cylindrical waveguide. Two approaches to determining the functional components of these models are presented. For each of these approaches, within the framework of each of the presented models, a sufficient condition for a weak radial inhomogeneity is determined, which ensures the construction of the target basic solution of the corresponding equations of the classical mathematical model of wave deformation. Basic solutions are constructed, the elements of which are expressed in terms of analytic functions represented by their expansions with coefficients determined from explicit recurrent relations. A comparative analysis of the results of a numerical experiment is given for the cases of homogeneous and functionally inhomogeneous isotropic free waveguides. The effects of the influence of the functional radial inhomogeneity of the waveguide material on the topology of the dispersion spectra and the distribution of phase and group velocities of longitudinal-shear traveling waves are studied. Quantitative and qualitative estimates of the obtained numerical results are given.

**Keywords:** *FGMs, isotropy, cylindrical waveguide, axisymmetric waves, multifactorial model of radial inhomogeneity, basic solution, dispersion relations.*

Получено 02.02.2023



©2023. Ж.Л. Глухова<sup>1</sup>

## О СОПРЯЖЕННЫХ ЯВЛЕНИЯХ ПРИ ДИФФУЗИИ ВОДОРОДА В МЕТАЛЛАХ

В настоящей статье дан анализ взаимосвязи явлений термоупругости, водородоупругости и термодиффузии, а также выполнен краткий обзор проявлений каждого из них.

**Ключевые слова:** водородоупругость, термоупругость, термодиффузия, сопряженные явления.

**Введение и постановка задачи.** Термоупругость, водородоупругость и термодиффузионные эффекты представляют собой сопряженные физические явления, которые взаимосвязаны между собой. Термические напряжения и последствия их действия представляют интерес для многих смежных областей науки о материалах: металловедения и термической обработки металлов, физики твердого тела, механики. Постепенно сложилась самостоятельная область науки – термоупругость [1, 2], которая исследует взаимодействие поля деформаций и поля температуры. В последние десятилетия в области физики металлов и металловедения наблюдается неуклонно возрастающий интерес к проблемам взаимодействия водорода с металлами. Одним из важнейших факторов водородного воздействия на материалы являются водородные концентрационные напряжения, которые будучи аналогичными термическим напряжениям, могут вызывать коробление изделий, их разрушение и другие эффекты. Совокупность эффектов, возникающих при появлении поля деформаций в следствие диффузии, в целом рассматривается как явление водородоупругости [3–9]. Процесс растворения водорода в металлах сопровождается возникновением градиента температуры, проявлением термодиффузионных эффектов [10–12].

В данной статье дан краткий обзор взаимосвязи явлений термоупругости, водородоупругости и термодиффузии, а также форм проявлений каждого из них.

**1. Сопряженные явления и соответствующие им эффекты.** На рисунке 1 диаграммой Хекмана представлена взаимозависимость водородного, механического и термического воздействий. Факторы воздействий ( $C_{H_2}$ -концентрации водорода,  $\sigma_{ij}$  – механические напряжения;  $T$  – температура) являются в понятиях термодинамики «обобщенными силами». Они на диаграмме размещены в

<sup>1</sup>Глухова Жанна Лукьяновна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. физики ДонНТУ, Донецк, e-mail: zhglukhova@yandex.ru.

Glukhova Zhanna Lukyanovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National Technical University, Donetsk, Chair of Physics.

вершинах внешнего треугольника. В вершинах внутреннего треугольника помещены непосредственные результаты воздействия обобщенных сил ( $\mu$  - химический потенциал,  $\varepsilon_{ij}$  - деформации,  $S$  - энтропия).

Малое изменение напряжений  $d\sigma_{ij}$  в соответствии с законом Гука вызывает деформации  $d\varepsilon_{ij}$ , описываемые соотношением  $d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}d\sigma_{kl}$ , где  $S_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных. Изменение концентрации водорода изменяет химический потенциал  $\mu$  системы Ме-Н. В то же время, изменение температуры  $dT$  приводит к изменению энтропии  $dS$ . Данные эффекты представлены линиями, соединяющими внутренние и внешние вершины треугольников.

Сопряженные явления и соответствующие им эффекты представлены линиями связи между вершинами внешнего, а также между вершинами внутреннего треугольников.

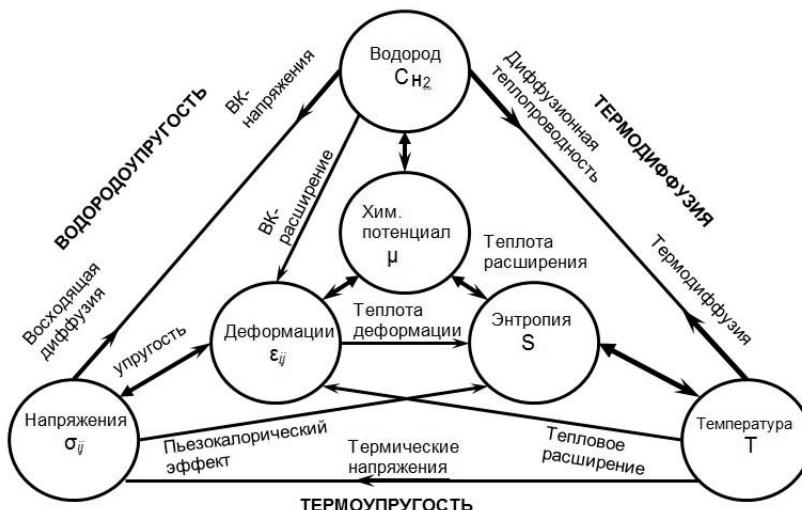


Рис. 1. Взаимосвязь между механическими, концентрационными и тепловыми параметрами системы Ме-Н

Термоупругие явления представлены в нижней части диаграммы, изображенной на рисунке 1. Это тепловое расширение (деформации, причиной которых является изменение температуры) и пьезокалорический (барокалорический) эффект (тепловыделение вследствие механических напряжений). Изменение температуры при невозможности свободного расширения материала приводит к возникновению термических напряжений и выделению тепла. Эти эффекты показаны горизонтальными линиями.

**2. Уравнения термоупругости и водородоупругости.** Механическое и тепловое состояния среды в заданный момент времени полностью описывается распределением деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , напряжений  $\sigma_{ij}$  и температуры  $T$ . Основные соотношения и уравнения термоупругости – это уравнения, связывающие тензор напряжений с тензором деформаций и температурой и уравнение теплопроводности с членом, учитывающим связь механических и тепловых процессов.

При произвольном изменении температуры в упругом теле из-за неоднородного сжатия возникают дополнительные упругие деформации, характеризующие сопротивление материала температурному удлинению и связанные с температурными напряжениями. Согласно Дюамелю и Нейману, для термоупругих деформаций и напряжений справедлив закон Гука в форме [1–2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] + \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E \varepsilon_{kk} \delta_{ij}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} - \frac{E}{1 - 2\nu} (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{kk}$  и  $\varepsilon_{kk}$  – след тензора напряжений и деформаций, соответственно;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Уравнения (1)–(2) называют обобщенным законом Гука или соотношениями Дюамеля-Неймана.

Обобщенное уравнение теплопроводности выведено из закона сохранения энергии, выраженного в виде уравнения переноса энтропии.

С учетом закона теплопроводности Фурье и выражения для энтропии как функции напряжений, деформаций и температуры [1], обобщенное уравнение теплопроводности в термоупругости имеет вид:

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + T (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \dot{\varepsilon}_{kk}, \quad (3)$$

где  $\lambda_T$  – коэффициент теплопроводности,  $c_\varepsilon$  – теплоемкость при постоянном тензоре деформаций,  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе, точкой сверху обозначены частные производные по времени.

Записанные в векторной форме для перемещений уравнения (3) и уравнения движения составляют систему уравнений термоупругости:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \operatorname{grad} T = \rho \ddot{\vec{u}}, \quad (4)$$

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \dot{T} - \frac{T (3\lambda + 2\mu) \alpha_T}{\lambda_T} \operatorname{div} \dot{\vec{u}} = 0, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности,  $\vec{u}$  – вектор перемещений.

Уравнения (4) и (5) при определенных начальных и граничных условиях описывают изменение в пространстве и во времени поля деформаций и температурного поля.

Левая часть диаграммы, представленной на рисунке 1, иллюстрирует водородоупругие эффекты: водородное концентрационное (ВК) расширение металлической решетки; ВК-напряжения и поток водорода, причиной которого является градиент напряжений («восходящая» диффузия).

Водородоупругие эффекты, наблюдаемые в системах металл-водород, во многом определяются уникальными диффузионными свойствами этих систем. Как известно [9], сплавы металл-водород состоят из двух неэквивалентных в диффузионном отношении подсистем: кристаллической матрицы с малой диффузионной подвижностью атомов и внедренных атомов водорода, диффузионная

подвижность которых весьма велика. При условиях, близких к нормальным, коэффициенты диффузии водорода в металлах в  $10^{20}$ – $10^{30}$  раз больше коэффициентов самодиффузии атомов металла [9].

Растворенный в металле водород вызывает расширение кристаллической решетки. Неравномерное распределение водорода приводит к появлению водородных концентрационных (ВК) напряжений.

Для ряда задач, в которых можно ограничиться рассмотрением изменения концентрации водорода и упругих напряжений вдоль одного направления (выбирая условно направление вдоль оси  $x$ ), можно пользоваться одномерным вариантом уравнений водородоупругости:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{D} w B_c c \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = 0, \quad (6)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{D} w \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

где  $u_x$  – проекция вектора перемещения на ось  $x$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  – модули упругости Ламе;  $w$  – коэффициент линейного расширения материала под воздействием водорода;  $D$  – коэффициент диффузии водорода;  $B$  – параметр, называемый водородоемкостью [8]. Эта величина определяется по экспериментальным данным из  $P$ - $T$ - $c$  диаграмм. Примерами таких задач, где концентрацию можно рассматривать как функцию одной пространственной переменной, являются процесс одностороннего насыщения палладиевой пластины или процесс растворения локальной неоднородности шарообразной формы.

**3. Диффузионные проявления водородоупругости.** При отсутствии внешних и внутренних напряжений и постоянной температуре диффузионный поток водорода можно описать по закону Фика, согласно которому диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации. Однако, в системах материал-водород любой градиент концентрации водорода приводит не только к появлению фиковых потоков, но и вызывает появление водородных концентрационных напряжений. При этом на фоне фиковой диффузии появляется направленное дрейфовое перемещение атомов под действием поля водородоупругих напряжений. В этом случае поток водорода определяется как

$$\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_\sigma, \quad (8)$$

где  $\vec{J}_c$  и  $\vec{J}_\sigma$  – соответственно, концентрационный поток (фиковый) и поток, обусловленный полем водородных концентрационных напряжений. Параметр  $\vec{J}_\sigma$  вносит в общий диффузионный поток атомов компоненту восходящей диффузии, осуществляющейся против градиента концентрации.

Соотношение вкладов этих потоков определяет различные диффузионные проявления водородоупругости. В случае, когда первый член в правой части уравнения (8) больше, чем второй, должно проявляться замедление диффузионных потоков. Этот эффект экспериментально наблюдался при исследовании

обратного  $\beta \rightarrow \alpha$  гидридного превращения и дегазации палладия а также отмечен в ряде работ [3–5], посвященных влиянию самоиндуцированных (вызванных самим процессом переноса) напряжений на диффузионный процесс в системах металл-водород. В [3] показано, что при стационарной диффузии водорода в трубчатых мембранах из палладия и палладиевых сплавов самоиндуцированные напряжения в этих мембранах уменьшают величину диффузионного потока. По мнению авторов [3], это приводит к тому, что профили концентрации водорода в мембране в случае стационарных диффузионных потоков имеют нелинейный вид. В [13] для случая насыщения образца водородом показано, что при понижении температуры водород все медленнее проникает в глубь металла, локализуясь в основном в тонком приповерхностном слое. Это качественно согласуется с экспериментальными результатами, полученными при насыщении водородом образцов из ниобия [14] и палладия [13, 15–16]. Авторами работ [13, 17] локализация водорода вблизи поверхности объясняется автолокализацией внедренных атомов собственным полем деформаций: локализуется не отдельный атом, а концентрационная «неоднородность» атомов водорода.

В случае, когда преобладает второй член в правой части уравнения (8), имеет место восходящая диффузия. Это явление для металлических сплавов впервые было описано В.С. Горским [18] и С.Т. Конобеевским [19]. Восходящая диффузия, как физическое явление, лежит в основе многих структурных процессов в металлах и сплавах, например: диффузионно-фазовые переходы, диффузионная сегрегация, старение металлических сплавов и др. На макроскопическом уровне восходящая диффузия реализуется в «Uphill»-эффекте (эффекте Льюиса) [4, 5].

При равенстве первого и второго членов в правой части уравнения (8), когда концентрационный и обусловленный полем упругих напряжений потоки компенсируют друг друга, становится возможным наступление термо(баро)-упруго-диффузионного равновесия. Эффект ТБУД-равновесия был предсказан, затем экспериментально подтвержден на микроскопическом уровне при исследовании прямого гидридного превращения в системе палладий-водород [20]. Позже этот эффект наблюдали на макроскопическом уровне при исследовании дегазации гидрида палладия [21].

К механическим проявлениям водородоупругости также относятся такие явления, как эффект Горского (упругое последействие) [6], локальное обратимое выпучивание поверхности металла, макроскопическое обратимое формоизменение [7, 8].

**4. Термодиффузионные эффекты.** В правой части диаграммы (рис. 1) представлено явление термодиффузии. Оно выражается в виде перераспределения водорода под воздействием градиента температуры. Данное явление проявляется также в сопутствующих эффектах. Во-первых, это выделение либо поглощение тепла при растворении водорода (теплота растворения). Во-вторых, это появление разности температур в результате диффузии (диффузионная теплопроводность).

Базовое уравнение, описывающее распределение водорода при наличии гра-

диента температуры, можно представить в виде:

$$D \frac{\partial c}{\partial x} + D^* c (1 - c) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где  $c$  – концентрация водорода;  $T$  – температура;  $D$  – коэффициент диффузии;  $D^*$  – коэффициент термодиффузии. Явление термодиффузии больше известно для газовых смесей. Известно, что более легкий из газов смеси мигрирует в область повышенных температур. Термодиффузии газов в металлах посвящено не так много публикаций [10–12]. Установлено, что данный процесс в металлах отличается от соответствующего процесса в газовых смесях. Отличие связано с появлением термоапрессий вследствие неравномерной температуры [10–12]. Образуется взаимообусловленная связь с термоупругими эффектами.

**Заключение.** Таким образом, анализ взаимосвязи явлений термоупругости, водородоупругости и термодиффузии говорит о необходимости комплексного подхода, поскольку проявление какого-либо из эффектов, относящихся к любому из описанных выше явлений, приводит к инициации сопряженных эффектов и явлений.

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1965. – 203 с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 211 с.
3. Kandasamy K. Influences of self-induced stress on permeation flux and space-time variation of concentration during diffusion of hydrogen in a palladium alloy / K. Kandasamy // Int. Journal Hydrogen Energy. – 1995. – Vol. 20, № 6. – P. 455–463.
4. Lewis F.A. Uphill diffusion effects induced by self-stress during hydrogen diffusion through metallic membranes / F.A. Lewis, B. Baranowski, K. Kandasamy // Journal of the Less-Common Metals. – 1987. – Vol. 134. – P. 27–31.
5. Lewis F.A. The “Uphill” diffusion of hydrogen: strain-gradient-induced effects in palladium alloy membranes / F.A. Lewis, K. Kandasamy, B. Baranowski // Int. Journal Hydrogen Energy. – 1988. – Vol. 13, № 17. – P. 439–442.
6. Verbruggen A.H. Gorsky effect in concentrated  $\alpha$ -PdH<sub>x</sub> / A.H. Verbruggen, C.W. Hagen C.W. and R. Grissen Gorsky // Journal Phys. F: Met. Phys. – 1984. – Vol. 14. – P. 1431–1444.
7. Goltsov V.A. Hydrogen elasticity phenomenon: Experimental manifestations and theory / V.A. Goltsov, Zh.L. Glukhova, O.A. Minakova // Journal of Alloys and Compounds. – 2005. – Vol. 404–406. – P. 576–579.
8. Глухова Ж.Л. Явление водородоупругости в системах металл-водород / Ж.Л. Глухова, В.А. Гольцов // Международный научный журнал «Альтернативная энергетика и технология» – 2014. – № 1(141). – С. 138–151.
9. Гольцов В.А. О природе диффузионно-кооперативных (гидридных) превращений / В.А. Гольцов // Изв. вузов. Цветн. металлург. – 1987. – № 1. – С. 88–96.
10. Маннинг Дж. Кинетика диффузии атомов в кристаллах / Дж. Маннинг. – М.: Мир, 1971. – 277 с.
11. Гегузин Я.Е. Движение макроскопических включений в твердых телах / Я.Е. Гегузин, М.А. Кривоглаз. – М.: Металлургия, 1971. – 344 с.
12. Власов Н.М. Термодиффузия водорода в цирконии с учетом термоапрессий / Н.М. Власов, В.А. Зазноба // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, вып. 5. – С. 49–53.
13. Смирнов Л.И. Влияние химического и деформационного взаимодействия атомов водорода на их диффузию в металлах / Л.И. Смирнов, В.А. Гольцов, Б.А. Лобанов, Э.В. Рузин. // Физика металлов и металловедение. – 1985. – Т. 60, № 4. – С. 770–775.

14. *Strongin M.* Surface bulk uptake of hydrogen by Niobium / M. Strongin, L. Colbert, G. Dienes, D. Welch // Phys. Rev. B: Condens. Mater. – 1982. – Vol. 26, № 6. – P. 2715–2719.
15. *Bloch J.* Kinetics and mechanisms of metal hydrogen formation – a preview / J. Bloch, M.H. Mintz // Journal Alloys and Compounds. – 1997. – Vol. 253–254. – P. 529–541.
16. *Белащ В.П.* Исследование электронной структуры соединения Pd-Н методами фотоэлектронной спектроскопии / В.П. Белащ, И.Н. Климова, В.И. Кормилец // Физика металлов и металловедение. – 1997. – Т. 84, № 2. – С. 53–58.
17. *Гольцов В.А.* Диффузия и растворимость водорода в металлах и упорядочивающихся сплавах / В.А. Гольцов, В.В. Латышев, Л.И. Смирнов, под ред. А.П. Захарова // Взаимодействие водорода с металлами. – М.: Наука, 1987. – С. 105–143.
18. *Gorsky W.S.* Theorie der elastischen Nachwirkung in ungeorgneten Mischkristallen (Elastische Nachwirkung zweiter Art.) / W.S. Gorsky // Phys. Z. Sowjetunion. – 1935. – N 8. – P. 457–471.
19. *Конобеевский С.Т.* Диффузия в твердых растворах под влиянием распределенных напряжений / С.Т. Конобеевский // ЖЭТФ. – 1943. – Вып. 6. – С. 200–214.
20. *Гольцов В.А.* Кинетические и морфологические особенности гидридных превращений в системах металл-водород / В.А. Гольцов, Ю.А. Артеменко // Физика металлов и металловедение. – 1991. – № 2. – С. 181–188.
21. *Гольцова М.В.* О критическом замедлении водорода в системе палладий-водород / М.В. Гольцова, Ю.А. Артеменко, Л.И. Смирнов // Физика металлов и металловедение. – 2000. – Т. 89. – С. 169–172.

**Zh.L. Glukhova**

**On connected phenomena in the diffusion of hydrogen in metals.**

This article analyzes the relationship between the phenomena of thermoelasticity, hydrogen-elasticity and thermodiffusion, and also provides a brief overview of the manifestations of each of them.

**Keywords:** *hydrogen elasticity, thermoelasticity, thermodiffusion, connected phenomena.*

*Получено 14.02.2023*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-69-80

EDN:KACEJS



©2023. С.В. Закора<sup>1</sup>, В.Н. Чехов<sup>2</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, НАГРУЖЕННЫМ СОВМЕСТНО УСИЛИЕМ И МОМЕНТОМ

Применение многозначных аналитических решений в рамках теории типа С.П. Тимошенко позволило получить уточнённое аналитическое решение проблемы напряжённого состояния в пологой сферической оболочке с круговым жёстким включением, совместно нагруженным тангенциальным усилием и изгибающим моментом. В результате численных исследований установлено, что для такого варианта нагружения при увеличении параметра поперечного сдвига и уменьшении радиуса жёсткого включения относительные напряжения возрастают в несколько раз. Также обнаружено, что влияние поперечного сдвига особенно важно для относительно небольшого диаметра жёсткого включения.

**Ключевые слова:** аналитическое решение, теория типа С.П. Тимошенко, пологая сферическая оболочка, трансверсально-изотропный материал, жёсткое включение, деформация поперечного сдвига, совместное действие, тангенциальное усилие, изгибающий момент.

**Введение.** Тонкостенные оболочки являются одним из основных несущих элементов объектов и изделий во многих отраслях современной промышленности. Можно констатировать, что к настоящему времени достаточно полно разработаны методы определения напряжённого состояния и решён ряд задач для оболочек с концентраторами напряжений в виде технологических отверстий [1–5], включений [2, 5–7] и локальных воздействий [2, 3 (гл. 24)]. Но в большинстве работ предполагалось нагружение оболочки равномерным внутренним давлением, растяжением, кручением, или сосредоточенной силой. В меньшей степени исследовано распределение напряжений в тонкостенных оболочках, нагруженных усилием и моментом через жёсткое включение; аналитические решения и численные результаты получены для изотропных (в рамках классической тео-

<sup>1</sup> Закора Сергей Владимирович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та мат. и инф. технологий ДонНУ, Донецк, e-mail: zakorasv3@gmail.com.

Zakora Sergey Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Donetsk National University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

<sup>2</sup> Чехов Валерий Николаевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики физ.-тех. института КФУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, e-mail: chekhov40@mail.ru.

Chekhov Valeriy Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Institute of Physics and Technology, Chair of Applied Mathematics.

рии Кирхгофа-Лява) сферической [3 (гл. 24), 7] и цилиндрической [2] оболочек. Кроме того, в связи с широким применением в технике композитных материалов, стали актуальными задачи для трансверсально-изотропных оболочек. Посредством замены геометрической гипотезы Кирхгофа-Лява на более общую гипотезу С.П. Тимошенко была создана уточнённая теория тонких упругих оболочек, на базе которой в работах [1, 2] был разработан метод решения задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями и включениями. Позже в работе [4] на базе этой же сдвиговой модели был предложен приближённый вариант «технической теории трансверсально-изотропных оболочек». Применение этих методов позволило получить результаты для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями, подкрепляющими кольцами и включениями [2, 4, 5]. Ряд результатов по изучению концентрации напряжений около отверстий и жёстких включений в оболочках, изготовленных из композитных материалов, получен также с использованием вариационных конечно-разностных методов, например, в [8, 9]. Но и для трансверсально-изотропных оболочек в постановке задач и их решении предполагалось нагружение оболочки равномерным внутренним давлением, растяжением или кручением.

В данной статье в рамках теории С.П. Тимошенко предлагается аналитическое решение задачи и реализуются численные исследования при нагружении через круговое абсолютно жёсткое включение в пологой трансверсально-изотропной сферической оболочке. При этом здесь в отличие от [10] применяются многозначные решения [2], что позволило исследовать случай совместного действия сдвигающего усилия и изгибающего момента.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим пологую трансверсально-изотропную сферическую оболочку с круговым недеформируемым включением (рис. 1). Предполагаем, что жёсткая шайба нагружена сдвигающим усилием  $F_x$  и изгибающим моментом  $B_y$ .

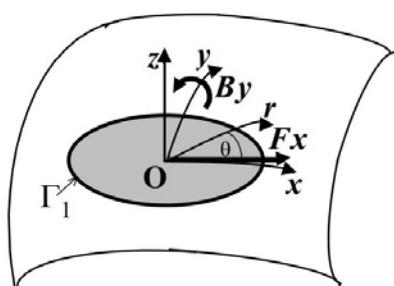


Рис. 1.

Для решения задачи применялась система однородных разрывающих дифференциальных уравнений, основанных на уточнённой теории типа С.П. Тимошенко, учитывающей деформации поперечного сдвига [2]:

$$\nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w = 0;$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U - 2\delta \nabla^2 \nabla^2 U = 0; \quad (1)$$

$$(1 - \nu) \delta \nabla^2 \chi - \chi = 0.$$

Здесь  $U, w, \chi$  — искомые функции усилий, прогиба и поперечного сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  — оператор Лапласа в полярной системе координат  $(\rho, \theta)$ , где  $\rho = \frac{r}{\sqrt{cR}}$  — безразмерный радиус-вектор,  $r \cdot e^{i\theta} = x + iy$ ;  $\delta = \frac{Ehc}{2KR}$  — относительный безразмерный параметр податливости поперечным сдвигам, где  $K = \mu G_1 h$ ,  $c = h/\sqrt{12(1 - \nu^2)}$ ,

$E$  – модуль Юнга,  $G_1$  – модуль трансверсального сдвига,  $\mu = 5/6$  – коэффициент сдвига,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки,  $h$  – толщина оболочки,  $i$  – мнимая единица.

**2. Построение аналитических решений.** Решения системы дифференциальных уравнений (1) определим с помощью цилиндрической, полигармонической и аналитической частей:

$$U = U_c + i \frac{R}{2} U_a, \quad (2)$$

$$w = w_c + \frac{R}{2} w_p. \quad (3)$$

В (2) аналитическая часть  $U_a$  согласно [2] имеет вид:

$$\begin{aligned} U_a(r, \theta) = & (\alpha_1 + \bar{\alpha}_2) [(1 + 2\ln r) r \cos \theta - 2t \sin \theta] + \\ & + (\beta_1 + \bar{\beta}_2) (1 + \ln r) + (\gamma_1 + \bar{\gamma}_2) \frac{1}{r} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом, согласно [2], необходимо выполнить условия однозначности комплексных смещений:

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \beta_1 = -\beta_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 4icR(1 + \nu)\bar{\alpha}_1. \quad (5)$$

Главный вектор и главный момент внешних усилий, приложенных к жёсткой шайбе, определяются согласно [2]:

$$\begin{aligned} F_X &= 2\pi EhcRIm(\alpha_1 - \alpha_2), \\ F_Y &= 2\pi EhcRRe(\alpha_1 - \alpha_2), \\ F_Z &= \pi EhcIm(\beta_1 - \beta_2), \\ B_Z &= -\pi EhcRRe(\beta_1 - \beta_2), \\ B_X &= \pi EhcRe[(\gamma_1 - \gamma_2) + 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)], \\ B_Y &= \pi EhcIm[(\gamma_1 - \gamma_2) - 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Комплексные неизвестные постоянные  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) определяются из системы уравнений (5), (6) при заданных значениях соответствующих компонент.

**3. Аналитическое решение при совместном действии сдвигающего усилия и изгибающего момента.** Полагается, что задано  $F_X = F_X^0$  и  $B_Y = B_Y^0$ , а остальные компоненты равны нулю. Из системы уравнений (5)–(6) получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{iF_X^0}{4\pi EhcR}, \quad \alpha_2 = -\frac{iF_X^0}{4\pi EhcR}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \\ \gamma_1 &= \frac{(1 + \nu)F_X^0}{2\pi Eh} + \frac{iB_Y^0}{2\pi Ehc}, \quad \gamma_2 = \frac{(1 + \nu)F_X^0}{2\pi Eh} - \frac{iB_Y^0}{2\pi Ehc}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналитическая часть (4) упростится и примет вид:

$$U_a(r, \theta) = \frac{iF_X^0}{2\pi EhR} [(1 + 2lnr) rcos\theta - 2tsin\theta] + \left[ (1 + \nu)F_X^0 + \frac{iB_Y^0}{c} \right] \frac{cos\theta}{\pi Ehr}. \quad (8)$$

Из (8) очевидно, что цилиндрические части в (2) и полигармоническая часть (3) будут содержать только 1-ю гармонику.

Цилиндрические части решения, убывающие по абсолютной величине при удалении от контура  $\Gamma_1$ , имеют три различные аналитические формы в зависимости от диапазона изменения параметра податливости поперечным сдвигам  $\delta$  [2]. Решение уравнений (1) записывается в полярных координатах  $\rho, \theta$  на срединной поверхности оболочки в виде:

в интервале  $0 < \delta < 1$ :

$$U_c = aK_1(\sigma\rho)cos\theta, \quad w_c = \sigma^2 aK_1(\sigma\rho)cos\theta;$$

для  $\delta = 1$ :

$$U_c = [AK_1(\rho) + B\rho K_0(\rho)] cos\theta, \quad w_c = [(A - 2B) K_1(\rho) + B\rho K_0(\rho)] cos\theta;$$

при  $\delta > 1$ :

$$U_c = [AK_1(\omega\rho) + BK_1(\rho/\omega)] cos\theta, \quad w_c = [\omega^2 AK_1(\omega\rho) + \omega^{-2} BK_1(\rho/\omega)] cos\theta.$$

Для всего диапазона  $\delta$ :  $\chi = M \cdot K_1(\lambda\rho)sin\theta$ ,  $w_p = F/r cos\theta$ . Здесь  $M$  и  $F$  – вещественные постоянные;  $\lambda = 1/\sqrt{(1-\nu)\delta}$ ;  $K_m(z)$  – цилиндрические функции Макдональда;  $\omega = \sqrt{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}$ ;  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \delta} + i\sqrt{1 - \delta})$ ;  $a = A + iB$ , где  $A, B$  – вещественные постоянные.

На границе  $\Gamma_1$  абсолютно жёсткого включения формулировались деформационные краевые условия

$$\varepsilon_{\tau\tau} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{\tau\tau} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{n\tau} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{\tau\nu} \Big|_{\Gamma_1} = 0. \quad (9)$$

**4. Выражения для деформационных краевых величин, усилий и моментов.** Выражения для деформационных краевых величин, вошедших в (9), имеют вид:

$$\begin{aligned} Eh\varepsilon_{\tau\tau} &= T_\theta - \nu T_\rho, \quad \frac{Eh^2}{2} \kappa_{\tau\tau} = \frac{6}{h} (G_\theta - \nu G_\rho) - \frac{\delta\sqrt{3 - 3\nu^2}}{\rho} \sqrt{\frac{R}{c}} Q_\rho, \\ \frac{Eh^2}{2} \kappa_{\tau\nu} &= \frac{6(1 + \nu)}{h} H_{r\theta} - \delta\sqrt{3 - 3\nu^2} \sqrt{\frac{R}{c}} \frac{dQ_\theta}{d\rho}, \\ Eh\kappa_{n\tau} &= \frac{dT}{dr} - (1 + \nu) \frac{1}{r} \frac{dS_{\rho\theta}}{d\theta} - \delta\sqrt{\frac{R}{c}} Q_\rho. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражения для усилий и моментов, вошедших в (10), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T_\theta &= \frac{Eh}{R} Re \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}, \quad T_r = \frac{Eh}{R} Re \nabla^2 U - T_\theta, \quad T = T_r + T_\theta, \\
 H_{r\theta} &= \frac{Eh}{R} (1 - \nu) c Re \left[ \delta \left( \nabla^2 \chi - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \right], \\
 G_r &= \frac{Eh}{R} c Re \left[ \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (11) \\
 S_{r\theta} &= -\frac{Eh}{R} Re \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \quad G_\theta = -\frac{Eh}{R} (1 + \nu) c Re \nabla^2 g - G_r, \\
 Q_r &= \frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} Re \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 g \right), \quad Q_\theta = -\frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} Re \left( \frac{\partial \chi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 g \right),
 \end{aligned}$$

где  $g = w + 2\delta \nabla^2 w - 4\delta^2 \nabla^2 U$ .

Подставляя усилия и моменты (11) с учётом (10) в краевые условия (9) и приравнивая члены при одинаковых гармониках, можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных вещественных постоянных  $A, B, F, M$ . Поскольку комплексные неизвестные постоянные  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) предварительно найдены в (7), то аналитическими частями (8) также определяются правые части системы.

После решения полученной системы были найдены безразмерные коэффициенты концентрации мембранных, изгибных и касательных напряжений

$$k_\theta^T = T_\theta/d, \quad k_r^T = T_r/d, \quad k_\theta^B = \frac{6G_\theta}{dh},$$

$$k_r^B = 6G_r/dh, \quad \tau_{r\theta}^T = S_{r\theta}/d, \quad \tau_{r\theta}^B = 6H_{r\theta}/dh.$$

При этом для  $F_X$  и для  $B_Y$  соответственно:

$$d = \frac{F_X^0}{\pi \sqrt{Rc \cdot sca}}, \quad d = \frac{B_Y^0}{\pi c \sqrt{Rc \cdot sca}}, \quad (12)$$

где  $sca$  - масштабный множитель.

Затем вычисляются относительные эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности [2]:

$$k_\theta = k_\theta^T \pm k_\theta^B, \quad k_r = k_r^T \pm k_r^B, \quad k_{r\theta} = \tau_{r\theta}^T \pm \tau_{r\theta}^B, \quad (13)$$

$$k_{eq} = \sqrt{k_r^2 + k_\theta^2 - k_r k_\theta + 3k_{r\theta}^2}. \quad (14)$$

Относительным эквивалентным напряжениям на наружной поверхности оболочки  $k_{eq}^{Ext}$  в формулах (13) соответствует знак «+», а на внутренней  $k_{eq}^{Int}$  – знак «-».

**5. Численные исследования и анализ результатов.** Были проведены расчёты для трансверсально-изотропной сферической оболочки с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$  при различных значениях радиуса жёсткой шайбы  $\rho_0$  в зависимости от параметра сдвига  $\delta$ . В таблицах и на графиках для нагружения усилием  $F_X$  совместно с моментом  $B_Y$  приведены значения вычисленных напряжений на контуре  $\Gamma_1$  кругового жёсткого включения в увеличенном масштабе 10:1, т.е. значение масштабного множителя в (12)  $sca = 10$ .

На рисунке 2 приведены графики относительных напряжений по контуру  $\Gamma_1$  в зависимости от угла  $\theta$ , а на рисунке 3 – в зависимости от параметра сдвига  $\delta$ . На рисунках эквивалентные напряжения на наружной поверхности обол-

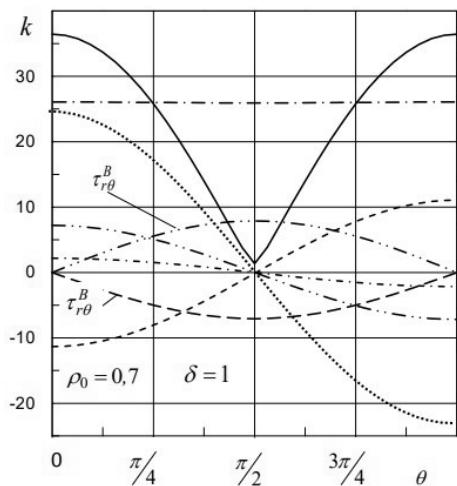


Рис. 2

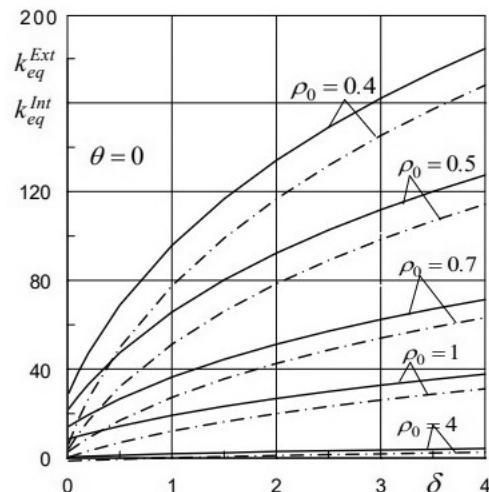


Рис. 3

лочки  $k_{eq}^{Ext}$  показаны сплошными линиями, а на внутренней поверхности  $k_{eq}^{Int}$  – длинными штрихами пунктирными. На рисунке 2 кроме  $k_{eq}^{Ext}$  и  $k_{eq}^{Int}$  приведены ещё мембранные напряжения  $k_r^T$  – штрих-двуих-пунктирными линиями,  $k_\theta^T$  – штрих-пунктирными; изгиблые напряжения  $k_r^B$  – пунктирными линиями и  $k_\theta^B$  – штриховыми линиями, напряжения  $\tau_{r\theta}^B$  показаны длинными штрих-двуих-пунктирными линиями, а  $\tau_{r\theta}^T$  – длинными штриховыми линиями. На рисунке 3 над линиями указаны соответствующие им значения радиуса жёсткой шайбы  $\rho_0$ .

Из рисунка 2 (и табл. 1) видно, что наиболее опасными становятся относительные эквивалентные напряжения на внутренней поверхности оболочки  $k_{eq}^{Ext}$  и  $k_{eq}^{Int}$  в точке контура жёсткого включения  $\theta = 0$  (и симметрично – при  $\theta = \pi$ ). Поэтому на рисунке 3 приведены значения  $k_{eq}^{Ext}$  и  $k_{eq}^{Int}$  в точке  $\theta = 0$ , как наибольшие в оболочке. Из рисунка 3 и таблицы 1 видно, что при увеличении параметра  $\delta$  и уменьшении радиуса жёсткой шайбы  $\rho_0$  относительные напряжения  $k_{eq}^{Ext}$  и  $k_{eq}^{Int}$  значительно возрастают. Их рост обусловлен увеличением изгиблых напряжений  $k_r^B$ ,  $k_\theta^B$ , как это видно из таблицы 1.

Следует также отметить следующее. Из таблицы 1 видно, что при  $\rho_0=2$  и

изменении  $\delta$  от 0 до 4 наибольшие напряжения  $k_{eq}^{Ext}$  увеличились в 2,2 раза. А из таблицы 2 видно, что при  $\rho_0 = 0,4$  и тех же изменениях  $\delta$  напряжения  $k_{eq}^{Ext}$  увеличились уже в 6,5 раза.

Таблица 1. Значения напряжений в зависимости от  $\delta$  при  $\rho_0 = 2$

$\delta$	$\theta$	$k_r^T$	$k_\theta^T$	$k_r^B$	$k_\theta^B$	$\tau_{r\theta}^T$	$\tau_{r\theta}^B$	$k_{eq}^{Ext}$	$k_{eq}^{Int}$
0	0	2,027	0,608	2,010	0,603	0,000	0,000	3,588	0,016
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-2,973	-0,000	5,149	5,149
0,5	0	2,068	0,620	3,241	-0,069	0,000	0,000	5,057	1,631
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-2,932	0,186	4,755	5,401
1	0	2,102	0,631	4,167	-0,653	0,000	0,000	6,280	2,925
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-2,898	0,564	4,043	5,995
2	0	2,153	0,646	5,569	-1,641	0,000	0,000	8,266	4,971
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-2,847	1,254	2,759	7,102
3	0	2,189	0,657	6,656	-2,472	0,000	0,000	9,878	6,612
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-2,811	1,864	1,642	8,097
4	0	2,214	0,664	7,562	-3,196	0,000	0,000	11,260	8,010
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	-2,786	2,412	0,647	9,004

Таблица 2. Значения напряжений при  $\rho_0 = 0,4$

$\delta$	$\theta$	$k_{eq}^{Ext}$	$k_{eq}^{Int}$
0	0	28.060	5.525
	$\pi/2$	21.350	21.350
4	0	184.400	168.200
	$\pi/2$	108.000	151.700

Таким образом, влияние деформации поперечного сдвига особенно существенно при малых площадках жёстких шайб, что кроме таблиц подтверждается также и рисунком 3.

На рисунке 4 показано поведение эквивалентных напряжений на наружной поверхности оболочки  $k_{eq}^{Ext}$  на контуре  $\Gamma$  кругового включения радиуса  $\rho_0 = 1$  и далее, при удалении от контура  $\Gamma$ , для различных значений параметра податливости  $\delta$ , указанных возле каждой кривой.

По вертикальной оси графика рисунка 4 отложены значения относительных эквивалентных напряжений на наружной поверхности оболочки  $k_{eq}^{Ext}$ .

Параметр  $\eta$ , откладываемый по горизонтальной оси рисунка 4, принимает следующие значения:

при  $0 \leq \eta \leq 1 \rightarrow \eta = \frac{\theta}{\pi}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  (в этом случае параметр  $\eta$  описывает контур включения  $\Gamma$ );

при  $1 \leq \eta \leq 6 \rightarrow \eta = \frac{\rho}{\rho_0}$ , при  $\theta = \pi$ , т.е. при удалении от контура  $\Gamma$  по оси  $Ox$  на расстояние до  $5\rho_0$ .

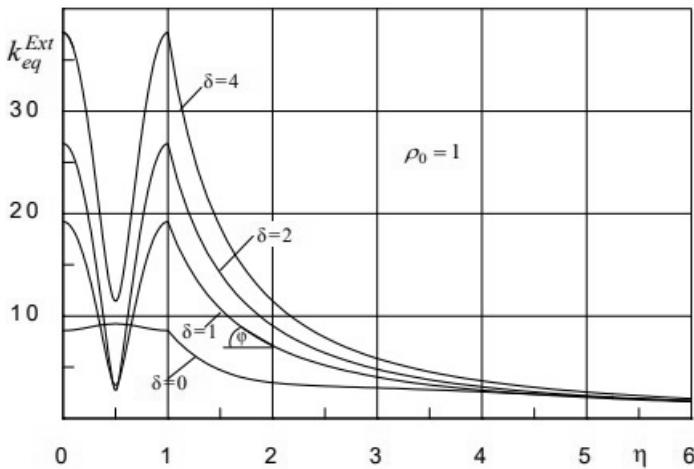


Рис. 4

Из рисунка 4 видно, что при удалении от контура, напряжённое состояние является монотонно затухающим и на некотором расстоянии становится практически установившимся. Из рисунка 4 и таблиц 1, 2 видно, что при увеличении параметра  $\delta$  относительные эквивалентные напряжения  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  на контуре Г кругового включения в точках  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  значительно возрастают. Вследствие этого зона установившихся напряжений удаляется от контура, что наблюдается на рисунке 4.

Чтобы численно оценить расстояние, при котором можно пренебречь влиянием включения и определить зону установившихся напряжений, были рассчитаны и построены таблицы 3, 4.

В таблицах 3 и 4 численно показано поведение относительных эквивалентных напряжений  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  при удалении от контура  $\Gamma$  в зависимости от параметра податливости  $\delta$  – в таблице 3, и от радиуса включения  $\rho_0$  – в таблице 4.

В этих таблицах  $\eta = \frac{\rho}{\rho_0}$ ; при  $\theta = \pi$ , т.е. при удалении от контура  $\Gamma$  по оси  $Ox$  на расстояние до  $11\rho_0$ , параметр  $\eta$  принимает значения  $1 \leq \eta \leq 12$ .

В них также введены обозначения:

$$\varepsilon\% = (k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}/k_{\text{eq}0}^{\text{Ext}}) \times 100\% , \quad (15)$$

где  $k_{\text{eq}0}^{\text{Ext}} = k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  при  $\eta = 1$ , т.е. в точке  $\theta = \pi$  контура  $\Gamma$ ;

$$\varphi^\circ = \arctan \left( \Delta k_{\text{eq}}^{\text{Ext}} / \Delta \eta \right) \times 180^\circ / \pi \quad (16)$$

– угол (в градусах) наклона кривых  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  (рис. 4) на отрезке  $\Delta\eta = 0.1$  от указанной точки  $n$ ;

$$\Delta k_{\text{eq}}^{\text{Ext}} = k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}(\eta) - k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}(\eta + \Delta\eta).$$

$\lambda\% = [\Delta k_{\text{eq}}^{\text{Ext}} / k_{\text{eq mean}}^{\text{Ext}}] \times 100\%$ , где  $k_{\text{eq mean}}^{\text{Ext}} = [k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}(\eta) + k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}(\eta + \Delta\eta)] / 2$  - среднее значение  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  на отрезке  $\Delta\eta = 0.1$ . Т.е.  $\lambda\%$  - суть доля приращения  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  по отношению к его среднему значению на отрезке  $\Delta\eta = 0.1$ .

Будем полагать, что влиянием включения с нагрузкой при удалении от контура можно практически пренебречь, когда напряжения в текущей точке  $\eta$  отличаются от максимальных на контуре на 5% и менее, а напряжённое состояние можно считать практически установившимся, когда угол наклона касательной к кривой  $k_{eq}^{Ext}$  не более 2-х градусов

$$\varphi^\circ \leq 2^\circ. \quad (17)$$

Таблица 3.

Поведение  $k_{eq}^{Ext}$  в зависимости от  $\delta$  при удалении от контура  $\rho_0 = 1$

$\delta$	$\eta$	1	7	8	9	10	12
0.5	$k_{eq}^{Ext}$	14.4	1.37	1.18	1.03	0.91	0.74
	$\varepsilon\%$	100	9.5	8.18	7.1	6.35	5.21
	$\varphi^\circ$	87	13	9.5	7.3	5.7	3.8
	$\lambda\%$	12.	1.6	1.4	1.2	1.1	0.8
4.0	$k_{eq}^{Ext}$	37.0	1.55	1.28	1.0	0.95	0.76
	$\varepsilon\%$	100	4.1	3.4	2.9	2.5	2.0
	$\varphi^\circ$	89	17	12	8.9	6.8	4.2
	$\lambda\%$	16.1	2.04	1.7	1.4	1.25	0.97

Из таблицы 3 видно, что для  $\rho_0=1$  и  $\delta = 0.5$  влиянием включения с нагрузкой можно практически пренебречь при  $\eta = 12$  (т.е. при удалении от контура на  $11\rho_0$ ), т.к. процентное изменение  $\varepsilon$  составляет 5,2%. При этом угол  $\varphi^\circ = 3.8^\circ$ , а процентное приращение  $\lambda$  равно 0.8%. При большем значении параметра податливости  $\delta = 4$  пренебречь напряжениями можно при  $\eta=7$ , где процентное изменение  $\varepsilon$  составляет 4.1%. Однако при этом угол  $\varphi^\circ = 17^\circ$  и процентное приращение  $\lambda$  равно 2.04%.

Таблица 4.

Поведение  $k_{eq}^{Ext}$  при удалении от контура  $\rho_0$  при  $\delta = 2$

$\rho_0$	$\eta$	1	7	8	9	10	12
0.5	$k_{eq}^{Ext}$	92.3	3.81	3.11	2.6	2.23	1.73
	$\varepsilon\%$	100	4.13	3.37	2.82	2.42	1.87
	$\varphi^\circ$	89.6	40	30	23	18	11
	$\lambda\%$	19.2	2.19	1.88	1.64	1.43	1.13
3.0	$k_{eq}^{Ext}$	4.81	0.42	0.36	0.32	0.29	0.24
	$\varepsilon\%$	100	8.7	7.6	6.7	6.0	5.0
	$\varphi^\circ$	79	3.4	2.6	2.1	1.7	1.2
	$\lambda\%$	10.9	1.45	1.26	1.12	1.01	0.84

Из таблицы 4 для  $\delta = 2$  видно, что в случае  $\rho_0 = 0.5$  влиянием включения с нагрузкой можно практически пренебречь при  $\eta = 7$  (т.е. при удалении от контура на  $6\rho_0$ ), т.к. процентное изменение  $\varepsilon$  равно 4.13%. При этом угол  $\varphi^\circ = 40^\circ$ , а процентное приращение  $\lambda$  составляет 2.19%, т.е. вряд ли можно считать кривую линию  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  достаточно пологой, а напряжённое состояние – установившимся. При большем значении радиуса включения  $\rho_0 = 3$  пренебречь напряжениями можно при  $\eta = 12$ , где процентное приращение  $\varepsilon$  равно 5.0%. При этом угол  $\varphi^\circ = 1.2^\circ$  и процентное приращение  $\lambda$  составляет 0.84%, т.е. напряжённое состояние можно считать установившимся.

Анализ результатов таблицы 3 и таблицы 4 позволяет сделать следующие выводы. Расстояние от контура включения  $\Gamma$ , на котором его влиянием можно практически пренебречь, зависит от параметра податливости  $\delta$ , а также и от радиуса включения  $\rho_0$ . Это расстояние увеличивается при увеличении параметра  $\delta$  или уменьшении радиуса  $\rho_0$ . Это объясняется тем, что при этом возрастает значение напряжения  $k_{\text{eq}0}^{\text{Ext}}$  на контуре  $\Gamma$  кругового включения в точках  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , а по отношению к нему (15) и определяется, можно ли практически пренебречь напряжениями  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  в текущей точке. При этом удаляется от контура и зона установившихся напряжений  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$ , т.е. пологости кривой по углу  $\varphi^\circ$  (16). Заметим, что в некоторых случаях влиянием включения уже можно практически пренебречь, хотя при этом ещё нельзя считать кривую линию  $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$  достаточно пологой, а напряжённое состояние – установившимся (по выбранным критериям (17)).

**6. Достоверность полученных результатов.** Все вычисления проводились в среде пакета Maple. Точность вычислений можно регулировать, задавая значение системной переменной *Digits*, которая здесь принималась *Digits* = 15.

Проверялась точность удовлетворения заданных граничных условий в точках контура. Так, для случаев, представленных в таблице 1, при численной реализации абсолютная погрешность выполнения граничных условий не превышала  $10^{-9}$ ; при этом максимальное значение напряжений не превышало 12.

Проверялась точность выполнения исходных дифференциальных уравнений (1) с неизвестными коэффициентами и с коэффициентами, определёнными после решения системы. Абсолютная погрешность не превышала  $10^{-9}$ .

После решения системы вычислялись составляющие главного вектора и главного момента, определяемые как интегралы в соответствии с [2]. (Например:  $B_z = \rho^2 \int_0^{2\pi} S_{r\theta} d\theta$  и т.д.). Получено хорошее совпадение с заданными компонентами: абсолютная погрешность не превышала  $10^{-9}$ . (При этом максимальное значение не превышало  $20\pi$ .)

Для сравнения были проведены расчёты при  $\delta = 1$  и при  $\delta = 1 \pm 10^{-12}$ , т.е. близких к 1. Получено совпадение результатов, но полученных по разным формулам (для  $\delta < 1$ ,  $\delta = 1$  и  $\delta > 1$ ).

Проведено сравнение с результатами работы [10] для аналогичной задачи при нагружении усилием  $F_Z$ , полученными несколько иным способом. Установлено

полное совпадение результатов.

Для сравнения с результатами других авторов для изотропной сферической оболочки с одним жёстким включением были проведены расчёты при  $\delta = 10^{-12}$ , т.е. значениях  $\delta$ , близких к 0. При сопоставлении с [3] наблюдалась качественная согласованность (было установлено хорошее совпадение) с результатами, полученными К.Ф. Черных при участии В.И. Кругляковой с расхождением от 0,6% до 4,8% (для  $\nu = 0,25$ ).

Ещё один способ проверки заключался в следующем: решалась задача для нагружения усилием  $F_x$  и отдельно решалась задача для нагружения моментом  $B_y$ . Т.к. эти задачи являются задачами линейной теории упругости, то их решения можно складывать. Складывая полученные напряжения, можно получить решение для случая совместного нагружения  $F_x + B_y$ . Проведенная таким способом проверка показала полное (стопроцентное) совпадение с приведёнными здесь численными результатами. То есть, оба пути решения привели к одинаковым результатам.

**Выводы.** Таким образом, численные исследования для трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым жёстким включением, нагруженным совместно сдвигающим усилием и изгибающим моментом, показали, что при увеличении параметра поперечного сдвига материала оболочки и уменьшении радиуса жёсткого включения относительные эквивалентные напряжения возрастают и могут увеличиться в несколько раз.

1. Гузь А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко – Киев: Наук. думка, 1970. – 323 с.
2. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов [и др.] . – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчёта оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 1.)
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью / Б.Л. Пелех – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
5. Пелех Б.Л. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках / Б.Л. Пелех, А.А. Сяський. – К.: Наук. думка, 1975. – 198 с.
6. Chekhov V.N. Stress concentration in a transversely isotropic spherical shell with two circular rigid inclusions / V.N. Chekhov, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 47, No. 4. – P. 441–448.
7. Shevchenko V.P. Stresses in a Spherical Shell Loaded Through Rigid Inclusions / V.P. Shevchenko, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, No. 2 – P. 159–166.
8. Maksimyuk V.A. Nonlinear deformation of thin isotropic and orthotropic shells of revolution with reinforced holes and rigid inclusions / V.A. Maksimyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2013. - Vol. 49, No 6. – P. 685–692.
9. Maksimyuk V.A. Variational-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V.A. Maksimyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – Vol. 48, No 6. – P. 613–687.
10. Чехов В.Н. Концентрация напряжений в трансверсально-изотропной сферической оболочке с жёстким круговым включением, нагруженным нормальной силой / В.Н. Чехов, С.В. Закора // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 2(59). – С. 26–36.

**S.V. Zakora, V.N. Chekhov**

**Investigation of the stress state of a transversally isotropic spherical shell with a rigid inclusion loaded jointly by force and moment.**

The use of multivalued analytical solutions within the framework of S.P. Timoshenko type theory allowed us to obtain a refined analytical solution to the problem of a stressed state in a flat spherical shell with a circular rigid inclusion, jointly loaded with tangential force and bending moment. As a result of numerical studies, it was found that for such a loading variant, with an increase in the transverse shear parameter and a decrease in the radius of the rigid inclusion, the relative stresses increase several times. It was also found that the effect of transverse shear is especially important for a relatively small diameter of a rigid inclusion.

**Keywords:** *analytical solution, S.P. Timoshenko type theory, flat spherical shell, transversally isotropic material, rigid inclusion, transverse shear deformation, joint action, tangential force, bending moment.*

*Получено 27.02.2023*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-81-92

EDN:PQQQXY



©2023. С.Б. Номбрэ<sup>1</sup>, Д.Д. Полянский<sup>2</sup>, С.В. Сторожев<sup>3</sup>

### НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ БАЛОК

Рассматриваются методика и отдельные численные результаты применения аппарата нечетко-множественных вычислений для анализа проблемы учета факторов параметрической неопределенности в виде разбросов экспериментальных и технологических значений исходных физико-механических и геометрических характеристик отдельных моделей температурного деформирования стержневых конструкций. Исследования реализованы для модели термонапряженного состояния изгибаемой биморфной балки и модели напряженного состояния нагреваемого стержневого элемента в безграничной деформируемой среде. Представляемый подход основывается на использовании аналитических решений рассматриваемых задач в детерминистической постановке без учета параметрической неопределенности, и переходе в них к нечетко-множественным аргументам с поэтапным фрагментированным применением арифметики нечетких величин и модифицированной версии альфа-уровневого эвристического принципа обобщения.

<sup>1</sup>Номбрэ Светлана Борисовна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

*Nombre Svetlana Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.*

<sup>2</sup>Полянский Дмитрий Дмитриевич – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

*Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.*

<sup>3</sup>Сторожев Сергей Валерьевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

*Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.*

**Ключевые слова:** биморфные тонкие балки, стержни в деформируемой среде, термоупругое напряженное состояние, учет неконтрастности параметров, численно-аналитический алгоритм, метод нечетких множеств, эвристический принцип обобщения.

**Введение.** Учет связанный с неконтрастностью исходных данных параметрической неопределенности в расчетных соотношениях для характеристик термоупругого напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержневых конструкций, включая однородные и составные прямолинейные балочные конструкции, является важным элементом корректного прогнозирования их несущей способности, надежности и прочности в процессе проектных работ [1–6]. Ввиду отсутствия во многих случаях корректной статистической информации о характере подлежащих учету разбросов для значений исходных параметров расчетных моделей, необходимой для использования с этой целью приемов вероятностно-стохастического анализа, а также при необходимости привлекать субъективные экспертные данные о свойствах неопределенных параметров, возможности для эффективного исследования эффектов влияния параметрической неопределенности на итоговые оценки термоупругого состояния балочных конструкций дает применение методов теории нечетких множеств [7, 8]. Практика использования данного подхода в некоторых задачах термоупругости с неопределенными, обладающими разбросами значений параметрами, описана в работах [9–13].

В соответствии с данными соображениями, в представляющей работе реализован анализ двух типов обладающих параметрической неопределенностью моделей термоупругого деформирования тонкостенных конструкционных элементов – модели температурного изгиба биморфной балки [1, 2] и модели термических воздействий на армирующий элемент в виде деформируемой цилиндрической балки-стержня, находящейся в упругой среде-матрице [3–6].

**1. Детерминистический вариант расчетных соотношений для биморфной балки.** Нечетко-множественное обобщение в первом из указанных случаев рассматриваемых моделей строится для описания напряженно-деформированного состояния протяженной балки, составленной из двух идеально контактирующих в плоскости сопряжения призматических элементов  $V_1$  и  $V_2$  прямогоугольного поперечного сечения из разнотипных изотропных конструкционных материалов с одинаковой шириной  $b$  и разными толщинами  $h_1$  и  $h_2$ , и подвергающей извне равномерному нагреву. Поле температур  $t$  во внутренних точках балки является при этом однородным. При начальной температуре  $t = \vartheta_0$  балка имеет прямолинейную форму, а при конечной температуре разогрева  $t = \vartheta_1$  в ней возникают изгибы деформации, изгибающие моменты  $M$  и нормальные напряжения в поперечных сечениях. Физико-механическими параметрами рассматриваемой модели являются модули Юнга  $E_j$  и коэффициенты линейного теплового расширения  $\alpha_j$  для материалов компонентов  $V_j$ .

Согласно представленному в работе [1] варианту описания характеристик температурного деформирования в детерминистической постановке для случая совпадения нейтральной плоскости изгиба с плоскостью контакта компонентов

$V_j$ , изгибающий момент в сечении рассматриваемой биморфной балки имеет представление

$$M = F_M(h_1, b, \alpha_1, \alpha_2, \vartheta_1, \vartheta_0, E_1, E_2) = \quad (1)$$

$$= (2/3)(h_1^2 b(1 + (E_1/E_2)^{1/2})(\alpha_1 - \alpha_2)(\vartheta_1 - \vartheta_0)((E_1)^{-1} + ((E_1 E_2)^{-1/2})^{-1}),$$

а радиус кривизны  $\rho$  нейтрального слоя и максимальные нормальные напряжения  $\sigma_{jm}$  в сечениях компонентов  $V_j$  описываются выражениями

$$\rho = F_\rho(\eta, h_1, b, \alpha_1, \alpha_2, \vartheta_1, \vartheta_0, E_1, E_2) = \quad (2)$$

$$= \eta \cdot ((2/3)(h_1^2 b(1 + (E_1/E_2)^{1/2})(\alpha_1 - \alpha_2)(\vartheta_1 - \vartheta_0)((E_1)^{-1} + ((E_1 E_2)^{-1/2})^{-1})^{-1},$$

$$\sigma_{jm} = F_{\sigma j}(\eta, h_1, b, \alpha_1, \alpha_2, \vartheta_1, \vartheta_0, E_1, E_2) = -M E_j \eta^{-1}, \quad (3)$$

$$\eta = E_1((bh_1^2/6)). \quad (4)$$

В предположении о наличии разбросов в значениях исходных параметров, применительно к расчетным соотношениям ставится вопрос учета параметрической неопределенности, в качестве приема исследования которой рассматривается использование методов теории нечетких множеств.

**2. Нечетко-множественный алгоритм учета неконтрастности параметров в модели температурного деформирования биморфной балки.** В рамках реализации процедуры перехода к нечетко-множественным аргументам в функциональных расчетных соотношениях (1)–(4), для неконтрастных исходных физико-механических и геометрических параметров балки  $\tilde{h}_1, \tilde{b}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ , а также для описываемых нормальными нечеткими множествами результирующих параметров  $\tilde{\eta}, \tilde{M}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}_{jm}$  исследуемой модели, вводятся представления в виде разложений по множествам  $\alpha$ -уровней

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{1\alpha}, \bar{h}_{1\alpha}], & \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \\ \tilde{\alpha}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{1\alpha}, \bar{\alpha}_{1\alpha}], & \tilde{\alpha}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{2\alpha}, \bar{\alpha}_{2\alpha}], \\ \tilde{\vartheta}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{0\alpha}, \bar{\vartheta}_{0\alpha}], & \tilde{\vartheta}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{1\alpha}, \bar{\vartheta}_{1\alpha}], \\ \tilde{E}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{1\alpha}, \bar{E}_{1\alpha}], & \tilde{E}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{2\alpha}, \bar{E}_{2\alpha}]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\eta}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha], & \tilde{M} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{M}_\alpha, \bar{M}_\alpha], \\ \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], & \tilde{\sigma}_{jm} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{jm\alpha}, \bar{\sigma}_{jm\alpha}]. \end{aligned} \quad (6)$$

В представлениях (5) в случае описания исходных параметров  $\tilde{h}_1, \tilde{b}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  нормальными треугольными нечеткими числами с кортежами реперных значений  $(h_{11}, h_{12}, h_{13}), (b_1, b_2, b_3), \dots, (E_{21}, E_{22}, E_{23})$ , границы интервалов  $\alpha$ -уровней имеют выражения

$$\begin{aligned} \underline{h}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)h_{11} + \alpha h_{12}, & \bar{h}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)h_{13} + \alpha h_{12}; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_3 + \alpha b_2; \dots; \\ \underline{E}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)E_{21} + \alpha E_{22}, & \bar{E}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)E_{23} + \alpha E_{22}; \end{aligned} \quad (7)$$

в случае описания  $\tilde{h}_1, \tilde{b}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  нормальными трапецидальными нечеткими интервалами с кортежами  $(h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}), (b_1, b_2, b_3, b_4), \dots, (E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24})$  реперных значений

$$\begin{aligned} \underline{h}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)h_{11} + \alpha h_{12}, & \bar{h}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)h_{14} + \alpha h_{13}; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_4 + \alpha b_3; \dots; \\ \underline{E}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)E_{21} + \alpha E_{22}, & \bar{E}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)E_{24} + \alpha E_{23}. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае описания  $\tilde{h}_1, \tilde{b}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_0, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  несимметричными нормальными нечеткими гауссовыми числами с параметрами  $(m_{*h1}, \sigma_{*lh1}, \sigma_{*rh1}), (m_{*b}, \sigma_{*lb}, \sigma_{*rb}), \dots, (m_{*E2}, \sigma_{*lE2}, \sigma_{*rE2})$

$$\begin{aligned} \underline{h}_{1\alpha} &= m_{*h1} - \sigma_{*lh1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{h}_{1\alpha} &= m_{*h1} + \sigma_{*rh1}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{b}_\alpha &= m_{*b} - \sigma_{*lb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{b}_\alpha &= m_{*b} + \sigma_{*rb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \dots; \\ \underline{E}_{2\alpha} &= m_{*E2} - \sigma_{*lE2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{E}_{2\alpha} &= m_{*E2} + \sigma_{*rE2}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для получения нечетких результирующих характеристик на базе представлений (1)–(4) используются соотношения арифметики нечетких треугольных чисел либо нечетких трапецидальных интервалов и  $\alpha$ -уровневая форма модифицированного эвристического принципа обобщения.

В частности, при описании неконтрастных исходных параметров треугольными нечеткими числами с применением неидемпотентной арифметики нечеткокомбинативных величин данного типа на первом шаге расчетного алгоритма можно получить представление

$$\tilde{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (E_{11}((b_1 h_{11}^2 / 6), E_{12}((b_2 h_{12}^2 / 6), E_{13}((b_3 h_{13}^2 / 6))) \quad (10)$$

и записать соответствующие выражения  $\underline{\eta}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha$ :

$$\underline{\eta}_\alpha = (1 - \alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, \quad \bar{\eta}_\alpha = (1 - \alpha)\eta_3 + \alpha\eta_2. \quad (11)$$

Далее, с применением  $\alpha$ -уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения на основе анализа свойств знакопредопределенности частных производных

$$\begin{aligned} \partial M / \partial h_1 &\geq 0, & \partial M / \partial b &\geq 0, & \partial M / \partial \alpha_1 &\geq 0, & \partial M / \partial \alpha_2 &\leq 0, \\ \partial M / \partial \vartheta_1 &\geq 0, & \partial M / \partial \vartheta_0 &\leq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

реализуется расчет характеристик  $M_\alpha$ ,  $\overline{M}_\alpha$

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \inf_{\substack{E_1 \in [\underline{E}_{1\alpha}, \overline{E}_{1\alpha}] \\ E_2 \in [\underline{E}_{2\alpha}, \overline{E}_{2\alpha}]}} F_M(\underline{h}_{\alpha 1}, \underline{b}_\alpha, \underline{\alpha}_{\alpha 1}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{\vartheta}_{1\alpha}, \overline{\vartheta}_{0\alpha}, E_1, E_2), \\ \overline{M}_\alpha &= \sup_{\substack{E_1 \in [\underline{E}_{1\alpha}, \overline{E}_{1\alpha}] \\ E_2 \in [\underline{E}_{2\alpha}, \overline{E}_{2\alpha}]}} F_M(\overline{h}_{1\alpha}, \overline{b}_\alpha, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{\vartheta}_{1\alpha}, \underline{\vartheta}_{0\alpha}, E_1, E_2). \end{aligned} \quad (13)$$

На следующем шаге нечетко-множественного расчетного алгоритма с учетом свойств производных

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial \eta &\geq 0, \quad \partial \rho / \partial h_1 \geq 0, \quad \partial \rho / \partial b \geq 0, \quad \partial \rho / \partial \alpha_1 \geq 0, \quad \partial \rho / \partial \alpha_2 \leq 0, \\ \partial \rho / \partial \vartheta_1 &\geq 0, \quad \partial \rho / \partial \vartheta_0 \leq 0, \\ \partial \sigma_{jm} / \partial M &\leq 0, \quad \partial \sigma_{jm} / \partial E_j \leq 0, \quad \partial \sigma_{jm} / \partial \eta \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

реализуется расчет характеристик  $\underline{\rho}_\alpha$ ,  $\overline{\rho}_\alpha$  и  $\underline{\sigma}_{jm\alpha}$ ,  $\overline{\sigma}_{jm\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_\alpha &= \inf_{\substack{E_1 \in [\underline{E}_{1\alpha}, \overline{E}_{1\alpha}] \\ E_2 \in [\underline{E}_{2\alpha}, \overline{E}_{2\alpha}]}} F_\rho(\underline{\eta}_\alpha, \underline{h}_{\alpha 1}, \underline{b}_\alpha, \underline{\alpha}_{\alpha 1}, \overline{\alpha}_{2\alpha}, \underline{\vartheta}_{1\alpha}, \overline{\vartheta}_{0\alpha}, E_1, E_2), \\ \overline{\rho}_\alpha &= \sup_{\substack{E_1 \in [\underline{E}_{1\alpha}, \overline{E}_{1\alpha}] \\ E_2 \in [\underline{E}_{2\alpha}, \overline{E}_{2\alpha}]}} F_\rho(\overline{\eta}_\alpha, \overline{h}_{1\alpha}, \overline{b}_\alpha, \overline{\alpha}_{1\alpha}, \underline{\alpha}_{2\alpha}, \overline{\vartheta}_{1\alpha}, \underline{\vartheta}_{0\alpha}, E_1, E_2); \\ \underline{\sigma}_{jm\alpha} &= -\overline{M}_\alpha \overline{E}_{j\alpha} \underline{\eta}_\alpha^{-1}, \quad \overline{\sigma}_{jm\alpha} = -\underline{M}_\alpha \underline{E}_{j\alpha} \overline{\eta}_\alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношения (13)–(16) в итоге дают возможность получить оценки разбросов результирующих характеристик температурного деформирования нагреваемой биметаллической балки при учете неконтрастности, свойственной исходным значениям параметров используемой расчетной модели.

**3. Соотношения детерминистической модели напряженного состояния нагреваемого стержневого элемента в деформируемой среде.** Исследуемая далее вторая модель описывает термоапротяженное состояние, возникающее в протяженном цилиндрическом армирующим стержне радиуса  $r_0$  и длины  $2l$  ( $l > r_0$ ) из материала с модулем Юнга  $E_f$  и коэффициентом линейного теплового расширения  $\alpha_f$ , находящегося в упругой матрице-массиве из материала пониженной жесткости с модулем сдвига  $G_m$  и коэффициентом линейного теплового расширения  $\alpha_m$ , при нагревании массива с описанным армирующим элементом от температуры  $T_0 = 0$  до температуры  $T_1$ . При этом полагается, что при исходной температуре массив с армирующим стержневым включением находится в ненапряженном состоянии.

Согласно результатам работы [6], для искомых характеристик продольных перемещений  $u(x)$ , нормальных  $\sigma(x)$  и касательных  $\tau(x)$  напряжений в нагретом

стержне, в координатах с центром в срединной точке по длине стержня, могут быть записаны представления вида

$$u = \Phi_u(x, \alpha_0, r_0, r_*, l, E_f, G_m, T_1) = a_0 T_1 l (k \cdot ch(k))^{-1} sh(kx/l), \quad (17)$$

$$\sigma = \Phi_\sigma(x, \alpha_0, r_0, r_*, l, E_f, G_m, T_1) = a_0 T_1 E_f ((ch(k))^{-1} ch(kx/l) - 1), \quad (18)$$

$$\tau = \Phi_\tau(x, \alpha_0, r_0, r_*, l, E_f, G_m, T_1) = -a_0 r_0 k E_f T_1 (2l \cdot ch(k))^{-1} sh(kx/l), \quad (19)$$

в которых

$$k = (2G_m l^2 (r_0^2 E_f \ln(r_*/r_0))^{-1})^{1/2}, \quad a_0 = \alpha_f - \alpha_m, \quad (20)$$

$r_*$  ( $r_* > r_0$ ) – параметр «радиуса спшивания» цилиндрического пограничного слоя около армирующего стержневого элемента с полем однородного напряженно-деформированного состояния массива-матрицы; данный параметр может быть приближенно идентифицирован на основе альтернативных подходов [3–5].

**4. Нечетко-множественное обобщение расчетного алгоритма для модели нагреваемого стержневого элемента в деформируемой среде.** В рамках описанного выше подхода для неконтрастных параметров модели  $r_0, l, E_f, G_m, \alpha_m, T_0, T_1, r_*$  вводятся разновариантные представления в виде нормальных нечетких множеств  $\tilde{r}_0, \tilde{l}, \tilde{E}_f, \tilde{\alpha}_f, \tilde{G}_m, \tilde{\alpha}_m, \tilde{T}_1, \tilde{r}_*$  с разложениями по  $\alpha$ -срезам

$$\begin{aligned} \tilde{r}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{r}_{0\alpha}, \bar{r}_{0\alpha}], \quad \tilde{l} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha], \quad \tilde{E}_f = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{f\alpha}, \bar{E}_{f\alpha}], \\ \tilde{\alpha}_f &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{f\alpha}, \bar{\alpha}_{f\alpha}], \quad \tilde{G}_m = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{m\alpha}, \bar{G}_{m\alpha}], \\ \tilde{\alpha}_m &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{m\alpha}, \bar{\alpha}_{m\alpha}], \quad \tilde{T}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_{1\alpha}, \bar{T}_{1\alpha}], \quad \tilde{r}_* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{r}_{*\alpha}, \bar{r}_{*\alpha}], \end{aligned} \quad (21)$$

в которых, при задании соответствующих параметров нормальными треугольными нечеткими числами с кортежами реперных значений  $(r_{01}, r_{02}, r_{03}), (l_1, l_2, l_3), \dots, (r_{*1}, r_{*2}, r_{*1})$ , границы интервалов  $\alpha$ -уровней имеют выражения

$$\begin{aligned} \underline{r}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)r_{01} + \alpha r_{02}, \quad \bar{r}_{0\alpha} = (1 - \alpha)r_{03} + \alpha r_{02}; \\ \underline{l}_\alpha &= (1 - \alpha)l_1 + \alpha l_2, \quad \bar{l}_\alpha = (1 - \alpha)l_3 + \alpha l_2; \dots; \\ \underline{r}_{*\alpha} &= (1 - \alpha)r_{*1} + \alpha r_{*2}, \quad \bar{r}_{*\alpha} = (1 - \alpha)r_{*3} + \alpha r_{*2}; \end{aligned} \quad (22)$$

при задании параметров модели нормальными трапецидальными нечеткими интервалами с кортежами  $(r_{01}, r_{02}, r_{03}, r_{04}), (l_1, l_2, l_3, l_4), \dots, (r_{*1}, r_{*2}, r_{*3}, r_{*4})$  реперных значений

$$\begin{aligned} \underline{r}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)r_{01} + \alpha r_{02}, \quad \bar{r}_{0\alpha} = (1 - \alpha)r_{04} + \alpha r_{03}; \\ \underline{l}_\alpha &= (1 - \alpha)l_1 + \alpha l_2, \quad \bar{l}_\alpha = (1 - \alpha)l_4 + \alpha l_3; \dots; \\ \underline{r}_{*\alpha} &= (1 - \alpha)r_{*1} + \alpha r_{*2}, \quad \bar{r}_{*\alpha} = (1 - \alpha)r_{*4} + \alpha r_{*3}. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае описания неконтрастных параметров несимметричными нормальными нечеткими гауссовыми числами с параметрами  $(m_{*r0}, \sigma_{*lr0}, \sigma_{*rr0})$ ,  $(m_{*l}, \sigma_{*ll}, \sigma_{*rl})$ ,  $\dots$ ,  $(m_{*r*}, \sigma_{*lr*}, \sigma_{*rr*})$

$$\begin{aligned} \underline{r}_{0\alpha} &= m_{*r0} - \sigma_{*lr0}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{r}_{0\alpha} = m_{*r0} + \sigma_{*rr0}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{l}_\alpha &= m_{*l} - \sigma_{*ll}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{l}_\alpha = m_{*l} + \sigma_{*rl}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \dots; \\ \underline{r}_{*\alpha} &= m_{*r*} - \sigma_{*lr*}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{r}_{*\alpha} = m_{*r*} + \sigma_{*rr*}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Дальнейший анализ рассматриваемой модели учета неконтрастности исходных параметров с получением расчетных соотношений для нечетко-множественных величин

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \Phi_u(x, \tilde{\alpha}_0, \tilde{r}_0, \tilde{r}_*, \tilde{l}, \tilde{E}_f, \tilde{G}_m, \tilde{T}_1), \\ \tilde{\sigma} &= \Phi_\sigma(x, \tilde{\alpha}_0, \tilde{r}_0, \tilde{r}_*, \tilde{l}, \tilde{E}_f, \tilde{G}_m, \tilde{T}_1), \\ \tilde{\tau} &= \Phi_\tau(x, \tilde{\alpha}_0, \tilde{r}_0, \tilde{r}_*, \tilde{l}, \tilde{E}_f, \tilde{G}_m, \tilde{T}_1), \end{aligned} \quad (25)$$

реализуется на основе поэтапного фрагментированного применения аппарата теории нечетких вычислений и  $\alpha$ -уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения. Ввиду свойств четности по координатной переменной  $x$  для определяемой выражением (18) величины  $\sigma$  и нечетности задаваемых представлениями (17), (19) величин  $u$  и  $\tau$ , дальнейший анализ реализуется для подобласти  $x \geq 0$ .

При получении нечетко-множественного представления (25) для  $\tilde{u}$  на основе (17), выражение  $k$  преобразуется к виду

$$k = l k_1, \quad k_1 = (2G_m(r_0^2 E_f \ln(r_*/r_0))^{-1})^{1/2}; \quad (26)$$

в рассматриваемой подобласти изменения  $x$  учитываются свойства

$$\begin{aligned} \partial k_1 / \partial G_m &> 0, \quad \partial k_1 / \partial r_* < 0, \quad \partial k_1 / \partial E_f < 0, \\ \partial \Phi_u / \partial T_1 &> 0, \quad \partial \Phi_u / \partial \alpha_0 > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

и записывается последовательность расчетных соотношений

$$\tilde{\alpha}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{0\alpha}, \bar{\alpha}_{0\alpha}], \quad \underline{\alpha}_{0\alpha} = \underline{\alpha}_{f\alpha} - \bar{\alpha}_{m\alpha}, \quad \bar{\alpha}_{0\alpha} = \bar{\alpha}_{f\alpha} - \underline{\alpha}_{m\alpha}; \quad (28)$$

$$\tilde{k}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [k_{1\alpha}, \bar{k}_{1\alpha}], \quad (29)$$

$$k_{1\alpha} = \inf_{r_0 \in [\underline{r}_{0\alpha}, \bar{r}_{0\alpha}]} (2\underline{G}_{m\alpha}(r_0^2 \bar{E}_{f\alpha} \ln(\bar{r}_{*\alpha}/r_0))^{-1})^{1/2},$$

$$\bar{k}_{1\alpha} = \sup_{r_0 \in [\underline{r}_{0\alpha}, \bar{r}_{0\alpha}]} (2\bar{G}_{m\alpha}(r_0^2 \underline{E}_{f\alpha} \ln(\underline{r}_{*\alpha}/r_0))^{-1})^{1/2};$$

$$\tilde{u} = \Phi_u(x, \tilde{\alpha}_0, \tilde{l}, \tilde{T}_1, \tilde{k}_1) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{u}_\alpha(x), \bar{u}_\alpha(x)], \quad (30)$$

$$\underline{u}_\alpha(x) = \inf_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ k_1 \in [\underline{k}_{1\alpha}, \bar{k}_{1\alpha}]}} \Phi_u(x, \underline{\alpha}_{0\alpha}, l, \underline{T}_{1\alpha}, k_1),$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = \sup_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ k_1 \in [\underline{k}_{1\alpha}, \bar{k}_{1\alpha}]}} \Phi_u(x, \bar{\alpha}_{0\alpha}, l, \bar{T}_{1\alpha}, k_1).$$

При получении нечетко-множественного представления (25) для  $\tilde{\sigma}$  на основе (18) выражение  $k$  преобразуется к виду

$$k = l(E_f)^{-1/2} k_2, \quad k_2 = (2G_m(r_0^2 \ln(r_*/r_0))^{-1})^{1/2}; \quad (31)$$

учитываются представление (28) и свойства

$$\partial k_2 / \partial G_m > 0, \quad \partial k_2 / \partial r_* < 0, \quad \partial \Phi_\sigma / \partial T_1 > 0, \quad \partial \Phi_\sigma / \partial \alpha_0 > 0, \quad (32)$$

после чего записывается последовательность расчетных соотношений

$$\tilde{k}_2 = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{k}_{2\alpha}, \bar{k}_{2\alpha}], \quad (33)$$

$$\underline{k}_{2\alpha} = \inf_{r_0 \in [\underline{r}_{0\alpha}, \bar{r}_{0\alpha}]} (2\underline{G}_{m\alpha}(r_0^2 \ln(\bar{r}_{*\alpha}/r_0))^{-1})^{1/2},$$

$$\bar{k}_{2\alpha} = \sup_{r_0 \in [\underline{r}_{0\alpha}, \bar{r}_{0\alpha}]} (2\bar{G}_{m\alpha}(r_0^2 \ln(\underline{r}_{*\alpha}/r_0))^{-1})^{1/2};$$

$$\tilde{\sigma} = \Phi_\sigma(x, \tilde{\alpha}_0, \tilde{l}, E_f, \tilde{T}_1, \tilde{k}_2) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{\sigma}_\alpha(x), \bar{\sigma}_\alpha(x)], \quad (34)$$

$$\underline{\sigma}_\alpha(x) = \inf_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ k_2 \in [\underline{k}_{2\alpha}, \bar{k}_{2\alpha}] \\ E \in [\underline{E}_{f\alpha}, \bar{E}_{f\alpha}]}} \Phi_\sigma(x, \underline{\alpha}_{0\alpha}, l, E_f, \underline{T}_{1\alpha}, k_1),$$

$$\bar{\sigma}_\alpha(x) = \sup_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ k_2 \in [\underline{k}_{2\alpha}, \bar{k}_{2\alpha}] \\ E \in [\underline{E}_{f\alpha}, \bar{E}_{f\alpha}]}} \Phi_\sigma(x, \bar{\alpha}_{0\alpha}, l, E_f, \bar{T}_{1\alpha}, k_2).$$

Наконец, при получении нечетко-множественного представления (25) для  $\tilde{\tau}$  на основе (19), учитываются представление (28), свойства

$$\partial\Phi_\sigma/\partial T_1 > 0, \quad \partial\Phi_\sigma/\partial\alpha_0 > 0, \quad (35)$$

и записываются расчетные соотношения

$$\tilde{\tau} = \Phi_\tau(x, \tilde{\alpha}_0, \tilde{l}, \tilde{r}_0, \tilde{r}_*, \tilde{E}_f, \tilde{G}_m, \tilde{T}_1) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{\tau}_\alpha(x), \bar{\tau}_\alpha(x)], \quad (36)$$

$$\underline{\tau}_\alpha(x) = \inf_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ r_0 \in [\underline{r}_{0\alpha}, \bar{r}_{0\alpha}] \\ r_* \in [\underline{r}_{*\alpha}, \bar{r}_{*\alpha}] \\ E_f \in [\underline{E}_{f\alpha}, \bar{E}_{f\alpha}] \\ G_m \in [\underline{G}_{m\alpha}, \bar{G}_{m\alpha}]}} \Phi_\tau(x, \underline{\alpha}_{0\alpha}, r_0, r_*, l, E_f, G_m, \underline{T}_{1\alpha}),$$

$$\bar{\tau}_\alpha(x) = \sup_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ r_0 \in [\underline{r}_{0\alpha}, \bar{r}_{0\alpha}] \\ r_* \in [\underline{r}_{*\alpha}, \bar{r}_{*\alpha}] \\ E_f \in [\underline{E}_{f\alpha}, \bar{E}_{f\alpha}] \\ G_m \in [\underline{G}_{m\alpha}, \bar{G}_{m\alpha}]}} \Phi_\tau(x, \bar{\alpha}_{0\alpha}, r_0, r_*, l, E_f, G_m, \bar{T}_{1\alpha}).$$

Соотношения (26)–(36) описывают оценки разбросов результирующих характеристик температурного деформирования массива с упругой стрежневидной армирующей вставкой повышенной жесткости при равномерном нагреве массива до заданной температуры в случае наличия разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров для компонентов рассматриваемой модели.

**5. Данные вычислительного эксперимента.** В рамках вычислительных экспериментов по применению первой из представленных методик рассматривался вариант задачи о термоапряженном состоянии биметаллической балки с компонентами из алюминия (слой 1) и стали (слой 2). Для реализации нечетко-множественного расчетного алгоритма разработано программное приложение в среде пакета Mathematica.

В частности, в случае задания неконтрастных значений исходных параметров нормальными треугольными нечеткими числами

$$\tilde{h}_1 = (0.97s_*, 1.00s_*, 1.04s_*), \quad \tilde{h}_2 = (1.63s_*, 1.67s_*, 1.76s_*), \quad (37)$$

$$\tilde{b} = (1.48s_*, 1.50s_*, 1.53s_*),$$

$$\tilde{E}_1 = (6.6e_*, 6.9e_*, 7.2e_*), \quad \tilde{E}_2 = (19.4e_*, 19.8e_*, 20.4e_*),$$

$$\tilde{\alpha}_1 = (8.2\tau_*, 8.7\tau_*, 9.4\tau_*), \quad \tilde{\alpha}_2 = (2.3\tau_*, 3.0\tau_*, 3.4\tau_*),$$

$$\tilde{\vartheta}_0 = (8.5\vartheta_*, 10\vartheta_*, 12\vartheta_*) \tilde{\vartheta}_1 = (172\vartheta_*, 180\vartheta_*, 192\vartheta_*),$$

$$s_* = 10^{-2} \text{м}, \quad e_* = 10^{10} \text{Па}, \quad \vartheta_* = 1 \text{C}^\circ, \quad \tau_* = 10^{-5} \text{ 1/C}^\circ,$$

функция принадлежности для неконтрастной нечетко-множественной характеристики изгибающего момента  $\tilde{M}$  имеет вид, представленный на рисунке 1.

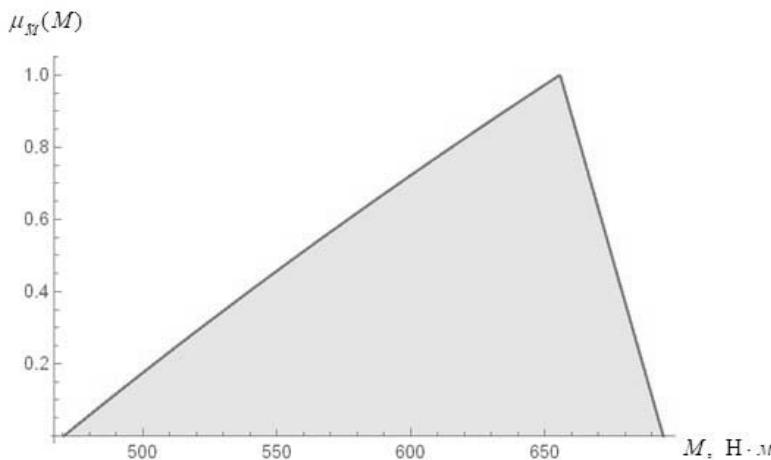


Рис. 1. Вид функции принадлежности для  $\tilde{M}$

**Выводы.** В результате представленных исследований осуществлена разработка и рассмотрены примеры применения численно-аналитической методики решения проблемы учета параметрической неопределенности для расчетных моделей термонапряженного состояния изгибающей биморфной балки и напряженного состояния нагреваемого стержневого элемента в безграничной деформируемой среде, связанной с разбросами значений исходных физико-механических и геометрических характеристик. Изложенный подход базируется на использовании аналитических решений рассматриваемых задач в детерминистической постановке без учета параметрической неопределенности, и последующем переходе в них к описывающим неконтрастные исходные параметры нечетко-множественным аргументам путем с поэтапного фрагментированного применения арифметики нечетких величин и модифицированного альфа-уровневого эвристического принципа обобщения. Описываемый подход допускает эффективную численную реализацию и предъявляет менее жесткие требования к характеру исходной информации о подлежащих учету разбросах по сравнению с критериями ее корректной статистической природы в случае возможного применения к рассматриваемым проблемам методов вероятностно-стохастического анализа.

1. Дудяк А.И. Температурные напряжения в биметаллическом стержне / А.И. Дудяк, В.М. Хвасько // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет; редкол.: Ю.В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). – Минск: БНТУ, 2022. – Вып. 36. – С. 139–142.

2. Куликов Ю.А. Напряженно-деформированное состояние термобиметаллических элементов / Ю.А. Куликов, О.С. Мерзлякова // Фундаментальные исследования. – 2007. – № 9 – С. 70–71.
3. Милованов А.Ф. Стойкость железобетонных конструкций при пожаре / А.Ф. Милованов. – М.: Стройиздат, 1998. – 304 с.
4. Ширко А.В. Определение механических свойств композитной арматуры с учетом температурного воздействия / А.В. Ширко, А.Н. Камлюк, А.В. Спиглазов, А.С. Дробыш // Механика машин, механизмов и материалов. – 2015. – № 2 (31). – С. 59–65.
5. Борисова Т.А. Исследование влияния температурного воздействия на работу стеклопластиковой арматуры в бетонных конструкциях / Т.А. Борисова, Т.А. Зиннуров, А.Н. Куклин // Известия КГАСУ. – 2018. – № 2 (44) – С. 136–144.
6. Тавбаев Ж.С. Постановка задачи теории термоупругости для стержня-включения и породы-матрицы / Ж.С. Тавбаев, Б.Ж. Сапаров, Г.З. Шаманов, А.К. Эркинов // Journal of food science. – 2022. – Vol. 1, Iss. 1. – Р. 1–7.
7. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 р.
8. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 р.
9. Дремов В.В. Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений для усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика: теоретический алгоритм / В.В. Дремов, Н.И. Захаров, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 77–88. – doi:10.24412/0136-4545-2022-3-77-88. – EDN:PPIRKN.
10. Павлыши В.Н. Учет неконтрастности параметров в модели неразрушающих режимов лазерного отжига диэлектрических и полупроводниковых пластин / В.Н. Павлыши, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VII Международной научной конференции, посвящённой 85-летию Донецкого национального университета (Донецк, 27–28 октября 2022 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – С. 68–70.
11. Storozhev S. V. Fuzzy-set analysis of models of temperature deformation of thin-walled elements with elliptic boundaries in industrial and aerospace structures / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020, V. 862, 022005. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/862/2/022005>
12. Сторожев С.В. Методика учета факторов неопределенности в моделях термоупругого деформирования тонких пластин с эллиптическими граничными контурами / С.В. Сторожев, В.Е. Болнокин, В.Г. Выскуб, Д.И. Мутин, Е.И. Мутина, С.Б. Номбре // Системы управления и информационные технологии. – 2020. – № 2(80). – С. 4–8.
13. Номбре С.Б. Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4(81). – С. 63–76. – doi:10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN:TOGBNE.

**S.B. Nombre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev**

**Fuzzy-set analysis of parametric uncertainty in computational models of thermoelastic deformation of beams.**

The technique and individual numerical results of applying the apparatus of fuzzy-set calculations to analyze the problem of taking into account parametric uncertainty factors in the form of spreads of experimental and technological values of the initial physical, mechanical and geometric characteristics of models thermal deformation of beams are considered. The studies are implemented for the model

*С.Б. Номбрэ, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев*

of the thermally stressed state of a bimorph beam and the model of the stressed state of a heated rod element in a boundless deformable medium. The presented approach is based on the use of analytical solutions of the problems under consideration in a deterministic formulation without taking into account parametric uncertainty, and the transition to fuzzy set arguments with a phased fragmented application of fuzzy arithmetic and a modified version of the alpha-level heuristic generalization principle.

**Keywords:** *bimorph thin beams, rods in a deformable medium, thermoelastic stress state, accounting for non-contrast parameters, numerical-analytical algorithm, fuzzy set method, heuristic generalization principle.*

*Получено 18.01.2023*

## ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 550.8.012

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-93-107

EDN: SJNCKX



©2023. В.А. Дрибан<sup>1</sup>, Б.В. Хохлов<sup>2</sup>, Д.М. Хламов<sup>3</sup>, А.В. Антипенко<sup>4</sup>

### АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРОВАЛОВ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЗАТОПЛЕНИИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК НА ПРИМЕРЕ ШАХТЫ ИМ. В.М. БАЖАНОВА

В статье представлены результаты работы по установлению провалоопасных объектов, определению, картированию и обследованию провалоопасных зон, а так же прогнозу провалообразования на основе методов искусственного интеллекта на подработанных территориях г. Макеевка.

**Ключевые слова:** горный массив, затопление горных выработок, устойчивость, активизация процесса сдвижения, земная поверхность, провал.

**Введение и цель исследования.** Шахта им. В.М. Бажанова расположена на северо-востоке г. Макеевка в Донецко-Макеевском геолого-промышленном

<sup>1</sup> Дрибан Виктор Александрович – доктор техн. наук, зам. директора по науч. работе РАНИМИ, Донецк, e-mail: viktor-driban@yandex.ru.

*Driban Victor Aleksandrovich* – Doctor of Technical Sciences, Deputy Director for Science, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

<sup>2</sup> Хохлов Борис Валентинович – канд. техн. наук, зав. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: hbv@bk.ru.

*Khohlov Boris Valentinovich* – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

<sup>3</sup> Хламов Дмитрий Михайлович – ст. науч. сотр. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: hlamov\_d@mail.ru.

*Khlamov Dmitry Mikhailovich* – Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

<sup>4</sup> Антипенко Антон Викторович – мл. науч. сотр. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: ministrxp@mail.ru.

*Antypenko Anton Victorovich* – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

районе Донбасса. Отрабатывала угольные пласты  $n_1^B$ ,  $n_1^H$  и  $m_3$  свит соответственно  $C_3^1$  – “Исаевская” и  $C_7^2$  – “Горловская”, которые представлены толщей переслаивающихся песчаников, алевролитов, аргиллитов, известняков, углей и углистых аргиллитов, которые, в свою очередь, перекрыты покровными отложениями четвертичного возраста. Шахта им. В.М. Бажанова не сбита горными работами с другими шахтами.

Объектом исследований являются геомеханические процессы сдвижения и деформирования в техногенных горизонтах шахты им. В.М. Бажанова и на подработанных ею территориях. В работе была поставлена задача прогноза активизации провалообразования в случае затопления горных выработок шахты им. В.М. Бажанова. Эта задача была поставлена для оценки экологических рисков в густонаселенном районе г. Макеевка, при снижении материальных затрат на откачуку воды из шахты.

При отключении водоотливного комплекса шахты общее время затопления горных выработок составит 6,3 года и, при самом неблагоприятном гидрогеологическом исходе, возможен излив подземных вод на земную поверхность через шурф № 10 в объеме до 89 м<sup>3</sup>/ч в балку Сухая Калиново [1].

Цель работы – анализ провалоопасной ситуации в пределах района с высокой плотностью жилой застройки г. Макеевка при затоплении горных выработок шахты им. В.М. Бажанова.

Основная предпосылка активизации сдвижения породной толщи над старыми горными выработками в виде провалов – это сохранившиеся техногенные пустоты [2].

Для достижения поставленной цели, в соответствии с [3] и [4] на горном отводе шахты были определены все объекты, над которыми возможно возникновение провалов земной поверхности. В результате анализа планов горных выработок и земной поверхности шахты было зафиксировано 27 горных выработок имеющих выход на земную поверхность (табл. 1), из них: стволов вертикальных – шесть, наклонных стволов – пять, шурфов вертикальных – двенадцать, скважин большого диаметра – четыре. Также было выявлено четыре площадных зоны от старых очистных работ пластов  $n_1^B$  и  $n_1^H$  и от старых горных выработок (до 1960 г.) по этим же пластам близкого расположения к земной поверхности.

На основании анализа собранной информации о горных выработках, имеющих выход на земную поверхность, и выработках близкого расположения к земной поверхности, по разработанной в ГБУ “РАНИМИ” методике [5] был выполнен расчет нормативных провалоопасных зон. В пределах горного отвода шахты им. В.М. Бажанова по всем пластам, на плане поверхности выделено и картировано 22 нормативные зоны возможного провалообразования, представленные в таблице 2.

При наложении зон от разных объектов друг на друга, они объединялись. Определены площади зон и маршруты их обследования. По методике [6] проведено обследования выделенных зон с фотофиксацией объектов, указанием состояния устьев горных выработок и земной поверхности над ними. Нормативные

Анализ возможности возникновения провалов при затоплении горных выработок

Таблица 1. Обследованные объекты шахты им. В.М. Бажанова

№ пп	Наименование выработки	Год ликвидации	Глубина, м	Угол наклона, градус	Состояние устья
1	2	3	4	5	6
1	Скиповой ствол №1	Консервация	1056	90	Удовл.
2	Клетевой ствол №2	Действующий	1032	90	Удовл.
3	Клетевой ствол №3	Действующий	199	90	Удовл.
4	Скиповой ствол №4	Действующий	222	90	Удовл.
5	Тех. скважина №1	Перекрыта	927	90	Удовл.
6	Тех. скважина №2	Перекрыта	1019	90	Удовл.
7	Тех. скважина №3	Действующая	1031	90	Удовл.
8	Тех. скважина №4	Перекрыта	1031	90	Удовл.
9	Вент. ствол №6	Действующий	280	90	Удовл.
10	Вент. ствол №5	Действующий	937	90	Удовл.
11	Главный накл. ствол	1959	58	3	Удовл.
12	Наклонный ствол № 2	1959	47	30	Удовл.
13	Бутовский уклон	1923	39	3	Удовл.
14	Ходок бутовского укл.	1923	38	3	Удовл.
15	Наклонный вент. ствол	1979-81	135	50	Удовл.
16	Добычной ствол	1959	38	90	Удовл.
17	Вентиляционный шурф	1960	37	90	Удовл.
18	Шурф №1	До 1960	24	90	Удовл.
19	Шурф №2	До 1960	41	90	Удовл.
20	Шурф №3	До 1960	24	90	Удовл.
21	Шурф №4	До 1960	24	90	Удовл.
22	Шурф №5	До 1960	24	90	Удовл.
23	Шурф №6	До 1960	17	90	Удовл.
24	Шурф №7	До 1960	28	90	Удовл.
25	Шурф №8	До 1960	42	90	Удовл.
26	Шурф №9	До 1960	29	90	Удовл.
27	Шурф №10	До 1960	37	90	Удовл.

Примечание - Всего выработок – 27. Ранее ликвидировано 17 выработок

провалоопасные зоны были детально описаны, указаны объекты земной поверхности (здания, сооружения, частные домостроения), попадающие в эти зоны. Осуществлена визуализация провалоопасных зон и фотоматериалов обследования в геоинформационной системе Google Earth. На рисунке 1 представлено позиционирование обследованных объектов шахты им. В.М. Бажанова на местности. Провалов устьев ликвидированных выработок не обнаружено.

Таблица 2. Зоны возможного провалообразования  
на земной поверхности в пределах горного отвода шахты им. В.М. Бажанова

№ объекта	№ опасной зоны	Название объекта	Угол наклона, градус	Площадь, м <sup>2</sup>
1	1	Скиповой ствол №1	90	13 500
2		Клетевой ствол №2	90	
3		Клетевой ствол №3	90	
4		Скиповой ствол №4	90	
5	2	Вент. канал скип. ствола №1	0	1 500
6, 7	3	Технические скважины №1 и №2	90	6 940
8, 9	4	Технические скважины №3 и №4	90	8 160
10	5	Ствол №6	90	5 000
11	6	Вентиляционный ствол №5	90	5 000
12	7	Шурф №8	90	1 260
13	8	Наклонный ствол №2	30	35 050
14		Главный наклонный ствол	3	
15		Шурф №5	90	
16	9	Шурф №6	90	1 260
17	10	Шурф №4	90	1 260
18	11	Шурф №3	90	1 260
19	12	Шурф №7	90	1 260
20	13	Шурф №9	90	1 260
21	14	Шурф №2	90	26 100
22		Бутовский уклон	3	
23		Ходок бутовского уклона	3	
24		Шурф №1	90	
25	15	Вентиляционный шурф	90	1 260
26	16	Добычной ствол	90	1 260
27	17	Шурф №10	90	1 260
28	18	Наклонный вент. ствол	50	3 260
29	19	Зона от очистных пластов $n_1^H$	3	128 910
30	20	Зона от очистных пластов $n_1^B$	3	
31	21	Зона от старых выработок (до 1960 г.) по пл. $n_1^H$	3	1 393 660
32	22	Зона от старых выработок (до 1960 г.) по пл. $n_1^B$	3	

**1. Прогноз провалоопасности над старыми горными выработками на основе методов искусственного интеллекта.** Ситуация провалоопасности по построенным согласно нормативной методике [5] провалоопасным зонам на горном отводе шахты им. В.М. Бажанова, может сильно отличаться от реальной. Это обусловлено несколькими причинами. В горном деле нет единого нормативного документа, устанавливающего правила построения границ провалоопасных зон. Разработанная в ГБУ "РАНИМИ" методика [5], опирается на несколько нормативно-методических документов [4], [7]–[10], в которых имеются пункты, посвященные данному вопросу. Расчетные зависимости, применяемые в методике [5], не учитывают подтопление провалоопасных территорий и возраст горных выработок. Нормативная методика предполагает, что дневная

## Анализ возможности возникновения провалов при затоплении горных выработок

поверхность представляет собой горизонтальную плоскость, однако для условий пологого падения пород большое значение приобретает рельеф местности, поверхность которого в большинстве случаев недопустимо считать плоскостью при определении глубины расположения выработок.



Рис. 1. Обследованные объекты шахты им. В.М. Бажанова на карте Google Earth

Часть территории горного отвода шахты им. В.М. Бажанова, отнесенная к потенциально провалоопасным, имеет весьма сложное строение. На незначительных глубинах отрабатывались два сближенных пласта  $n_1^B$  и  $n_1^H$ , мощность

междупластья 6–10 м. Выходы под наносы обоих пластов расположены на западном склоне Сухой Калиновой балки. Направление падения пород – с запада на восток. Несмотря на то, что вдоль дна балки по обоим пластам расположены целики, они неоднократно были прорезаны наиболее опасными с точки зрения провалообразования протяженными горными выработками различного назначения. Большой диапазон возраста выработок – от 55 до более 100 лет. Изменение угла падения с глубиной от  $3^{\circ}$  до  $5^{\circ}$ . В кровле пласта  $n_1^B$  залегает песчаник мощностью 20–30 м. Наличие лишь фрагментарных данных о мощности наносов. Здесь следует отметить, что при прогнозе опасности провалообразования необходимо учитывать только глубину по карбону, т.е. коренным породам. Так как прочностные характеристики наносов на порядок ниже, чем у коренных пород, то купол обрушения, развивающийся до поверхности карбона, неизбежно выйдет на дневную поверхность в виде провала.

Все эти факторы делают прогноз провалообразования на основе нормативной методики [5] чрезвычайно сложным и недостаточно надежным. В связи с этим было принято решение применить метод прогноза на основе расчетов нейронной сети.

Была создана и натренирована нейронная сеть [11]–[15] для прогноза образования провалов на земной поверхности над старыми горными выработками с высокой точностью до 94,6%. Кроме того, были построены три группы номограмм для слабо-, средне- и высокометаморфизованных горных массивов, которые позволяют установить время появления провала на дневной поверхности в зависимости от глубины расположения выработки при действующих шести группах влияющих факторов 1–6 [15], представленных на рисунке 2.

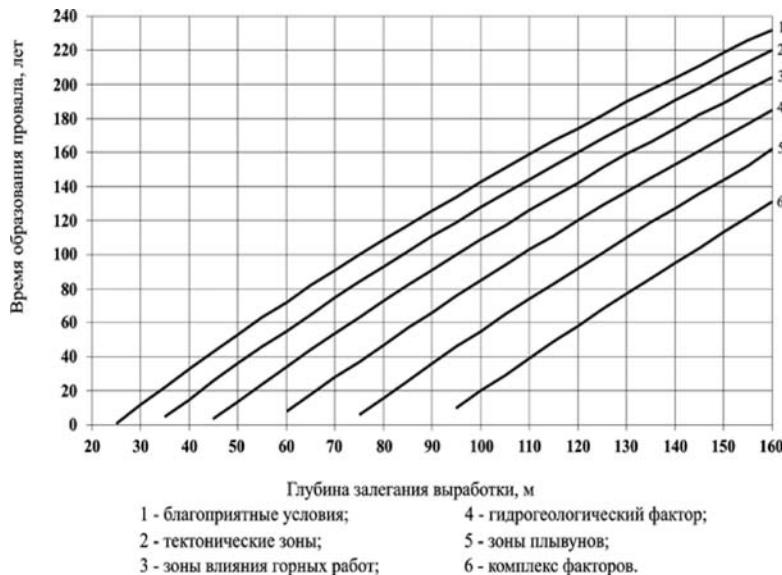


Рис. 2. Номограммы для установления времени развития провала в зависимости от глубины при средней степени метаморфизма [15]

**2. Предварительные построения.** Оценка провалоопасности конкретных участков поверхности проводилась в три этапа. На первом этапе производились предварительные построения. В графическом редакторе к цифровой растровой копии плана поверхности привязывались аналогичные копии планов горных выработок обоих пластов. За основу была взята поверхность верхнего пласта  $n_1^B$ , как более опасного. На план поверхности переносилась линия выхода пласта  $n_1^B$  под наносы. Далее эта линия кlonировалась в сторону падения с интервалами, учитывающими изменение угла падения. Таким образом, на плане дневной поверхности была получена еще одна поверхность, приблизительно соответствующая поверхности пласта (рис. 3, а).

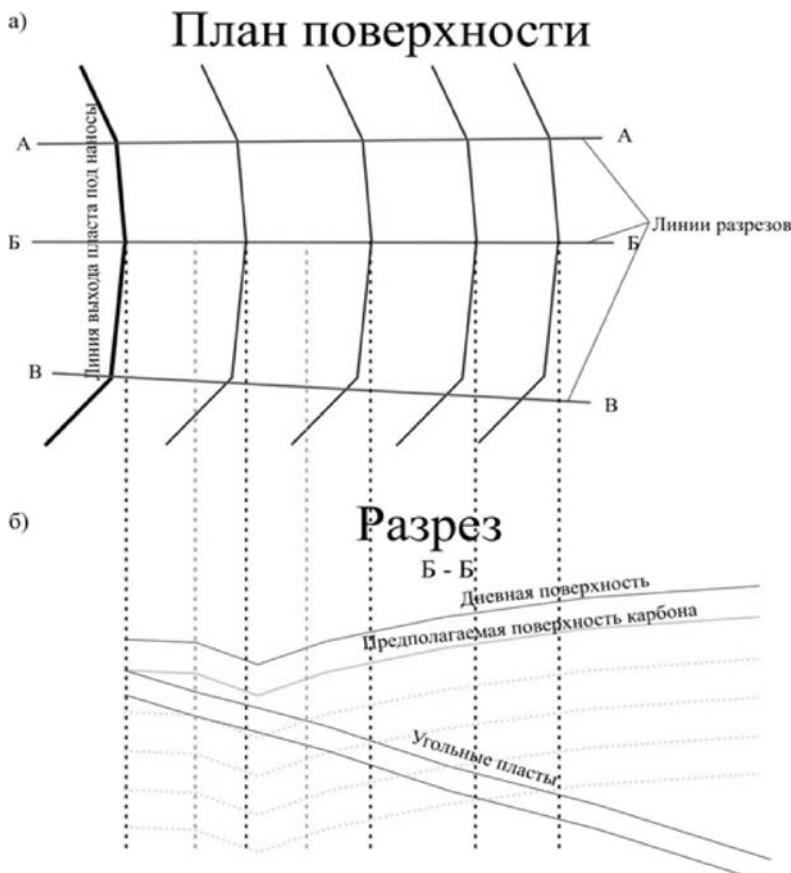


Рис. 3. Принципиальная схема предварительных графических построений

Следующим шагом были намечены четыре линии разрезов и построены сами разрезы (см. рис. 3б), линии дневной поверхности и пластов по соответствующим планам, линия поверхности карбона по имеющимся данным о мощности наносов. Для удобства построений горизонтальный масштаб разрезов был выбран соответствующим масштабу плана поверхности (1:5000), а вертикальный масштаб 1:1000.

**3. Общая оценка провалоопасности.** На втором этапе, на плане изоглубин по карбону пласта  $n_1^B$  была выделена 41 зона (рис. 4) по интервалам глубин 20 м с учетом реальных контуров горных выработок по обоим пластам, их возраста и типа. На этом этапе панельные уклоны и бремсберги, охраняемые целиками по обоим пластам, сразу выделялись в отдельные зоны.

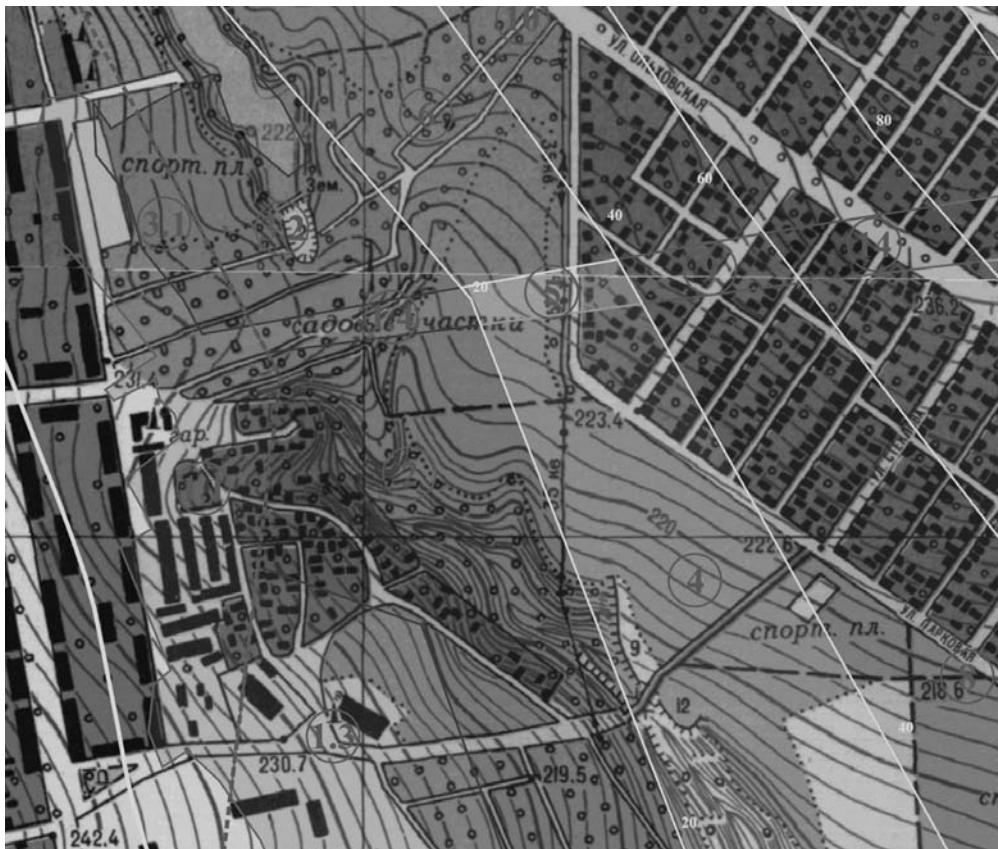


Рис. 4. Фрагмент плана с зонами нейросети совмещенный с планом поверхности

В качестве следующего шага на совмещенный план была вынесена линия возможного уровня затопления, соответствующая отметке устья шурфа № 10 +206,1 м. По этой линии зона № 1 была разделена на четыре, а зона № 3 – на две новых зоны. Для каждой зоны были определены диапазон глубин по карбону, средний возраст выработок, а также время образования провалов по трем номограммам для горного массива средней степени метаморфизма (рис. 2):

1. благоприятные условия;
2. в зоне влияния горных работ (где таковое могло иметь место);
3. гидрогеологический фактор для определения возможного изменения обстановки при затоплении горных выработок в соответствующих зонах.

Результаты представлены в таблице 3.

Анализ возможности возникновения провалов при затоплении горных выработок

Таблица 3. Результаты определения провалоопасности выделенных участков земной поверхности по номограммам

№ зоны	Глубина по карбону, м	Возраст выработок, лет	Время формирования провалов, лет			Соответствие нормативным зонам
			График 1	График 3	График 4	
1	2	3	4	5	6	7
1.1	0-8	100	0	0	—	№8, №9, № 11, №19, №20
1.2	0-5	100	0	0	—	Частично №14
1.3	8-15	100	0	0	0	Частично №14
1.4	8-20	100	0	0	0	Частично № 8
2	10-20	80	0	0	0	№12, 13, 15, 16, №20
3.1	5-8	90	0	0	—	Частично №20
3.2	8-20	90	0	0	0	Частично №7
4	20-40	75	0-35	0	0	№17
5	20-40	100	0-35	0	0	Частично №8
6	20-40	85	0-35	0	0	Частично №7
7	54-60	55	60-75	25-35	0-10	
8	40-60	70	35-75	0-35	0-10	
9	40-60	100	35-75	0-35	0-10	
10	40-60	75	35-75	0-35	0-10	
11	46-60	75	45-75	—	0-10	
12	60-80	55	75-110	35-75	10-45	
13	60-80	65	75-110	35-75	10-45	
14	60-80	100	75-110	35-75	10-45	
15	60-80	70	75-110	35-75	10-45	
16	60-80	70	75-110	—	10-45	
17	80-100	55	110-145	75-110	45-85	
18	80-100	60	110-145	75-110	45-85	
19	80-100	100	110-145	75-110	45-85	
20	80-100	60	110-145	75-110	45-85	
21	80-100	65	110-145	—	45-85	
22	83-100	55	110-145	—	45-85	
23	100-120	55	145-175	110-145	85-120	
24	100-120	60	145-175	110-145	85-120	
25	100-120	60	145-175	110-145	85-120	
26	100-120	60	145-175	110-145	85-120	
27	100-120	60	145-175	—	85-120	
28	100-120	55	145-175	—	85-120	
29	100-120	55	145-175	—	85-120	
30	120-140	55	175-205	145-165	120-155	
31	120-140	60	175-205	145-165	120-155	
32	120-140	60	175-205	145-165	120-155	
33	120-140	60	175-205	145-165	120-155	
34	120-140	60	175-205	—	120-155	
35	120-140	55	175-205	—	120-155	
36	140-160	55	205-235	165-205	155-185	
37	140-160	60	205-235	165-205	155-185	
38	140-160	60	205-235	165-205	155-185	

Продолжение таблицы 3

№ зоны	Глубина по карбону, м	Возраст выработок, лет	Время формирования провалов, лет			Соответствие нормативным зонам
			График 1	График 3	График 4	
1	2	3	4	5	6	7
39	140-160	60	205-235	165-205	155-185	№3, 4
40	140-160	60	205-235	—	155-185	
41	140-160	55	205-235	—	155-185	

Примечания

- Нормативная зона № 21 включает следующие зоны нейросети: частично зону 1.1, полностью – зоны 1.3-6 и частично зоны 8-10.
- Нормативная зона №22 включает следующие зоны нейросети: частично зоны 1.1, 1.3 и 3.1, полностью – 1.4, 2, 3.2, 4-6, 8-11 и частично 13-16.

По результатам анализа данных таблицы 3 ее ячейки были закрашены следующим образом:

- прочерк (отсутствие данных) в ячейках пятой колонки означает, что в данной зоне отрабатывался только пласт  $n_1^B$  без подработки по нижнему пласту, соответственно фактор влияния горных работ можно исключить;
- окрас получили ячейки, в которых время образования провалов меньше, чем средний возраст выработок (третья колонка). Это означает, что в данных зонах процесс провалообразования уже должен был завершиться и для объектов на поверхности угроза отсутствует;
- окрас получили ячейки, в которых время образования провалов существенно больше среднего возраста выработок (третья колонка). Соответственно, в ближайшем будущем образование провалов в этих зонах маловероятно;
- окрас ячеек означает ситуацию некоторой неопределенности. Например: зона № 7 при благоприятных условиях не опасна, поскольку с учетом влияния подработки процесс провалообразования должен быть завершен. В тоже время, поскольку отсутствует информация об интенсивном деформировании в указанной зоне (о погашении пустот), процесс может быть активизирован за счет обводнения массива;
- окрас получали ячейки четвертой и пятой колонок, если возраст выработок зоны укладывался в диапазон времени образования провалов. Ячейки шестой колонки получали такой окрас, если при появлении гидро-геологического фактора время провалообразования становилось равным, либо меньше возраста выработок. Известно, что при насыщении водой прочность горных пород существенно снижается, а это, в свою очередь, ускоряет процесс провалообразования.

Предварительный анализ ситуации показал, что зоны № 1–6 и 9 уже не опасны, так как процессы провалообразования в них уже должны были закончиться. Зоны № 23–41 не опасны, поскольку расположены на глубинах 100 и более метров, а прогнозное время провалообразования превышает 145 лет в благоприятных условиях и 85–120 лет с учетом обводнения. Зоны № 7–22 (за исключением № 9) требуют более детального изучения.

**4. Прогноз провалоопасности на основе прямого расчета по нейронному алгоритму.** В предыдущем пункте был установлен ряд зон, требующих детального изучения методом прямого расчета по нейронному алгоритму времени образования провалов. Первым шагом такового стал поиск в пределах указанных зон объектов, представляющих реальную опасность с точки зрения возможности образования провалов на земной поверхности. К таковым были отнесены охраняемые целиками выработки на обоих пластах, при отсутствии их непосредственной подработки или надработки горными работами соседнего пласта. Такие процессы, с учетом незначительной мощности междупластья, существенно нарушают исходное состояние массива и исключают возможность развития над протяженными выработками узких куполов обрушения, которые и приводят к образованию провалов.

Объекты, являющиеся источниками возможного образования провалов, были обнаружены в трех зонах № 14, 19 и 20. Зоны № 14 и 19 были построены над центральным уклоном пласта  $n_1^H$  (рис. 5).

В зоне № 20 объекты-источники локализованы в пределах двух небольших участков, поэтому были выделены две подзоны – подзона № 20.1 над участком 4-го транспортного штрека пл.  $n_1^H$  в целике под вентиляционный ствол № 5, и подзона № 20.2 над центральным, вспомогательным и транспортным бремсбергами и ходоком центрального бремсберга пл.  $n_1^H$ .

На втором шаге были уточнены исходные параметры объектов, а именно глубина расположения и возраст выработок. Так же для прямого расчета по нейронному алгоритму требуются следующие данные: степень метаморфизма (в данном случае Г); угол падения пород (изменялся от 3° до 5°); угол наклона выработки; фактор влияния горных работ и горно-геологических условий (в отобранных зонах отсутствует). Далее, для установленных условий был произведен расчет времени образования провалов. Результаты расчета приведены в таблице 4.

Ячейки в таблице 4 закрашивались по тем же правилами, что и ячейки в таблице 3. По результатам анализа было установлено, что зоны № 20.1 и 20.2 даже в случае затопления не должны представлять особой опасности еще в течение 20–30 лет. Возраст выработок зон № 20.1 и 20.2, говорит о том, что они были закреплены металлической рамной крепью и полноценно погашены после завершения эксплуатации. Так же, данные участки выработок находятся в верхней части бремсбергового поля, что позволяет исключить негативное влияние гидрогеологического фактора на вмещающий их массив. С учетом фактической глубины расположения выработок и наличия мощного песчаника в кровле

пласта  $n_1^B$ , можно утверждать, что достижение процессами интенсивного деформирования массива в данных зонах поверхности карбона маловероятно, а соответственно эти зоны достаточно безопасны.



Рис. 5. Зоны нейросети с объектами, источниками возможного образования провалов

Таблица 4. Результаты прямого расчета провалоопасности с учетом затопления горных выработок

№ зоны	Опасный объект	Возраст объекта, лет	Глубина по карбону, м	Угол падения пород, град.	Угол наклона выработки, град	Время провала по расчету, лет	
						Благопр. условия	Гидрогеологич. фактор
14	Центральный уклон пласта $n_1^H$	70-75	70-90	4	3	73-110	8-48
19	Центральный уклон пласта $n_1^H$	70-75	110	5	3	108-142	46-84
20.1	Участок 4-го транспортного штрека пл. $n_1^H$ в целике под вент. ств. №5	60	110	5	0	151	94
20.2	Центральные вспомогательный и транспортный бремсберги и ходок центрального бремсберга пл. $n_1^H$	60	110	5	5	137	77

Существует вероятность образования провалов по параметру “благоприятные условия” на сегодняшний день в зоне нейросети № 14. В зоне нейросети № 19 вероятность образования провалов меньше. Тем не менее, обе эти зоны построены над нижними участками центрального уклона пласта  $n_1^H$ , что в подавляющем большинстве случаев означает эксплуатацию в неблагоприятных гидрогеологических условиях и возможность затопления после завершения горных работ.

В нижней части уклон был пройден, либо восстановлен во второй половине 1940-х годов. Протяженные горные выработки в тот период крепились исключительно деревом, которое в неблагоприятных гидрогеологических условиях (с учетом агрессивности шахтных вод) довольно быстро деградирует, теряя прочность, что ускоряет образование свода обрушения с возможностью его выхода на поверхность. Таким образом, с учетом гидрогеологического фактора в зоне нейросети № 14 процесс интенсивного деформирования массива, провоцирующего провалообразование, уже должен был завершиться, а зона № 19 как раз находится в периоде риска провалообразования.

Во второй половине 1980-х годов (т.е. более 30 лет назад) производилась доразведка поля шахты им. В.М. Бажанова [1], в процессе которой был также определен установившийся уровень воды в подработанном горными работами по пластам  $n_1^B$  и  $n_1^H$  массиве. Установившийся уровень вод располагается выше горных работ. Это свидетельствует о том, что уже к тому времени процесс кольматации техногенных трещин завершился и произошло восстановление водоупорных и естественных водоносных горизонтов. Никаких депрессионных воронок обнаружено не было. Данный факт может означать, что процессов образования куполов обрушения на данной территории не происходит, так как это неизбежно привело бы к появлению депрессионных воронок и сказалось бы на уровне воды в подработанном горном массиве. Это касается также и зоны нейросети № 19.

Необходимо отметить, что расчеты нейросети проводились по варианту предельного сценария развития процессов интенсивного деформирования подработанного горного массива, с максимально возможным уровнем затопления последнего до отметки +206,1 м. В случае, если фактический уровень затопления будет установлен ниже данной отметки, то прогноз для территорий, не подвергшихся подтоплению, нужно будет пересмотреть.

### **Выводы.**

1. В пределах горного отвода шахты им. В.М. Бажанова был проведен анализ геомеханической обстановки по двум методикам: нормативной и новой с применением метода искусственного интеллекта на основе натренированной нейросети. По нормативной “Методике построения и обследования зон, опасных по провалам” выделено и картировано на плане поверхности М 1:5000 22 нормативные зоны потенциального провалообразования на земной поверхности, и с помощью нейросети – 41 зона.

2. Детальный анализ горно-геологических и горнотехнических факторов 41 зоны позволил установить, что 40 из них являются безопасными.

3. Нормативные площадные зоны № 21 и № 22 занимают значительную пло-

щадь и на большей ее части накладываются друг на друга, что означает повышенную опасность провалообразования. В то же время анализ (номограммы на рисунке 2) показал, что большая часть этих зон безопасна, поскольку процессы провалообразования на них уже завершились.

4. Большая часть нормативной зоны № 8 относится к центральному уклону пласта  $n_1^H$ , но она не пересекается с нейронными зонами № 14 и № 19, а заканчивается выше по падению. Таким образом, нормативная зона № 8 занимает те участки (зоны нейросети № 1, 4, 5 и частично 9 в табл. 4), которые по расчетам относятся к безопасным с точки зрения возможного провалообразования.

5. Небольшая вероятность провалообразования на сегодняшний день в пределах поля шахты им. В.М. Бажанова сохраняется только в границах зоны нейросети № 19, включающей следующие объекты на поверхности: частные домовладения. С учетом возраста центрального уклона пласта  $n_1^H$  и отсутствия депрессионной воронки в районе зоны нейросети № 19 по результатам доразведки в 1980-х, можно утверждать, что вероятность течения процессов интенсивного деформирования горного массива в границах данной зоны невелика.

6. Многоквартирные жилые дома, находящиеся в нормативных зонах № 20 и № 19 в область подтопления не попадают. Таким образом, активизации деформаций земной поверхности не произойдет.

7. Многоквартирный жилой дом (9 этажей) № 4 на пл. Грибиниченко попадает в область подтопления, однако горные работы по пластам  $n_1^B$  и  $n_1^H$  под этим домом производились в 1916-26 гг. и интенсивные деформации уже реализовались задолго до начала его строительства с конструктивными средствами защиты.

1. Дрибан В.А. Особенности развития гидрогеологической ситуации на примере шахты им. В.М. Бажанова / В.А. Дрибан, Е.Н. Шевченко, Н.А. Дуброва // Труды РАНИМИ: сб. науч. тр. – 2021. – № 12–13 (27–28). – С. 185–197.
2. Славиковская Ю.О. Техногенные пустоты недр как фактор негативного воздействия на окружающую среду при разработке месторождений твердых полезных ископаемых / Ю.О. Славиковская // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – № 2. – С. 33–44.
3. ГСТУ 101.00159226.001–2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01–01–2004. – К., 2004. – 128 с.
4. НПАОТ 10.0-1.01-16 Правила безопасности в угольных шахтах. – опубл. 20.05.2016 г. с изменениями, внесенными на основании Приказа Министерства угля и энергетики Донецкой Народной Республики, Государственного Комитета горного и технического надзора Донецкой Народной Республики от 07.07.2016 № 63/319, от 20.06.2017 № 157/291. – Донецк, 2016. – 217 с.
5. Хохлов Б.В. Методика построения и обследования зон, опасных по провалам / Б.В. Хохлов, В.А. Дрибан, С.В. Голдин, А.М. Терлецкий, М.Д. Рожко // Труды РАНИМИ: сб. науч. тр. – 2019. – № 7 (22). – С. 142–157.
6. Хохлов Б.В. Методика обследования провалоопасных зон / Б.В. Хохлов // Труды РАНИМИ: сб. науч. тр. – 2020. – № 10–11 (25–26). – С. 31–35.
7. ГСТУ 101.00159226.001–2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01–01–2004. – К., 2004. – 128 с.
8. КД 12.12.005-2001. Правила ликвидации стволов угольных шахт. – Утв. Министерством

## Анализ возможности возникновения провалов при затоплении горных выработок

- топлива и энергетики Украины 15.02.2001 г. – Донецк, 2001. – 122 с.
- 9. Методическое руководство о порядке выделения провалоопасных зон и выбора комплекса технических мероприятий по выявлению и ликвидации пустот при ликвидации шахт. – Москва: ИПКОН РАН, 1999. – 54 с.
  - 10. Методическое руководство «О порядке выделения провалоопасных зон и выбора комплекса технических мероприятий по выявлению и ликвидации пустот на ликвидируемых шахтах Восточного Донбасса». – Москва: ИПКОН РАН, 2007. – 54 с.
  - 11. *Driban V. Vorhersage des erdoberflacheabsturzes oberhalb der alten kohlengrubenraumen / V. Driban, V. Nazimko, A. Feofanov, I. Khalymendyk // Altbergbau – Kolloquium (Freiberg, 04 – 06 November, 2010).* – Р 391–400.
  - 12. *Дрибан В.А. Особенности провалообразований в Донбассе и пути решения проблемы / В.А. Дрибан, А.Н. Феофанов // Сучасні технології розробки рудних родовищ: збірник наукових праць за результатами роботи міжнародної науково-технічної конференції – Кривий Ріг, 2011.* – С. 85–87.
  - 13. *Дрибан В.А. Особенности развития провалообразований над наклонными стволами / В.А. Дрибан, А.Н. Феофанов, С.В. Голдин // Наукові праці УкрНДМІ НАН України: зб. наук. пр. – 2010. – № 7. – С. 14–28.*
  - 14. *Дрибан В.А. Разработка системы прогноза обрушений земной поверхности над погашенными горными выработками / В.А. Дрибан, А.Н. Феофанов, И.В. Назимко // Проблеми гірського тиску: зб. наук. пр. – 2009. – № 17. – С. 22–57.*
  - 15. Исследование устойчивости структурно-неоднородных массивов горных пород: отчет о НИР № 14/08 № ГР 0107U010339 / Рук. В.А. Дрибан. – Донецк: УкрНИМИ, 2012. – 303 с.

**V.A. Driban, B.V. Khokhlov, D.M. Khlamov, A.V. Antipenko**

**Analysis of the possibility of sinkholes**

**of the earth's surface during flood-ing of mine workings on the example of the mine named after V.M. Bazhanov.**

The article presents the results of work on the establishment of sinkhole-prone objects, the definition, mapping and survey of sinkhole-prone zones, as well as the prediction of sinkhole formation, based on artificial intelligence methods, in the under-worked territories of the city of Makeevka

**Keywords:** *mountain range, flooding of mine workings, stability, activation of the process of displacement, the earth's surface, failure.*

Получено 20.01.2023

УДК 622.831.24:534.1(043.3)  
doi:10.24412/0136-4545-2023-1-108-115  
EDN:VESLSS



©2023. В.А. Канин<sup>1</sup>, Ю.А. Пивень<sup>2</sup>, В.В. Васютина<sup>3</sup>

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИЗАБОЙНОЙ ЧАСТИ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ГОРНЫЙ МАССИВ

Установлены закономерности управления напряженно-деформированным состоянием призабойной части угольного пласта при вибрационном воздействии на него через вмещающие породы и разупрочнении угольного пласта в зоне опорного давления после вибрационного воздействия.

**Ключевые слова:** горные породы, призабойная часть пласта, выработки, замеры.

**Введение и характер проводимых исследований.** В последние годы для предотвращения внезапных выбросов угля и газа и других газодинамических явлений, для интенсификации дегазации угольных пластов, а также для снижения энергетических затрат при отбойке угля добычными комбайнами, начали использоваться методы вибрационного воздействия на горный массив. При этом интерпретация результатов, полученных различными исследователями, являются противоречивыми [1]. В этой связи нами были проведены комплексные наблюдения за состоянием краевой части угольных пластов на крутых и пологих пластах до вибрационной обработки, в процессе ее обработки и после обработки. Комплексный характер наблюдений обеспечивался использованием целого ряда проверенных методов, применяемых при оценках состояния горного массива. Исследования напряженно-деформированного состояния призабойной части

<sup>1</sup>Канин Владимир Алексеевич – доктор техн. наук, вед. науч. сотр. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: vlnkanin2@yandex.com.

*Kanin Vladimir Alekseevich – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.*

<sup>2</sup>Пивень Юрий Анатольевич – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: pivenyura5432@gmail.ru.

*Piven Yuri Anatolyevich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.*

<sup>3</sup>Васютина Виктория Владимировна – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. горного давления РАНИМИ, Донецк, e-mail: vasyutina.vika@yandex.ru.

*Vasiutina Victoriya Valerievna – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.*

угольного пласта проводились электрометрическим методом с использованием шахтного измерителя ШИИС - 3 и четырехэлектродного потенциометрического зонда длиной 0,5 м. Измерения проводились в шпурах диаметром 0,042 м после измерения начальной скорости газовыделения и крепости угля на глубине 3,5 м, продувки и промывки шпура. Интервал следования замеров по глубине шпура был принят таким же, как и при измерении начальной скорости газовыделения и крепости угля 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; и 3,5 м. При перемещении потенциометрического зонда вдоль шпура отмечалось место максимальной электропроводимости, что соответствовало максимальным напряжениям в призабойном массиве угля. Изменение сейсмоакустического состояния горного массива определялось по изменению шумности, принимаемой звукоулавливающей аппаратурой. Прочность угля на поверхности забоя до вибровоздействия и после воздействия измерялась прочностномером П-1. Изменение энергетических затрат на разрушение угля исполнительным органом комбайна 1ГЩ 68 определялось ваттметром Н396 при помощи датчика, в качестве которого служил трансформатор УТТ- 5 М.

### 1. Анализ результатов исследований.

На рисунке 1 показан график удельной электропроводимости угольного массива по мере удаления от забоя. До вибрационного воздействия на краевую

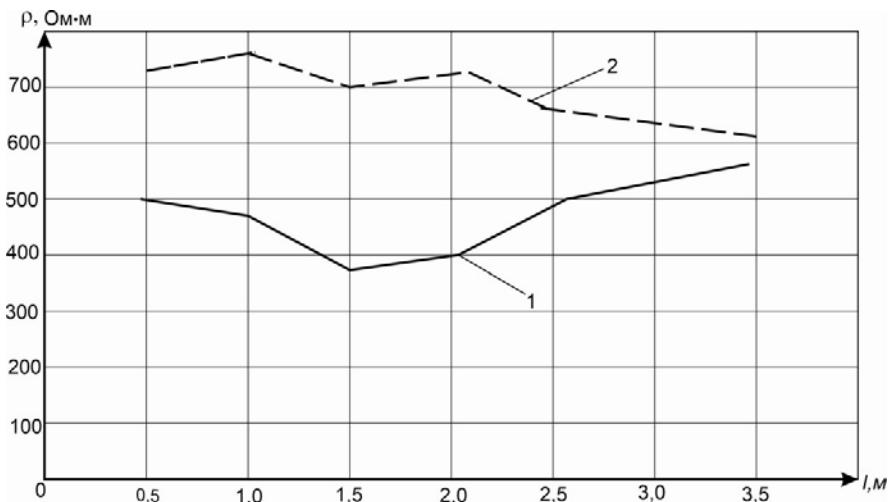


Рис. 1. Изменение величины кажущегося электросопротивления пласта

— до вибровоздействия, - - - - - после вибровоздействия

часть пласта, выполнявшегося под научно-методическим руководством профессора Софийского К.К. [1], максимум электропроводимости находился в интервале 1,5 – 2,0 м. После вибрационного воздействия количественная величина удельного электросопротивления по всей длине шпура в среднем увеличилась на 68%, а максимум электропроводимости сместился за зону замера, т.е глубже 3,25 м. По длине лавы изменение удельного электросопротивления на глубине 2,0 м свыше 30% составило 16,0 м (рис.2).

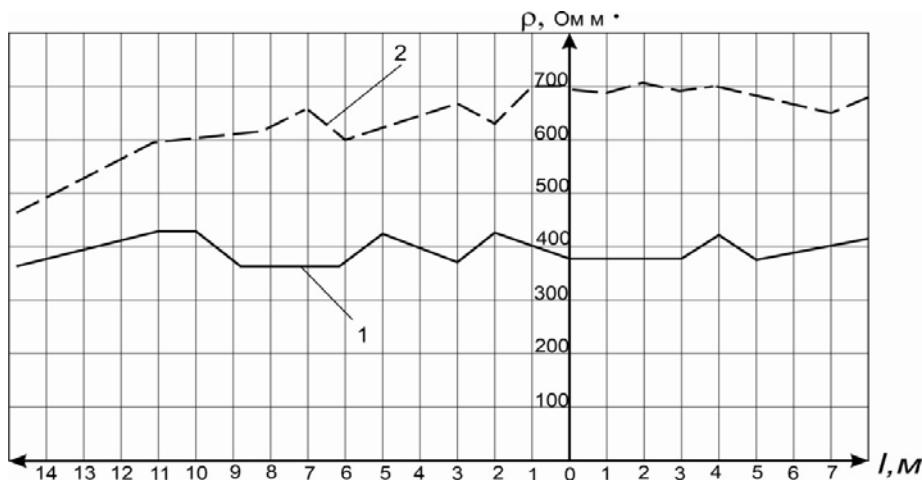


Рис. 2. Изменение величины кажущегося электросопротивления пласта на глубине 2 м по длине лавы от места расположения вибраторов  
 — до вибровоздействия, - - - - - после вибровоздействия

Изменение сейсмоакустического состояния горного массива определялось по изменению шумности, принимаемой звукоулавливающей аппаратурой. Подземные блоки устанавливались на расстоянии до 25 м от лавы в скважинах, пробуренных из конвейерной и воздухопадающей выработок. Запись с двух равноудаленных приемников производилась синхронно. При этом хорошо прослушивались щелчки, возникающие при раскрытии трещин породно-угольного пласта.

До вибрационного воздействия часовая шумность по приемникам обеих бортовых выработок составляла 1 – 2 импульса, т.е суммарная до 3.

При вибрационном воздействии одной стойкой после 20 импульсов в течение 30 мин, часовая шумность в течении 1-го часа практически не изменяется, а еще через 1 час начинает интенсивно возрастать и достигает 7 импульсов, после чего резко снижается до 1 импульса.

При вибрационной обработке системой вибраторов одновременно шумность массива возрастает до максимума достигающего 15 импульсов в час в течение 1-го часа после воздействия и длится 0,5 – 1 час, после чего затухает до 1 – 2 импульсов в час.

Прочность угля на поверхности забоя до вибровоздействия и после воздействия измерялась прочностномером П-1.

Анализ полученных данных по измерению прочности угля на поверхности забоя до и после воздействия (табл. 1) показал, что она находится в пределах области ошибок, как до воздействия, так и после него. В связи с этим, после проведения и обработки данных одного цикла измерений, дальнейшее исследование измерения прочности угля на поверхности забоя прочностномером П-1 не проводилось.

Изменение энергетических затрат на разрушение угля исполнительным органом комбайна 1ГЩ 68 определялось ваттметром Н396 при помощи датчика,

Исследования изменения напряженно-деформированного состояния угольного пласта

Таблица 1. Изменение прочности угля на забое до воздействия и после него

Положение точки замера по длине лавы от вибраторов	Глубина внедрения пuhanсона									
	до вибровоздействия				после вибровоздействия					
	текущее значение		среднее		текущее значение		среднее			
1	18	13	14	12	14	16	23	19	13	15
2	25	23	21	13	20	24	31	20	17	23
3	12	17	24	35	22	32	18	22	28	25
4	13	11	21	35	21	24	20	13	31	28
5	34	39	13	17	25	15	17	18	34	21
6	22	11	34	15	20	14	10	21	19	16
7	18	20	14	31	21	21	15	11	24	18
8	16	22	18	17	18	19	16	23	11	17
9	12	11	21	14	14	31	13	10	18	18
10	12	15	19	17	16	22	18	15	11	16

в качестве которого служил трансформатор УТТ- 5 М. Прибор Н 396 выполнен во взрывоопасном исполнении и поэтому он был помещен в корпус АП 4, имеющий исполнение РВИ. Трансформатор УТТ – 5М был установлен в магнитном пускателе на одной из силовых шин. Перед проведением измерений прибор был калиброван, т.е. установлено минимальное и максимальное значения мощности, потребляемой комбайном при холостом ходе и при разрушении исполнительным органом угля.

Исследования энергетических затрат при выемке пласта проводились в три этапа. Вначале было определено среднее значение мощности, потребляемое комбайном в штатных условиях, т.е. до вибрационной обработки горного массива. При этом установлено, что энергетические затраты на разрушение 1 м угольного пласта по длине лавы составили в среднем 4,19 кВт ч.

На втором этапе проводилась вибрационная обработка пласта и вмещающих пород. Измерения мощности, потребляемой исполнительным органом комбайна на разрушение угля пласта, проводилось при рабочем ходе от системы вибраторов, принятой в системе отчета за нулевую точку, до 15 м по длине лавы в сторону конвейерной наклонной выработки.

Результаты измерений (рис. 3) показывают, что после вибрационной обработки горного массива, энергетические затраты на разрушение 1 п.м. угольного пласта снижаются на 16,8 %.

Для изучения характера сближения вмещающих пород на экспериментальных участках были оборудованы замерные станции, каждая из которых включала в себя измерительные приборы и репера в почве и кровле по нормали.

На крутых пластах замерные станции размещались по рядам наблюдений на расстоянии 0,5–8,0 м от забоя. Инструментальные наблюдения проводились в соответствии с «Методикой шахтных измерений...» посредством измеритель-

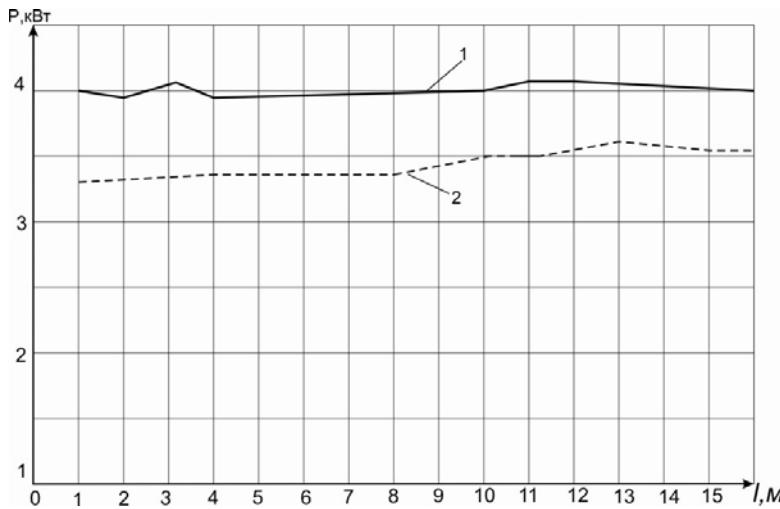


Рис. 3. Изменение параметров сближения вмещающих угольный пласт пород  
 — до вибровоздействия, - - - - - после вибровоздействия

ных стоек СУИ-2, индикатора часового типа ИЧ-10 и самописца СПИ-67.

Указанные приборы позволили ввести регистрацию измерения расстояния между боковыми породами, как в дискретном, так и в непрерывном режимах наблюдения до воздействия системы вибраторов на горный массив, в процессе работы вибраторов и после окончания их работы. Скорости сближения вмещающих пород до воздействия на них системы вибраторов были весьма малы и находились в пределах от  $7,4 \cdot 10^{-10}$  м/с в условиях пласта  $l_7$  шахты «Комсомолец Донбасса», до  $1,15 \cdot 10^{-3}$  м/с на пл.  $l_2$  шахты «Северная», так как на всех экспериментальных участках длительное время не проводились горные работы.

На рисунке 4 представлен характер изменения величин скоростей сближения вмещающих пород пл.  $l_2$  шахты «Северная» до воздействия на них системы вибраторов, в зависимости от периода времени с начала замеров. Анализ рисунка 4 показывает, что характер сближения боковых пород на всех замерных станциях соответствует результатам, установленным ранее многими исследователями, а именно: интенсивность сближения в нижней части уступа выше чем в его верхней части и возрастает с удалением от забоя.

При работе вибраторов скорость перемещения боковых пород резко возрастает, по сравнению со скоростью их перемещения, установленной до работы вибраторов. Например, на пласте  $l_7$  ПАО «ДТЭК Шахта Комсомолец Донбасса» боковые породы при работе вибраторов перемещались со скоростью  $5 \cdot 10^{-4}$  м/с, что на 6 порядков превышает вышеупомянутую скорость сближения до начала эксперимента. Для объяснения такого явления рассматривалась работа единой физико-механической системы вибраторы – вмещающие породы – угольный пласт. При обнажении вмещающих пород, например, после выемки угля, происходит их разрушение под воздействием напряжений и сил гравитации. При этом системой вибраторов реализуется циклическое воздействие на вмещающие

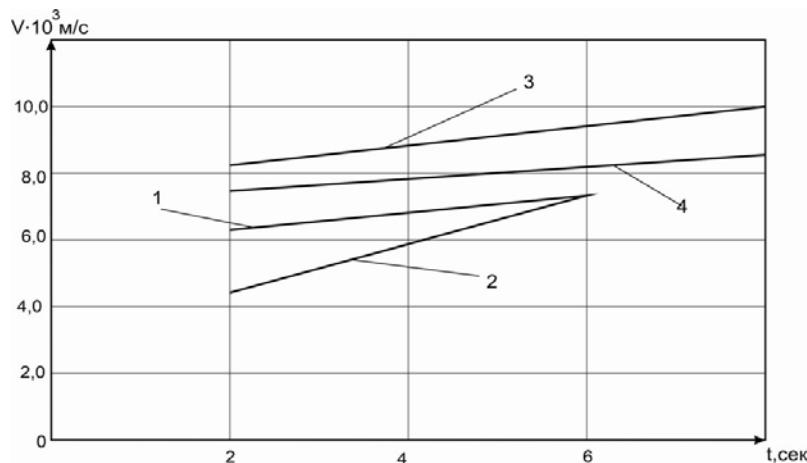


Рис. 4. Скорость сближения вмещающих пород под воздействием на них системы вибраторов в условиях пласта  $l_2^1$  шахты «Северная». Расстояние от забоя до замерных станций №1 и №3 – 1,9 м. Расстояние от забоя до замерных станций №2 и №4 – 1,0 м

породы с частотой, соответствующей частоте, генерируемой вибраторами. Циклические нагрузки исчисляются сотнями тонн. В результате действия знакопеременных нагрузок вмещающие породы растрескиваются и расслаиваются, в породах образуются новые системы трещин, разделяющие их на блоки, которые могут перемещаться независимо друг от друга. При подаче давления в поршневую полость гидростоек создается возможность перемещения отслоившихся блоков пород по нормали в сторону массива за счет уменьшения раскрытия трещин и расслоений, что ведет к увеличению расстояния между боковыми породами. Таким образом, при работе системы вибраторов происходит перемещение боковых пород в колебательном режиме, что выражается в поочередном увеличении и уменьшении расстояния между породами кровли почвы с частотой, соответствующей частоте генерируемых колебаний. Увеличение расстояния между вмещающими породами происходит при подаче давления в поршневую полость гидростоек в вибрационном режиме и амплитуда колебаний вмещающих пород зависит, как и у самих вибраторов, от высоты колебаний. Так в условиях пл.  $l_7$  на шахте «Шахта Комсомолец Донбасса», при давлении в поршневых полостях вибраторов  $P \sim 15 - 18$  МПа, перепаде давления  $\Delta P \sim 3 - 4$  МПа и при частотах колебаний 1,5 Гц и 4 Гц, амплитуда колебаний величины сближения вмещающих пород составила, соответственно  $0,2 \cdot 10^{-4}$  м и  $0,05 \cdot 10^{-4}$  м. При работе системы гидростоек в импульсном режиме амплитуда колебаний вмещающих пород возрастила на два порядка, что объясняется относительно длительными периодами следования импульсов по сравнению с периодами колебаний при работе гидростоек в вибрационном режиме: в большие периоды времени увеличиваются значения сближения вмещающих пород.

Непосредственно после окончания работы вибраторов и разгрузения гидростоек скорости сближенных вмещающих пород остаются относительно больши-

ми и на два порядка превышают величины скоростей сближения, установленных до работы вибраторов. На рисунке 5 представлен характер сближения вмещающих пород непосредственно после окончания работы вибраторов в подготовительном забое пл.  $l_7$  шахты «Шахта Комсомолец Донбасса». Анализ графиков показывает, что наибольшие скорости сближения вмещающих пород, достигающие  $8,3 \cdot 10^{-8}$  м/с, наблюдаются сразу после прекращения работы вибраторов. Далее скорость сближения быстро уменьшается и через полсуток её значение приближается скорости сближения вмещающих пород, установленной до воздействия системы вибраторов на породно-угольный массив.

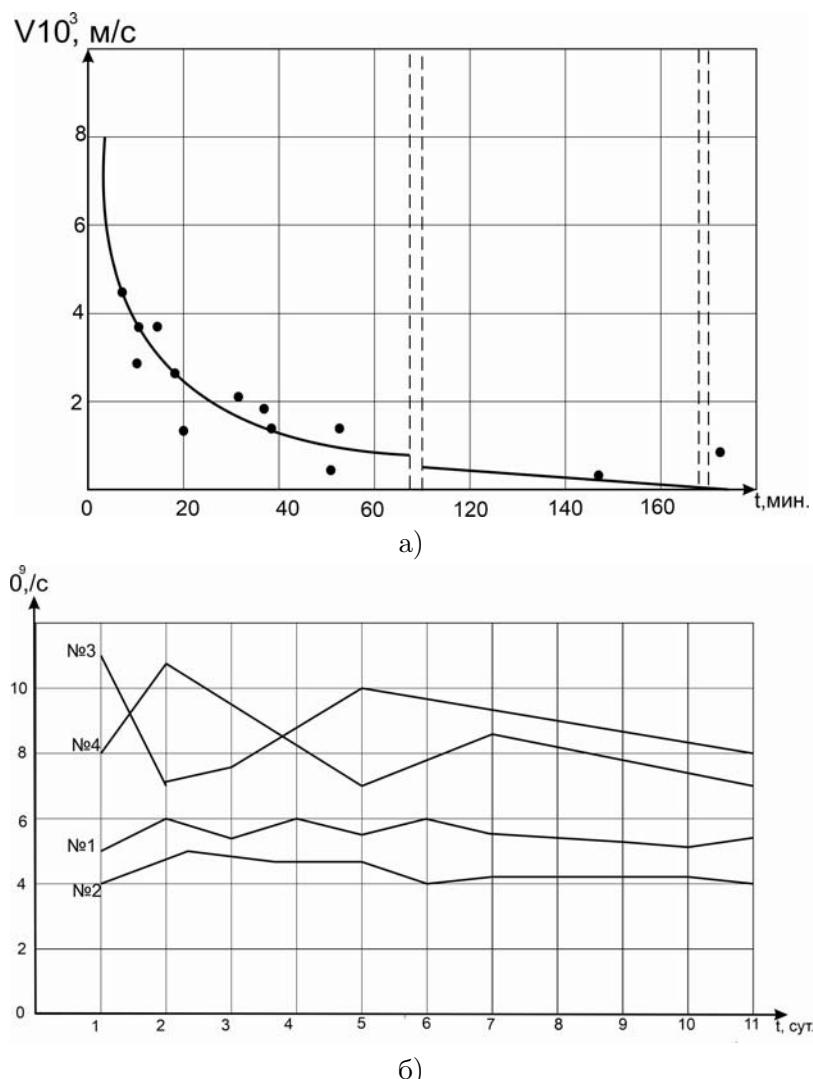


Рис. 5 Характер сближения вмещающих пород: а) непосредственно после окончания работы вибраторов; б) через сутки и более после окончания работы вибраторов.

Расстояние от забоя до замерных станций №1 и №3 – 1,9 м.

Расстояние от забоя до замерных станций №2 и №4 – 1,0 м

Анализируя рис. 5, б, на котором представлен характер сближения вмещающих пород в уступе пл.  $l_2^1$  шахты «Северная», констатируем, что через сутки после окончания работы вибраторов значения скоростей сближения вмещающих пород мало отличаются от скоростей, установленных до работы вибраторов. Замерные станции №1 и №2 в этом уступе размещались в верхнем ряду наблюдений, а №3 и №4 в нижнем ряду. Величины скоростей сближения вмещающих пород нижнего ряда наблюдений превышают значение скоростей на замерных станциях в верхней части уступа, что согласуется с выводами других исследователей. С удалением от забоя скорости сближения также увеличиваются, за исключением двух случаев, которые объясняются образованием в породах кровли блока, не всегда синхронно перемещающегося.

**Выводы.** В процессе вибрационного воздействия на горный массив как в подготовительном, так и в очистных забоях происходит существенное усиление трещинообразования в угле краевой части пласта и резкое (на порядок и более) увеличение скорости сближения вмещающих пород; на 16,8 % снижаются энергетические затраты на выемку угля; прочность угля на поверхности забоя практически не изменяется. Эти результаты однозначно свидетельствуют о том, что при вибрационном воздействии на угольный массив создаются все предпосылки для снижения газодинамической активности краевой части пласта, интенсификации газоотдачи угля, обеспечивающей хорошую дегазацию пласта, и снижение энергетических затрат на выемку угля.

1. Софийский К.К. Способы интенсификации дегазации угольных пластов и предотвращения выбросов угля и газа / К.К. Софийский, Д.М. Житленок, А.П. Петух, В.И. Гаврилов, В.Г. Золотин и др. – Донецк, 2014. – 458 с.

**V.A. Kanin, Y.A. Piven, V.V. Vasyutina**

**Experimental studies of changes in the stress-strain state of the bottom-hole part of a coal seam under vibration impact on a mountain range.**

The regularities of controlling the stress-strain state of the bottom-hole part of the coal seam during vibration action on it through the host rocks and softening of the coal seam in the reference pressure zone after vibration action.

**Keywords:** rocks, bottom-hole part of the formation, workings, measurements.

Получено 17.02.2023

УДК 550.834:622.12

doi:10.24412/0136-4545-2023-1-116-122

EDN:VLUFYV



©2023. А.А. Глухов<sup>1</sup>

## О МЕТОДИКЕ СЕЙСМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ РАЗРЫВНЫХ ТЕКТОНИЧЕСКИХ НАРУШЕНИЙ ИЗ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

В данной работе рассмотрена схема выполнения сейсмических наблюдений и способ обработки их результатов для оценки положения и ориентации разрывных тектонических нарушений в плоскости сечения выработки.

**Ключевые слова:** сейсморазведка, прогноз дизьюнктивов, математическое моделирование, метод эллипсов.

**Введение.** Подземная пластовая сейсморазведка базируется на каналировании колебательной энергии сейсмического сигнала угольным пластом, который в акустическом смысле можно рассматривать как волновод [1]. Пункты возбуждения сейсмических колебаний и сеймоприемники располагаются вдоль профилия наблюдений на обнажении угольного пласта на боковых стенках выработки. При выполнении сейсмических экспериментов из полевых выработок угольных шахт, из тоннелей и иных подземных коммуникаций, расположение системы наблюдений выполняется по аналогичной схеме. При этом используется либо метод отраженных волн по схеме общей глубинной точки (ОГТ), либо метод сейсмической локации [1]. Оба подхода дают информацию о расположении нарушения в определенной плоскости. В пластовой угольной сейсморазведке это плоскость угольного пласта. В общем случае эта плоскость определена условно, что снижает информативность прогноза. Положение аномалии в плоскости сечения выработки остается неизвестным.

В данной работе рассмотрена схема выполнения сейсмических наблюдений и способ обработки их результатов для оценки положения и ориентации разрывных тектонических нарушений в плоскости сечения выработки.

**1. Идея подхода и описание модели.** Для обоснования подхода использовались средства математического моделирования. Для заданной системы наблюдений и заданного положения нарушения выполнялся расчет волнового поля в виде наборов сейсмотрасс программным комплексом моделирования процес-

<sup>1</sup>Глухов Александр Александрович – доктор техн. наук, зав. отд. компьютерных технологий РАНИМИ, Донецк, e-mail: glukhov1964@yandex.ru.

Glukhov Aleksandr Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Computer Technology Department.

са распространения сейсмических колебаний в массиве горных пород [2] при наличии дизъюнктива. Затем расчетные сейсмопротяжки обрабатывались алгоритмами анализа данных сейсморазведки [3, 4]. Генерировалось расчетное положение нарушения и сравнивалось с модельным.

Моделировалась горная выработка квадратного сечения в алевролите со скоростями распространения продольных и поперечных волн  $V_p = 3500$  и  $V_s = 2400$ , соответственно. Дизъюнктив располагался на расстоянии от 25 до 65 м под углами от  $45^\circ$  до  $70^\circ$  относительно вертикали. Сместитель нарушения представлял собой среду, в которой значения  $V_p$  и  $V_s$  уменьшены на 30%.

Три набора сейсмоприемников (СП) по 12шт. в каждом расположены с шагом 1м по периметру сечения выработки, как показано на рисунке 1. Пункт возбуждения (ПВ) сейсмических колебаний с характерной частотой  $\approx 200$  Гц расположен на СП № 6. Стенку выработки, на которой расположен ПВ, будем условно называть «фронтальной», а смежные с ней – «боковыми». Угол наклона сместителя варьировался от  $0^\circ$  до  $70^\circ$  относительно расположения выработки.

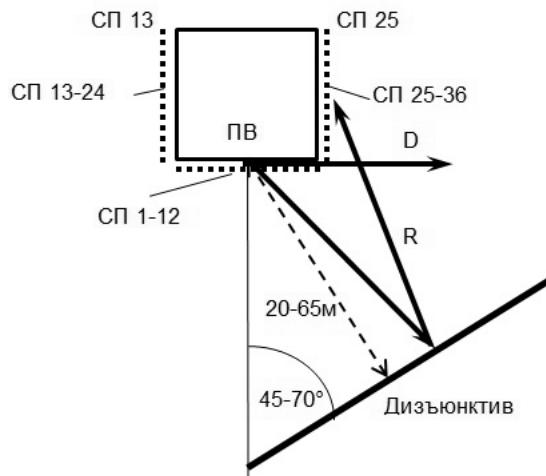


Рис. 1. Модель для анализа процесса распространения сейсмических колебаний в плоскости сечения выработки.

**2. Анализ результатов моделирования.** На рисунке 2 представлены поля колебаний  $SH$ ,  $P$  и  $SV$  волн при отражении от нарушения. Наблюдаются фронты в виде концентрических окружностей. Это «классические» волны сжатия  $P$  и сдвига  $SH$  и  $SV$ , распространяющиеся со скоростями  $V_p$  и  $V_s$  волн, соответственно. Двигаясь вдоль фронтальной стенки выработки, они регистрируются для СП 1 – 12 как прямые волны. Поскольку характерная длина волны (12 – 18 м) соизмерима и даже превышает размерности сечения выработки, в результате дифракции фронты волн отчетливо наблюдаются и в области сейсмической тени, и регистрируются СП 13 – 24 и СП 25 – 36.

Для иллюстрации этого на рисунке 3 представлены теоретические сейсмо-

грамммы для  $P$  и  $SV$  волн, рассчитанные для СП 13– СП 24. Прямые (дифрактированные) волны ( $P, S$ ) регистрируются на всем наборе СП.

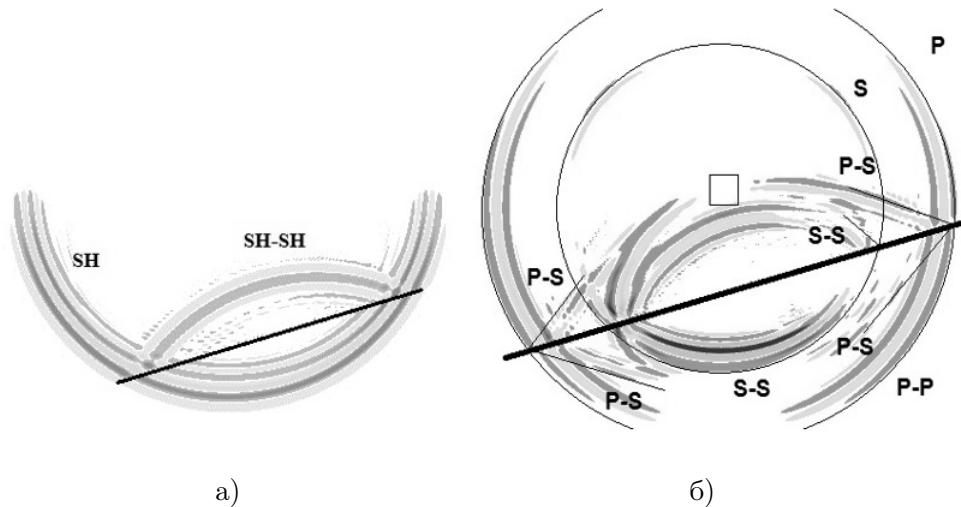


Рис.2. Картина процесса отражения  $SH$  (а),  $P$  и  $SV$  (б) волн от тектонического нарушения.

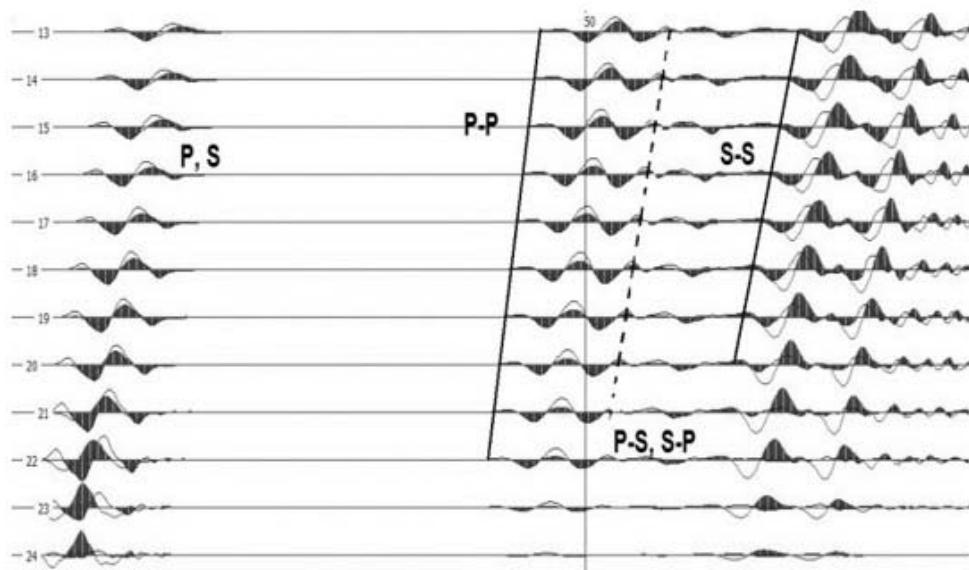


Рис. 3 Совмещенные теоретические сейсмограммы  $P$  и  $SV$  волн, рассчитанные для СП 13– СП 24. Для  $P$  волн закрашены положительные значения смещений, для  $SV$  – отрицательные.

В зоне дизъюнктива волны преломляются и отражаются, испытывая трансформации. На рисунке 2 представлены отраженные  $P$ ,  $SH$  и  $SV$  волны, образованные падающими на нарушение волнами таких же типов. Они обозначены как  $P-P$ ,  $SH-SH$  и  $S-S$ . По такому же принципу обозначены волны, преломленные в породу за дизъюнктивом. На рисунке 2, б присутствуют  $SV$  волны, образованные  $P$  волнами в результате трансформации при отражении от нарушения, а также при преломлении в породу за ним ( $P-S$ ). Все типы отраженных волн регистрируются системой наблюдений (рис. 3).

На рисунке 4 представлены графики зависимости амплитуд прямых/дифрагированных и отраженных волн различного типа от положения СП по сечениюю выработки. Зависимости свидетельствуют о том, что чем дальше расположен СП от фронтальной стенки выработки, тем больше отношение амплитуды регистрируемой отраженной волны к амплитуде прямой/дифрагированной. Уверенно регистрируются все типы отраженных волн. На самых удаленных СП они доминируют.

Эти закономерности верны для расстановок СП по обе стороны от фронтальной выработки вне зависимости от расположения нарушения. При этом не играет роли тот факт, что часть СП находится в зоне сейсмической тени для отраженной волны.

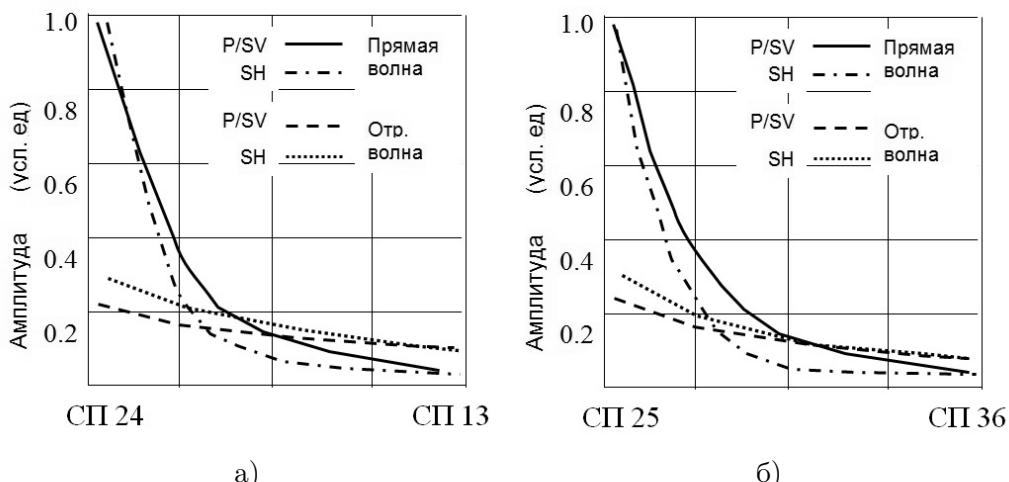


Рис. 4 Зависимость амплитуд прямых/дифрагированных  $P$ ,  $SV$  и  $SH$  волн от положения СП по сечениюю выработки от СП 13, до СП 24 (а) и от СП 25, до СП 36 (б).

Для прогноза расположения отражающих границ методом эллипсов на сейсмограммах общего пункта возбуждения (ОПВ) необходимо выделить оси синфазности отраженных от нарушения волн. Эта процедура выполняется по точкам первых вступлений. По данным точкам строятся эллипсы таким образом, чтобы их фокусы располагались в местах расположения ПВ и СП, а значение удвоенных полуосей было бы равно произведению скорости распространения волны на время её первого вступления [4]. Критерием наличия отражающих

границ является характерное сближение либо пересечение эллипсов в локальной зоне предполагаемой отражающей границы.

На рисунке 5 представлен результат построения эллипсов по первым вступлениям волновых пакетов  $P$  и  $SH$  волн модельных сейсмопротрасс по наборам сейсмоприемников (от СП 13 до СП 24 и от СП 25 до СП 36), расположенных на обеих боковых стенках выработки. Благодаря явной «структурированности» картины, построить отражающую границу средствами комплекса обработки данных [3] не составляет труда. В случае, представленном на рисунке 5, ее положение практически не отличается от модельного.

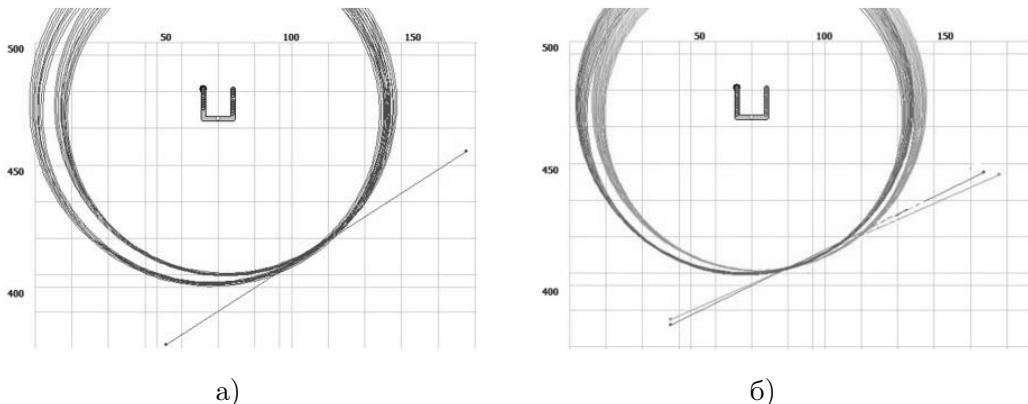


Рис. 5 Результат построения эллипсов по первым вступлениям волновых пакетов  $P$ -волн (а) и  $SH$ -волн (б) по двум наборам сейсмоприемников (от СП 13 до СП 24 и от СП 25 до СП 36).

При реальном применении данного алгоритма по заданному при построении системы эллипсов значению скорости распространения колебаний комплексом [3] в автоматическом режиме рассчитываются и отображаются на сейсмограммах ОПВ годографы отраженных волн. Оператору необходимо проверить, располагаются ли вблизи рассчитанных позиций точки синфазности отраженных волн, по которым строились эллипсы и определялось положение границ. При необходимости маркеры годографов, положение и ориентация границы, а также значение скорости волны (перерасчет системы эллипсов будет выполнен автоматически), корректируются до тех пор, пока не будет достигнуто совпадение.

Кроме этого, на сейсмограммах ОПВ по отображенными годографам отраженных волн необходимо производить поиск ранее неучтенных осей синфазности. Следует выполнить построение новых эллипсов и отображение их на схеме участка исследований. Таким образом, положение отражающей границы можно уточнить.

На рисунке 6 приведен пример построения методом эллипсов отражающей границы реального нарушения. Пример интересен тем, что база наблюдений составляет 10 – 15м, а волновые пакеты регистрируются по обеим сторонам выработки, в том числе в области сейсмической тени, что подобно условиям приведенной выше расчетной модели.

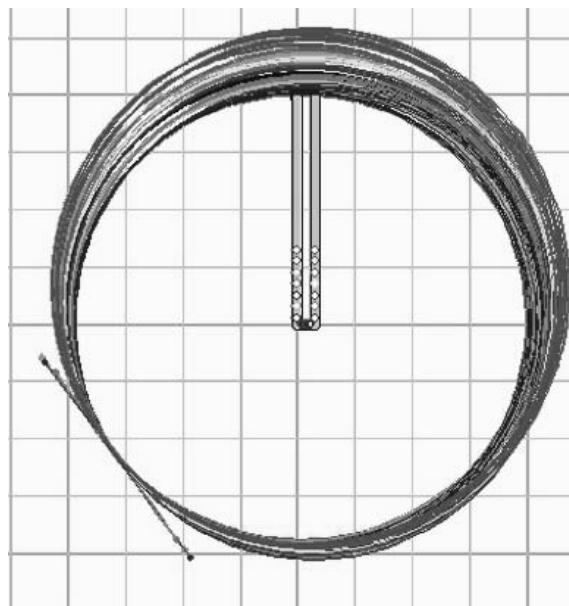


Рис. 6 Результат прогноза положения реального нарушения.

Алгоритм следует применять начиная с ближайших к системе наблюдений отражающих границ, исходя из предположения, что на небольших расстояниях вариации скорости распространения волн в породе незначительны. Интерпретация отражающих границ выполняется на основе анализа геологической ситуации в зоне расположения профилей. Необходимо выполнить ситуационную привязку огибающих эллипсов и зон их пересечения к определенным литолого-стратиграфическим границам либо к вероятным зонам нарушений. Отражения от литологических контактов во вмещающих породах следует отбраковывать как границы, субпараллельные плоскости напластования пород.

**Заключение.** Таким образом, использование наборов сейсмоприемников, расположенных в плоскости сечения выработки, обеспечивает возможность определения не только положения нарушения, но и оценки его ориентации в плоскости сечения выработки. Это важный в методическом плане результат, позволяющий повысить эффективность сейсмического метода. Данный подход необходимо использовать как инструмент уточнения результатов стандартной профильной сейсморазведки. Профильная сейсморазведка даст информацию о наличии отражающих границ. Расположение системы наблюдений по сечению выработки позволит более точно интерпретировать их природу.

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов. – Донецк: ООО “Алан”, 2002. – 312 с.
2. Глухов А.А. Автоматизация расчета поля сейсмических колебаний в угленосной толще при решении задач шахтной сейсморазведки / А.А. Глухов // Наук. пр. Національного технічного університету. – 2006. – Вип. 106. – С. 131–139.
3. Анциферов А.В. Об автоматизации обработки сейсмических данных при прогнозе геологии

- ческих нарушений угольных пластов методами отраженных волн и сейсмической локации / А.В. Анциферов, А.А Глухов // Сб. научн. тр. РАНИМИ. – 2018. – Т. 1, № 21. – С. 99–106.
4. Глухов А.А. Алгоритм прогноза геологических нарушений угольных пластов на основе использования методов эллипсов / А.А. Глухов, В.В. Туманов // Сб. научн. тр. РАНИМИ. – 2018. – Т. 1, № 20. – С. 213–220.

**A.A. Glukhov**

**On the methodology of seismic prediction of the spatial location of discontinuous tectonic disturbances from mine workings.**

In this paper, the scheme of seismic observations and the method for processing their results to predict the position and orientation of discontinuous tectonic disturbances in the cross-sectional plane of the mine workings is considered.

**Keywords:** seismic exploration, forecast of disjunctives, mathematical modeling, ellipse method.

Получено 27.02.2023

## К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА А.С. КОСМОДАМИАНСКОГО

24 марта 2023 года исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося отечественного ученого, талантливого педагога, наставника и организатора науки, человека замечательных личных качеств и яркой судьбы, представителя плеяды основателей Донецкого государственного университета и его первого проректора по научной работе, академика Александра Сергеевича Космодамианского. Его биография, жизненный путь, нравственные позиции, профессиональный выбор и творческие достижения впитали дух и вызовы времени, принципы высокой морали и человеколюбия, силы духа и самоотверженной преданности делу.

А.С. Космодамианский родился в селе Ревны Навлинского района Брянской области в семье, глава которой был священнослужителем.

В 1941 году он поступил на первый курс механико-математического факультета Воронежского государственного университета, однако учебу прервала война, и Александр Сергеевич добровольцем ушел на фронт, защищал Родину до дня Победы.



Фронтовые годы



Боевые награды

Боевал в составе Западного и Прибалтийского фронтов, участвовал в штурмовых боях за города Хотынец, Брянск, Городок, Витебск, Кенигсберг, командир 1-го Брянского стрелкового батальона. Лейтенант. За участие в боях и проявленные

*К 100-летию со дня рождения академика А.С. Космодамианского*

ленный героизм награждён орденом “Славы III степени”, двумя медалями “За отвагу” и многими другими боевыми наградами. Все те, с кем Александр Сергеевич делился воспоминаниями о военных годах, неизменно отмечали необычную проникновенность, точность и правдивость его рассказов об армейской службе и цене боевых успехов.

После войны А.С. Космодамианский вернулся к учебе. В 1949 году окончил Саратовский государственный университет, и с этого времени целиком посвятил себя служению науке и преподавательской деятельности. Сферой научных интересов Александра Сергеевича становятся математические методы исследования моделей механики сплошных сред, их неклассические аспекты, связанные с учетом усложненных физико-механических и геометрических свойств материалов и конструкций. В 1952 г. А.С. Космодамианский под руководством всемирно известного специалиста в области теории упругости анизотропного деформируемого тела профессора С.Г. Лехницкого защищает кандидатскую, а в 1963 г. – докторскую диссертацию. В эти годы он вел научную и преподавательскую работу в Ростовском и Саратовском университетах. Совместная работа, исследовательская деятельность и личная дружба связывали его со многими видными учеными современности – будущими академиками И.И. Воровичем и Н.Н. Моисеевым, профессорами Е.Ф. Бурмистровым, Л.А. Толоконниковым, М.А. Шленевым, С.В. Фальковичем, В.И. Юдовичем и многими другими видными советскими учеными.

1965 год явился знаковым в судьбе Александра Сергеевича. Он избирается членом-корреспондентом Академии наук УССР и переезжает в наш город, где в это время шло создание Донецкого академического научного центра и состоялось открытие нового классического университета. Здесь талант А.С. Космодамианского, как ученого, педагога и организатора науки, проявился особенно ярко. С его приездом в Институте прикладной математики и механики АН УССР



Строительство главного корпуса ДонГУ

*К 100-летию со дня рождения академика А.С. Космодамианского*

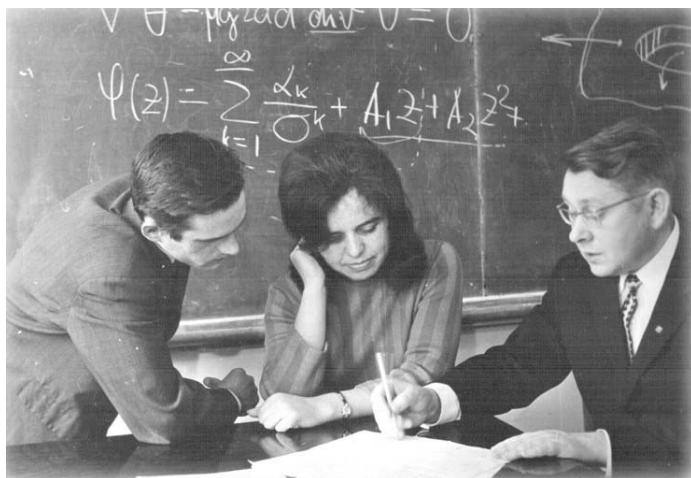
СР под его руководством был создан отдел математических проблем упругости и пластичности, а в Донецком государственном университете – кафедра теории упругости и вычислительной математики, которую Александр Сергеевич возглавлял более сорока лет. С 1965 г. А.С. Космодамианский был первым проректором Донецкого государственного университета по научной работе, руководил этим участком работы в течение одиннадцати лет, и за это время молодой университет вошел в число ведущих отечественных вузов по показателям научной работы.



Ключ знаний от первого проректора по научной работе

А.С. Космодамианский является основателем получившей мировое признание Донецкой научной школы в области математических методов механики деформируемого твердого тела. Заложенным при создании концептуальным направлением исследований этой школы на протяжении ряда десятилетий является разработка, развитие и систематизированное применение высокоэффективных численно-аналитических методов и расчетных алгоритмов исследования моделей статического и динамического деформирования материалов, конструкций и сооружений при одновременном учете комплекса усложненных геометрических и физико-механических свойств, в том числе фактора многосвязности границы, обусловленной наличием взаимодействующих концентраторов напряжений в виде отверстий, полостей вырезов, разрезов и трещин. К ряду комплексно учитываемых факторов усложнения физико-механических свойств относятся различные классы существенной анизотропии, учет в деформационных процессах связанных температурных электрических и магнитных полей в квазистатических приближениях, учет реологических свойств линейно-вязкоупругих материалов, учет геометрической, физической и общей нелинейности в процессах деформирования. В рамках данных тематических направлений А.С. Космодамианский

дамаинским совместно со своими учениками Л.В. Ботовой, Б.Н. Гуликом, В.Г. Житней, Г.М. Ивановым, С.А. Калоевым, Л.Е. Кац, В.Н. Ложкиным, В.В. Меглинским, В.А. Митраковым, А.А. Моисеенко, Р.М. Мысовской, Н.М. Нескородевым, Р.Н. Нескородевым, В.И. Павленко на базе развития методов теории функций классических и обобщенных комплексных переменных были впервые реализованы и обобщены развернутые исследования процессов двумерного деформирования многосвязных тел и элементов конструкций в виде тонких плит и пластин с взаимодействующими неоднородностями в форме полостей, отверстий, жестких и деформируемых включений различной геометрической формы.



А.С. Космодамианский с учениками

В работах А.С. Космодамианского, выполненных совместно с М.Д. Гремалюком, Н.Е. Зимой, В.С. Кацубой, С.М. Клойзнером, З.И. Косенко, Е.Ф. Ко силовой, Н.Ю. Косенко, С.А. Прийменко дана разработка и реализация ряда базирующихся на теории комплексных потенциалов эффективных методических подходов к численно-аналитическому исследованию нелинейных моделей напряженно-деформированного состояния многосвязных тел и элементов тонкостенных конструкций. Численно-аналитические решения цикла проблем напряженно-деформированного состояния многосвязных вязкоупругих тонкостенных конструкций на базе обобщений метода рядов по малому параметру получены А.С. Космодамианским во взаимодействии с Г.М. Ивановым, В.И. Хрестенко и Л.Н. Шкодиной. Методы исследования проблем связанный электроупругости на базе развития теории обобщенных комплексных потенциалов предложены в совместных работах А.С. Космодамианского с В.Н. Ложкиным, А.П. Кравченко, Л.Н. Олейник

Уникальными для своего времени явились выполненные А.С. Космодамианским совместно с Е.В. Алтуховым, А.Е. Башкатовым, Г.С. Булановым, В.А. Галичем, Ю.В. Мысовским, Л.Ю. Чуриковым, В.А. Шалдырваном, Г.Г. Шалды

К 100-летию со дня рождения академика А.С. Космодамианского

рван численно-аналитические исследования по проблемам анализа ряда моделей напряженно-деформированного состояния многосвязных изотропных и анизотропных плит в пространственной постановке на основе развития метода однородных решений.

Начиная со второй половины семидесятых годов минувшего столетия особое внимание А.С. Космодамианский уделял целому ряду открытых проблем динамической теории упругости для анизотропных сред, в том числе новым задачам теории распространения и дифракционного рассеяния нормальных упругих волн и теории упругих колебаний для анизотропных конструкционных элементов с усложненными геометрическим свойствами, многосвязными криволинейными границами. Различные классы этих задач на основе предложенных новых численно-аналитических методик были эффективно исследованы в научной школе А.С. Космодамианского с участием его учеников Г.Б. Вайс, О.М. Верзилова, О.В. Глушкова, Г.А. Заики, А.М. Кравцова, В.А. Моисеенко, Л.Б. Ободовского, В.И. Сторожева, С.Н. Туривненко, В.А. Шпака. Новые типы задач теории колебаний оболочечных конструкций были рассмотрены им совместно с И.А. Моисеенко и О.П. Татариновой. Подготовленная по данной проблематике монография А.С. Космодамианского и В.И. Сторожева «Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред» в 1989 году была отмечена серебряной медалью ВДНХ СССР.

Важным элементом работы научной школы А.С. Космодамианского явилось создание и налаживание регулярной работы получившего широчайшую известность и самый высокий авторитет объединенного научного семинара по математическим проблемам механики сплошной среды, на котором представляли результаты своих исследований известнейшие ученые и молодые исследовали практически из всех уголков Советского Союза и некоторых зарубежных стран.



Заседание объединенного научного семинара

*К 100-летию со дня рождения академика А.С. Космодамианского*

В целом А.С. Космодамианскому принадлежит более 400 научных публикаций, среди которых 20 монографий и учебных пособий. Под его руководством подготовлены и защищены 6 докторских и 54 кандидатские диссертации. На созданной им кафедре открыты аспирантура и докторанттура по научной специальности «Механика деформируемого твердого тела», а с начиная с 1990 года, еще в системе ВАК СССР, начал функционировать специализированный совет по защите кандидатских диссертаций (с 2016 года – диссертационный совет по защите докторских и кандидатских диссертаций).

Научная и преподавательская деятельность Александра Сергеевича отмечены целым рядом высоких наград. Среди них – академическая премия им. А.Н. Динника, присвоенное в 2001 г. почетное звание Заслуженного профессора Донецкого национального университета. В 1990 году Александр Сергеевич был избран действительным членом академии наук Украины. А.С. Космодамианский был номинантом престижного конкурса «Розы Донбасса» (2001г.).

На протяжении более 50 лет под эгидой созданной А.С. Космодамианским кафедры издается авторитетный научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики». В период с 1986 по 1998 гг. он переиздавался за рубежом издательством Plenum в виде отдельных выпусков журналов «Journal of Soviet Mathematics» и «Journal of Mathematical Sciences» и был представлен в научометрической базе Scopus, а с 2020 года включен в перечень рецензируемых научных изданий ВАК ДНР.

Начиная с 1983 года одной из традиций научной школы А.С. Космодамианского стало также проведение на базе Донецкого университета серии из семи представительных Международных научных конференций «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела».



Пленарное заседание конференции

24 декабря 2019 года на заседании Ученого Совета Донецкого национального университета было принято решение присвоить кафедре теории упругости и вы-

*К 100-летию со дня рождения академика А.С. Космодамианского*

числительной математики имя ее основателя академика Александра Сергеевича Космодамианского. Данью уважения и признательности создателю кафедры и организатору Донецкой научной школы в области математических методов механики сплошной среды, учителю с большой буквы академику А. С. Космодамианскому являются ежегодно проводимые на факультете математики и информационных технологий Донецкого государственного университета Памятные расширенные заседания кафедры.



Открытие мемориальной аудитории имени А.С. Космодамианского

Александр Сергеевич Космодамианский ушел из жизни 12 июня 2005 года, оставив в наследие уникальные научные результаты и идеи по их развитию, большое количество достойных учеников, свой бесценный опыт научной и педагогической деятельности и дружный коллектив кафедры теории упругости и вычислительной математики. Исследователи многих ведущих отечественных и зарубежных научных центров, профессорско-преподавательский корпус Донецкого государственного университета, ученые созданной Александром Сергеевичем научной школы и носящей его имя кафедры неизменно чтят и будут чтить его светлую память, хранить духовное и творческое наследие, поддерживать и развивать традиции беззаветной преданности науке.