

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 1 (86)

2024

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р физ.-мат. наук, проф. Д.В. Георгиевский, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. Н.Н. Грищенко, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Зыза, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Мазнев, д-р физ.-мат. наук, доц. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р физ.-мат. наук, доц. Р.Н. Нескородев, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Соловьев, д-р техн. наук, доц. С.В. Сторожев, д-р физ.-мат. наук, доц. С.Н. Царенко, д-р техн. наук, проф. В.П. Шамота.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of phys. and math., prof. D.V. Georgievskiy, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. N.N. Grishchenkov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., docent A.V. Zyza, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., docent A.V. Maznev, Dr. of phys. and math., docent I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of phys. and math., docent R.N. Neskorojev, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of phys. and math., prof. A.N. Soloviev, Dr. of tech., docent S.V. Storozhev, Dr. of phys. and math., docent S.N. Tsarenko, Dr. of tech., prof. V.P. Shamota.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Тел. +7 856 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru, URL: <http://donnu.ru/jtam>

Технический редактор: Пачева М.Н.

С 08.07.2024 научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по научным специальностям и отраслям науки: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет», 2024

№ 1 (86) / 2024

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Механика твердого тела

Konosevich B.I., Konosevich Yu.B. Local and global stability properties of a model of the asynchronous electric motor..... 5

Механика деформируемого твердого тела

Глушанков Е.С. Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием разности температур на контурах 15

Бондаренко Н.С., Гольцев А.С. Исследование влияния внешней среды на состояние термоупругого изгиба пластин с теплопроницаемым разрезом при одностороннем теплообмене 27

Дзундза А.И., Мельничук Н.Ю., Моисеенко И.А., Моисеенко В.А. Свойства нормальных волн в радиально-неоднородных изотропных цилиндрах секторного сечения..... 37

Глухов А.А., Сторожев В.И., Сторожев С.В. Методика анализа проблемы распространения волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с различными законами экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики..... 51

Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Мироненко А.Б. Исследование напряженного состояния горного массива с горизонтальной выработкой криволинейного сечения и разгрузочными щелями обобщенным методом наименьших квадратов..... 61

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В., Чан Ба Ле Хоанг Нечетко-множественный учет параметрической неопределенности в модели расчета критической температуры потери устойчивости пологой цилиндрической оболочки..... 73

**Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

<i>Голубев Ф.М., Сажнев В.П.</i> Влияние угла падения склона рельефа на параметры формирования мульды сдвижения.....	83
<i>Лобков Н.И., Радченко А.Г.</i> Особенности формирования опасных геомеханических явлений в слоях пород и в угольных пластах.....	91
<i>Дрибан В.А., Дуброва Н.А.</i> Оценка емкостных характеристик техногенно-нарушенных массивов горных пород.....	107

№ 1 (86) / 2024

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

Konosevich B.I., Konosevich Yu.B. Local and global stability properties of a model of the asynchronous electric motor..... 5

Solid Mechanics

Glushankov E.S. The thermoelastic state of the infinite multiply connected anisotropic plate in conditions of non-uniform convective heat transfer under temperature difference action..... 15

Bondarenko N.S., Goltsev A.S. Investigation of the external environment influence on the state of thermoelastic bending of plates with a heat-permeable cut by one-sided heat exchange..... 27

Dzundza A.I., Melnichuk N.I., Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A. Properties of normal waves in radially inhomogeneous isotropic cylinders of sector cross-section..... 37

Glukhov A.A., Storozhev V.I., Storozhev S.V. Analysis method of the problem of shear wave propagation in an anisotropic functional gradient layer with different laws of exponential heterogeneity for each physical and mechanical characteristic 51

Kaloerov S.A., Avdyushina E.V., Mironenko A.B. Investigation of the stress state of the mountain range with horizontal production of a curved section and discharge slots the generalized least squares method..... 61

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V., Tran Ba Le Hoang Fuzzy-set accounting for parametric uncertainty in a model for calculation the critical temperature of buckling of a flat cylindrical shell..... 73

**Geomechanics, Rock Damage,
Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics**

<i>Golubev Ph.M., Sazhnev V.P.</i> The influence of the slope angle on the formation parameters of the subsidence trough.....	83
<i>Lobkov N.I., Radchenko A.G.</i> Features of the formation of dangerous geomechanical phenomena in rock layers and in coal seams.....	91
<i>Driban V.A., Dubrova N.A.</i> The capacitive characteristics of technogenically disturbed rock mass assessment.....	107

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

UDK 531.36

doi:10.24412/0136-4545-2024-1-5-14

EDN:CUIKIP

©2024. B.I. Konosevich¹, Yu.B. Konosevich²

LOCAL AND GLOBAL STABILITY PROPERTIES OF A MODEL OF THE ASYNCHRONOUS ELECTRIC MOTOR

The subject matter of the article is dynamics of the asynchronous electric motor. The investigation is based on the mathematical model of this motor in the form of a third order system of ordinary differential equations, which includes equation for the angular velocity of the rotor and equations for two currents in the windings of the rotor. It is assumed that the load moment is a continuous odd function of the angular velocity of the rotor relatively the stator, and this function permits a linear estimate. Such system of equations of motion of the asynchronous electric motor has a unique stationary solution, describing the steady rotation mode of the rotor. In the article, sufficient conditions of local asymptotic stability is obtained for this solution. Also, it is established that, under these conditions, any solution of the equations of motion tends with time to their stationary solution.

Keywords: *asynchronous electric motor, local and global stability, steady rotation.*

Introduction. Two base types of electric motors are used in practice, they are synchronous and asynchronous motors. The operation of an electric motor can be described by various systems of differential equations, their structure is determined by the design of the electric motor and by the accepted degree of detailing of the processes occurring in it [1].

In the case of the *synchronous* electric motor, its operation is described by a system of differential equations with respect to the angle, determining the position of the rotor relatively to the rotating magnetic field in the stator, the time derivative of this angle and electric currents in the windings of the rotor. These system belong to the type of *phase systems*, that is, it is periodic in the angular variable. Steady

¹*Konosevich Boris Ivanovich* – doctor of physical and mathematical sciences, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Applied Mechanics, e-mail: konos.donetsk@yandex.ru.

Коносевич Борис Иванович – доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник отдела прикладной механики ФГБНУ “Институт прикладной математики и механики”, Донецк.

²*Konosevich Yuliya Borisovna* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Department of Applied Mechanics, e-mail: techmech@iamm.su.

Коносевич Юлия Борисовна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела прикладной механики ФГБНУ “Институт прикладной математики и механики”, Донецк.

state operation mode of the synchronous electric motor is the rotation of its rotor with the angular velocity of rotation of the magnetic field in its stator. If a phase system of differential equations, describing the operation of the synchronous electric motor, has a stationary solution, then it has the countable set of stationary solutions. They can be obtained from the starting solution by displacements on the periods.

An important problem is to establish conditions, when any solution of a phase system tends over time to its stationary solution.

In the case of synchronous motor this property means that each solution of its equations of motion tends over time to one of their asymptotically stable solutions, corresponding to the steady-state rotation mode. To obtain conditions of global stability in this case, Leonov's method of nonlocal reduction can be used [2, 3] This method makes it possible to derive the global stability property of a multidimensional ODE phase system from the global stability property of one second order differential equation of a special kind. Within the framework of this method, an effective sufficient global stability condition is obtained in [4] for the multiple-current model of the synchronous electric motor, which was proposed in [5].

The operation of the *asynchronous* electric motor is described by a system of differential equations with respect to the difference between the angular velocities of rotation of the magnetic fields in rotor and in stator and, also, with respect to electric currents in the windings of the rotor. Such system has a unique stationary solution, where a fixed angular velocity of the rotor is less than the angular velocity of magnetic field in the stator. In the case of asynchronous electric motor, its global stability means that this unique stationary solution of its equations of motion is locally asymptotically stable, and each solution of these equations tends over time to this solution.

In the present article, a sufficient global stability condition is established for the asynchronous electric motor on the basis of its two-current model. Like [4], the load moment is assumed to be a continuous odd function of the angular velocity of the rotor, having a linear estimate.

1. Two-current model of the asynchronous electric motor. This article uses the simplest adequate model of the asynchronous electric motor with two electric currents, which is in the following way obtained in [6] from a two-current model of the synchronous electric motor.

This starting model of the *synchronous* electric motor corresponds to the case when there are two identical windings in the rotor, made in the form of rectangular frames perpendicular to each other. This is a closed damper winding and an excitation winding, to which a constant voltage is applied through carbon brushes. A uniformly rotating magnetic field is created in the stator. This model is described by the following fourth-order system of differential equations [6]

$$\begin{aligned}
 C\ddot{\gamma} &= -SB(i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma) + M_d, \\
 Li_1' &= -Ri_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma + u, \\
 Li_2' &= -Ri_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma,
 \end{aligned} \tag{1}$$

having the phase vector $(\gamma, \dot{\gamma}, i_1, i_2)$. Here $\gamma = \varphi - \omega t$ is the angle between the plane of the frame with current i_1 and the plane perpendicular to the intensity vector of the rotating magnetic field of the stator, φ is the angle of rotation of the rotor relative to the stator, $\omega > 0$ is the constant angular velocity of rotation of the magnetic field in the stator, i_1 and i_2 are the currents in the excitation winding and in the damper winding, $u > 0$ is the constant voltage in the excitation winding, M_d is the load moment, C is the axial moment of inertia of the rotor, L and R are the inductance and the resistance of both frames, B is the magnetic field strength in the stator, S is the area of each of the frames. The load moment M_d is assumed to be a continuous monotonously decreasing odd function $M_d = M_d(\dot{\varphi})$ of the angular velocity of the rotor $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\gamma}$.

Two-current model of the *asynchronous* electric motor can be described by the fourth-order system of differential equations, which is formally derived from the system (1) at $u = 0$ [6]:

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -SB(i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma) + M_d(\dot{\varphi}), \\ Li_1\dot{} &= -Ri_1 + SB\dot{\gamma} \sin \gamma, \\ Li_2\dot{} &= -Ri_2 + SB\dot{\gamma} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Following [6], we transform system (2) to a third order system. Instead of currents i_1, i_2 , we introduce variables x, y according to the formulas

$$x = \frac{L}{SB} (i_1 \cos \gamma - i_2 \sin \gamma), \quad y = \frac{L}{SB} (i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma). \quad (3)$$

From the second formula (3) we find $i_1 \sin \gamma + i_2 \cos \gamma = \frac{SB}{L}y$. Substituting this expression into the first equation (2), we bring it to the form

$$C\ddot{\gamma} = -\beta \frac{(SB)^2}{L} y + M_d(\dot{\varphi}). \quad (4)$$

Further from formulas (3) we obtain expressions of currents i_1, i_2 through x, y, γ :

$$i_1 = \frac{SB}{L} (x \cos \gamma + y \sin \gamma), \quad i_2 = \frac{SB}{L} (-x \sin \gamma + y \cos \gamma). \quad (5)$$

Substituting (5) into the second and the third equations (2), we find the expressions of the derivatives $i_1\dot{}, i_2\dot{}$ through $x, y, \gamma, \dot{\gamma}$:

$$\begin{aligned} Li_1\dot{} &= -\frac{RSB}{L} (x \cos \gamma + y \sin \gamma) + SB\dot{\gamma} \sin \gamma, \\ Li_2\dot{} &= \frac{RSB}{L} (x \sin \gamma - y \cos \gamma) + SB\dot{\gamma} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Differentiating now (3) by t and using (3), (6), in addition to (4) we obtain expressions for \dot{x}, \dot{y} . As a result of the change of variables (3), equations (2) of the two-current model of the asynchronous electric motor are converted to the following equations

$$C\ddot{\gamma} = -\frac{(SB)^2}{L} y + M_d(\dot{\varphi}), \quad \dot{x} = -\dot{\gamma}y - \frac{R}{L}x, \quad \dot{y} = \dot{\gamma}(x + 1) - \frac{R}{L}y.$$

Introducing the notation $a = (SB)^2/L$, $b = R/L$, we write down equations of the two-current model of the asynchronous electric motor in the form

$$C\ddot{\gamma} = -ay + M_d(\omega + \dot{\gamma}), \quad \dot{x} = -bx - \dot{\gamma}y, \quad \dot{y} = -by + \dot{\gamma}(x + 1), \quad (7)$$

where $a, b > 0$ are constant parameters. These equations are equivalent to the third-order normal system with the phase vector $(\dot{\gamma}, x, y)$. Thus, as the result of the change of variables (3), the closed third-order system (7) of ordinary differential equations is obtained for the two-current model of the asynchronous electric motor, and this system does not contain the angular variable γ .

2. Stationary mode of uniform rotation of the asynchronous electric motor. The operating mode of uniform rotation of the asynchronous electric motor corresponds to the stationary solution of equations (7). The following theorem of the existence and uniqueness of such solution is valid.

Theorem 1. *Let*

1) *the function $M_a(\dot{\gamma})$, called the static characteristic of the asynchronous electric machine [6], is defined by the formula*

$$M_a(\dot{\gamma}) = \frac{ab\dot{\gamma}}{b^2 + \dot{\gamma}^2}; \quad (8)$$

2) *in the equations (7), the dissipative moment $M_d(\dot{\varphi})$ is a continuous odd monotonically decreasing function of the angular velocity $\dot{\varphi}$, and in the case when $\omega - b > 0$ this moment, being negative on the interval $(0, \omega - b]$, satisfies the condition of smallness on it*

$$M_d(\dot{\varphi}) > M_a(\dot{\varphi} - \omega), \quad (9)$$

where $M_a(\dot{\varphi} - \omega) = M_a(\dot{\gamma})$ is the static characteristic (8) of the asynchronous electric motor, $\omega > 0$ is the the angular velocity of rotation of the magnetic field in its stator.

Then

a) *the differential equations (7) of the two-current model of the asynchronous electric motor have a stationary solution*

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0, \quad x = x^0, \quad y = y^0, \quad (10)$$

when the number triplet $\dot{\gamma}^0, x^0, y^0$ is the solution of the following system of finite equations

$$-ay^0 + M_d(\omega + \dot{\gamma}^0) = 0, \quad bx^0 + \dot{\gamma}^0 y^0 = 0, \quad -by^0 + \dot{\gamma}^0(x^0 + 1) = 0; \quad (11)$$

b) *when conditions 1), 2) are satisfied, equations (11) have the unique solution (10); in this solution, the constant $\dot{\gamma}^0$ is expressed by the formula*

$$\dot{\gamma}^0 = \omega^0 - \omega, \quad (12)$$

where ω^0 ($0 < \omega^0 < \omega$) is the unique solution to the equation

$$M_d(\dot{\varphi}) = M_a(\dot{\varphi} - \omega), \quad (13)$$

relative to $\dot{\varphi}$, and constants x^0, y^0 are equal to

$$y^0 = \frac{1}{a}M_d(\omega^0), \quad x^0 = \frac{1}{ab}(\omega - \omega^0)M_d(\omega^0). \quad (14)$$

Proof. Substituting expressions (10) into equations (7), we obtain the conditions for the existence of a stationary solution of these equations in the form of relations (11). To derive an equation defining $\dot{\gamma}^0$, let's express y^0 through $\dot{\gamma}^0$, using the first of these relations:

$$y^0 = \frac{1}{a}M_d(\omega + \dot{\gamma}^0), \quad (15)$$

and substitute it into the second one:

$$bx^0 + \frac{1}{a}\dot{\gamma}^0 M_d(\omega + \dot{\gamma}^0) = 0.$$

From here we find x^0 through $\dot{\gamma}^0$:

$$x^0 = -\frac{1}{ab}\dot{\gamma}^0 M_d(\omega + \dot{\gamma}^0). \quad (16)$$

Then expressions (15), (16) are substituted into the third relation (11). As a result, we obtain the equation for $\dot{\gamma}^0$

$$M_d(\omega + \dot{\gamma}) = M_a(\dot{\gamma}), \quad (17)$$

where the odd function $M_a(\dot{\gamma})$ is defined by formula (8).

When $\dot{\gamma} = \mp b$, this function takes its minimum and maximum values $\mp a/2$. It increases monotonously on the segment $[-b, b]$ between the points of its minimum and maximum, and outside this segment the function $M_a(\dot{\gamma})$ monotonously tends to zero from below and above at $\dot{\gamma} \rightarrow \mp\infty$. The marked properties of the functions $M_d(\dot{\varphi})$ and $M_a(\dot{\gamma})$ make it possible to draw their graphs versus $\dot{\varphi}$.

Let's write down equation (17) in the form of equation (13) for the variable $\dot{\varphi}$. Graph of the function $M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ of the variable $\dot{\varphi}$ comes from the graph of the function $M_a(\dot{\gamma})$ by shifting to the right by the amount $\omega > 0$. Hence, its properties are as follows: 1) the function $M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ increases monotonously on the segment $[\omega - b, \omega + b]$ between the points of its minimum and maximum, vanishing in the middle of this segment, the point $\dot{\varphi} = \omega$, 2) outside the segment $[\omega - b, \omega + b]$ the function $M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ monotonously decreases in modulus with increasing $|\dot{\varphi}|$, tending to zero at $|\dot{\varphi}| \rightarrow \infty$.

In the case when $\omega - b \leq 0$, the minimum point $\dot{\varphi} = \omega - b$ of the function $M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ does not lie in the right half-plane, and then, as it is easy to see, the graph of this function has a single intersection point with the graph of the dissipative moment $M_d(\dot{\varphi})$ at some value $\dot{\varphi} = \omega^0 \in (0, \omega]$ from the left side $[\omega - b, \omega]$ of the increment interval of this function.

In the case when $\omega - b > 0$, we will assume that the dissipative moment $M_d(\dot{\varphi})$ is so small on the interval $(0, \omega - b]$ that its graph lies above the graph of the function

$M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ on this interval, that is, condition (9) is fulfilled. Then the graph of the dissipative moment intersects the graph of the function $M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ at a certain value $\dot{\varphi} = \omega^0 \in [\omega - b, \omega)$ from the left side $[\omega - b, \omega)$ of the interval of increase of this function.

In both cases, equation (13) has a unique solution $\dot{\varphi} = \omega^0$ ($0 < \omega^0 < \omega$).

After this solution of equation (13) is found, the stationary value of $\dot{\gamma}^0$ is determined by formula (12), and the stationary values x^0, y^0 are determined by formulas (15), (16) in the form (14). \square

3. Lyapunov function for equations of perturbed motion of the electric motor. Taking the stationary solution (10) of equations (7) as undisturbed, we introduce the perturbations $\dot{\gamma}_1, x_1, y_1$, assuming

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0 + \dot{\gamma}_1, \quad x = x^0 + x_1, \quad y = y^0 + y_1. \quad (18)$$

To derive the differential equations for perturbations, substitute expressions (18) into equations (7), taking into account relations (11). We obtain the system of equations of perturbed motion

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma}_1 &= -ay_1 + \Delta M_d(\dot{\gamma}_1), \\ \dot{x}_1 &= -bx_1 - \dot{\gamma}^0 y_1 - y^0 \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_1 y_1, \\ \dot{y}_1 &= -by_1 + \dot{\gamma}^0 x_1 + (x^0 + 1)\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1 x_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Here, the disturbance of the dissipative moment

$$\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) = M_d(\omega^0 + \dot{\gamma}_1) - M_d(\omega^0) \quad (20)$$

is a continuous monotonically decreasing function of the variable $\dot{\gamma}_1$ of the sign, opposite to the sign $\dot{\gamma}_1$. Thus,

$$\dot{\gamma}_1 \Delta M_d(\dot{\gamma}_1) < 0 \quad (\dot{\gamma}_1 \neq 0), \quad \Delta M_d(0) = 0. \quad (21)$$

Equations of perturbed motion (19) have the zero solution

$$\dot{\gamma}_1 = 0, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad (22)$$

that corresponds to the stationary solution (10) of equations (7).

Lemma 1. *If conditions of theorem 1 are fulfilled, then the zero solution (22) is the unique stationary solution to the equations of perturbed motion (19).*

Proof follows from the fact that the conditions for the existence of a stationary solution $\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_1^0, x_1 = x_1^0, y_1 = y_1^0$ of the system of equations of perturbed motion (19) are the relations

$$\begin{aligned} -ay_1^0 + \Delta M_d(\dot{\gamma}_1^0) &= 0, \\ bx_1^0 + \dot{\gamma}^0 y_1^0 + y^0 \dot{\gamma}_1^0 + \dot{\gamma}_1^0 y_1^0 &= 0, \\ -by_1^0 + \dot{\gamma}^0 x_1^0 + (x^0 + 1)\dot{\gamma}_1^0 + \dot{\gamma}_1^0 x_1^0 &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

which, by the change $\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}^0$, $x_1 = x - x^0$, $y_1 = y - y^0$, inverse to the change (18), can be reduced to the conditions of existence (11) of the stationary solution (10) of the undisturbed system (7). \square

Consider the following positive definite function of perturbations

$$V_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) = \frac{1}{2}(C\dot{\gamma}_1^2 + ax_1^2 + ay_1^2). \quad (24)$$

Its time derivative, taken by virtue of the system of equations (19), is equal to

$$\dot{V}_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) = \dot{\gamma}_1 \Delta M_d(\dot{\gamma}_1) + a\dot{\gamma}_1(-y_1^0 x_1 + x_1^0 y_1) - ab(x_1^2 + y_1^2). \quad (25)$$

For $\dot{\gamma}_1 = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ we have $\dot{V}_1(0, 0, 0) = 0$. The product $\dot{\gamma}_1 \Delta M_d(\dot{\gamma}_1)$, included in the right side of formula (25), is, according to (21), the negative definite function of the variable $\dot{\gamma}_1$. In order to obtain sufficient conditions for the positive definiteness of the derivative $\dot{V}_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$ with regard to variables $\dot{\gamma}_1, x_1, y_1$, some additional conditions are imposed on the function $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1)$ in the following lemma.

Lemma 2. *Let*

- 1) *the conditions of theorem 1 be fulfilled;*
- 2) *the positive definite function $V_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$ of the phase variables of the system of equations (19) of the perturbed motion is determined by formula (24), and $\dot{V}_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$ is its time derivative by virtue of this system of equations, expressed by formula (25);*
- 3) *there exist a constant $k > 0$ such that the following inequalities are satisfied for the perturbation (20) of the dissipative moment*

$$\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) < -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 > 0), \quad \Delta M_d(\dot{\gamma}_1) > -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 < 0); \quad (26)$$

- 4) *the following inequality is fulfilled*

$$abk - \frac{1}{4}[M_d(\omega^0)]^2 \left[1 + \frac{(\omega - \omega^0)^2}{b^2}\right] > 0, \quad (27)$$

where $a, b > 0$ are parameters of the system of equations (19), $\dot{\varphi} = \omega > 0$ is the angular velocity of rotation of the magnetic field in the stator, $M_d(\omega^0) < 0$ is the moment of dissipative forces at the stationary angular velocity of rotation of the rotor $\dot{\varphi} = \omega^0$, which under conditions of theorem 1 is uniquely determined by equation (13).

Then the derivative $\dot{V}_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$ is a negative definite function of the variables $\dot{\gamma}_1, x_1, y_1$.

Proof. Suppose there exist a constant $k > 0$ such that inequalities (26) are satisfied. Geometrically, they mean that at $\dot{\gamma}_1 \neq 0$ the straight line $-k\dot{\gamma}_1$ separates the graph of the function $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1)$ from the axis $O_1\dot{\gamma}_1$, where O_1 is the point of intersection of the graphs of the dissipative moment $M_d(\dot{\varphi})$ and static characteristic $M_a(\dot{\varphi} - \omega)$. Two inequalities (26) are equivalent to one inequality

$$\dot{\gamma}_1[\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) + k\dot{\gamma}_1] < 0 \quad (\dot{\gamma}_1 \neq 0).$$

From here it follows that

$$\dot{\gamma}_1 \Delta M_d(\dot{\gamma}_1) < -k\dot{\gamma}_1^2, \quad \dot{\gamma}_1 \neq 0,$$

and then from (25) we obtain the inequality for \dot{V}_1

$$\dot{V}_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) \leq -k\dot{\gamma}_1^2 - ay^0\dot{\gamma}_1x_1 + ax^0\dot{\gamma}_1y_1 - ab(x_1^2 + y_1^2).$$

Its right-hand side is the quadratic form $F(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$ of the variables $\dot{\gamma}_1, x_1, y_1$. This quadratic form is definitely negative when the quadratic form

$$-F(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1) = k\dot{\gamma}_1^2 + ay^0\dot{\gamma}_1x_1 - ax^0\dot{\gamma}_1y_1 + ab(x_1^2 + y_1^2)$$

is definitely positive.

According to Sylvester's criterion, for the definite positivity of the quadratic form $-F$, the necessary and sufficient condition is that the determinant Δ_3 of this quadratic form and its principal diagonal minors Δ_2, Δ_1

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} k & \frac{1}{2}ay^0 & -\frac{1}{2}ax^0 \\ \frac{1}{2}ay^0 & ab & 0 \\ -\frac{1}{2}ax^0 & 0 & ab \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k & \frac{1}{2}ay^0 \\ \frac{1}{2}ay^0 & ab \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = k$$

are positive.

The condition $\Delta_1 > 0$ is met, since $k > 0$. Having calculated the determinants Δ_2, Δ_3 and using formulas (14), we obtain the condition $\Delta_3 > 0$ in the form (27). The condition $\Delta_2 > 0$ is equivalent to the inequality $abk - \frac{1}{4}[M_d(\omega^0)]^2 > 0$, which is fulfilled when inequality (27) is fulfilled. \square

4. Global stability of the asynchronous electric motor. The positive definite function $V_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$, defined by formula (24), has the time derivative $\dot{V}_1(\dot{\gamma}_1, x_1, y_1)$ by virtue of the system of equations (19), which is expressed by formula (25), and it is negative definite under conditions of Lemma 2. According to the well known Lyapunov theorem [7, Theorem 4.2], the asymptotic stability of the stationary mode of the steady rotation of such electric motor immediately follows from here.

Under conditions of Lemma 2, for the stationary solution of equations (19), more strong property of its global stability is fulfilled. This property is formulated below in the form of Theorem 3. It follows from definitions 1, 2 and Theorem 2.

In Russian mathematical literature, the term "global stability" is in use only for phase systems of ordinary differential equations, having a countable set of stationary solutions. In the case of ODE systems, having a unique stationary solution, the term "stability in whole" is used in Russian literature. In English literature, the term "global stability" is taken in both cases. So, we use the term "global stability" below.

Definition 1 [7, definition 12.1]. Zero solution of the system

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

is called *globally stable* (or asymptotically stable under any initial perturbations), if it is stable in the Lyapunov sense and if every other solution $x(t)$ of this system has the property $\|x(t)\| \rightarrow 0$ at $t \rightarrow \infty$.

Definition 2 [7, c. 45]. The Lyapunov function V is called *infinitely large*, if for any number $A > 0$ there exists a number $R > 0$ such that the inequality $V > A$ is fulfilled outside the sphere $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$.

Theorem 2 [7, теорема 12.1]. *If there exists a positive definite infinitely large function V that has a negative definite derivative in the whole phase space, then the zero solution of the system $\dot{x} = f(x)$ is globally stable.*

This theorem is a special case of more general Theorem 12.2 of [7], which is one of variants of known Barbashin–Krasovsky theorem. Theorem 2 follows also from La Salle invariance principle in the formulation of Theorem VIII in [8].

Function (24) is infinitely large, and this leads to the following theorem.

Theorem 3. *Let conditions of lemma 2 be fulfilled. Then the zero solution (22) of equations (19) of perturbed motion of the two-current model of the asynchronous electric motor, which corresponds to the stationary solution (10) of equations (7) of the two-current model of an asynchronous electric motor, is globally stable.*

Conclusion. Sufficient conditions are obtained for local and global stability of the steady rotation mode of the asynchronous electric motor on the basis of its two-current mathematical model. The load moment is assumed to be a continuous odd function of the angular velocity of the rotor relatively the stator, and this function permits a linear estimate.

The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within basic part of the state order in the field of science, topic No. 1023020900001-4-1.1.2;1.1.1.

1. *Kopylov I.P.* Matematicheskoe modelirovanie elektricheskikh mashin: Uchebnik dlya vuzov (Mathematical modelling of electrical machines) / I.P. Kopylov. – M.: Vysshaya shkola, 2001. – 300 p. (in Russian).
2. *Leonov G.A.* The second Liapunov method in the theory of phase synchronization / G.A. Leonov // J. Appl. Math. Mech. – 1976. – No. 40. – P. 215–222 (in Russian).
3. *Gelig A.Kh.* Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities / A.Kh. Gelig, G.A. Leonov, V.A. Yakubovich. – Singapore: World Science, 2004. – 352 p.
4. *Konosevich B.I.* Sufficient global stability condition for a model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment / B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. – 2018. – Vol. 51, no. 1. – P. 57–65.
5. *Leonov G.A.* Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines / G.A. Leonov, A.M. Zaretskiy // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. – 2012. – Vol. 45, no. 4. – P. 157–163.
6. *Leonov G.A.* Phase synchronization: Theory and applications / G.A. Leonov // Autom. Remote Control. – 2006. – No. 67. – P. 1573–1609.
7. *Barbashin E.A.* Vvedenie v teoriyu ustoychivosti (Introduction to the stability theory) / E.A. Barbashin. – M.: Nauka, 1967. – 225 p. (in Russian).
8. *LaSalle J.* Stability by Liapunov’s direct method / J. LaSalle, S. Lefschetz. – New York, London: Academic Press, 1961. – 140 p.

Б.И. Коносеvич, Ю.Б. Коносеvич

Свойства локальной и глобальной устойчивости модели асинхронного электромотора.

Темой работы являются вопросы устойчивости режима стационарного вращения асинхронного электромотора. Исследование основано на математической модели такого электромотора в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, содержащей уравнение для угловой скорости ротора и уравнения для двух токов в обмотках ротора. Предполагается, что момент нагрузки является непрерывной нечетной функцией угловой скорости ротора относительно статора, и эта функция допускает линейную оценку. Такая система уравнений движения асинхронного электромотора имеет единственное стационарное решение, описывающее режим равномерного вращения ротора. В статье получены достаточные условия локальной асимптотической устойчивости этого решения. Установлено также, что при этих условиях любое решение уравнений движения с течением времени стремится к их стационарному решению.

***Ключевые слова:** асинхронный электромотор, локальная и глобальная устойчивость, равномерное вращение.*

*Received by the editorial board 25.07.2024;
revised 26.08.2024;
recommended for publication 06.09.2024.*

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-1-15-26

EDN:FYBPPC



©2024. Е.С. Глушанков¹

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗНОСТИ ТЕМПЕРАТУР НА КОНТУРАХ

В данной работе представлено решение задачи о действии разности температур в бесконечной многосвязной пластинке из анизотропного материала, когда на ее контурах имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. Решение было построено с использованием конформных отображений, функций комплексной переменной и метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, а также характеристик конвективного теплообмена на термонапряженное состояние пластинки.

Ключевые слова: многосвязная анизотропная пластинка, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В настоящее время в науке и технике широко применяются конструкции с элементами в виде тонких пластинок из анизотропных материалов. По технологическим или эксплуатационным причинам эти пластинки могут содержать отверстия или трещины, около которых под воздействием механических или температурных полей могут возникать высокие концентрации напряжений [1]. К настоящему времени решено большое количество задач о влиянии температурных полей на напряженно-деформированное состояние пластинок [2–5]. В т.ч. решено множество задач о влиянии конвективного теплообмена с внешней средой на термонапряженное состояние упругих тел [6–9]. Также

¹Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий Донецкого государственного университета, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

решена задача для случая неравномерного конвективного теплообмена на контурах пластинки из анизотропного материала при действии линейного потока тепла [10].

В данной работе приведено решение задачи определения термонапряженного состояния (ТНС) в пластинке из анизотропного материала, когда на контурах пластинки имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой, при действии разности температур на ее контурах. Задача решена с использованием конформных отображений, функций комплексной переменной, метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования ТНС пластинки с двумя круговыми отверстиями. Установлено влияние расстояния между контурами отверстий, свойств материала пластинки, а также характеристик теплообмена на распределение напряжений в пластинке.

5. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную многосвязную пластинку из анизотропного материала, занимающую область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга. Через контуры отверстий имеет место конвективный теплообмен с переменным коэффициентом $h_l(\tau)$ с внешней средой температуры \mathfrak{T}_l . Контур L_l не подкреплены, либо жестко подкреплены. На бесконечности температурные и механические воздействия отсутствуют.

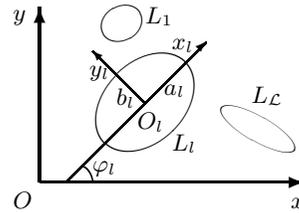


Рис. 1

Решение несвязанной задачи термоупругости для анизотропной пластинки с использованием функций комплексной переменной сводится к последовательному определению сперва комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$ из граничных условий задачи теплопроводности, а затем комплексных потенциалов термоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из граничных условий задачи термоупругости.

После этого значения основных характеристик температурного поля (температура T , плотности потока тепла q_x, q_y) в любой точке пластинки определяются по формулам [4, 5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \tag{1}$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_3, -1) F_3'(z_3). \tag{2}$$

Здесь μ_3 – корень характеристического уравнения задачи теплопроводности [4, 5]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \tag{3}$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки.

Значения основных характеристик ТНС (напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, перемещения u, v) в любой точке пластинки определяются по формулам [4, 5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k), \tag{4}$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k). \quad (5)$$

Здесь μ_k ($k = \overline{1, 2}$) — корни характеристического уравнения плоской задачи теории упругости [4, 5]

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} l_{4a}(\mu) &= a_{11}\mu^4 + 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + 2a_{26}\mu + a_{22}; \\ p_k &= a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3}, \quad q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3}; \\ r_3 &= \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4a}(\mu_3)}; \quad l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2; \end{aligned}$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3;$$

a_{ij} — коэффициенты деформации материала пластинки; α_i — коэффициенты линейного теплового расширения материала пластинки; δ_{ij} — символ Кронекера.

Функции $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) определены в многосвязных областях S_3 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [4, 5]

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

В общем случае функции $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) имеют вид [4, 5]

$$F_3(z_3) = c_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \quad (9)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (10)$$

Здесь c_3 , D_{3l} — вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$; z_{3l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{3ln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $\varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n}$; ζ_{3l} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k);$$

Γ_k, A_{kl}, B_{kl} — комплексные постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k &= (0, 0, 0, 0), \\ \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kl} &= (0, 0, 0, 0), \\ \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kl} &= (0, 0, 0, 0); \end{aligned}$$

$\Gamma_3 = r_3 c_3; A_{3l} = r_3 D_{3l}; B_{3l} = r_3 (c_{3l1} R_{3l} - D_{3l} z_{3l}); w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl}); z_{kl}$ — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров L_l ; a_{kln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоупругости; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — угловой параметр уравнения контура.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 3}$) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4, 5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_3(z_3)$ должна удовлетворять граничному условию

$$2 \operatorname{Re} (h_l(\tau) F_3(\tau_3) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_3) F_3'(\tau_3)) = h_l(\tau) \mathfrak{F}_l, \quad (12)$$

где $\delta_{3,s}(\tau_3) = d\tau_3/ds$, s — дуга контура отверстия; $\kappa = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}$; τ — аффикс граничной точки; τ_3 — точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (7).

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоупругости [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{kl1}, d_{kl2}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi'_k(\tau_k) = \left(\frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds} \right), \quad (13)$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; τ_k ($k = \overline{1, 2}$) — точки, получаемые из граничных точек при аффинных преобразованиях (8). Для неподкрепленных контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}) = (-u^*(\tau), -v^*(\tau));$$

c_{lj} — неизвестные постоянные интегрирования.

6. Решение задачи. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные $c_3, D_{3l}, c_{3ln}, a_{kln}$, входящие в разложения функций (9) и (10), определяются из граничных условий (12) и (13) с помощью метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выбирается система точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых следует минимизировать невязку граничных условий задач теплопроводности и термоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (9) в граничное условие (12), для определения неизвестных постоянных c_3, D_{3l}, c_{3ln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_l(\tau_{im}) c_3 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l(\tau_{im}) w_{3l}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) w'_{3l}(\tau_{3im})) D_{3l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l(\tau_{im}) \varphi_{3ln}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) \varphi'_{3ln}(\tau_{3im})) c_{3ln} = h_l(\tau_{im}) \mathfrak{T}_l \end{aligned} \quad (14)$$

$$(i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}),$$

где τ_{im} — аффикс точки M_{im} , $\tau_{3im} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$. После решения этой системы с использованием сингулярных разложений [11] постоянные c_3, D_{3l}, c_{3ln} , а, следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (9), будут известны. По известной функции (9) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2) [4, 5].

Задача термоупругости. При подстановке функций (9) и (10) в граничные условия (13) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений [10]:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{3ip} \delta_{3,s}(\tau_{3im}) r_3 F_3(\tau_{3im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные a_{kln} , а, следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (10), будут известны. По известным функциям (10) можно в любой точке пластинки находить значения основных характеристик ТНС по формулам (4)–(5) [4, 5].

7. Численные исследования. Были проведены численные исследования для пластинок из следующих материалов [10]:

— текстолит КАСТ–В изотропный [3] модифицированный (материал М1):

$$\begin{aligned} a_{11} &= 74,92a_0, & a_{22} &= 74,92a_0, & a_{12} &= -8,99a_0, & a_{66} &= 167,79a_0, \\ \alpha_1 &= 3,0\alpha_0, & \alpha_2 &= 3,0\alpha_0, & k_{11} &= 144,00k_0, & k_{22} &= 144,00k_0. \end{aligned}$$

— стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [3] модифицированный (материал М2):

$$\begin{aligned} a_{11} &= 272,17a_0, & a_{22} &= 1019,37a_0, & a_{12} &= -76,15a_0, & a_{66} &= 2548,42a_0, \\ \alpha_1 &= 0,7\alpha_0, & \alpha_2 &= 3,8\alpha_0, & k_{11} &= 2,79k_0, & k_{22} &= 1,21k_0. \end{aligned}$$

Здесь $a_0 = 10^{-6}$ МПа $^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-5}$ К $^{-1}$, $k_0 = 10^{-2}$ Вт · (м · К) $^{-1}$.

При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (9), (10) и количество точек M_{im} на контурах L_i , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (14) и (15), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали расчеты, в решаемых задачах для случая материала М1, являющегося изотропным, необходимо было в рядах Лорана сохранять от 50 до 80 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1000 «коллокационных» точек, а для случая материала М2, обладающего сильной анизотропией, необходимо было в рядах сохранять от 500 до 150 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1500 «коллокационных» точек.

В таблице 1 для пластинки из материала М1 с двумя круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$) (рис. 2), удаленными друг от друга на расстояние c , через контуры которых имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами $h_1 = H(1 + \cos \theta)$ и $h_2 = H(1 - \cos \theta)$ с внешними средами температур \mathfrak{T}_1 и \mathfrak{T}_2 соответственно (симметричный теплообмен), с точностью до $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2$, как множителя, приведены значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках контура левого отверстия с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значений Ha и c/a .

В таблице 2 для этой же пластинки приведены аналогичные значения напряжений σ_s/a_0 для случая, когда через контуры отверстий имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами $h_1 = H(1 - \cos \theta)$ и $h_2 = H(1 + \cos \theta)$.

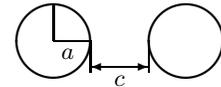


Рис. 2

Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки

Таблица 1. Значения напряжений σ_s/a_0 в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	-0,001	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,009
	$\pi/6$	0,000	-0,001	-0,002	-0,002	-0,005	-0,008
	$\pi/3$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,003	-0,006
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,005
	$2\pi/3$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,002	-0,005
	$5\pi/6$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,002	-0,003	-0,006
	π	-0,001	-0,001	-0,002	-0,002	-0,003	-0,006
10^{-1}	0	-0,009	-0,020	-0,026	-0,033	-0,050	-0,068
	$\pi/6$	-0,001	-0,007	-0,014	-0,023	-0,042	-0,061
	$\pi/3$	0,000	-0,001	-0,004	-0,009	-0,026	-0,047
	$\pi/2$	-0,002	-0,002	-0,003	-0,006	-0,017	-0,037
	$2\pi/3$	-0,006	-0,007	-0,008	-0,010	-0,019	-0,038
	$5\pi/6$	-0,010	-0,011	-0,013	-0,015	-0,026	-0,044
	π	-0,011	-0,013	-0,015	-0,018	-0,029	-0,048
10^0	0	-0,074	-0,137	-0,163	-0,181	-0,197	-0,199
	$\pi/6$	-0,005	-0,052	-0,090	-0,125	-0,165	-0,179
	$\pi/3$	-0,001	-0,010	-0,025	-0,050	-0,104	-0,140
	$\pi/2$	-0,014	-0,017	-0,022	-0,032	-0,070	-0,113
	$2\pi/3$	-0,042	-0,046	-0,050	-0,057	-0,081	-0,117
	$5\pi/6$	-0,069	-0,075	-0,081	-0,090	-0,112	-0,139
	π	-0,080	-0,087	-0,094	-0,103	-0,128	-0,151
10^1	0	-0,282	-0,350	-0,343	-0,325	-0,277	-0,242
	$\pi/6$	-0,019	-0,132	-0,190	-0,223	-0,232	-0,220
	$\pi/3$	-0,002	-0,024	-0,053	-0,089	-0,148	-0,174
	$\pi/2$	-0,036	-0,042	-0,051	-0,065	-0,109	-0,147
	$2\pi/3$	-0,112	-0,116	-0,119	-0,123	-0,138	-0,161
	$5\pi/6$	-0,183	-0,188	-0,191	-0,194	-0,195	-0,196
	π	-0,211	-0,217	-0,221	-0,224	-0,222	-0,214
10^2	0	-0,447	-0,415	-0,384	-0,350	-0,285	-0,245
	$\pi/6$	-0,029	-0,157	-0,212	-0,240	-0,239	-0,222
	$\pi/3$	-0,003	-0,029	-0,060	-0,097	-0,154	-0,178
	$\pi/2$	-0,047	-0,053	-0,062	-0,077	-0,119	-0,155
	$2\pi/3$	-0,144	-0,146	-0,148	-0,151	-0,160	-0,174
	$5\pi/6$	-0,235	-0,238	-0,239	-0,238	-0,227	-0,215
	π	-0,271	-0,275	-0,276	-0,275	-0,259	-0,235
10^3	0	-0,479	-0,423	-0,388	-0,351	-0,285	-0,244
	$\pi/6$	-0,032	-0,160	-0,214	-0,241	-0,239	-0,222
	$\pi/3$	-0,003	-0,030	-0,060	-0,097	-0,154	-0,178
	$\pi/2$	-0,050	-0,056	-0,065	-0,080	-0,122	-0,156
	$2\pi/3$	-0,152	-0,154	-0,156	-0,158	-0,165	-0,178
	$5\pi/6$	-0,249	-0,251	-0,251	-0,249	-0,236	-0,220
	π	-0,287	-0,290	-0,290	-0,288	-0,269	-0,241
10^6	0	-0,660	-0,468	-0,431	-0,402	-0,647	-1,294
	$\pi/6$	-0,079	-0,187	-0,245	-0,281	-0,561	-1,201
	$\pi/3$	-0,017	-0,042	-0,077	-0,123	-0,405	-1,019
	$\pi/2$	-0,074	-0,070	-0,082	-0,104	-0,346	-0,930
	$2\pi/3$	-0,196	-0,177	-0,182	-0,191	-0,429	-1,022
	$5\pi/6$	-0,307	-0,281	-0,285	-0,293	-0,561	-1,201
	π	-0,351	-0,323	-0,327	-0,336	-0,623	-1,290

Таблица 2. Значения напряжений σ_s/a_0 в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	0,000	-0,001	-0,001	-0,002	-0,003	-0,006
	$\pi/6$	0,000	0,000	-0,001	-0,001	-0,003	-0,006
	$\pi/3$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,005
	$\pi/2$	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,002	-0,005
	$2\pi/3$	-0,002	-0,002	-0,003	-0,003	-0,004	-0,006
	$5\pi/6$	-0,004	-0,004	-0,004	-0,004	-0,006	-0,008
	π	-0,004	-0,005	-0,005	-0,005	-0,006	-0,009
10^{-1}	0	-0,004	-0,008	-0,011	-0,015	-0,028	-0,048
	$\pi/6$	0,000	-0,003	-0,006	-0,010	-0,024	-0,044
	$\pi/3$	0,000	-0,001	-0,002	-0,005	-0,017	-0,037
	$\pi/2$	-0,007	-0,007	-0,008	-0,010	-0,018	-0,037
	$2\pi/3$	-0,021	-0,021	-0,022	-0,024	-0,031	-0,048
	$5\pi/6$	-0,034	-0,035	-0,036	-0,038	-0,046	-0,061
	π	-0,039	-0,040	-0,042	-0,044	-0,052	-0,068
10^0	0	-0,022	-0,047	-0,063	-0,082	-0,122	-0,150
	$\pi/6$	-0,001	-0,018	-0,034	-0,055	-0,102	-0,138
	$\pi/3$	-0,001	-0,004	-0,011	-0,024	-0,070	-0,116
	$\pi/2$	-0,030	-0,032	-0,036	-0,042	-0,072	-0,113
	$2\pi/3$	-0,092	-0,095	-0,098	-0,102	-0,116	-0,140
	$5\pi/6$	-0,151	-0,154	-0,158	-0,162	-0,171	-0,180
	π	-0,174	-0,178	-0,182	-0,187	-0,195	-0,198
10^1	0	-0,076	-0,144	-0,176	-0,202	-0,220	-0,214
	$\pi/6$	-0,005	-0,054	-0,096	-0,137	-0,184	-0,195
	$\pi/3$	-0,001	-0,011	-0,028	-0,057	-0,122	-0,159
	$\pi/2$	-0,047	-0,051	-0,057	-0,068	-0,108	-0,147
	$2\pi/3$	-0,144	-0,147	-0,150	-0,152	-0,161	-0,175
	$5\pi/6$	-0,235	-0,239	-0,241	-0,242	-0,234	-0,220
	π	-0,272	-0,276	-0,278	-0,279	-0,266	-0,242
10^2	0	-0,167	-0,269	-0,293	-0,297	-0,266	-0,236
	$\pi/6$	-0,011	-0,101	-0,161	-0,203	-0,223	-0,215
	$\pi/3$	-0,002	-0,019	-0,046	-0,083	-0,145	-0,173
	$\pi/2$	-0,050	-0,055	-0,063	-0,077	-0,119	-0,155
	$2\pi/3$	-0,153	-0,156	-0,158	-0,160	-0,167	-0,179
	$5\pi/6$	-0,251	-0,254	-0,255	-0,253	-0,239	-0,222
	π	-0,290	-0,293	-0,294	-0,293	-0,273	-0,244
10^3	0	-0,284	-0,363	-0,358	-0,336	-0,280	-0,242
	$\pi/6$	-0,019	-0,137	-0,197	-0,230	-0,235	-0,220
	$\pi/3$	-0,002	-0,026	-0,056	-0,093	-0,152	-0,177
	$\pi/2$	-0,050	-0,056	-0,065	-0,080	-0,122	-0,156
	$2\pi/3$	-0,155	-0,157	-0,159	-0,160	-0,167	-0,179
	$5\pi/6$	-0,253	-0,255	-0,255	-0,253	-0,239	-0,222
	π	-0,292	-0,295	-0,295	-0,293	-0,272	-0,243
10^6	0	-7,474	0,958	8,645	-1,498	-0,104	-0,319
	$\pi/6$	-1,897	0,697	6,335	-1,150	-0,077	-0,292
	$\pi/3$	-0,534	0,347	3,475	-0,672	-0,029	-0,238
	$\pi/2$	-0,976	0,353	3,381	-0,609	-0,011	-0,212
	$2\pi/3$	-1,774	0,467	4,742	-0,862	-0,036	-0,239
	$5\pi/6$	-2,388	0,557	6,077	-1,152	-0,078	-0,292
	π	-2,614	0,589	6,603	-1,273	-0,097	-0,318

В таблицах 3 и 4 приведены аналогичные значения напряжений σ_s/a_0 , соответствующие вышеуказанным случаям, для пластинки из материала М2.

Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки

Таблица 3. Значения напряжений σ_s/a_0 в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	-0,004	-0,007	-0,009	-0,010	-0,012	-0,013
	$\pi/6$	0,000	-0,003	-0,005	-0,007	-0,009	-0,010
	$\pi/3$	0,000	0,000	-0,001	-0,003	-0,006	-0,008
	$\pi/2$	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,006	-0,011
	$2\pi/3$	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,005	-0,007
	$5\pi/6$	-0,004	-0,004	-0,004	-0,005	-0,006	-0,007
10^{-1}	0	-0,018	-0,024	-0,024	-0,023	-0,019	-0,016
	$\pi/6$	-0,001	-0,009	-0,013	-0,015	-0,014	-0,013
	$\pi/3$	0,001	-0,001	-0,003	-0,006	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	0,000	-0,001	-0,002	-0,004	-0,010	-0,015
	$2\pi/3$	-0,008	-0,009	-0,009	-0,009	-0,009	-0,010
	$5\pi/6$	-0,011	-0,011	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
10^0	0	-0,035	-0,032	-0,029	-0,025	-0,019	-0,016
	$\pi/6$	-0,002	-0,012	-0,015	-0,016	-0,015	-0,013
	$\pi/3$	0,001	-0,001	-0,004	-0,007	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	-0,001	-0,002	-0,004	-0,006	-0,011	-0,016
	$2\pi/3$	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,012
10^1	0	-0,019	-0,019	-0,019	-0,019	-0,017	-0,015
	$\pi/6$	-0,040	-0,033	-0,029	-0,025	-0,019	-0,016
	$\pi/3$	-0,002	-0,012	-0,015	-0,016	-0,015	-0,013
	$\pi/2$	0,001	-0,002	-0,004	-0,007	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,012	-0,016
	$2\pi/3$	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
10^2	0	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016	-0,014	-0,013
	$\pi/6$	-0,020	-0,020	-0,020	-0,020	-0,018	-0,016
	$\pi/3$	-0,041	-0,033	-0,029	-0,025	-0,019	-0,016
	$\pi/3$	-0,003	-0,012	-0,015	-0,016	-0,015	-0,013
	$\pi/2$	0,001	-0,002	-0,004	-0,007	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,012	-0,016
10^3	0	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
	$2\pi/3$	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,017	-0,017	-0,016	-0,016	-0,014	-0,013
	π	-0,021	-0,021	-0,021	-0,020	-0,018	-0,016
	0	-0,041	-0,033	-0,029	-0,025	-0,019	-0,016
	$\pi/6$	-0,003	-0,012	-0,015	-0,016	-0,015	-0,013
10^6	$\pi/3$	0,001	-0,002	-0,004	-0,007	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,012	-0,016
	$2\pi/3$	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,017	-0,017	-0,016	-0,016	-0,015	-0,013
	π	-0,021	-0,021	-0,021	-0,020	-0,018	-0,016
	0	-0,135	-0,132	-0,024	0,029	-0,064	-8,696
10^6	$\pi/6$	-0,027	-0,071	-0,011	0,023	-0,047	-6,509
	$\pi/3$	-0,001	-0,018	-0,003	0,008	-0,024	-3,874
	$\pi/2$	0,016	0,031	-0,006	-0,025	-0,004	-1,831
	$2\pi/3$	-0,024	-0,033	-0,011	0,003	-0,026	-3,894
	$5\pi/6$	-0,043	-0,068	-0,013	0,021	-0,046	-6,504
	π	-0,057	-0,093	-0,016	0,031	-0,062	-8,675

Таблица 4. Значения напряжений σ_s/a_0 в точках контура левого отверстия

Знач. Ha	θ , рад.	Значения c/a					
		0,1	0,5	1	2	10	100
10^{-2}	0	-0,001	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,009
	$\pi/6$	0,000	-0,001	-0,001	-0,002	-0,005	-0,007
	$\pi/3$	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,006
	$\pi/2$	-0,002	-0,002	-0,003	-0,003	-0,006	-0,011
	$2\pi/3$	-0,006	-0,006	-0,007	-0,007	-0,007	-0,008
	$5\pi/6$	-0,009	-0,009	-0,009	-0,009	-0,010	-0,010
	π	-0,011	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,013
10^{-1}	0	-0,004	-0,008	-0,009	-0,011	-0,013	-0,013
	$\pi/6$	0,000	-0,003	-0,005	-0,008	-0,010	-0,011
	$\pi/3$	0,000	0,000	-0,001	-0,003	-0,008	-0,010
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,003	-0,005	-0,010	-0,015
	$2\pi/3$	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,013
	π	-0,019	-0,019	-0,019	-0,019	-0,018	-0,016
10^0	0	-0,010	-0,017	-0,019	-0,019	-0,017	-0,015
	$\pi/6$	-0,001	-0,006	-0,010	-0,013	-0,014	-0,012
	$\pi/3$	0,001	0,000	-0,002	-0,005	-0,009	-0,011
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,011	-0,016
	$2\pi/3$	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,016	-0,017	-0,016	-0,016	-0,015	-0,013
	π	-0,021	-0,021	-0,021	-0,020	-0,019	-0,016
10^1	0	-0,020	-0,025	-0,025	-0,023	-0,019	-0,016
	$\pi/6$	-0,001	-0,009	-0,013	-0,015	-0,014	-0,013
	$\pi/3$	0,001	-0,001	-0,003	-0,006	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,012	-0,016
	$2\pi/3$	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,017	-0,017	-0,016	-0,016	-0,015	-0,013
	π	-0,021	-0,021	-0,021	-0,020	-0,018	-0,016
10^2	0	-0,030	-0,030	-0,028	-0,025	-0,019	-0,016
	$\pi/6$	-0,002	-0,011	-0,015	-0,016	-0,015	-0,013
	$\pi/3$	0,001	-0,001	-0,004	-0,007	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,012	-0,016
	$2\pi/3$	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,017	-0,017	-0,016	-0,016	-0,015	-0,013
	π	-0,021	-0,021	-0,021	-0,020	-0,018	-0,016
10^3	0	-0,038	-0,033	-0,029	-0,025	-0,019	-0,016
	$\pi/6$	-0,002	-0,012	-0,015	-0,016	-0,015	-0,013
	$\pi/3$	0,001	-0,001	-0,004	-0,007	-0,010	-0,011
	$\pi/2$	-0,002	-0,003	-0,004	-0,006	-0,012	-0,016
	$2\pi/3$	-0,012	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
	$5\pi/6$	-0,017	-0,017	-0,016	-0,016	-0,015	-0,013
	π	-0,021	-0,021	-0,021	-0,020	-0,018	-0,016
10^6	0	-1,182	0,063	0,220	-0,578	-0,185	-0,004
	$\pi/6$	-0,301	0,046	0,158	-0,415	-0,133	-0,004
	$\pi/3$	-0,026	0,014	0,054	-0,156	-0,062	-0,006
	$\pi/2$	0,220	-0,035	-0,096	0,185	0,017	-0,014
	$2\pi/3$	-0,152	0,008	0,049	-0,162	-0,066	-0,006
	$5\pi/6$	-0,333	0,034	0,138	-0,388	-0,132	-0,004
	π	-0,452	0,049	0,194	-0,537	-0,180	-0,004

Выводы. Из полученных данных следует, что коэффициент теплообмена существенно влияет на значения напряжений в окрестности контуров отверстий.

Для рассмотренных распределений коэффициента теплообмена на контурах отверстий имеются зоны с относительно плохим теплообменом (практически теплоизолированные) при любых значениях параметра Ha .

При значениях $Ha < 0,01$ контуры отверстий можно считать практически теплоизолированными, концентрация напряжений в пластинке очень мала. При возрастании значения Ha значительное влияние на распределение напряжений играет расстояние между контурами. Если в области перемычки на контурах поддерживается активный теплообмен, то концентрация напряжений около отверстий незначительно возрастает с уменьшением расстояния между контурами. При ухудшении теплообмена в области перемычки значения напряжений около контуров отверстий резко возрастают с уменьшением расстояния между контурами, причем наибольший рост имеет место в области перемычки.

В отличие от случая действия линейного потока тепла [10], в случае действия разности температур более высокая концентрация напряжений наблюдается в пластинке из материала М1, обладающего более высокими коэффициентами теплопроводности (лучшей теплопроводностью) и меньшими значениями коэффициентов деформации (большей жесткостью).

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ государственной регистрации 124012400354-0).

1. *Мотовиловец И.А.* Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров // К.–Донецк: Вища шк. 1983. – 160 с.
4. *Калоеров С.А.* Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
5. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
6. *Гарматій Г.Ю.* Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною за умови конвективного теплообміну / Г.Ю. Гарматій, В.С. Попович // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2009. – Вып. 52, № 3. – С. 192–200.
7. *Parihar K.S.* Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
8. *Gaikwad K.R.* Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
9. *Nguyen T.D.* Frequency dependence of the magnitude of thermal stresses in a flat plate subjected to rapid thermal cycling by convective heating and cooling / T.D. Nguyen, J.R. Thomas Jr., D.P.H. Hasselman // J. Therm. Stress. – 1987. – Vol. 10, № 3. – P. 163–175.
10. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – Вып. 2 (83). – С. 39–47. – doi:10.24412/0136-4545-2023-2-39-47. – EDN:FLTANT.
11. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

E.S. Glushankov

The thermoelastic state of the infinite multiply connected anisotropic plate in conditions of non-uniform convective heat transfer under temperature difference action.

A solution is presented for the problem of temperature difference acting in the infinite multiply connected anisotropic plate, when a non-uniform convective heat transfer with external environment occurs on its contours. The solution was obtained with using the conformal mappings, the complex potentials and the least squares. The effect of plates's geometric characteristics, the properties of its material, and the heat transfer characteristics on the thermoelastic state of the plate was brought out with the numerical studies.

Keywords: *multiply connected anisotropic plate, convective heat transfer, thermal stresses, complex potentials.*

*Статья поступила в редакцию 04.06.2024;
доработана 08.08.2024;
рекомендована к печати 23.08.2024.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-1-27-36

EDN:LBKDFT

©2024. Н.С. Бондаренко¹, А.С. Гольцев²

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА СОСТОЯНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫМ РАЗРЕЗОМ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТЕПЛООБМЕНЕ

В рамках обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации исследовано состояние термоупругого изгиба изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом. Рассмотрено действие градиента температурного момента на линии разреза при верхнем одностороннем теплообмене с внешней средой. Проведены численные исследования влияния интенсивности теплообмена и параметра теплопроницаемости разреза на коэффициенты интенсивности напряжений.

Ключевые слова: $\{1,0\}$ -аппроксимация, изотропная пластина, теплопроницаемый разрез, критерий Био, параметр теплопроницаемости разреза, коэффициенты интенсивности напряжений

Введение. Проведение прочностных расчётов пластинчатых элементов конструкций особенно актуально в строительстве, авиа-, машиностроении и т. п. Оценка прочности ответственных конструкций осложняется, если в них имеются различные концентраторы напряжений, например, дефекты в виде трещин, которые могут привести к разрушению конструкций. Для оценки прочности таких конструкций применяют методы механики разрушения, к которым относится однопараметрический критерий разрушения в терминах коэффициента интенсивности напряжения (КИН).

Публикации последних лет, посвящённые численному моделированию трещин, свидетельствуют о том, что определение КИН играет ключевую роль при исследовании условий распространения трещин в анизотропных материалах. Статья А.В. Савиковского, А.С. Семенова, М.Л. Качанова [1] посвящена рас-

¹Бондаренко Наталья Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: n.bondarenko123@mail.ru.

Bondarenko Natalya Sergeevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

²Гольцев Аркадий Сергеевич – доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: asgoltsev@mail.ru.

Goltsev Arkady Sergeevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

смотрению взаимодействия одиночной прямолинейной трещины со свободной границей анизотропной упругой пластины конечных размеров. Показано, что при приближении вершины трещины к границе пластины возрастает влияние упругой анизотропии материала на значения КИН. Исследовано влияние степени анизотропии упругих свойств материала и ориентации трещины (моды разрушения) на этот эффект.

В публикации А.М. Покровского, Ю.Г. Матвиенко, М.П. Егранова [2] изложена методика оценки живучести пластинчатых элементов конструкций с учётом двухосного стеснения деформаций по фронту трещины нормального отрыва. В основу расчёта скорости роста усталостной трещины положено уравнение Пэриса, в которое вместо размаха обычного КИН подставлен размах эффективного КИН. При этом в выражение для эффективного КИН, кроме обычного КИН, входят T_{xx} - и T_{zz} -напряжения. Данный подход позволяет учесть при прогнозировании живучести, например, толщину пластины, что невозможно при использовании только КИН и T_{xx} -напряжений.

В последнее время актуальным является использование обобщённых теорий пластин и оболочек, позволяющих получить более точные решения задач теории упругости и термоупругости по сравнению с классической теорией Кирхгофа-Лява. Одной из таких теорий является обобщённая теория в варианте $\{m, n\}$ -аппроксимации, в рамках которой сведение трёхмерной задачи для пластины к двумерной осуществляется методом И. Н. Векуа разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра P_k от толщинной координаты [3]. Подход, основанный на применении разложений искомых и заданных функций в ряды по полиномам, ортогональным на отрезке $[-1, 1]$, широко используется в современных публикациях. В качестве примера можно привести статью А. А. Киреевкова, Е. Ю. Михайловой, Г. В. Федотенкова [4].

В настоящей работе для решения задачи термоупругости использована обобщённая теория пластин в варианте $\{1, 0\}$ -аппроксимации, в рамках которой компоненты напряжённо-деформированного состояния (НДС) представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты $P_k = P_k(x_3)$. Представления компонент НДС приведены в монографии [3]. Целью статьи является выявление влияния величины одностороннего теплообмена и параметра теплопроницаемости разреза на КИН в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом при действии градиента температурного момента.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщины $2h$, поддерживающую теплопроницаемый разрез L . Пластина находится в тепловом контакте по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры, причём характер теплообмена является верхним односторонним: $Vi^+ = Vi$, $Vi^- = 0$, где Vi^\pm – параметры теплообмена (критерии Био) на лицевых плоскостях пластины.

Отнесём пластину к безразмерной системе координат x_1, x_2, x_3 , определённой с точностью до полутолщины пластины h , где x_1, x_2 являются координатами точки в срединной плоскости, x_3 – толщинная координата.

Система уравнений термоупругости на базе обобщённой теории в варианте

{1,0}-аппроксимации, включает в себя:

- систему уравнений теплопроводности, записанную для случая верхнего одностороннего теплообмена

$$\begin{aligned}\Delta T_0 - \frac{2Bi}{Bi+4}T_0 - \frac{5Bi}{3(Bi+4)}T_1 &= 0; \\ \Delta T_1 - \frac{5Bi}{Bi+4}T_0 - \frac{10(2Bi+3)}{3(Bi+4)}T_1 &= 0,\end{aligned}\quad (1)$$

где T_0 , T_1 – аналоги средней температуры и температурного момента; Δ – двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2};$$

- уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned}N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \\ N_2 &= B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \\ S &= \frac{1-\nu}{2}B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad M_1 = D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \\ M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \quad H = \frac{1-\nu}{2}D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); \\ Q_{j0} &= \Lambda_0 \left(\gamma_j + \frac{\partial w_0}{\partial x_j} \right) \quad (j = 1, 2),\end{aligned}\quad (2)$$

где u , v , w_0 – обобщённые перемещения точек срединной поверхности; γ_1 , γ_2 – обобщённые углы поворота нормали; N_1 , N_2 , S – обобщённые мембранные усилия; Q_{10} , Q_{20} – обобщённые перерезывающие силы; M_1 , M_2 , H – обобщённые изгибающие и крутящий моменты; ν – коэффициент Пуассона; α – температурный коэффициент линейного расширения;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}; \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1+\nu)};$$

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_{20} = 0; \quad \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (2), (3) определены с точностью до значения Eh (E – модуль Юнга), а моменты – с точностью до Eh^2 .

Термоупругое состояние в пластине с разрезом представим в виде:

$$G^* = G^o + G,$$

где G^o – компоненты термоупругого состояния в сплошной пластине (основного термоупругого состояния, которое будем считать известным); G – компоненты возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием теплопроницаемого разреза.

Рассмотрим прямолинейный теплопроницаемый разрез длины $2l$ с нормалью \vec{n} и касательной \vec{t} , расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (4)$$

На линии разреза (4) для компонент возмущённой температуры, определяемых из уравнений теплопроводности (1), имеют место такие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L - \beta_n [T_k] = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = 0, 1), \quad (5)$$

где $\beta_n = l\lambda_n/\lambda$ – параметр теплопроницаемости разреза, характеризующий его тепловые свойства в поперечном направлении; $\lambda_n = \lambda_c/\delta$ – коэффициент теплопроницаемости разреза [5]; λ_c – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами трещины; λ – теплопроводность материала пластины; δ – раскрытие трещины.

Для компонент возмущённого термоупругого состояния, определяемых из системы уравнений термоупругости (2), (3), граничные условия на линии разреза (4) сформулированы для случая свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними [5]:

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^o|_L; & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^o|_L; \\ M_n|_L &= -M_n^o|_L; & H_{nt}|_L &= -H_{nt}^o|_L; & Q_n|_L &= -Q_n^o|_L, \end{aligned} \quad (6)$$

где $N_n, S_{nt}, M_n, H_{nt}, Q_n$ – усилия и моменты на элементе длины разреза.

Предполагаем, что теплопроницаемый разрез (4) удалён на значительное расстояние от линии внешней границы пластины. Поэтому пластину будем считать бесконечной, а компоненты возмущённого термоупругого состояния – равными нулю на внешнем граничном контуре. Достоверность такого предположения проверяется после решения задачи.

2. Методика решения задачи. Применим к системе уравнений термоупругости (1)–(3) двумерное интегральное преобразование Фурье, учитывающее разрывный характер искомых функций на линии разреза (4). Трансформанты

частных производных искомым функций находятся по формуле [6], в которой учтено, что нормаль к разрезу (4) имеет вид $\vec{n} = (0, 1)$:

$$F \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right] = (-i\xi_1)\tilde{f}; \quad F \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right] = (-i\xi_2)\tilde{f} + \frac{1}{2\pi} \int_L [f] \exp(i\xi_1 x'_1) dL,$$

где $\tilde{f} = \tilde{f}(\xi_1, \xi_2)$ – трансформанта функции $f = f(x_1, x_2)$; $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант; $[f] = f^+ - f^-$ – скачок функции f при переходе через линию разреза L , причём f^\pm – это граничные значения функции f при $x_2 \rightarrow 0^\pm$; x'_1 – координата точки на линии разреза (4).

Оригиналы искомым функций найдём с помощью методики обращения, основанной на использовании специальной G -функции, которая выражается через функцию Макдональда $K_n(z)$ [7]:

$$G_{n,\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-n} K_{n+\nu}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(\nu+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k}$$

$$(n > 0, \operatorname{Re}\nu > -1),$$

где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция (эйлеров интеграл второго рода).

Интегральные представления внутренних силовых факторов имеют вид:

- для обобщённых мембранных усилий $N_j = P_j^0, S = P_3^0$:

$$P_j^0(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 K_{jk}^0(x_1 - ls, x_2) \psi_k^0 ds \quad (j = \overline{1,3}); \quad (7)$$

- для обобщённых изгибающих и крутящего моментов $M_j = P_j^1, H = P_3^0$:

$$P_j^1(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^7 \int_{-1}^1 K_{jk}^1(x_1 - ls, x_2) \psi_k^1 ds \quad (j = \overline{1,3}); \quad (8)$$

- для обобщённых перерезывающих сил $Q_{10} = P_4^1, Q_{20} = P_5^1$:

$$P_j^1(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^5 \int_{-1}^1 K_{jk}^1(x_1 - ls, x_2) \psi_k^1 ds \quad (j = 4, 5). \quad (9)$$

В интегральных представлениях (7)–(9) все функции $\psi_k^q = \psi_k^q(s)$ зависят от s – координаты точки на линии разреза (4), причём функции $\psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0]$, $\psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1]$ находятся как решение задачи теплопроводности (1), (5).

Остальные неизвестные функции определяются так:

- для интегральных представлений (7)

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}; \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}; \quad (10)$$

- для интегральных представлений (8), (9):

$$\psi_j^1 = \frac{d[\gamma_j]}{ds}; \quad \psi_{j+3}^1 = [\gamma_j] \quad (j = 1, 2); \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds}. \quad (11)$$

Ядра интегральных представлений внутренних силовых факторов (7)–(9) представляют собой линейные комбинации специальных G -функций, например:

$$K_{42}^1(x_1 - ls, x_2) = \frac{\Lambda_0}{2} \left\{ \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^2} G_{2,2}(\sqrt{2,5}r) - G_{0,0}(\sqrt{2,5}r) \right\},$$

где $r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}$.

Подставляя интегральные представления (7)–(9) в граничные условия для задачи термоупругости (6), получим две независимых системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) для определения неизвестных функций (10), (11), описывающие при $|\zeta| \leq 1$:

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s) ds}{s - \zeta} = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2); \quad (12)$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (13)$$

Правые части систем СИУ (12), (13) зависят от скачков компонент температуры и от компонент основного термоупругого состояния. Разностные ядра системы СИУ (13) представляют собой линейные комбинации специальных G -функций и их первообразных, например,

$$E_{33}^1(\zeta - s) = -1,25l^2(\zeta - s)G_{1,0}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|).$$

Законы изменения КИН по толщине пластины получены путём сравнения коэффициентов при особенности $r^{-1/2}$ в ненулевых компонентах тензора напряжений с известными асимптотическими представлениями напряжений [8]:

$$K_{II}^{\pm} = \mp 0,25\sqrt{\pi lh}E \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left\{ \sum_{m=0,1} P_m(x_3) \psi_1^m(s) \sqrt{1 - s^2} \right\};$$

$$K_{\text{III}}^{\pm} = \mp 0,25\sqrt{\pi lh}E\Lambda_0 (P_0(x_3) - P_2(x_3)) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left\{ \psi_3^1(s) \sqrt{1-s^2} \right\}, \quad (14)$$

где K_{II}^{\pm} , K_{III}^{\pm} – КИН для поперечного и продольного сдвига соответственно на продолжениях разреза L^{\pm} .

С учётом свойств полиномов Лежандра $P_k(x_3)$ найдены максимальные значения абсолютных величин КИН (14):

$$K_{\text{II}}^{\max} = 0,25\sqrt{\pi lh}E \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{m=0,1} |\psi_1^m(s)| \sqrt{1-s^2} \right\};$$

$$K_{\text{III}}^{\max} = 0,375\sqrt{\pi lh}E\Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}. \quad (15)$$

3. Анализ результатов численных исследований. Численные исследования посвящены оценке влияния величины теплообмена (Bi) и теплофизических свойств теплопроницаемого разреза ($\beta_n = l\lambda_n/\lambda$) на КИН температурных напряжений для поперечного и продольного сдвига (15). Рассматривался случай верхнего одностороннего теплообмена с окружающей средой ($Bi^+ = Bi$, $Bi^- = 0$). Расчёты проведены для разреза средней длины ($l = 3$) при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$.

Для анализа поведения температурных КИН предполагалась линейная зависимость основного температурного поля в пластине и, как следствие, отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния [9]. Таким образом, оценивалась составляющая КИН, обусловленная возмущённым температурным полем, вызванным наличием разреза. На линии разреза ($|x_1| \leq l$) предполагалось действие градиента температурного момента:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_1 = \text{const} \neq 0.$$

Результаты численных исследований представлены на рисунке 1 и рисунке 2 в виде графиков зависимостей максимальных относительных значений КИН от уровня теплообмена, представленного в логарифмической шкале ($\lg Bi$), при различных значениях параметра теплопроницаемости разреза β_n .

На рисунке 1 представлены графики максимальных относительных значений КИН для поперечного сдвига K_{II}^{\max} , а на рисунке 2 – для продольного сдвига K_{III}^{\max} . Значения КИН даны с точностью до величины $K^* = \alpha q_1 E \sqrt{lh}/4$, которая соответствует значению КИН в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности q_1 перпендикулярно линии разреза [10]. Кривые 1–5 на рисунке 1 и рисунке 2 отвечают следующим значениям параметра теплопроницаемости разреза β_n : 0 (теплоизолированный разрез); 0,01; 0,1; 1; 10 соответственно.

Из графиков следует, что увеличение параметра теплопроницаемости разреза β_n приводит к уменьшению максимальных относительных значений как для

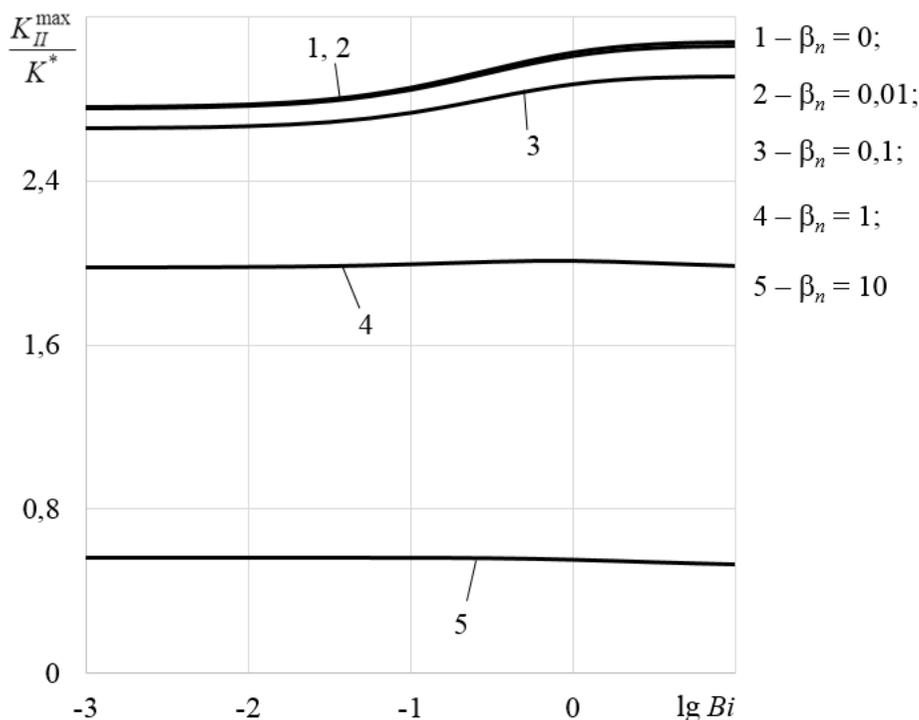


Рис. 1. КИН для поперечного сдвига

КИН поперечного сдвига, так и для КИН продольного сдвига. При этом теплопроницаемые разрезы с параметром теплопроницаемости, меньшим 0,1, можно рассматривать как теплоизолированные разрезы, поскольку учёт теплопроводности таких разрезов по направлению их нормалей не приводит к существенному изменению возмущённого температурного поля.

Следует заметить, что характер влияния параметра теплопроницаемости разреза β_n на относительные значения КИН просто объясняется исходя из общих представлений механики разрушения. Поскольку этот параметр, исходя из своего определения ($\beta_n = l\lambda_c/(\lambda\delta)$), прямо пропорционален коэффициенту теплопроводности материала промежуточного слоя (λ_c) и обратно пропорционален раскрытию разреза (δ), то его увеличение связано с увеличением первой составляющей или уменьшением второй составляющей. Всё это приводит к уменьшению возмущения температурного поля и, следовательно, к уменьшению температурных КИН.

Из графиков следует также, что влияние уровня теплообмена на максимальные относительные значения КИН для поперечного и продольного сдвига разное. В частности, особенностью случая одностороннего теплообмена является факт незначительного увеличения максимальных относительных значений КИН для поперечного сдвига K_{II}^{\max} при значениях параметра теплопроницаемости разреза в диапазоне $0 < \beta_n < 1$ и уровне теплообмена, выше среднего

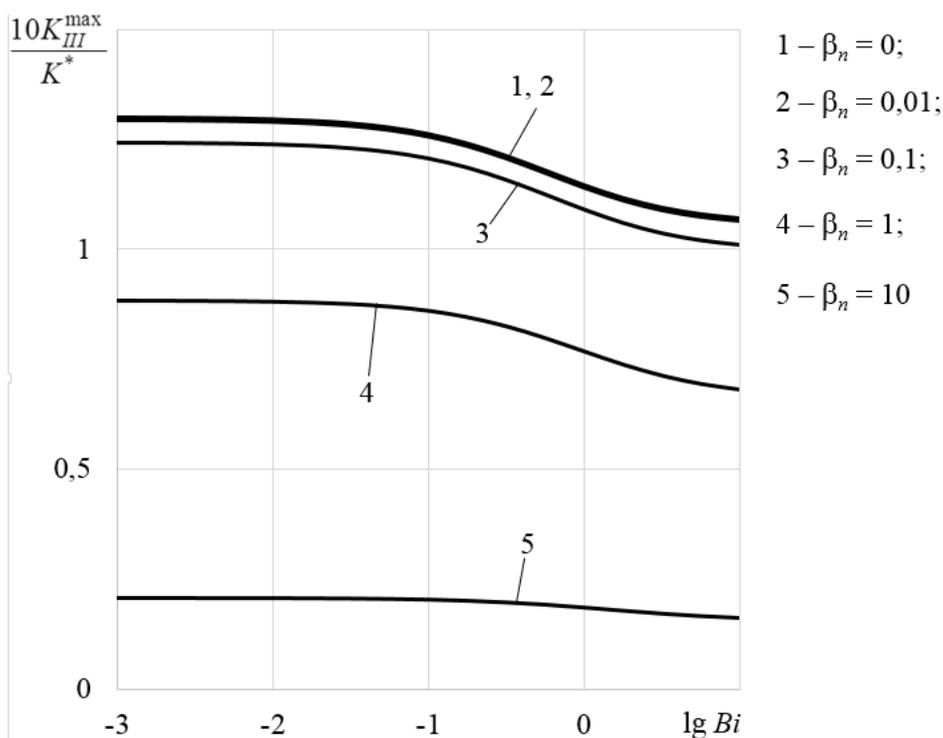


Рис. 2. КИН для продольного сдвига

($Bi > 0,1$). При других значениях параметра теплопроницаемости разреза уровень теплообмена практически не влияет на значения КИН для поперечного сдвига. Такого эффекта не наблюдается в случае симметричного теплообмена ($Bi^+ = Bi^- = Bi$) [11].

Максимальные относительные значения КИН для поперечного сдвига K_{III}^{\max} на порядок меньше, чем аналогичные значения для продольного сдвига. Они слабо зависят от уровня теплообмена в диапазоне от слабого до среднего теплообмена ($0 < Bi < 0,1$) и заметно уменьшаются при сильном теплообмене ($1 < Bi$). Подобная зависимость этих КИН наблюдается также в случае симметричного теплообмена [11].

Выводы. Поскольку значения КИН для продольного сдвига на порядок меньше, чем значения КИН для поперечного сдвига, то последние являются определяющими при обосновании надёжности работы тонкостенных элементов конструкций при температурных нагрузках, приводящих к изгибу, в случае одностороннего теплообмена. Особое внимание при этом следует уделить случаю теплоизолированного разреза ($\beta_n = 0$) при сильном одностороннем теплообмене ($1 < Bi$), когда наблюдается незначительное (до 10%) увеличение максимальных относительных значений КИН для поперечного сдвига.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400353-3).

1. Савиковский А.В. Влияние анизотропии материала на взаимодействие трещины со свободной границей / А.В. Савиковский, А.С. Семенов, М.Л. Качанов // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86, № 4. – С. 584–594.
2. Покровский А.М. Прогнозирование живучести пластины со сквозной трещиной с учетом двухосного стеснения деформаций по ее фронту / А.М. Покровский, Ю.Г. Матвиенко, М.П. Егранов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2023. – Т. 89, № 9. – С. 53–63.
3. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
4. Киреенков А.А. Метод сведения контактных задач для сферических оболочек типа Тимошенко к парным рядам-уравнениям / А.А. Киреенков, Е.Ю. Михайлова, Г.В. Федотенков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29. – № 3. – С. 390–401.
5. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – Киев: Наукова думка, 1984. – 280 с.
6. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – Киев: УМК ВО, 1988. – 84 с.
7. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
8. Партон В.З. Механика упругопластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва: Наука, 1985. – 504 с.
9. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 308 с.
10. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – Киев: Наукова думка, 1976. – 444 с.
11. Бондаренко Н.С. Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплопроницаемым разрезом в случае симметричного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 53–62. – doi:10.24412/0136-4545-2022-4-53-62. – EDN:SKFHUL.

N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev

Investigation of the external environment influence on the state of thermoelastic bending of plates with a heat-permeable cut by one-sided heat exchange.

The state of thermoelastic bending of an isotropic plate with a heat-permeable cut was investigated within the framework of the generalized theory in the $\{1,0\}$ -approximation version. The presence of the of temperature moment gradient on the cut line during upper one-sided heat exchange with the external environment is considered. Numerical investigations of the influence of heat exchange intensity and the heat permeability parameter of the cut on the stress intensity factors were carried out.

Keywords: $\{1,0\}$ -approximation, isotropic plate, heat-permeable cut, Biot criterion, heat permeability parameter of the cut, stress intensity factors.

*Статья поступила в редакцию 25.06.2024;
доработана 12.08.2024;
рекомендована к печати 23.08.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-1-37-50

EDN:LJJYHP



©2024. А.И. Дзундза¹, Н.Ю. Мельничук², И.А. Моисеенко³,
В.А. Моисеенко⁴

СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ СЕКТОРНОГО СЕЧЕНИЯ

Построены базисные решения для задачи исследования свойств распространяющихся нормальных волн в радиально-неоднородных изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения с идеально гибким нерастяжимым мембранным покрытием граничной поверхности секторного выреза. Элементы базисных решений выражены через аналитические функции. Модули упругости и плотность материала волновода задаются на основе трехфакторной модели радиальной функциональной неоднородности физико-механических характеристик изотропного материала сплошного цилиндрического волновода. Получены дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник симметричных и антисимметричных нормальных волн в радиально-неоднородном цилиндрическом волноводе со свободным либо жестко закрепленным цилиндрическим участком боковой поверхности. Представлен сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, проведенного для случаев однородного и функциональ-

¹ Дзундза Алла Ивановна – доктор пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

Dzundza Alla Ivanovna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

² Мельничук Наталья Юрьевна – ассистент каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

Melnichuk Natalia Iurievna – Assistant, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³ Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

⁴ Моисеенко Виктор Алексеевич – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. специализированных информационных технологий и систем ФГБОУВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка, e-mail: v.a.moiseyenko@donnasa.ru.

Moiseyenko Viktor Alekseevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

но неоднородных свободных на цилиндрическом участке боковой поверхности волноводов, даны количественные и качественные оценки полученных численных результатов.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, изотропия, цилиндрический волновод, секторное сечение, модель радиальной неоднородности, базисное решение.

Введение. Функционально-градиентные материалы в настоящее время активно исследуются в том числе и в плане разработки новых теоретических подходов к анализу математических моделей, описывающих волновые процессы в объектах из таких материалов, например, в задачах исследования дисперсионных спектров нормальных упругих волн в цилиндрических телах из таких материалов с варьируемыми геометрией и физико-механическими свойствами. Одним из направлений анализа указанного класса задач, приобретающем все большую актуальность в связи с появлением новых приложений в ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике, является поиск возможностей целенаправленного изменения структуры спектра. Проведение теоретических исследований в этой области предполагает, как правило, построение новых аналитических решений для соответствующих математических моделей. В этом направлении продуктивным оказался подход, основанный на привлечении специальных моделей функциональной радиальной неоднородности физико-механических характеристик таких материалов. Так в работах [1,2] с применением единого подхода построены аналитические решения задачи о распространении неосесимметричных волн в протяженных цилиндрах кругового секторного и кругового сечений, изготовленных из трансверсально изотропного материала с единым для всех характеристик материала функциональным законом экспоненциально степенной радиальной неоднородности. В работах [3-5] указанный подход распространен на случай радиально-неоднородного цилиндрически ортотропного материала волновода. В работе [6] на основе предложенной трехфакторной модели функциональной радиальной неоднородности физико-механических характеристик изотропного материала сплошного цилиндрического волновода построены новые базисные аналитические решения уравнений трехмерной линейной математической модели для случая распространяющихся неосесимметричных волн.

В данной работе представленная в [6] методика построения базисных аналитических решений распространена на задачу исследования свойств нормальных упругих волн, распространяющихся в радиально-неоднородных изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения с идеально гибким нерастяжимым мембранным покрытием граничной поверхности секторного выреза.

1. Постановка задачи. Рассматривается изотропный радиально-неоднородный

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \quad \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r) \quad (1)$$

цилиндрический волновод секторного поперечного сечения, занимающий в нормированной линейным размером R_* [м] безразмерной цилиндрической системе координат $O r \theta z$ область

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (0 < \alpha < \pi), \quad (2)$$

имеющий граничную поверхность $\Gamma = \Gamma_{\text{sec}} + \Gamma_{\text{cyl}}$, где

$$\Gamma_{\text{sec}} = \{r \in [0, 1], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)\},$$

$$\Gamma_{\text{cyl}} = \{r = 1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Полагается, что произвольные, в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик, нормированные параметрами соответственно $C_* = \text{const}$ [н/м²] и $\rho_* = \text{const}$ [кг/м³] функциональные законы изменения упругих модулей Ламе и плотности

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(r) > 0, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(r) > 0, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [0, 1]) \quad (3)$$

относятся к классу $C^2[0, \delta]$. Границы допустимых значений параметра δ ($\delta > 1$) определяются достаточными условиями несильной радиальной неоднородности материала волновода [6].

Для пространственной линейной математической модели волновой динамики в случае распространяющихся вдоль оси Oz волновода с геометрией (2) нормальных упругих волн с круговой частотой ω , нормированным параметром R_* продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) и окружным волновым числом τ ($\tau \in \mathbb{R}$) после применения метода разделения переменных получают представления, которые в матричном виде могут быть записаны так:

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U \mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (4)$$

$$\mathbf{\Sigma}(r, \theta, z, t) = \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r);$$

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{G}}(r) \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r); \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{O} \quad (r \in [0, \delta)). \quad (6)$$

Математическая модель (4)–(6) дополняется граничными условиями:

- на участках граничной поверхности секторного выреза рассматриваются граничные условия, моделирующие нанесение абсолютно гибкого микропанцирного покрытия

$$\left[\begin{array}{l} u_r(r, \theta, z, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \end{array} \right] \Big|_{\Gamma_{\text{sec}}} = \mathbf{O}, \quad (7)$$

- на цилиндрическом участке граничной поверхности рассматриваются классические граничные условия свободной

$$[\mathbf{\Sigma}(r, \theta, z, t)]_{(1,5,6)} \Big|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = \mathbf{O}, \quad (8)$$

либо жестко закрепленной

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) \Big|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = \mathbf{O} \quad (9)$$

поверхности. В соотношениях (4)–(9)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) &= \left[\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r) \right]^T, \\ \tilde{\Sigma}^{(\tau)}(r) &= \left[\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(r) \right]^T\end{aligned}\quad (10)$$

вектор-столбцы с вещественными радиальными составляющими нормированных величинами соответственно R_* и C_* компонент $u_s(r, \theta, z, t)$ ($s = r, \theta, z$)

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T \quad (11)$$

вектора упругих перемещений и компонент $\sigma_s(r, \theta, z, t)$ ($s = rr, \theta\theta, zz, \theta z, rz, r\theta$)

$$\begin{aligned}\Sigma(r, \theta, z, t) &= [\sigma_{rr}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \sigma_{zz}(r, \theta, z, t), \\ &\quad \sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t), \sigma_{rz}(r, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t)]^T\end{aligned}\quad (12)$$

тензора напряжений; \mathbf{P}_U и \mathbf{P}_Σ – диагональные матрицы комплексной нормировки с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned}[\mathbf{P}_U]_{1,1} &= [\mathbf{P}_U]_{2,2} = 1, \quad [\mathbf{P}_U]_{3,3} = i, \\ [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} &= 1 \quad (j = 1, 2, 3, 6), \quad [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} = i \quad (j = 4, 5); \end{aligned}\quad (13)$$

$\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)$ и $\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)$ – вещественные диагональные матрицы функциональной зависимости от угловой координаты с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned}[\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} &= [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} = \cos(\tau\theta + \beta), \quad [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} = \sin(\tau\theta + \beta), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \cos(\tau\theta + \beta) \quad (j = 1, 2, 3, 5), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \sin(\tau\theta + \beta) \quad (j = 4, 6); \end{aligned}\quad (14)$$

$\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned}[\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)]_{j,j} &= r^2 d_r^2 + \tilde{f}_{jj}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{jj}^{(2)} \quad (j = \overline{1, 3}), \\ [\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)]_{n,m} &= \tilde{f}_{nm}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{nm}^{(2)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \end{aligned}\quad (15)$$

где $d_r = d/dr$; \mathbf{O} – нулевой вектор-столбец размерности 3.

Представления для матрицы $\tilde{\mathbf{G}}(r)$, матричных дифференциальных операторов $\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$, а также функций $\tilde{f}_{nm}^{(j)} = \tilde{f}_{nm}^{(j)}(r)$ ($j = \overline{1, 2}$; $n, m = \overline{1, 3}$) приведены в [6].

В соотношениях (14) β – параметр, задающий тип волновых движений, а именно:

- при $\beta = 0$ рассматриваются условно симметричные волны со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= u_z(r, \theta, z, t), \end{aligned}$$

- при $\beta = \pi/2$ рассматриваются условно антисимметричные волны со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= -u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= -u_z(r, \theta, z, t); \end{aligned}$$

τ – окружное волновое число, значения которого определяются из спектральной подзадачи (4), (7) так:

$$\tau = \tau_n = \begin{cases} (n - 1/2) \pi / \alpha & \text{если } \beta = 0 \\ n\pi / \alpha & \text{если } \beta = \pi/2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (16)$$

Ставится спектральная задача:

во-первых, для заданных соотношением (16) значений τ построить образующий базис набор частных решений системы из трех однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (6);

во-вторых, на основе построенного базисного решения и преобразованных с учетом представлений (4) граничных условий (8), (9) соответственно к виду

$$\left[\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(1) \right]_{(1,5,6)} = \mathbf{O}, \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(1) = \mathbf{O} \quad (18)$$

провести численный эксперимент, предусматривающий построение и исследование спектра бегущих волн.

2. Базисное решение. Следуя работе [6] вводится в рассмотрение декартова система координат Ox_1x_2 и плоскость комплексной переменной $\xi = x_1 + ix_2$. Формально полагается, что неотрицательная часть полуоси Ox_1 совпадает с осью Ox . Функциональные законы (3) рассматриваются с использованием двух альтернативных вариантов модели радиальной неоднородности материала волновода в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(r) &= (1 - 2\psi_1(r))e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\mu}(r) = \psi_1(r)e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{\rho}(r) &= \psi_2(r)e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, 1]), \end{aligned} \quad (19-A)$$

либо

$$\tilde{\lambda}(r) = \psi_1(r)e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\mu}(r) = e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_2(r)e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, 1]), \quad (19-B)$$

где $\varphi(\xi)$, $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$ – произвольные, аналитические в области $|\xi| < \delta$ функции. На основании представленных моделей неоднородности рассматриваются

альтернативные варианты аналитического продолжения на плоскость комплексной переменной ξ дифференциального оператора $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$ в оператор $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi)$ с элементами

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{j,j} &= \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{jj}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{jj}^{(2)} \quad (j = \overline{1,3}), \\ \left[\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{n,m} &= \hat{f}_{nm}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{nm}^{(2)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \end{aligned} \quad (20)$$

где $d_\xi = d/d\xi$. Соответственно выбранной модели неоднородности (19-А) либо (19-Б) определяются входящие в соотношения (20) функции $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1,2}$; $n, m = \overline{1,3}$) [6].

Ставится целевая задача – для заданных соотношением (16) значений τ построить для уравнения

$$\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \hat{\mathbf{U}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta) \quad (21)$$

набор из трех линейно независимых частных решений вида

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) &= \xi \eta^{(q)} \left[\hat{u}_r^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_\theta^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_z^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \right]^T \\ &\quad \left(\eta^{(q)} \in \mathbb{R}; \quad q = \overline{1,3} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

с аналитическими в области $|\xi| < \delta$ элементами $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$ ($s = r, \theta, z$; $q = \overline{1,3}$).

Известно, что система дифференциальных уравнений (21) имеет аналитические в области $|\xi| < \delta$ решения, если функции $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1,2}$; $n, m = \overline{1,3}$) будут аналитическими в области $|\xi| < \delta$ [7-8]. В работе [6] представлены два подхода к определению по заданным функциональным законам (3) аналитических в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1,2}$), для каждого подхода получено достаточное условие несильной радиальной неоднородности материала волновода, обеспечивающее аналитичность в области $|\xi| < \delta$ функций $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1,2}$; $n, m = \overline{1,3}$).

Аналитические в области $|\xi| < \delta$ заданные функции $\varphi(\xi)$, $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1,2}$) и подлежащие определению элементы $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular})}(\xi)$ ($s = r, \theta, z$) искомым частным решений (22) представляются абсолютно и равномерно сходящимися в любом круге $|\xi| \leq s$ ($0 < s < \delta$) разложениями вида

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1,2}), \\ \hat{u}_s^{(\tau, \text{particular})}(\xi) &= \xi^{\kappa_s} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s)} \xi^n \quad (s = r, \theta, z), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\kappa_r = \kappa_\theta = 0$, $\kappa_z = 1$; $\left\{ a_n^{(s)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($s = \overline{0,2}$) – заданные наборы вещественных коэффициентов; $\left\{ d_n^{(s)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($s = r, \theta, z$; $|d_0^{(r)}| + |d_0^{(\theta)}| + |d_0^{(z)}| \neq 0$) – подлежащие

определению соответственно параметр и наборы вещественных коэффициентов. На основании представлений (22), (23) с учетом физического требования отсутствия в области волновода V сингулярности в поле перемещений, получаются ограничения на значения параметра η и коэффициентов $d_0^{(s)}$ ($s = r, \theta, z$) вида

$$\eta + \kappa_s \geq -1, \text{ если } d_0^{(s)} = 0 \text{ и } \eta + \kappa_s \geq 0, \text{ если } d_0^{(s)} \neq 0 \text{ (} s = r, \theta, z \text{)}. \quad (24)$$

После подстановки вектора

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular})}(\xi) = \xi \eta \left[\hat{u}_r^{(\tau, \text{particular})}(\xi), \hat{u}_\theta^{(\tau, \text{particular})}(\xi), \hat{u}_z^{(\tau, \text{particular})}(\xi) \right]^T \quad (25)$$

в уравнение (21) с учетом разложений (23) для каждой модели радиальной неоднородности (19-А) и (19-Б), во-первых, определяется однородная система линейных уравнений третьего порядка

$$\mathbf{Q}_0 \mathbf{B}_0 = \mathbf{O}, \quad (26)$$

которая имеет три, удовлетворяющие ограничениям (24), линейно независимые векторные решения $\mathbf{B}_0^{(q)} = \left[d_0^{(r,q)}, d_0^{(\theta,q)}, d_0^{(z,q)} \right]^T$ ($q = \overline{1,3}$) с элементами соответственно выбранной модели неоднородности (19-А) и (19-Б):

$$\begin{aligned} d_0^{(r,1)} &= (\tau - 2) a_0^{(1)} - \tau, \quad d_0^{(\theta,1)} = \tau (a_0^{(1)} - 1) + 2, \\ d_0^{(z,1)} &= k (1 - a_0^{(1)}) \quad (\eta^{(1)} = 1 - \tau) \text{ если } 1/2 < \tau \leq 1, \\ d_0^{(r,1)} &= 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0 \quad (\eta^{(1)} = \tau - 1) \text{ если } \tau > 1; \end{aligned} \quad (27\text{-А})$$

$$d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1 \quad (\eta^{(2)} = \tau - 1); \quad (28\text{-А})$$

$$\begin{aligned} d_0^{(r,3)} &= (\tau + 2) a_0^{(1)} - \tau, \quad d_0^{(\theta,3)} = \tau (1 - a_0^{(1)}) + 2, \\ d_0^{(z,3)} &= k (a_0^{(1)} - 1) \quad (\eta^{(3)} = \tau + 1); \end{aligned} \quad (29\text{-А})$$

$$\begin{aligned} d_0^{(r,1)} &= -\tau (a_0^{(1)} + 1) - 2, \quad d_0^{(\theta,1)} = (2 - \tau) a_0^{(1)} - \tau + 4, \\ d_0^{(z,1)} &= k (1 + a_0^{(1)}) \quad (\eta^{(1)} = 1 - \tau) \text{ если } 1/2 < \tau \leq 1, \\ d_0^{(r,1)} &= 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0 \quad (\eta^{(1)} = \tau - 1) \text{ если } \tau > 1; \end{aligned} \quad (27\text{-Б})$$

$$d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1 \quad (\eta^{(2)} = \tau - 1); \quad (28\text{-Б})$$

$$\begin{aligned} d_0^{(r,3)} &= \tau (a_0^{(1)} + 1) - 2, \quad d_0^{(\theta,3)} = -(\tau + 2) a_0^{(1)} - \tau - 4, \\ d_0^{(z,3)} &= k (a_0^{(1)} + 1) \quad (\eta^{(3)} = \tau + 1). \end{aligned} \quad (29\text{-Б})$$

Во-вторых, определяется также последовательность систем неоднородных линейных уравнений третьего порядка вида

$$\mathbf{Q}_n^{(q)} \mathbf{B}_n^{(q)} = \mathbf{F}_n^{(q)} \quad (q = \overline{1, 3}; \quad n = \overline{1, \infty}). \quad (30)$$

Входящие в уравнения (26), (30) матрицы \mathbf{Q}_0 и $\mathbf{Q}_n^{(q)}$ размерности 3×3 , а также вектор-столбцы $\mathbf{F}_n^{(q)}$ длиной 3 представлены в [6]. Уравнения (30) определяют матричные рекуррентные соотношения для нахождения векторов $\mathbf{B}_n^{(q)} = [d_n^{(r,q)}, d_n^{(\theta,q)}, d_n^{(z,q)}]^T$ ($q = \overline{1, 3}; \quad n = \overline{1, \infty}$) с коэффициентами в разложениях аналитических в области $|\xi| < \delta$ элементов

$$\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) = \xi^{\kappa_s} \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(s,q)} \xi^p \quad (s = r, \theta, z; \quad q = \overline{1, 3}) \quad (31)$$

искомых трех частных решений (22).

Анализ матриц $\mathbf{Q}_n^{(q)}$ и вектор-столбцов $\mathbf{F}_n^{(q)}$ ($q = \overline{1, 3}; \quad n = \overline{1, \infty}$), проведенный для моделей неоднородности (19-А) и (19-Б), показал, что уравнение (30) для каждой модели неоднородности позволяет определить второе и третье частные решения $\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$ ($q = \overline{2, 3}$) при любых, задаваемых соотношением (16) значениях параметра τ . Первое частное решение $\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 1)}(\xi)$ на основании уравнения (30) для каждой модели неоднородности при $1/2 < \tau \leq 1$ также строится всегда, а при $\tau > 1$ только при выполнении ограничений, накладываемых на задаваемые соотношениями (23) разложения функций $\varphi(\xi)$, $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$) соответственно выбранной модели неоднородности (19-А) и (19-Б)

$$a_0^{(1)} a_1^{(0)} + a_1^{(1)} = 0; \quad (32\text{-А})$$

$$a_1^{(0)} = 0. \quad (32\text{-Б})$$

Таким образом, при $\tau > 1$ для построения базисного набора частных решений (22) необходимо привлекать исключительно численный подход к определению аналитических в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$), позволяющий учесть ограничения (32-А) и (32-Б) [6].

Окончательно базисное решение уравнения (21) в матричном виде может быть представлено так:

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) = \left[\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 1)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 2)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 3)}(\xi) \right]. \quad (33)$$

На его основе общее решение уравнения (6) допустимо записать в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{general})}(r) = \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(r) \mathbf{A}, \quad (34)$$

где \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 3. Тогда с использованием соотношений (5) определяется векторная функция $\tilde{\Sigma}^{(\tau, \text{general})}(r)$ в виде

$$\tilde{\Sigma}^{(\tau, \text{general})}(r) = \left(\hat{\mathbf{G}}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) \right) \Big|_{\xi=r} \mathbf{A}. \quad (35)$$

Соответствующие выбранной модели неоднородности (19-А) либо (19-Б) матрица функции $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$ и матричный дифференциальный оператор $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$ определены в [6]. Там же представлены соответствующие граничным условиям (17), (18) дисперсионные соотношения.

3. Численный эксперимент. Анализ дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих ($k > 0$) условно симметричных ($\beta = 0$) волн проводился при значениях угловой меры секторного выреза $\alpha = 3\pi/4$ и полученного из соотношений (16) в случае $n = 1$ окружного волнового числа $\tau = 2/3$ для свободных на цилиндрическом участке граничной поверхности однородного цилиндра из алюминия (Al)

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}, \quad (36)$$

а также неоднородных цилиндров, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала которых были заданы так:

$$\tilde{\lambda}(r) = \tilde{\lambda}^{(Al)}(1 + 0,25r^3), \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (37-A)$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(r) = \tilde{\mu}^{(Al)}(1 + 0,25r^3), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (37-B)$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(r) = \tilde{\rho}^{(Al)}(1 + 0,25r^3). \quad (37-B)$$

Здесь

$$\tilde{\lambda}^{(Al)} = 5,91, \quad \tilde{\mu}^{(Al)} = 2,61, \quad \tilde{\rho}^{(Al)} = 2,7, \quad C_* = 10^{10} \text{Н/м}^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{кг/м}^3. \quad (38)$$

Выбор функциональных законов (37-А) – (37-В) обусловлен задачей исследования влияния на топологическую картину спектра, а также графики фазовых и групповых скоростей бегущих волн фактора неоднородности по каждой физико-механической характеристике изотропного материала отдельно. Далее волновод с характеристиками (36) будет называться однородным волноводом, а с характеристиками (37-А) – (37-В) – соответственно неоднородным волноводом А, Б или В типа.

При проведении вычислительного эксперимента был выбран вариант модели неоднородности (19-А) и численный подход [6] для определения функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1,2}$) с использованием полиномиальной аппроксимации ($N = 5$). Это обеспечило максимальную погрешность аппроксимации заданных соотношениями (37-А) – (37-В) функциональных законов радиальной неоднородности не превышающую $\varepsilon = 10^{-4}$.

В области изменения параметров $k \in [0, 25]$ и $\Omega \in [0, 20]$, где $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ безразмерная приведенная частота, для однородного волновода и неоднородных волноводов А–В типов были построены фрагменты спектров бегущих волн. Указанные фрагменты спектров представлены соответственно на рисунках 1–4. Анализ этих рисунков показывает, что неоднородность исключительно по модулю $\tilde{\lambda}(r)$ визуально не сказывается на топологической картине соответствующего спектра (рис. 2) по сравнению со спектром однородного волновода (рис.

1), при этом фрагменты спектров при наличии неоднородности исключительно по модулю $\tilde{\mu}(r)$ (рис. 3) либо плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 4) существенно отличаются от фрагмента спектра однородного волновода (рис. 1). В качестве характерной особенности отмечается также локализация асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области низшей моды по отношению к старшим модам спектра для однородного волновода (рис. 1) и для волновода с неоднородностью исключительно по упругому модулю $\tilde{\lambda}(r)$ (рис. 2), а также первых двух низших мод волновода с неоднородностью исключительно по плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 4), в то время как при неоднородности исключительно по упругому модулю $\tilde{\mu}(r)$ (рис. 3) указанная тенденция не проявляется.

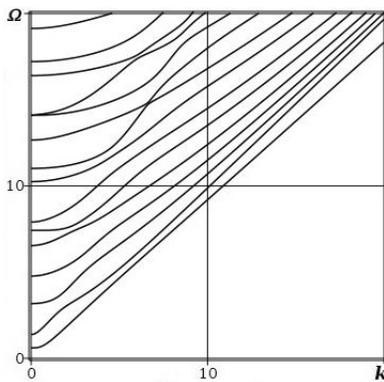


Рис. 1. Спектр однородного волновода

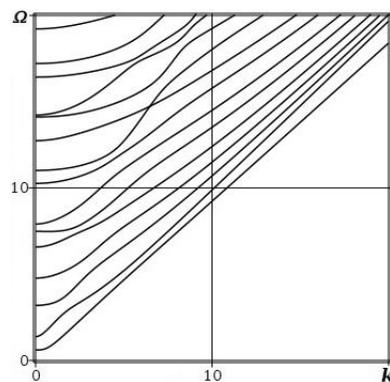


Рис. 2. Спектр неоднородного водновода А

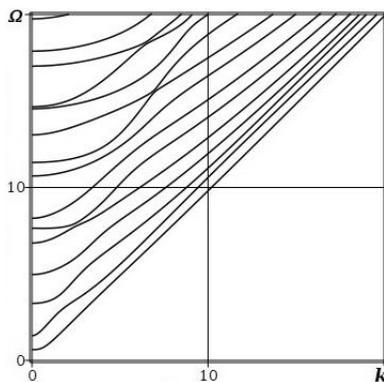


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода Б

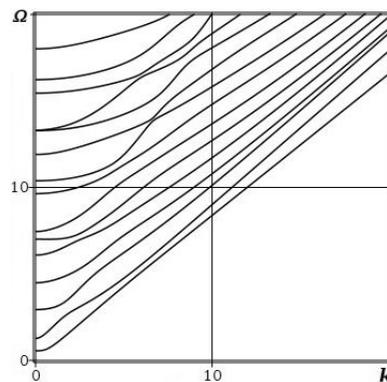


Рис. 4. Спектр неоднородного водновода В

Количественные различия построенных фрагментов спектров исследованы с помощью функции сравнения парных по номеру в сопоставляемых спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left(\Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (39)$$

На рисунках 5–7 представлены результаты сопоставительного анализа поведения низших пятнадцати мод построенных фрагментов спектров однородного и

неоднородных волноводов А – В. Номера мод сопоставляемых спектров и тип соответствующей линии указаны в нижней части рисунков.

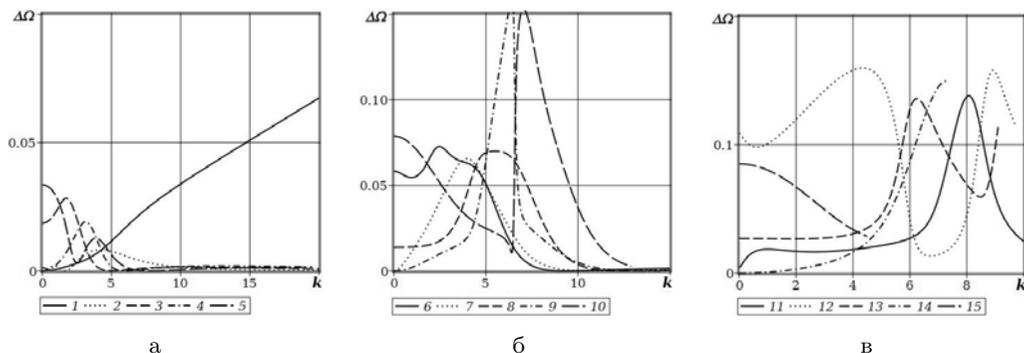


Рис. 5. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода А

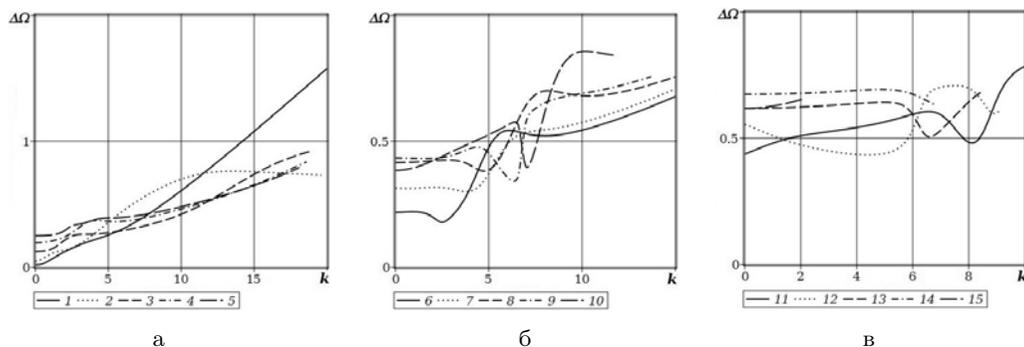


Рис. 6. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода Б

При анализе представленных рисунков отмечаются закономерности, проявляющиеся для сплошных цилиндрических радиально-неоднородных волноводов [6]. Количественные значения функции $\Delta\Omega(k)$ при сопоставлении спектров однородного и неоднородного исключительно по модулю $\tilde{\lambda}(r)$ волноводов (рис. 5) в абсолютных значениях оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении спектров однородного и неоднородных исключительно по модулю $\tilde{\mu}(r)$ (рис. 6) и плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 7) волноводов. При этом все моды представленных фрагментов спектров неоднородных исключительно по модулю $\tilde{\lambda}(r)$ либо $\tilde{\mu}(r)$ волноводов смещены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более высоких частот (рис. 5,6), в то время как для неоднородного исключительно по плотности $\tilde{\rho}(r)$ волновода тенденция противоположная – все моды исследованного фрагмента спектра смещены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более низких частот (рис. 7). Характерными также являются локальные всплески функции $\Delta\Omega(k)$ в окрестностях значений волнового параметра k , соответствующих зонам сближения смежных старших мод неоднород-

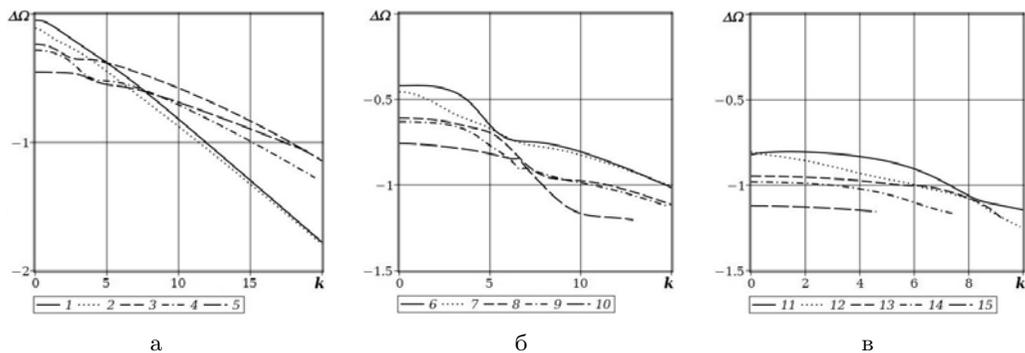


Рис. 7. Сопоставление мод спектров однородного и неоднородного волновода В

ных исключительно по модулю $\tilde{\lambda}(r)$ (рис. 5-б, 5-в) и исключительно по модулю $\tilde{\mu}(r)$ (рис. 6-б, 6-в) волноводов.

Для представленных на рисунках 1–4 фрагментов спектров построены графики фазовых (рис. 8–11) и для пяти нижних мод групповых (рис. 12–15) скоростей.

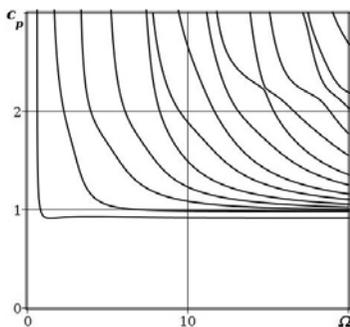


Рис. 8. Фазовые скорости волн в однородном волноводе

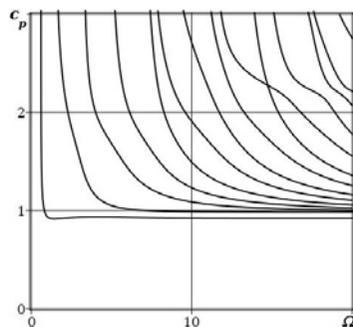


Рис. 9. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе А

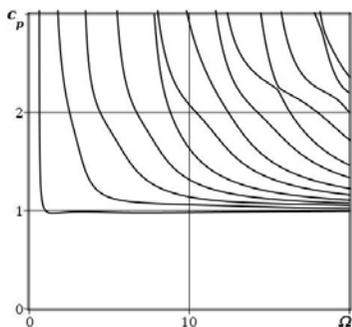


Рис. 10. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе Б

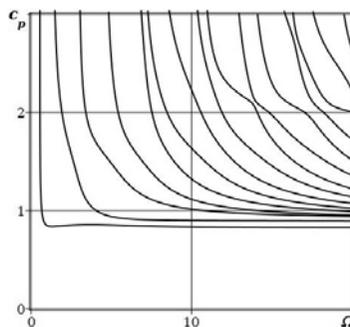


Рис. 11. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе В

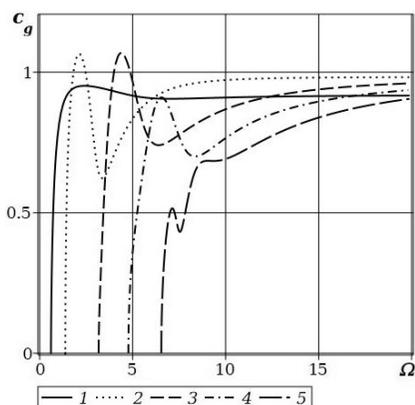


Рис. 12. Групповые скорости волн в однородном волноводе

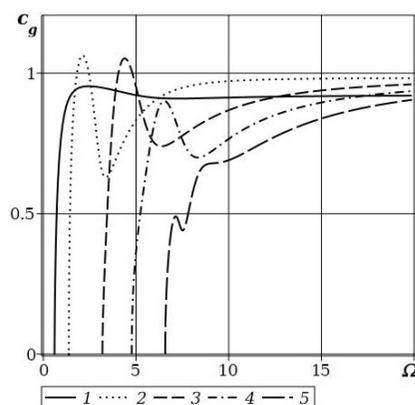


Рис. 13. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе А

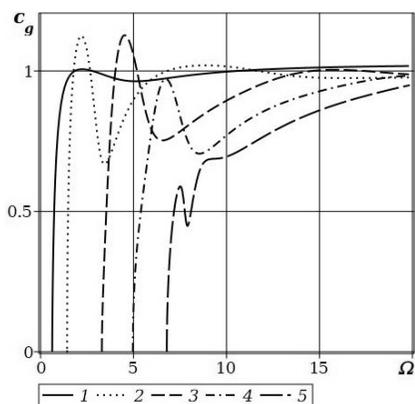


Рис. 14. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе Б

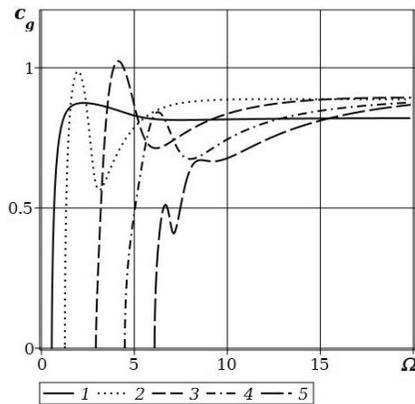


Рис. 15. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе В

В нижней части рисунков 12–15 указаны номера мод и тип соответствующей линии. На указанных графиках c_p и c_g – пронормированные величиной $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$ приведенные соответственно фазовая и групповая скорости. Приведенные графики фазовых и групповых скоростей наглядно иллюстрируют выше отмеченные тенденции локализации асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области низших мод исследованных фрагментов спектров.

Выводы. Представленные результаты актуальны в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализом моделей ультразвуковой диагностики, верификацией результатов, полученных прямыми численными методами.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн в трансверсально изотропных волноводах секторного сечения с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко. // Труды ИПММ. – 2015. – Т. 29. – С. 100–113.
2. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндров / И.А. Моисеенко // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37–54.
3. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.
4. Моисеенко И.А. Нормальные волны в функционально градиентных ортотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2016. – № 1 (56). – С. 16–34.
5. Моисеенко И.А. Нормальные волны вдоль ортотропных функционально-градиентных цилиндров секторного поперечного сечения / И.А. Моисеенко. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 4. – С. 41–53.
6. Моисеенко И.А. Исследование свойств изгибных волн в сплошных цилиндрах на основе трехфакторной модели радиальной неоднородности изотропного материала / И.А. Моисеенко, А.И. Дзундза, Н.Ю. Мельничук, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2(83). – С. 5–25. – doi:10.24412/0136-4545-2023-2-5-25. – EDN:CWKADU.
7. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.
8. Petrowsky I.G. Sur l'analyticite des solutions des systems d'equations differentielles / I.G. Petrowsky // Матем. сб. – 1939. – № 5(47). – Р. 3–70.

A.I. Dzundza, N.I. Melnichuk, I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko

Properties of normal waves in radially inhomogeneous isotropic cylinders of sector cross-section.

Basic solutions are constructed for the problem of studying the properties of propagating normal waves in radially inhomogeneous isotropic cylinders of sector cross-section with an ideally flexible inextensible membrane coating of the boundary surface of the sector cutout. Elements of the basic solutions are expressed in terms of analytical functions. Moduli of elasticity and density of the waveguide material are determined based on a three-factor model of radial functional inhomogeneity of the physical and mechanical characteristics of the isotropic material of a solid cylindrical waveguide. Dispersion relations are obtained that describe the harmonic spectra of symmetric and antisymmetric normal waves in a radially inhomogeneous cylindrical waveguide with a free or rigidly fixed cylindrical section of the lateral surface. A comparative analysis of the results of a numerical experiment carried out for the cases of homogeneous and functionally inhomogeneous free on the cylindrical section of the lateral surface waveguides is presented; quantitative and qualitative estimates of the obtained numerical results are given.

Keywords: *FGMs, isotropy, cylindrical waveguide, sector cross-section, radial heterogeneity model, basic solution, dispersion relations.*

*Статья поступила в редакцию 15.08.2024;
доработана 09.09.2024;
рекомендована к печати 13.09.2024.*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2024-1-51-60

EDN:PSXXPV

©2024. А.А. Глухов¹, В.И. Сторожев², С.В. Сторожев³,

МЕТОДИКА АНАЛИЗА ПРОБЛЕМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН СДВИГА В АНИЗОТРОПНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ С РАЗЛИЧНЫМИ ЗАКОНАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ДЛЯ КАЖДОЙ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Предложен численно-аналитический алгоритм интегрирования уравнения относительно амплитудной составляющей нормальной сдвиговой волны в неоднородном по толщине трансверсально-изотропном слое, каждый из физико-механических параметров которого характеризуется своей, отличающейся от остальных, экспоненциальной функцией изменения по поперечной координате. С использованием полученных базисных решений сформулированы дисперсионные уравнения для сдвиговых нормальных волн в рассматриваемом слое применительно к ряду случаев задания граничных условий на его плоских гранях. Представлены результаты численных исследований некоторых вариантов рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: *трансверсально-изотропный функционально-градиентный слой, трехфакторная поперечная экспоненциальная неоднородность, нормальные горизонтально-поляризованные сдвиговые волны, методика интегрирования волновых уравнений, базисные частные решения, дисперсионные соотношения, расчетный анализ дисперсионных спектров.*

Введение и цели исследования. Проблемы распространения волн напряжений в упругих волноводах при достаточно длительном периоде изучения

¹Глухов Антон Александрович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., зав. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

остаются крайне актуальной областью перспективных исследования в механике деформируемого твердого тела [1]. При этом, к числу наиболее современных в теоретическом и прикладном отношении аспектов этой проблемы относятся вопросы анализа закономерностей распространения нормальных и локализованных упругих волн в непрерывно-неоднородных по физико-механическим свойствам упругих телах [2–5] в рамках моделей динамического деформирования массивов анизотропных горных пород и функционально-градиентных анизотропных материалов, создаваемых на базе применения новейших аддитивных технологий [6, 7]. Исследования в этой области в преимущественной степени основываются на нескольких детально обосновываемых моделях описания законов изменения физико-механических свойств функционально-градиентных сред и геоматериалов вдоль некоторых линейных направлений, к числу которых относятся модели экспоненциальных координатных зависимостей характеристик деформационных свойств, плотности и генерирования сопряженных полей [6, 7]. В обширном числе работ, посвященных численно-аналитическому исследованию задач статического и динамического деформирования экспоненциально-неоднородных тел, принимается концепция единого экспоненциального закона неоднородности для всех физико-механических характеристик модели [8–15], и уравнение относительно амплитудной составляющей сдвиговых волновых перемещений в нормальных сдвиговых волнах для волновода в виде плоскопараллельного неоднородного по толщине трансверсально-изотропного слоя с поперечно ориентированной осью изотропии в этом случае является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, интегрируемым методом Эйлера [16].

В работах [16–18] концепция экспоненциального описания законов изменения физико-механических характеристик распространена на случаи введения двух различных видов таких зависимостей в представлениях физико-механических характеристик материалов для моделей распространения сдвиговых упругих волн в поперечно-неоднородном слое – различных законов неоднородности для параметра плотности материала и для совокупности всех остальных механических характеристик [17]; различных законов неоднородности для одной из характеристик упругих свойств трансверсально-изотропного слоя и для пары остальных параметров – второго модуля упругости и параметра плотности [16]; различных законов неоднородности для всех параметров упругих свойств и плотности, а также для совокупности характеристик электрических свойств в случае задачи о сдвиговых электроупругих нормальных волнах в слое функционально-градиентной пьезокерамики [18]. В этих случаях задачи численно-аналитического интегрирования уравнений относительно амплитудных составляющих волновых перемещений в нормальных сдвиговых волнах для волновода в виде неоднородного слоя решены применительно к изотропному слою путем приведения соответствующего уравнения к уравнению Бесселя [17], а для анизотропного упругого и пьезокерамического слоя – с применением предложенных скалярных и матрично-векторных итерационных алгоритмов [16, 18].

Целью данного исследования является разработка численно-аналитического алгоритма интегрирования уравнения относительно амплитудной составляющей нормальной сдвиговой волны в неоднородном трансверсально-изотропном слое, каждый из физико-механических параметров которого характеризуется своей, отличающейся от остальных, экспоненциальной функцией изменения по толщине, а также получение и анализ дисперсионных соотношений для волн рассматриваемого типа при задании на гранях слоя условий свободных от напряжений поверхностей.

1. Алгоритм интегрирования амплитудного волнового уравнения. Без ограничения общности рассматривается распространение волны SH-типа с циклической частотой ω и волновым числом k вдоль координатного направления Ox_1 в отнесенном к прямоугольным безразмерным координатам $Ox_1x_2x_3$ с нормирующим параметром h_* [M] трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое $V = \{(x_1, x_2) \in R_2, 0 \leq x_3 \leq h\}$ с направлением неоднородности и осью изотропии, коллинеарными Ox_3 . Исследуемое волновое движение описывается уравнением

$$\partial_1(c_{66}\partial_1u_2) + \partial_3(c_{44}\partial_3u_2) - \rho\partial_t^2u_2 = 0, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1)$$

в котором физико-механические характеристики материала имеют вид

$$c_{44} = c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3), \quad c_{66} = c_{660} \exp(\lambda_{66}x_3), \quad \rho = \rho_0 \exp(\lambda_\rho x_3), \quad (2)$$

а комплексная функция волновых упругих перемещений $u_2(x_1, x_3, t)$ задается в форме

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)). \quad (3)$$

После подстановки представлений (2) и (3) в (1) записывается задача интегрирования уравнения относительно амплитудной функции $u_{20}(x_3)$

$$c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3)u''_{20} + \lambda_{44}c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3)u'_{20} + (\rho_0\omega^2 \exp(\lambda_\rho x_3) - k^2c_{660} \exp(\lambda_{66}x_3))u_{20} = 0. \quad (4)$$

В рамках формирования алгоритма численно-аналитического интегрирования (4) вводятся в рассмотрение следующие представления в виде степенных рядов:

$$u_{20}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n, \quad u'_{20}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x_3^n, \quad (5)$$

$$u''_{20}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x_3^n, \\ \exp(\lambda_{44}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\lambda_{66}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{66}^m}{m!} x_3^m, \quad (6)$$

$$\exp(\lambda_\rho x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\rho^m}{m!} x_3^m.$$

При формальной подстановке (5) и (6) в уравнение (4) оно принимает форму

$$\begin{aligned} c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^m x_3^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x_3^n + \lambda_{44} c_{440} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^m}{m!} x_3^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x_3^n + \\ + (\rho_0 \omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_\rho^m}{m!} x_3^m - k^2 c_{660} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{66}^m}{m!} x_3^m) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

и далее может быть преобразовано к виду

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Delta_{np} x_3^p = 0, \quad (8)$$

где

$$\Delta_{np} = \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)c_{440} \lambda_{44}^{p-n} ((p-n)!)^{-1} a_{n+2} + \quad (9)$$

$$+ (n+1)c_{440} \lambda_{44}^{p-n+1} ((p-n)!)^{-1} a_{n+1} + (\rho_0 \omega^2 \lambda_\rho^{p-n} - c_{660} k^2 \lambda_{66}^{p-n}) ((p-n)!)^{-1} a_n).$$

Следствием приравнения нулю коэффициентов Δ_{np} в представлении (8) при варьировании $n = 0, \infty$ является серия соотношений, позволяющих последовательно получить значения a_n для базисных решений дифференциального уравнения (4). В случае $n = 0$ соотношение связи искомых коэффициентов $\Delta_{00} = 0$ приводится к виду

$$2c_{440} a_2 + c_{440} a_1 + (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) a_0 = 0$$

или

$$a_2 = -(1/2) a_1 - (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) (2c_{440})^{-1} a_0. \quad (10)$$

Соотношение (10) при альтернативном выборе $a_0 = 1, a_1 = 0$ либо $a_0 = 0, a_1 = 1$ и последующем использовании рекуррентных формул

$$a_{p+2} = -((p+1)(p+2)c_{440})^{-1} ((p+1)c_{440} \lambda_{44} a_{p+1} + (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) a_p + \quad (11)$$

$$+ \sum_{n=0}^{p-1} [((n-p)!)^{-1} ((n+1)(n+2)c_{440} \lambda_{44}^{p-n} a_{n+2} + (n+1)c_{440} \lambda_{44}^{p-n+1} a_{n+1} +$$

$$+ (\rho_0 \omega^2 \lambda_\rho^{p-n} - c_{660} k^2 \lambda_{66}^{p-n}) a_n]) \quad (p = \overline{1, \infty}),$$

соответственно приводит к двум последовательностям $\{a_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($j = 1, 2$), которые определяют два базисных частных решения $\Phi_j(x_3, \omega, k)$ уравнения (4) с представлениями

$$\Phi_j(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} x_3^n, \quad (12)$$

которые при использовании в численных исследованиях редуцируются на оговариваемом уровне точности расчетов. С их введением при исследовании рассматриваемых волновых процессов используется выражение

$$u_2(x_1, x_3, t) = (C_1 \Phi_1(x_3, \omega, k) + C_2 \Phi_2(x_3, \omega, k)) \exp(-i(\omega t - kx_1)). \quad (13)$$

Уместно указать, что

$$\Phi_j(0, \omega, k) = a_0^{(j)}, \quad (\partial_3 \Phi_j(x_3, \omega, k))_{x_3=0} = a_1^{(j)}. \quad (14)$$

2. Формулировка дисперсионных соотношений для сдвиговых волн в функционально-градиентном слое с трехфакторной неоднородностью экспоненциального типа. Полученные представления для базисных решений уравнения вида (4) позволяют представить формулировки дисперсионных соотношений $F(\omega, k) = 0$, описывающих закономерности распространения нормальных и локализованных горизонтально-поляризованных сдвиговых волн в некоторых типах волноводов с элементами в виде рассматриваемого трансверсально-изотропного функционально-градиентного слоя.

В частности, для нормальных горизонтально-поляризованных сдвиговых волн в волноводе в виде слоя $V = \{(x_1, x_2) \in R_2, 0 \leq x_3 \leq h\}$ с закрепленными граничными плоскостями

$$F(\omega, k) = a_0^{(1)} \Phi_2(h, \omega, k) - a_0^{(2)} \Phi_1(h, \omega, k) = 0; \quad (15)$$

для слоя V со свободными граничными плоскостями

$$F(\omega, k) = a_1^{(1)} \Phi'_2(h, \omega, k) - a_1^{(2)} \Phi'_1(h, \omega, k) = 0; \quad (16)$$

для локализованных волн Лява в структуре «трансверсально-изотропный функционально-градиентный слой V из материала с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью на однородном изотропном полупространстве $x_3 \in (-\infty, 0)$ с модулем сдвига $\tilde{\mu}$ и плотностью $\tilde{\rho}$ »

$$F(\omega, k) = (c_{440} a_1^{(1)} + \vartheta a_0^{(1)}) \Phi'_2(h, \omega, k) - (c_{440} a_1^{(2)} + \vartheta a_0^{(2)}) \Phi'_1(h, \omega, k) = 0, \quad (17)$$

$$\vartheta = (\omega^2 \tilde{\rho} / \tilde{\mu} - k^2)^{1/2}.$$

3. Результаты вычислительных экспериментов. В процессе численной реализации представленной методики отдельно рассмотрен вопрос верификации запрограммированного алгоритма расчета базисных решений вида (12). С

этой целью рассматривались частные случаи однофакторной неоднородности $\lambda_{44} = \lambda_{66} = \lambda_\rho = \lambda$, и с использованием базисных частных решений амплитудных уравнений для этого случая в экспоненциальной форме [16]

$$\exp(\delta_1 x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_1^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\delta_2 x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_2^m}{m!} x_3^m, \quad (18)$$

$$\delta_q = -\lambda/2 + (-1)^{q+1}((\lambda/2)^2 - \chi)^{1/2}, \quad \chi = (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2)/c_{440},$$

конструировались соответствующие представления базисных решений в рядах $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ с $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, либо $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, которые соответственно имеют следующий вид

$$(\exp(\delta_1 x_3) - \exp(\delta_2 x_3))/(\delta_1 - \delta_2) = \quad (19)$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_1^m}{m!} x_3^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_2^m}{m!} x_3^m \right) / (\delta_1 - \delta_2) = 0 \cdot x_3^0 + (\delta_1 - \delta_2) x_3^1 / (1!(\delta_1 - \delta_2)) + \dots,$$

$$(\delta_2 \exp(\delta_1 x_3) - \delta_1 \exp(\delta_2 x_3))/(\delta_2 - \delta_1) = \quad (20)$$

$$= (\delta_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_1^m}{m!} x_3^m - \delta_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_2^m}{m!} x_3^m) / (\delta_2 - \delta_1) = 1 \cdot x_3^0 + (\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) x_3^1 / (1!(\delta_2 - \delta_1)) + \dots$$

Контрольные расчеты осуществлялись для анализа совпадения в частном случае однофакторной неоднородности результатов вычислений $\Phi_1(x_3, \omega, k)$, $\Phi_2(x_3, \omega, k)$ с данными расчетов по формулам (19) и (20).

На базе разработанной методики для ряда вариантов варьируемого задания параметров трехфакторной неоднородности физико-механических свойств слоя со свободными от напряжений плоскими гранями реализован расчетный анализ поведения низшей моды дисперсионного спектра, а также рассчитаны фрагменты диаграмм дисперсионных кривых для отдельных случаев задания существенно увеличенных значений констант неоднородности.

Значения физико-механических и геометрических параметров рассматриваемого волновода выбирались в следующем виде. Вводились два варианта задания физико-механических параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 : вариант 1 – $c_{440} = 2c_*$, $c_{660} = c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, вариант 2 – $c_{440} = c_*$, $c_{660} = 2c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, где c_* [Па] и ρ_0 [кг/м³] – соответствующие нормирующие параметры. Параметр толщины слоя задавался в виде $h = 0.5h_*$. Для параметров неоднородности λ_{44} , λ_{66} , λ_ρ рассматривались вариации значений $\lambda_{44}, \lambda_{66} = \{\lambda_*, 2\lambda_*, 4\lambda_*\}$, λ_* [h⁻¹] – параметр нормировки.

Результаты расчетов траекторий низшей моды спектра на диаграммах дисперсионных кривых исследуемых нормальных волн в зависимости от задаваемых величин показателей неоднородности λ_{44} , λ_{66} , λ_ρ для варианта 1 задания параметров c_{440} , ρ_0 представлены на рисунках 1–3, а для варианта 2 – на рисунках 4–6. На этих рисунках $\tilde{k} = kh_*$ – приведенное нормированное волновое число, $\tilde{\omega} = (\rho_0 \omega^2 h^2 / c_*)$ – приведенный безразмерный частотный параметр. На

всех графиках сплошные линии отвечают минимальным значениям варьируемого параметра, точечные – средним по величине значениям и пунктирные – максимальным значениям. Рисунки 1 и 4 описывают поведение низшей моды спектра при задании параметров неоднородности λ_{44} , λ_{66} , λ_ρ в виде $\lambda_{44} = h_*$, $\lambda_{66} = \{h_*, 2h_*, 4h_*\}$, $\lambda_\rho = 0.5\rho_*$; рисунки 2 и 5 отвечает варианту задания параметров $\lambda_{44} = h_*$, $\lambda_{66} = 2h_*$, $\lambda_\rho = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\}$; рисунки 3 и 6 – варианту задания параметров $\lambda_{44} = 2h_*$, $\lambda_{66} = h_*$, $\lambda_\rho = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\}$.

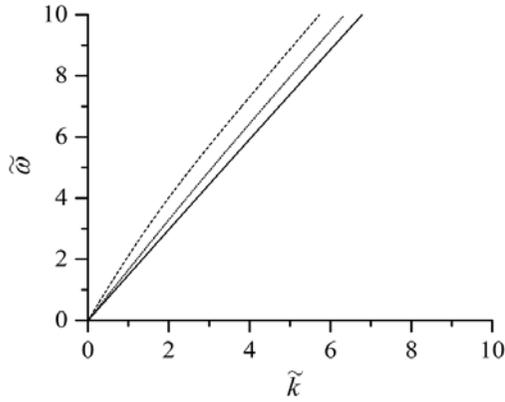


Рис. 1.

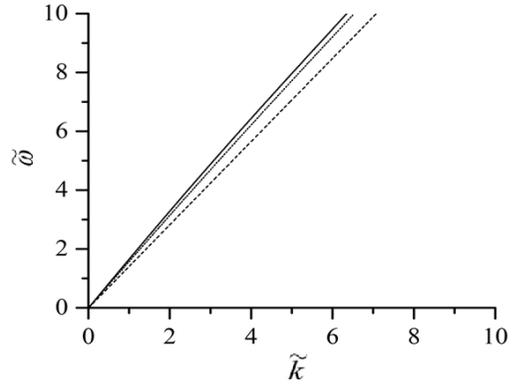


Рис. 2.

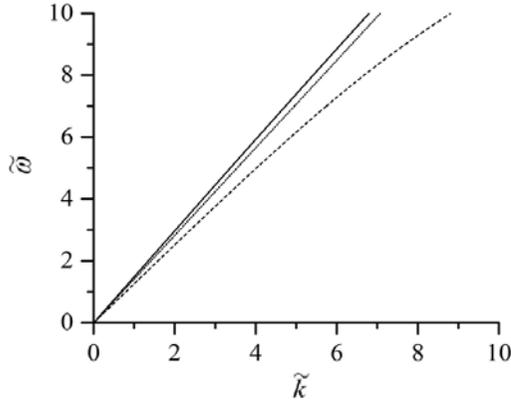


Рис. 3.

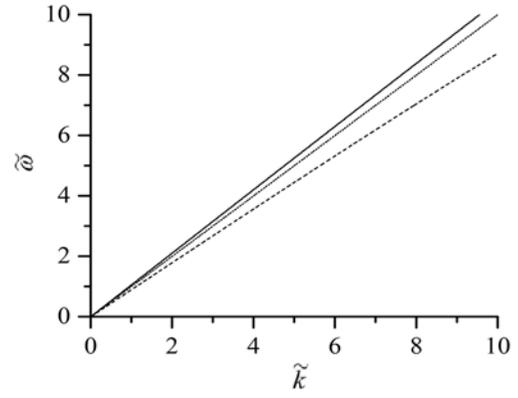


Рис. 4.

В качестве эффектов варьирования параметров неоднородности можно указать на увеличение фазовых скоростей бегущих нормальных волн низшей моды при росте значений параметра неоднородности λ_{66} и уменьшение фазовых скоростей этих волн при росте значений параметра неоднородности λ_ρ для обоих вариантов задания характеристик c_{440} , c_{660} , ρ_0 .

Наконец, на рисунках 7 и 8 соответственно представлены фрагменты диа-

грамм дисперсионных спектров исследуемых волн для вариантов задания параметров $c_{440} = 2c_*$, $c_{660} = 0.96c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, $\lambda_{44} = 0.001h_*$, $\lambda_{66} = 5h_*$, $\lambda_\rho = 5\rho_*$ и $c_{440} = 2c_*$, $c_{660} = 0.96c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, $\lambda_{44} = 0.001h_*$, $\lambda_{66} = 0.001h_*$, $\lambda_\rho = 5\rho_*$.

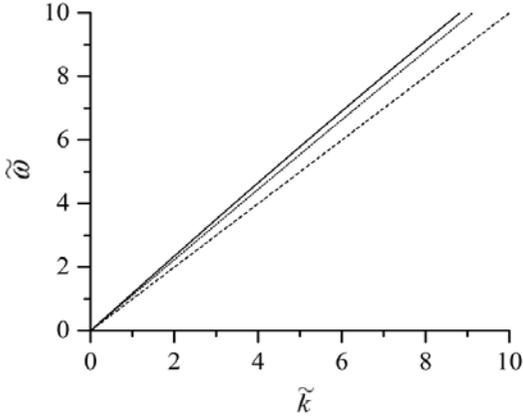


Рис. 5.

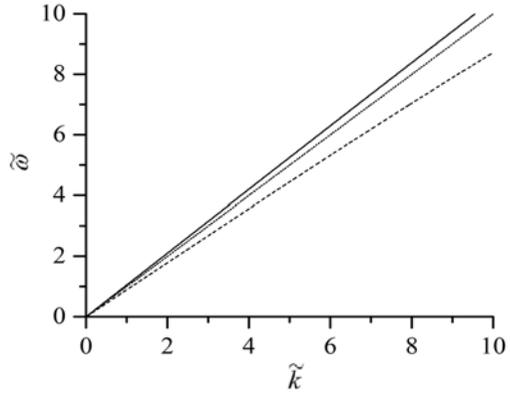


Рис. 6.

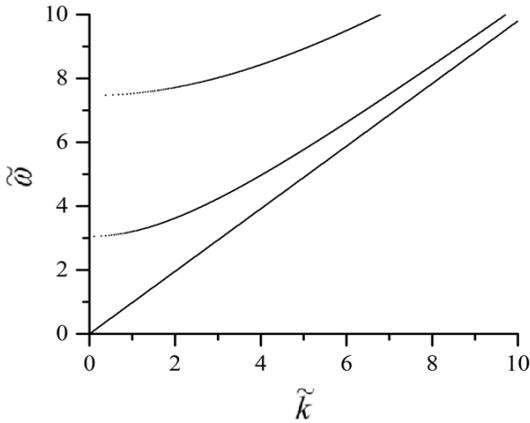


Рис. 7.

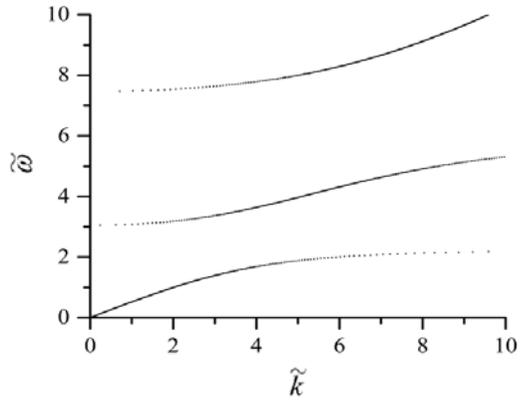


Рис. 8.

Выводы. Итогом представленных в работе исследований является разработка численно-аналитического алгоритма интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами относительно амплитудной составляющей нормальной сдвиговой волны в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое с различными экспоненциальными законами изменения каждой из физико-механических характеристик материала по толщине. Базисные решения уравнения рассматриваемого уравнения получены в виде степенных рядов с коэффициентами, определяемыми из последовательности рекуррентных соотношений. С использованием полученных базисных ре-

шений сформулированы дисперсионные уравнения для сдвиговых нормальных волн в рассматриваемом слое применительно к ряду случаев задания граничных условий на его плоских гранях.

Реализован расчетный анализ траекторий низшей моды спектра на диаграммах дисперсионных кривых исследуемых нормальных волн в слое со свободными от напряжений плоскими гранями для ряда вариантов варьируемого задания параметров трехфакторной неоднородности физико-механических свойств.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Мелешко В.В.* Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
2. *Бирюков С.В.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский – М.: Наука, 1991. – 414 с.
3. *Datta S.K.* Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
4. *Жаворонок С.И.* Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 227–260. – DOI:10.33113/mkkm.ras.2021.27.02.227260.06.
5. *Жаворонок С.И.* Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть II / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 36–86. – DOI:10.33113/mkkm.ras.2022.28.01.036086.03.
6. *Miyamoto Y.* FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
7. *Birman V.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195–216.
8. *Meguid S.A.* On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials / S. A. Meguid, X. D. Wang, L. Y. Jiang // Engineering Fracture Mechanics. – 2002. – V. 69, No 14-16. – P. 1753–1768. – doi:10.1016/S0013-7944(02)00046-2.
9. *Chen J.* Transient internal crack problem for a nonhomogeneous orthotropic strip (Mode I) / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // International Journal of Engineering Science. – 2002. – V. 40, No 15. – doi:10.1016/S0020-7225(02)00038-1.
10. *Chen J.* Electromechanical impact of a crack in a functionally graded piezoelectric medium / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – V. 39, No 1. – P. 47–60. – doi:10.1016/S0167-8442(02)00137-4.
11. *Chen J.* Dynamic response of a crack in a functionally graded interface of two dissimilar piezoelectric half-planes / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // Archive of Applied Mechanics. – 2003. – V. 72, No 9. – P. 686–696. – doi:10.1007/s00419-002-0238-5.
12. *Zhou Z. G.* Investigation of the dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials by use of the Schmidt method / Z. G. Zhou, B. Wang, Y. G. Sun // Wave Motion. – 2004. – V. 39, No 3. – P. 213–225. – doi:10.1016/j.wavemoti.2003.09.001.
13. *Ma L.* Dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials / L. Ma, L. Z. Wu, L. C. Guo, Z. G. Zhou // Mechanics of Materials. – 2005. – V. 37, No 11. – P. 1153–1165. – doi:10.1016/j.mechmat.2005.05.004.
14. *Ding S.* Mode-I crack problem for functionally graded layered structures / S. Ding, X. Li // International Journal of Fracture. – 2011. – V. 168, No 2. – P. 209–226. – doi:10.1007/s10704-010-9575-5.
15. *Yang Y. H.* Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y. H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang. // J. Nondestructive

- Eval. – 2010. – V. 29. – P. 233-240. – doi:10.1007/s10921-010-0081-5.
16. *Сторожев В.И.* Дисперсия нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое / В.И. Сторожев, А.А. Глухов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2024. – No 1. – С. 58–64. – doi:10.5281/zenodo.12531960. – EDN:GCZGRS
 17. *Majhi S.* Propagation of SH waves in a visco-elastic layer overlying an inhomogeneous isotropic half-space / S. Majhi, P.S. Pal, S. Kumar // Ain Shams Engineering Journal. – 2018. – Vol. 9, No. 4. – P. 675–680. – doi:10.1016/j.asej.2016.03.011.
 18. *Карасев Д.С.* Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с разнотипной экспоненциальной неоднородностью механических и электрических свойств / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 4(85). – С. 23-30. – doi:10.24412/0136-4545-2023-4-23-30. – EDN: YFWFOO.

A.A. Glukhov, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev

Analysis method of the problem of shear wave propagation in an anisotropic functional gradient layer with different laws of exponential heterogeneity for each physical and mechanical characteristic.

A numerical-analytical algorithm for integrating the equation with respect to the amplitude component of a normal shear wave in a inhomogeneous in thickness transversely isotropic layer, each of whose physical and mechanical parameters is characterized by its own exponential function of change along the transverse coordinate, which differs from the others, is proposed. Using the obtained basic solutions dispersion equations for shear normal waves in the layer under consideration as applied to a number of cases of specifying boundary conditions on its flat faces are formulated. The results of numerical studies of a number of variants of the problem under consideration are presented.

Keywords: *transversely isotropic functionally gradient layer, three-factor transverse exponential inhomogeneity, normal horizontally polarized shear waves, wave equation integration technique, basic partial solutions, dispersion relations, computational analysis of dispersion spectra.*

*Статья поступила в редакцию 23.08.2024;
доработана 10.09.2024;
рекомендована к печати 20.09.2024.*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2024-1-61-72

EDN:UGOKGO

©2024. С.А. Калоеров¹, Е.В. Авдюшина², А.Б. Мироненко³

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕЧЕНИЯ И РАЗГРУЗОЧНЫМИ ЩЕЛЯМИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

С использованием комплексных потенциалов и обобщенного метода наименьших квадратов решена задача по определению напряженного состояния массива горных пород с выработкой вдали от дневной поверхности и разгрузке вокруг поверхности выработки щелями. При этом сечение выработки представляется сводом, определяется распределение напряжений вокруг свода, находятся зоны высокой концентрации, в качестве которых выступают окрестности углов при основании свода. Также устанавливается факт выпучивания в середине основания. Для снятия высокой концентрации напряжений около углов свода проводятся плоские трещины из углов основания, что резко снижает эту концентрацию напряжений, но приводит к увеличению уровня и зоны выпучивания. Последнее снимается проведением вертикальных разрезов из середины основания. Исследовано, при каких размерах указанных плоских трещин происходит полная разгрузка зоны высоких напряжений около основания и ликвидация зон выпучивания поверхности основания.

Ключевые слова: горная выработка, концентрация напряжений, выпучивание, разгрузочные щели, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

¹Калоеров Стефан Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Авдюшина Елена Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: elena.v.a.2023@mail.ru

Avdushina Elena Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: andreyandrey80@mail.ru.

Mironenko Andrey Borisovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Введение. В горной промышленности при добыче полезных ископаемых широко практикуется проведение долговременных горизонтальных подземных выработок, вблизи поверхностей которых с течением времени возникают зоны с высокими концентрациями напряжений, приводящих к изменению форм этих поверхностей или даже к разрушению горных пород. Во избежание этого практикуется проведение в зонах высоких концентраций напряжений разгрузочных щелей [1]. Для определения соответствующих зон и уровней концентрации напряжений, мест и глубин разгрузочных щелей необходимо решать соответствующие задачи теории упругости по определению напряженного состояния упругого тела с отверстиями и трещинами.

Установлено, что наиболее достоверные результаты по определению напряженного состояния упругого тела с отверстиями и трещинами получаются при решении соответствующих задач теории упругости с использованием комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела [2] с удовлетворением граничным условиям при их определении дискретным методом наименьших квадратов [3, 4, 5] или обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [6], причем решение задач с применением ОМНК оказывается наиболее простым для реализации алгоритма и эффективным при проведении численных исследований.

В данной статье методом комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости анизотропного тела и ОМНК для их определения решена задача об определении напряженного состояния массива горных пород с горизонтальной выработкой и разгрузочными щелями. Проведены численные исследования, с помощью которых установлены закономерности распределения напряжений около поверхности горной выработки, их концентрации и снижения с помощью разгрузочных щелей. Как частный случай рассмотрен и случай выработки в изотропном горном массиве.

1. Комплексные потенциалы задачи о напряженно-деформированном состоянии многосвязной анизотропной пластинки и их определение ОМНК.

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy занимающую бесконечную многосвязную область S анизотропную пластинку с конечным числом произвольно расположенных эллиптических отверстий с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и полуосями a_l, b_l (рис. 1). Эллиптические контуры могут переходить в прямолинейные разрезы, располагаться произвольно относительно друг друга, пересекаться, образуя контуры отверстий произвольной конфигурации. В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей $O_l x_l$ координат вдоль полуосей a_l параметрические уравнения

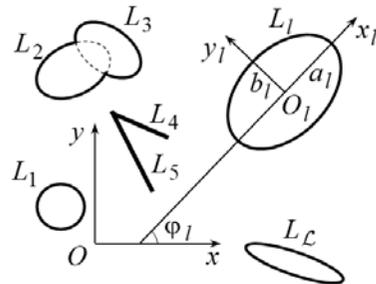


Рис. 1

эллипсов имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а системе координат Oxy будут такими:

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты центра эллипса L_l в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и Ox_l , отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

Будем считать, что контуры отверстий не нагружены и не подкреплены; на бесконечности заданы напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, а угол поворота всей пластинки как целой равен нулю ($w_3^\infty = 0$).

Если решение задачи теории упругости для рассматриваемой пластинки проводить с помощью комплексных потенциалов [2], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0; \quad (4)$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций материала пластинки.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (3) и в рассматриваемом случае имеют вид [4]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k), \quad (5)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{a_{16}\sigma_x^\infty + 3a_{26}\sigma_y^\infty}{2a_{22}} \right); \quad (6)$$

$\Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} , соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях (3). Отобразив конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} , используя функции [4]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (7)$$

в которых

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}, \end{aligned} \quad (8)$$

голоморфные вне контуров L_{kl} функции $\Phi_{kl}(z_k)$ можно разложить в ряды Лорана и для комплексных потенциалов (5) окончательно получим выражения

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (9)$$

где a_{kln} – неизвестные коэффициенты рядов Лорана, которые определим из граничных условий на контурах, которые в данном случае имеют вид [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) \Phi_k(t_k) = (c_{1l}, c_{2l}) \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (10)$$

в котором c_{1l}, c_{2l} – постоянные, произвольные на одном из контуров.

Для многосвязных областей граничным условиям (10) удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав их по дуге s контура, получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) \delta_k \Phi'_k(t_k) = (0, 0), \quad (11)$$

где $\delta_k = dt_k/ds$;

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_{kln}}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}. \quad (12)$$

Граничным условиям (11) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [6, 7, 8]. Для этого на каждом из контуров L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим условиям (11). В результате получим следующую переопределенную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (1, \mu_k) \delta_k(t_{kpm}) \frac{na_{kln}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2(t_{kpm}) - m_{kl}) \zeta_{kl}^{n-1}(t_{kpm})} &= \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) \delta_k(t_{kpm}) \Gamma_k, \end{aligned} \quad (13)$$

где $t_{kpm} = x_{pm} + \mu_k y_{pm}$.

Систему (13) будем решать методом сингулярных разложений [9, 10].

После решения системы уравнений (13) станут известными постоянные a_{kln} , а следовательно, и функции (12). Это позволит в любой точке найти основные напряжения

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k), \quad (14)$$

а по ним и нормальные и касательные напряжения [2, 11]

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)) \end{aligned} \quad (15)$$

на любых площадках с нормалью n и касательной s . По основным напряжениям в любой точке можно найти и упругий потенциал

$$V = \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 + a_{12} \sigma_x \sigma_y + a_{16} \sigma_x \tau_{xy} + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 + a_{26} \sigma_y \tau_{xy} + \frac{1}{2} a_{66} \tau_{xy}^2. \quad (16)$$

Как частный случай из приведенного следует решение задачи для выработки в изотропном горном массиве. В последнем случае один из коэффициентов деформации a_{ij} нужно брать несколько отличным от реального, например, a_{11} и a_{22} брать отличающимися друг от друга 5-6 значащей цифрой в конце. В этом случае корни характеристического уравнения (4) будут близки к мнимой единице i , но несколько отличаться друг от друга (слабая анизотропия) и общая программа позволит получать значения напряжений и деформаций, практически совпадающие с данными, получаемыми при решении задачи теории упругости изотропного тела с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [11].

2. Решение задачи о разгрузке поверхностей горных выработок.

Пусть в массиве горных пород, обладающих в общем случае свойствами прямолинейно-анизотропного тела, вдали от дневной поверхности проведена горизонтальная выработка, и напряженное состояние в массиве без выработки обусловлено весом горных пород. Так как геометрические размеры выработок и щелей относительно реальных глубин ведения работ малы, то в качестве исходного напряженного состояния горного массива без выработок будем принимать напряженное состояние в форме [12, 13]

$$\sigma_x^\infty = -\lambda\gamma H, \quad \sigma_y^\infty = -\gamma H, \quad \tau_{xy}^\infty = 0, \quad (17)$$

где $\gamma = \rho g$ – средний удельный вес горной породы; ρ – ее плотность; g – ускорение свободного падения; H – глубина проведения выработки; λ – коэффициент бокового распора.

В работе [1] проведены многочисленные исследования для различных конфигураций выработок. Но в практике применения чаще всего используется выработка сводчатого сечения (рис. 2). Опять же, исходя из практического использования, длину основания выработки будем считать равной $5r$, длины боковых сторон – $2r$, высоту крышки – $2r$, т. е. высота всей выработки – $4r$, где r – масштабная единица длины. Прямолинейные участки контура свода будем аппроксимировать внешними берегами разрезов (эллипсов L_2, L_3, L_4 , для полуосей которых имеют место равенства $b_l = 10^{-4}a_l$, что соответствует известному неравенству $b_l \leq 10^{-3}a_l$ [4, 5], когда эллипс можно считать прямолинейным разрезом-трещиной). Купол эллипса будем считать половиной контура эллипса L_1 . При этом для всех аппроксимирующих элементов параметр θ параметрического задания эллипсов (1) изменяется от 0 до π ($0 \leq \theta \leq \pi$).

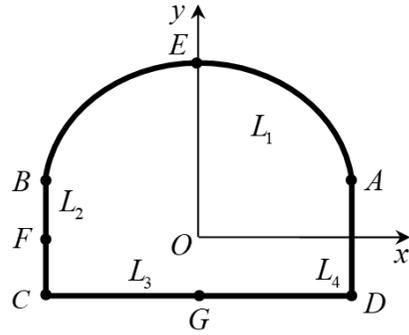


Рис. 2

Таким образом, при использовании приведенного выше решения задачи теории упругости для свода будем считать, что

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L} = 4; \\
 & L_1 : \quad a_1 = 2,5r, \quad b_1 = 2r, \quad x_{01} = 0, \\
 & \quad \quad y_{01} = a_2 = r, \quad \varphi_1 = 0; \\
 & L_2 : \quad a_2 = r, \quad b_2 = 10^{-4}a_2, \quad x_{02} = -a_3 = -2,5r, \\
 & \quad \quad y_{02} = 0, \quad \varphi_2 = \pi/2; \\
 & L_3 : \quad a_3 = 2,5r, \quad b_3 = 10^{-4}a_3, \quad x_{03} = 0, \\
 & \quad \quad y_{03} = -a_2 = -r, \quad \varphi_3 = \pi; \\
 & L_4 : \quad a_4 = r, \quad b_4 = 10^{-4}a_4, \quad x_{04} = a_3 = 2,5r, \\
 & \quad \quad y_{04} = 0, \quad \varphi_4 = 3\pi/2,
 \end{aligned} \tag{18}$$

причем при формировании точек, для которых составляются уравнения системы (13), угол θ параметрического задания всех эллипсов будем менять от 0 до π .

3. Описание результатов численных исследований для частных задач. Были проведены многочисленные исследования распределения напряжений вокруг горной выработки без разгрузочных щелей и с разгрузочными щелями в зонах высокой концентрации напряжений. При этом считалось, что коэффициент бокового распора $\gamma = 0,7$.

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах Лорана (13) и количество «коллокационных точек» M_p на L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$), для которых составлялись уравнения системы (13), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой

степенью точности (пока значения нормальных напряжений на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3} вместо нуля). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 20 до 50 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 300 «коллокационных точек».

Исследования были проведены для горных массивов из трансверсально-изотропного алевролита (материал М1) и гранита изотропного (материал М2). Технические постоянные этих материалов приведены в табл. 1 [14]. Заметим, что коэффициенты деформации a_{ij} по известным техническим постоянным вычисляются по формулам: $a_{11} = 1/E_1$, $a_{22} = 1/E_2$, $a_{12} = -\nu_{21}/E_1 = -\nu_{12}/E_2$, $a_{66} = 1/G_{12}$.

Заметим, что в случае изотропного материала М2 модули Юнга $E_2 = E_1$, корни μ_k характеристического уравнения (4) равны i и система (13) будет вырожденной. Чтобы избежать этого, постоянная E_2 принята незначительно отличной от истинного значения, чтобы изотропный массив рассматривать как анизотропный и использовать приведенное выше решение. Как установлено многочисленными исследованиями при решении частных задач (в том числе в случае точных решений задач), получаемые при этом значения напряжений отличаются от истинных менее сотых долей процента.

Таблица 1. Технические постоянные материалов

Материал	E_1 , МПа	E_2 , МПа	G_{12} , МПа	ν_{21}
М1	10740	5230	12000	0,413
М2	4200	4199	17000	0,22

На рисунке 3 изображены графики распределения напряжений $\sigma_s/\gamma H$ вдоль контура свода (рис. 3,а для боковых сторон и основания, рис. 3,б для крышки в зависимости от параметра θ параметрического задания эллипса $L_1: x = a_1 \cos \theta$, $y = b_1 \cos \theta$). Графики приведены для правой половины свода, для левой половины они легко восстанавливаются в силу симметрии напряженного состояния относительно оси Oy , выбранной в центре прямоугольника $ABCD$. Сплошные линии рисунка 3 соответствуют напряжениям в массиве из алевролита, пунктирные линии – из гранита.

Как следует из данных рисунка 3, вблизи вершин углов основания свода (точки B и C) возникает весьма высокая концентрация сжимающих напряжений, которая может приводить к разрушению породы в этих зонах; вблизи середины основания свода (точка E) возникают растягивающие напряжения, которые могут приводить здесь к пучению пород; по поверхности крышки возникают сравнительно небольшие сжимающие напряжения и лишь здесь опасности разрушения нет; концентрация сжимающих напряжений наблюдается и в углах крышки, но она значительно ниже концентрации напряжений вблизи углов основания, поэтому нужно принимать меры снижения концентрации напряжений в углах основания, а чтобы не было выпучивания поверхности выработки, также

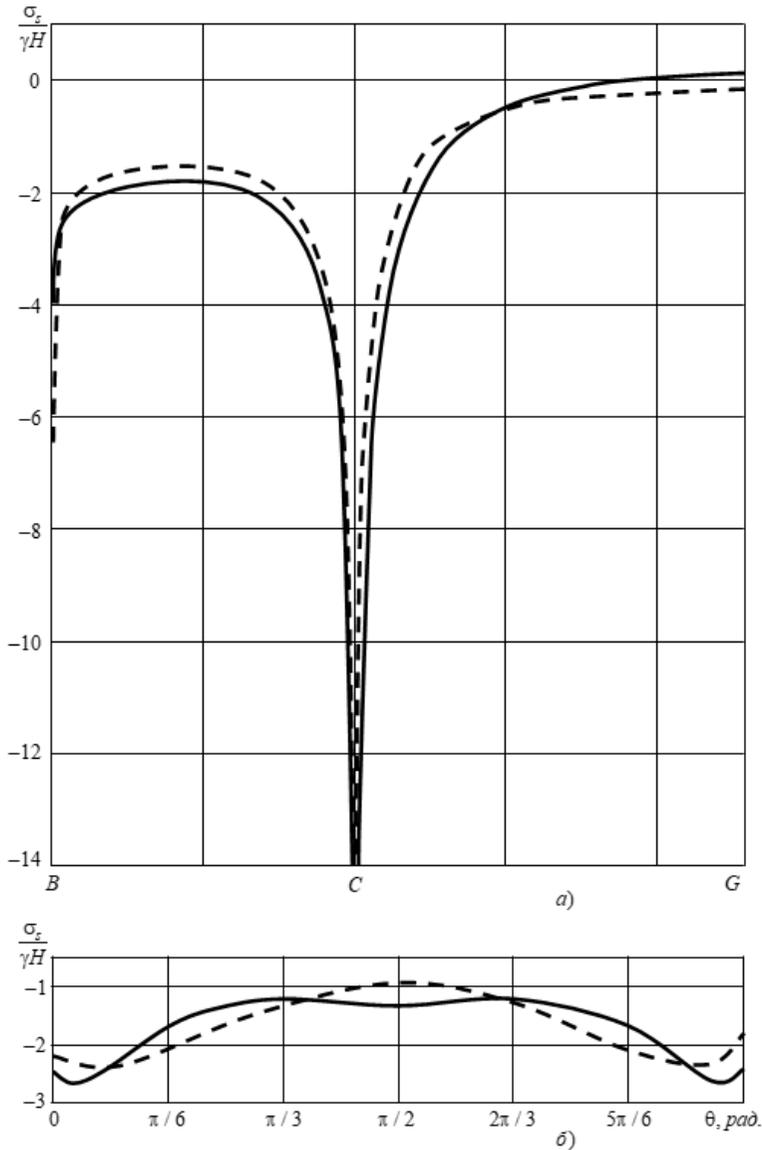


Рис. 3

в центре основания. Из данных рисунка 3 также видно, что на значения напряжений значительно влияет степень анизотропии материала породы – значения сжимающих напряжений в углах основания для выработки из М1 почти в 2 раза больше аналогичных напряжений для выработки из М2.

Высокую концентрацию напряжений будем снижать за счет проведения разгрузочных щелей-трещин в зонах ее возникновения. С этой целью из углов основания проведем плоские щели в виде эллиптических разрезов с весьма малыми полуосями b_l , т. е. когда b_l/a_l мало.

В таблице 2 для свода (18) в массиве из алевролита с разгрузочными наклонными эллиптическими щелями L_{23} и L_{34} с полуосями $a_{23} = a_{34}$ из точек пересечения сторон L_2 и L_3 , L_3 и L_4 основания свода вдоль биссектрис углов (рис.4 а) даны значения напряжений $\sigma_s/\gamma H$ в зависимости от параметров θ параметрических заданий эллипсов L_1 , L_2 , L_3 . Для разгрузочных щелей имеют место соотношения

$$\begin{aligned} L_{23} : a_{23}, b_{23} &= 10^{-4} a_{23}, x_{023} = -a_3, \\ y_{023} &= -a_2, \varphi_{23} = 3\pi/4; \\ L_{34} : a_{34} &= a_{23}, b_{34} = 10^{-4} a_{34}, x_{034} = a_3 = 2, 5r, \\ y_{034} &= -a_2, \varphi_{34} = -\pi/4. \end{aligned} \quad (19)$$

Для наглядности углы даны с точностью до $\pi/180$.

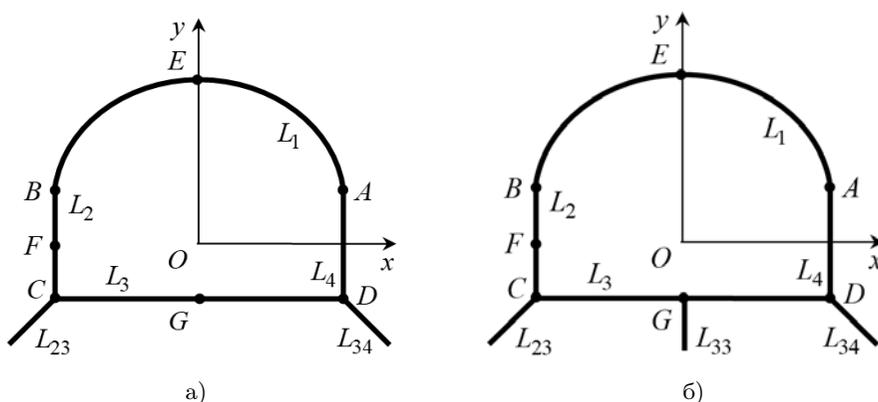


Рис. 4

Как следует из таблицы 2 создание наклонных разгрузочных щелей в углах основания свода даже небольшой длины резко уменьшает значения напряжений (всюду имеется в виду по абсолютной величине), особенно вблизи вершины углов С и D основания. Но при этом не только не уменьшаются, а наоборот резко увеличиваются значения положительных напряжений вблизи центра основания (около точки основания E), что приведет к усилению процесса выпучивания. Для уменьшения последних напряжений в центре основания L_3 проведем вертикальную разгрузочную эллиптическую щель (рис. 4,б)

$$\begin{aligned} L_{33} : a_{33}, b_{33} &= 10^{-4} a_{33}, x_{033} = 0, \\ y_{033} &= -a_2, \varphi_{33} = -\pi/2. \end{aligned}$$

В таблице 3 для свода (18) в массиве из алевролита с разгрузочными наклонными щелями L_{23} и L_{34} с полуосями $a_{23} = a_{34} = 0, 1r$ из углов основания свода вдоль биссектрис углов (рис.4 а) даны значения напряжений $\sigma_s/\gamma H$ в зависимости от параметров θ параметрических заданий эллипсов L_1 , L_2 , L_3 .

Таблица 2. Значения $\sigma_s/\gamma H$ в некоторых точках сторон левой половины свода с наклонными щелями из углов основания в зависимости от их длины $a_{23} = a_{34}$

Сторона	$\theta(\text{рад.})$	a_{23}/r					
		0	0,1	0,25	0,5	0,75	1
L_1	$90\pi/180$	-1,32	-1,359	-1,409	-1,492	-1,571	-1,646
	$135\pi/180$	-1,33	-1,340	-1,348	-1,358	-1,364	-1,368
	$178\pi/180$	-2,52	-2,479	-2,393	-2,238	-2,088	-1,950
	$179\pi/180$	-2,44	-2,397	-2,309	-2,152	-2,001	-1,864
L_2	$\pi/180$	-10,38	-2,704	-2,222	-2,038	-1,890	-1,764
	$2\pi/180$	-5,13	-2,427	-2,209	-2,043	-1,893	-1,762
	$45\pi/180$	-1,92	-1,856	-1,757	-1,589	-1,436	-1,304
	$90\pi/180$	-1,81	-1,692	-1,487	-1,193	-0,979	-0,826
	$135\pi/180$	-2,40	-1,680	-0,986	-0,532	-0,354	-0,263
	$178\pi/180$	-32,06	-0,131	-0,045	-0,044	-0,041	-0,040
	$179\pi/180$	-96,44	-0,793	-0,256	-0,211	-0,183	-0,173
L_3	$\pi/180$	-63,87	-0,314	-0,146	-0,065	-0,050	-0,046
	$2\pi/180$	-23,58	-0,001	-0,030	-0,012	-0,011	-0,011
	$45\pi/180$	-0,25	0,133	0,559	0,826	0,862	0,830
	$88\pi/180$	0,10	0,216	0,400	0,653	0,819	0,912
	$89\pi/180$	0,11	0,216	0,400	0,653	0,819	0,912
	$90\pi/180$	0,11	0,216	0,400	0,653	0,819	0,912

Таблица 3. Значения $\sigma_s/\gamma H$ в некоторых точках сторон левой половины свода с наклонными щелями из углов основания $a_{23} = a_{34} = 0, 1 r$ при различных значениях длины щели a_{33} из центра основания

Сторона	$\theta(\text{рад.})$	a_{33}/r			
		0	0,1	0,25	0,5
L_1	$90\pi/180$	-1,359	-1,359	-1,359	-1,361
	$135\pi/180$	-1,340	-1,340	-1,340	-1,341
	$178\pi/180$	-2,479	-2,491	-2,477	-2,478
	$179\pi/180$	-2,397	-2,421	-2,393	-2,395
L_2	$\pi/180$	-2,704	-0,391	-2,551	-2,561
	$2\pi/180$	-2,427	-1,487	-2,363	-2,362
	$45\pi/180$	-1,856	-1,852	-1,855	-1,856
	$90\pi/180$	-1,692	-1,690	-1,692	-1,693
	$135\pi/180$	-1,680	-1,679	-1,679	-1,683
	$178\pi/180$	-0,131	-0,052	-0,052	-0,046
	$179\pi/180$	-0,793	-0,297	-0,296	-0,255
L_3	$\pi/180$	-0,314	-0,122	-0,117	-0,098
	$2\pi/180$	-0,001	0,028	0,030	0,033
	$45\pi/180$	0,133	0,131	0,127	0,163
	$88\pi/180$	0,216	0,039	0,015	0,002
	$89\pi/180$	0,216	0,018	-0,004	-0,011

Кстати, проведение разгрузочных щелей из углов и центра основания незначительно уменьшает концентрацию напряжения и вблизи верхних углов выработки и около крышки. Но если она значительна и необходимо дальнейшее уменьшение напряжений в этих зонах, то можно проводить и щели из углов крышки. Но последнее связано с определенными трудностями и следует его избегать.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Полухин В.А.* Управление напряженным состоянием породного массива и устойчивостью горных выработок / В.А. Полухин, С.А. Калоеров, Ю.Б. Грядущий, Е.С. Горянская. – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 304 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. *Калоеров С.А.* Антиплоская деформация тел с трещиной и эллиптической полостью / С.А. Калоеров, Е.Ф. Косилова, В.А. Лапко // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 7. – С. 92–99.
4. *Калоеров С.А.* Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
5. *Калоеров С.А.* Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2013. – 440 с.
6. *Калоеров С.А.* Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
7. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
10. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
11. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
12. *Динник А.Н.* О давлении горных пород и расчет крепи круглой шахты / А.Н. Динник // Инж. работник. – 1925. – № 7. – С. 1–2.
13. *Динник А.Н.* Распределение напряжений вокруг подземных выработок / А.Н. Динник, А.Б. Моргаевский, Г.Н. Савин // Тр. совещ. по управл. горным давлением. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1938. – С. 7–55.
14. *Ержанов Ж.С.* Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве / Ж.С. Ержанов, Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов. – Алма-Ата: Наука, КазССР, 1980. – 212 с.

S.A. Kaloerov, E.V. Avdyushina, A.B. Mironenko

Investigation of the stress state of the mountain range with horizontal production of a curved section and discharge slots the generalized least squares method.

Using complex potentials and the generalised least squares method, the problem of determining the stress state of a rock massif with an excavation far from the daytime surface and unloading around

the excavation surface by slots. In this case, the excavation cross-section is represented as a vault, the stress distribution around the vault is determined, and zones of high concentration are found, which are the vicinities of the corners at the base of the vault. The fact of bulging in the middle of the base is also determined. To remove the high stress concentration around the corners of the vault, flat cracks are made from the corners of the base, which drastically reduces this stress concentration, but leads to an increase in the level and bulging zone. The latter is removed by carrying out vertical cuts from the middle of the base. It is investigated, at what sizes of the specified flat cracks there is a complete unloading of the high stress zone near the base and elimination of bulging zones of the base surface.

Keywords: *mine excavation, stress concentration, buckling, unloading slots, complex potentials, generalised least squares method.*

*Статья поступила в редакцию 26.08.2024;
доработана 11.09.2024;
рекомендована к печати 20.09.2024.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3
doi:10.24412/0136-4545-2024-1-73-82
EDN:URZFFM



©2024. С.Б. Номбре¹, Д.Д. Полянский², С.В. Сторожев³, Чан Ба Ле Хоанг⁴

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛИ РАСЧЕТА
КРИТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ
ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Представлена разработка нечетко-множественной методики учета разбросов значений исходных геометрических и физико-механических параметров в расчетных соотношениях модели определения критической температуры потери устойчивости для тонкой изотропной полой цилиндрической оболочки. Реализуемый подход основывается на введении нечетко-множественных описаний неконтрастных экзогенных характеристик и использовании их в

¹*Номбре Светлана Борисовна* – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

Nombre Svetlana Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

²*Полянский Дмитрий Дмитриевич* – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³*Сторожев Сергей Валериевич* – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

⁴*Чан Ба Ле Хоанг* – канд. техн. наук, зав. каф. физики ф-та общих наук Хошминского университета природных ресурсов и окружающей среды, Вьетнам, e-mail: Hoangtbl@hcmunre.edu.vn.

Tran Ba Le Hoang – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Ho Chi Minh City University of Natural Resources and Environment, Vietnam, Faculty of General Sciences, Chair of Physics.

качестве аргументов в расширяемых на данный тип переменных расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели с применением аппарата нечетко-множественных вычислений и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения. Приведен ряд результатов численной реализации разрабатываемой методики.

Ключевые слова: *пологая цилиндрическая оболочка, модель термомеханического деформирования, тепловые воздействия, критическая температура потери устойчивости, разбросы значений исходных параметров, нечетко-множественный учет неопределенности, эвристический принцип обобщения.*

Введение и постановка задачи. Проблема теоретического анализа эффектов устойчивости тонкостенных конструкций при термосиловых воздействиях сохраняет высокую степень актуальности как в фундаментальном, так и, в особой мере, в прикладном аспектах. Так, конструкционные элементы в виде пологих цилиндрических оболочек-панелей находят широкое применение в строительных сооружениях, объектах транспортной отрасли, оборудовании химических производств, в промышленной энергетике, в корпусах аэрокосмической техники и летательных аппаратов. Корректное решение задач проектирования и выработки оптимизированных конструктивных решений в указанных научно-промышленных отраслях связано с разработкой специализированных методик математического моделирования деформационных эффектов в указанных конструкциях при их нагревании. При наличии некоторых теоретических разработок по проблеме определения критических температур потери устойчивости оболочечных элементов, представляемых, в частности, в работах [1–3], реальным свойством применяемых для этого математических моделей и получаемых на их основе расчетных соотношений является весьма высокая мера параметрической неопределенности, обусловленной разбросами значений исходных геометрических и физико-механических параметров – погрешностями экспериментальных данных о физико-механических свойствах используемых материалов, предусматриваемыми при изготовлении конструктивными технологическими допусками, вариативными субъективными экспертными оценками для отдельных базовых характеристик конструкций. Однако решение задачи учета неконтрастности исходных данных при расчете критической температуры потери устойчивости подверженных тепловым воздействиям пологих цилиндрических оболочки на базе применения методов вероятностно-стохастического анализа во многих случаях на практике осложнено отсутствием статистически корректной информации о подлежащих учету разбросах, а также большим числом подлежащих одновременному учету неконтрастных параметров и необходимостью априорного задания типа вероятностных распределений для экзогенных и эндогенных характеристик расчетных моделей. В этой связи, для решения задачи учета параметрической неопределенности в модели нахождения критической температуры потери устойчивости пологой цилиндрической оболочки-панели предлагается использование методов теории нечетких множеств [4, 5] с более мягким уровнем требований к характеру неопределенной исходной информации. Данный подход базируется на переходе к неконтрастным исходным

параметрам в расчетных соотношениях для результирующих характеристик детерминистического варианта рассматриваемой модели, расширяемых на аргументы нечетко-множественного типа посредством применения альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения. В контексте изложенных соображений, целью представляемых в данной работе исследований является разработка и апробация нечетко-множественной версии методики учета параметрической неопределенности в модели определения критической температуры потери устойчивости пологой цилиндрической оболочки.

1. Расчетное соотношение детерминистического варианта модели.

Детерминистическая модель термомеханического деформирования тонкой изотропной пологой цилиндрической оболочки-панели, для которой разрабатывается методика нечетко-множественного учета параметрической неопределенности в виде разбросов значений исходных геометрических и физико-механических параметров при расчете критической температуры потери устойчивости, описана в работе [3] и базируется на варианте разрешающих уравнений теории пологих цилиндрических оболочек В.З. Власова в форме, представленной Л.Г. Доннеллом [3, 6, 7].

В контексте исследуемой задачи рассматривается шарнирно закрепленная по контуру цилиндрическая оболочечная панель, срединная поверхность которой занимает в координатах Ox_1x_2 область $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq S\}$; координатное направление Ox_1 отвечает ориентации образующей цилиндрической поверхности панели, которая по ортогональному направлению имеет радиус кривизны R . Панель имеет толщину h , изготовлена из изотропного материала с коэффициентом Пуассона ν и коэффициентом линейного теплового расширения α_T . Полагается, что силовые воздействия на рассматриваемы конструкционный элемент отсутствуют и она подвергается тепловому нагреву извне [3].

Полученное в [3] и преобразованное для сформулированной выше задачи основное расчетное соотношение, определяющее значения параметра критической температуры нагрева оболочки, при которой возникает потеря ее устойчивости в процессе термоупругого деформирования, имеет вид

$$\begin{aligned} T_{кр}^{(mn)} = \Phi_{mn}(\nu, h, R, \alpha_T, L, S) &= (h^3(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4(12(1 - \nu^2)))^{-1} + \\ &+ hR^2\lambda_m^4(\alpha_T hR^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^3)^{-1} = \\ &= \alpha_T^{-1}(h^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)(12(1 - \nu^2)R^2))^{-1} + \lambda_m^4(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^{-3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda_m = m\pi R/L$, $\mu_n = n\pi R/S$ ($m, n = \overline{1, \infty}$). При конкретных значениях исходных физико-механических и геометрических характеристик конструкции и варьируемых значениях m, n в расчетах определяется наименьшая величина $T_{кр}^{(mn)}$. Соотношение (1) и является предметом нечетко-множественного обобщения для учета в рассматриваемой модели факторов неопределенности в виде разбросов значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров.

2. Нечетко-множественный расчетный алгоритм. Нечетко-множественная модификация алгоритма расчета критической температуры потери устойчивости конструкции рассматриваемого типа формируется на основе процедур фаззификации имеющихся массивов экспериментальных и экспертных данных о разбросах значений неконтрастных исходных параметров и расширения области определения функционального соотношения (1) на аргументы нечетко-множественного типа с применением альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения [4, 5, 8–10].

Применительно к исходным, промежуточным и выходным параметрам расчетного соотношения (1) вводятся в рассмотрение их нечетко-множественные расширения $\tilde{\nu}$, \tilde{h} , \tilde{R} , $\tilde{\alpha}_T$, \tilde{L} , \tilde{S} , $\tilde{\lambda}_m$, $\tilde{\mu}_n$, $\tilde{T}_{кр}^{(mn)}$, представляемые разложениями по множествам α – уровней

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], & \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], & \tilde{R} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], & (2) \\ \tilde{\alpha}_T &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{T\alpha}, \bar{\alpha}_{T\alpha}], & \tilde{L} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{L}_\alpha, \bar{L}_\alpha], & \tilde{S} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{S}_\alpha, \bar{S}_\alpha], \\ \tilde{\lambda}_m &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_{m\alpha}, \bar{\lambda}_{m\alpha}], & \tilde{\mu}_n &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}], & \tilde{T}_{кр} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_{кр\alpha}, \bar{T}_{кр\alpha}].\end{aligned}$$

Далее могут быть построены следующие варианты разрабатываемого алгоритма. В случае описания параметрических обобщений $\tilde{\nu}$, \tilde{h} , \tilde{R} , $\tilde{\alpha}_T$, \tilde{L} , \tilde{S} несимметричными квазигауссовыми нормальными нечеткими числами, для границ интервалов α – уровней в разложениях (2) записываются представления.

$$\begin{aligned}\underline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} - \sigma_{*l\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} + \sigma_{*r\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; & (3) \\ \underline{h}_\alpha &= m_{*h} - \sigma_{*lh}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{h}_\alpha &= m_{*h} + \sigma_{*rh}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{R}_\alpha &= m_{*R} - \sigma_{*lR}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{R}_\alpha &= m_{*R} + \sigma_{*rR}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{\alpha}_{T\alpha} &= m_{*\alpha_T} - \sigma_{*l\alpha_T}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{\alpha}_{T\alpha} &= m_{*\alpha_T} + \sigma_{*r\alpha_T}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{L}_\alpha &= m_{*L} - \sigma_{*lL}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{L}_\alpha &= m_{*L} + \sigma_{*rL}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{S}_\alpha &= m_{*S} - \sigma_{*lS}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{S}_\alpha &= m_{*S} + \sigma_{*rS}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.\end{aligned}$$

В случае использования для описания обобщений $\tilde{\nu}$, \tilde{h} , \tilde{R} , $\tilde{\alpha}_T$, \tilde{L} , \tilde{S} нормальных трапецидальных нечетких интервалов с кортежами реперных значений

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), & \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), & (4) \\ \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3, R_4), & \tilde{\alpha}_T &= (\alpha_{T1}, \alpha_{T2}, \alpha_{T3}, \alpha_{T4}), \\ \tilde{L} &= (L_1, L_2, L_3, L_4), & \tilde{S} &= (S_1, S_2, S_3, S_4),\end{aligned}$$

соответствующие границы интервалов α – уровней в разложениях (2) описываются выражениями

$$\begin{aligned}
 \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, & \bar{\nu}_\alpha &= \alpha\nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4; \\
 \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \bar{h}_\alpha &= \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4; \\
 \underline{R}_\alpha &= (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, & \bar{R}_\alpha &= \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4; \\
 \underline{\alpha}_{T\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{T1} + \alpha\alpha_{T2}, & \bar{\alpha}_{T\alpha} &= \alpha\alpha_{T3} + (1 - \alpha)\alpha_{T4}; \\
 \underline{L}_\alpha &= (1 - \alpha)L_1 + \alpha L_2, & \bar{L}_\alpha &= \alpha L_3 + (1 - \alpha)L_4; \\
 \underline{S}_\alpha &= (1 - \alpha)S_1 + \alpha S_2, & \bar{S}_\alpha &= \alpha S_3 + (1 - \alpha)S_4.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Наконец, при описании обобщений $\tilde{\nu}$, \tilde{h} , \tilde{R} , $\tilde{\alpha}_T$, \tilde{L} , \tilde{S} для неконтрастных экзогенных параметров треугольными нормальными нечеткими числами

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3), & \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3), \\
 \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3), & \tilde{\alpha}_T &= (\alpha_{T1}, \alpha_{T2}, \alpha_{T3}), \\
 \tilde{L} &= (L_1, L_2, L_3), & \tilde{S} &= (S_1, S_2, S_3),
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

границы интервалов α – уровня имеют вид

$$\begin{aligned}
 \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, & \bar{\nu}_\alpha &= \alpha\nu_2 + (1 - \alpha)\nu_3; \\
 \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \bar{h}_\alpha &= \alpha h_2 + (1 - \alpha)h_3; \\
 \underline{R}_\alpha &= (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, & \bar{R}_\alpha &= \alpha R_2 + (1 - \alpha)R_3; \\
 \underline{\alpha}_{T\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{T1} + \alpha\alpha_{T2}, & \bar{\alpha}_{T\alpha} &= \alpha\alpha_{T2} + (1 - \alpha)\alpha_{T3}; \\
 \underline{L}_\alpha &= (1 - \alpha)L_1 + \alpha L_2, & \bar{L}_\alpha &= \alpha L_2 + (1 - \alpha)L_3; \\
 \underline{S}_\alpha &= (1 - \alpha)S_1 + \alpha S_2, & \bar{S}_\alpha &= \alpha S_2 + (1 - \alpha)S_3.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Общий прием применения альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения ко всем вышеописанным вариантам задания типов нечетко-множественных исходных параметров включает предварительный этап исследования свойств знакоопределенности частных производных [4, 5, 8] от функции $\Phi_{mn}(\nu, h, R, \alpha_T, L, S)$ по ее аргументам в области их совокупного изменения, в рамках которого получены оценки

$$\begin{aligned}
 \partial\Phi_{mn}/\partial\nu &\geq 0, & \partial\Phi_{mn}/\partial h &\geq 0, & \partial\Phi_{mn}/\partial R &\leq 0, \\
 \partial\Phi_{mn}/\partial\alpha_T &\leq 0, & \partial\Phi_{mn}/\partial S &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

С их учетом на базе принципа обобщения могут быть записаны следующие представления для величин $\underline{T}_{кр\alpha}$, $\bar{T}_{кр\alpha}$ в разложении результирующей нечетко-множественной характеристики $\tilde{T}_{кр}$ по множествам α – уровня

$$\underline{T}_{кр\alpha}^{(mn)} = \inf_{L \in [\underline{L}_\alpha, \bar{L}_\alpha]} \Phi_{mn}(\underline{\nu}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \bar{\alpha}_{T\alpha}, L, \underline{S}_\alpha),
 \tag{9}$$

$$\overline{T}_{кр\alpha}^{(mn)} = \sup_{L \in [\underline{L}_\alpha, \overline{L}_\alpha]} \Phi_{mn}(\overline{\nu}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, L, \overline{S}_\alpha).$$

Также структура выражения (1) позволяет в случаях описания неконтрастных экзогенных параметров $\tilde{\nu}$, \tilde{h} , \tilde{R} , $\tilde{\alpha}_T$, \tilde{L} , \tilde{S} нормальными трапецидальными нечеткими интервалами и треугольными нормальными нечеткими числами применить для вычисления $\tilde{T}_{кр}$ поэтапное фрагментированное использование арифметики соответствующих нечетких величин. Для этих вариантов разрабатываемого алгоритма

$$\tilde{T}_{кр} = (T_{кр1}, T_{кр2}, T_{кр3}, T_{кр4}), \quad (10)$$

$$T_{кр1} = ((m\pi R_1 L_4^{-1})^2 + (n\pi R_1 S_4^{-1})^2) h_1 (12(1 - \nu_4^2) R_4^2 \alpha_{T4})^{-1} + \\ + \pi^{-2} (m R_1 L_4^{-1})^4 ((m R_4 L_1^{-1})^2 + (n R_4 S_1^{-1})^2)^{-3} \alpha_{T4}^{-1},$$

$$T_{кр2} = ((m\pi R_2 L_3^{-1})^2 + (n\pi R_2 S_3^{-1})^2) h_2 (12(1 - \nu_3^2) R_3^2 \alpha_{T3})^{-1} + \\ + \pi^{-2} (m R_2 L_3^{-1})^4 ((m R_3 L_2^{-1})^2 + (n R_3 S_2^{-1})^2)^{-3},$$

$$T_{кр3} = ((m\pi R_3 L_2^{-1})^2 + (n\pi R_3 S_2^{-1})^2) h_3 (12(1 - \nu_2^2) R_2^2 \alpha_{T2})^{-1} + \\ + \pi^{-2} (m R_3 L_2^{-1})^4 ((m R_2 L_3^{-1})^2 + (n R_2 S_3^{-1})^2)^{-3},$$

$$T_{кр4} = ((m\pi R_4 L_1^{-1})^2 + (n\pi R_4 S_1^{-1})^2) h_4 (12(1 - \nu_1^2) R_1^2 \alpha_{T1})^{-1} + \\ + \pi^{-2} (m R_4 L_1^{-1})^4 ((m R_1 L_4^{-1})^2 + (n R_1 S_4^{-1})^2)^{-3};$$

или

$$\tilde{T}_{кр} = (T_{кр1}, T_{кр2}, T_{кр3}), \quad (11)$$

$$T_{кр1} = ((m\pi R_1 L_3^{-1})^2 + (n\pi R_1 S_3^{-1})^2) h_1 (12(1 - \nu_3^2) R_3^2 \alpha_{T3})^{-1} + \\ + \pi (m R_1 L_3^{-1})^4 ((m R_3 L_1^{-1})^2 + (n R_3 S_1^{-1})^2)^{-3},$$

$$T_{кр2} = ((m\pi R_2 L_2^{-1})^2 + (n\pi R_2 S_2^{-1})^2) h_2 (12(1 - \nu_2^2) R_2^2 \alpha_{T2})^{-1} + \\ + \pi (m R_2 L_2^{-1})^4 ((m R_2 L_2^{-1})^2 + (n R_2 S_2^{-1})^2)^{-3},$$

$$T_{кр3} = ((m\pi R_3 L_1^{-1})^2 + (n\pi R_3 S_1^{-1})^2) h_3 (12(1 - \nu_1^2) R_1^2 \alpha_{T1})^{-1} + \\ + \pi (m R_3 L_1^{-1})^4 ((m R_1 L_3^{-1})^2 + (n R_1 S_3^{-1})^2)^{-3}.$$

Расчетные соотношения (2), (3), (5), (7), (9)–(11) являются составными элементами предлагаемого алгоритма учета параметрической неопределенности в

виде разбросов значений для величин исходных параметров в модели определения критической температуры потери устойчивости при нагревании пологой цилиндрической оболочечной панели

3. Результаты вычислительных экспериментов. Пример реализации построенного нечетко-множественного расчетного алгоритма относится к получению оценок влияния эффектов разбросов значений исходных параметров для приведенного в работе [3] примера расчета критической температуры возникновения одной из форм потери устойчивости тонкостенной пологой цилиндрической оболочечной конструкции-панели из алюминия с $\nu = 0.32$, $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $R = 3$ м, $\alpha_T = 24.7 \cdot 10^{-6} C^{\circ-1}$, $L = 0.9$ м, $S = 1.5$ м. В частности, согласно описанным в этой публикации расчетам, для формы потери устойчивости с $m = 5$, $n = 4$ получено $T_{кр}^{(5,4)} = 13.5 C^{\circ}$.

В настоящей работе рассмотрены случаи задания следующих, отражающих неконтрастность исходных геометрических и физико-механических характеристик нечетко-интервальных экзогенных параметров

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= (0.317, 0.319, 0.320, 0.323), \\ \tilde{h} &= (1.96h_*, 1.98h_*, 2.0h_*, 2.03h_*), \\ \tilde{R} &= (2.95l_*, 2.98l_*, 3.0l_*, 3.07l_*), \\ \tilde{\alpha}_T &= (24.3\alpha_*, 24.6\alpha_*, 24.7\alpha_*, 24.9\alpha_*), \\ \tilde{L} &= (0.88l_*, 0.89l_*, 0.9l_*, 0.92l_*), \\ \tilde{S} &= (1.47l_*, 1.49l_*, 1.50l_*, 1.53l_*), \\ h_{**} &= 10^{-3} [м], \quad l_* = 1 [м], \quad \alpha_* = 10^{-6} C^{\circ-1},\end{aligned}$$

и экзогенных параметров, описываемых треугольными нормальными нечеткими числами

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= (0.317, 0.320, 0.323), \quad \tilde{h} = (1.96h_*, 2.0h_*, 2.03h_*), \\ \tilde{R} &= (2.95l_*, 3.0l_*, 3.07l_*), \quad \tilde{\alpha}_T = (24.3\alpha_*, 24.7\alpha_*, 24.9\alpha_*), \\ \tilde{L} &= (0.88l_*, 0.9l_*, 0.92l_*), \quad \tilde{S} = (1.47l_*, 1.50l_*, 1.53l_*).\end{aligned}$$

В результате расчетов с использованием соотношений (10), (11) для сопоставляемого случая $m = 5$, $n = 4$ соответственно получены представления неконтрастного выходного параметра \tilde{T} в виде нечетко-интервальной величины

$$\tilde{T} = (9.9, 12.4, 14.5, 18.8), \quad (12)$$

с функцией принадлежности, изображенной на рисунке 1, а также в виде треугольного нечеткого числа

$$\tilde{T} = (9.9, 13.5, 18.8), \quad (13)$$

для которого функция принадлежности представлена на рисунке 2. Медианное значение для величины (12), равно 13.9, модальное значение для (13), составляет 13.5 и отвечает значению $T_{кр}^{(5,4)} = 13.5 \text{ } C^\circ$, получаемому при расчетах в рамках детерминистической модели [3].

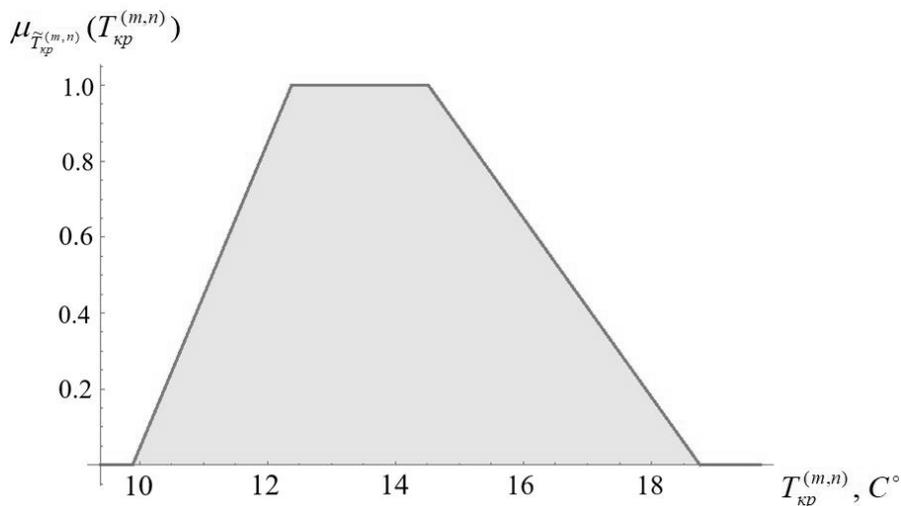


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{T_{кр}^{(m,n)}}(T_{кр}^{(m,n)})$ для нечетко-интервальной величины (12).

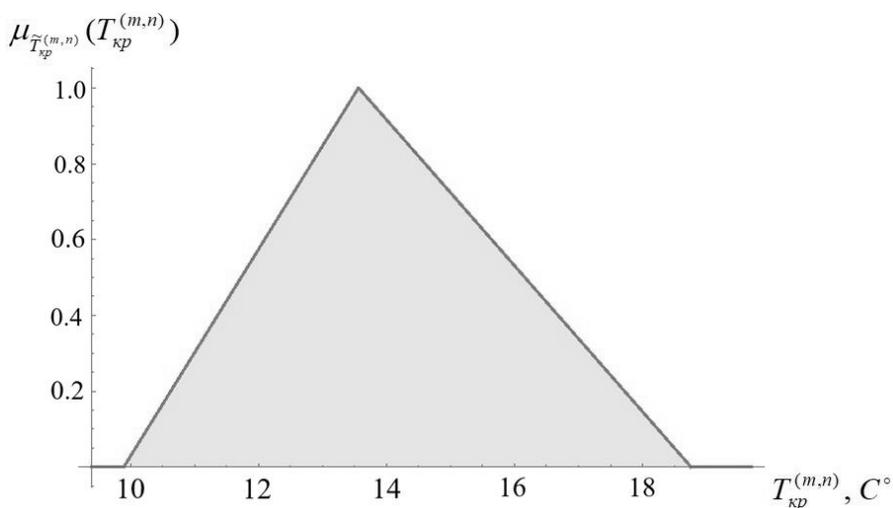


Рис. 2. Профиль функции принадлежности $\mu_{T_{кр}^{(m,n)}}(T_{кр}^{(m,n)})$ для треугольного нечеткого числа (13).

Выводы. В результате проведенных исследований разработана нечетко-множественная методика учета разбросов значений исходных геометрических и фи-

зико-механических параметров в расчетных соотношениях модели определения критической температуры потери устойчивости для тонкой изотропной пологой цилиндрической оболочки-панели, как типа конструкций с предъявляемыми повышенными требованиями к оценкам прочности и надежности при их проектировании и эксплуатации в связи с разнообразными применениями в аэрокосмической технике, приборах и строительных сооружениях, в технологическом оборудовании энергетических и химических производств.

Учитываемые в расчетах разбросы могут быть обусловлены погрешностями экспериментальных данных о физико-механических свойствах используемых материалов, предусматриваемыми при изготовлении технологическими допусками, вариативными субъективными экспертными оценками для отдельных базовых характеристик конструкций. Реализованный подход основывается на введении нечетко-множественных описаний неконтрастных экзогенных характеристик и использовании их в качестве аргументов в расширяемых на данный тип переменных с применением аппарата нечетко-множественных вычислений и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения расчетных выражениях детерминистической версии исследуемой модели. Приведены некоторые результаты численной реализации разработанной методики.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0).

1. *Бажанов В.А.* Расчет конструкций на тепловые воздействия / В.А. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синюков. – М.: Машиностроение, 1969. – 599 с.
2. *Подстригач Я.С.* Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач. – К.: Наукова думка, 1978. – 343 с.
3. *Григорьев П.С.* Определение критических температур потери устойчивости полых цилиндрических оболочек / П.С. Григорьев, С.В. Беспалько, В.В. Гончаров // Тепловые процессы в технике. – 2021. – Т. 13, № 7. – С. 324–328. – doi:10.34759/tpt-2021-13-7-324-328.
4. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
5. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
6. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике / В.З. Власов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
7. *Доннелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
8. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 63–76. – doi:10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN:TOGBNE.
9. *Номбре С.Б.* Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в расчетных моделях термоупругого деформирования балок / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 81–92. – doi:10.24412/0136-4545-2023-1-81-92. – EDN:PQQQXY.
10. *Номбре С.Б.* Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 56–66. – doi:10.24412/0136-4545-2023-2-56-66. – EDN:TVWFZT.

S.B. Nombre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev, Tran Ba Le Hoang

Fuzzy-set accounting for parametric uncertainty in a model for calculation the critical temperature of buckling of a flat cylindrical shell.

The development of a fuzzy-set method for accounting for the scatter errors of values of the initial geometric and physical-mechanical parameters in the calculation relationships of the model for determining the critical temperature of buckling for a thin isotropic shallow cylindrical shell are presented. The implemented approach is based on the introduction of fuzzy-set descriptions of non-contrasting exogenous characteristics and their use as arguments in the calculation expressions of the deterministic version of the model under study, extended to this type of variables, using the apparatus of fuzzy-set calculations and a modified alpha-level version of the heuristic principle of generalization. A number of results of the numerical implementation of the developed method are presented.

Keywords: *shallow cylindrical shell, thermomechanical deformation model, thermal effects, critical temperature of buckling, scatter errors of values of initial parameters, fuzzy-set accounting of uncertainty, heuristic generalization principle.*

*Статья поступила в редакцию 29.07.2024;
доработана 22.08.2024;
рекомендована к печати 06.09.2024.*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ
ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831, 622.23.02
doi:10.24412/0136-4545-2024-1-83-90
EDN:ZLKJXZ



©2024. Ф.М. Голубев¹, В.П. Сажнев²,

**ВЛИЯНИЕ УГЛА ПАДЕНИЯ СКЛОНА РЕЛЬЕФА
НА ПАРАМЕТРЫ ФОРМИРОВАНИЯ МУЛЬДЫ СДВИЖЕНИЯ**

В статье проведен анализ степени влияния рельефа на характер распределения сдвижений земной поверхности при отработке угля подземным способом. Описана методика формирования конечно-элементных моделей, учитывающих влияние рельефа, и проведен сравнительный анализ параметров сдвижения в моделях с горизонтальной и наклонной поверхностями.

Ключевые слова: сдвижение земной поверхности, добыча угля подземным способом, сложная структура рельефа, конечно-элементная модель, относительные деформации.

Введение. Процесс сдвижения земной поверхности в зонах влияния горных выработок представляет опасность для целостности жилого фонда Российской Федерации, а также может приводить к повреждениям коммуникаций и объектов транспортной инфраструктуры. Влияние горных выработок может существенного усугубляться за счет сложной структуры рельефа, который в условиях некоторых угленосных районов приобретает формы не только микро-, но и мезорельефа. В ограниченном склоне массиве под воздействием сил тяжести и влиянием горных работ почва стремится сдвинуться вниз и в сторону склона,

¹Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

²Сажнев Вячеслав Петрович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: vyacheslav.p.sazhnev@yandex.ru.

Sazhnev Vyacheslav Petrovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

что может стать причиной повреждений объектов поверхности. Условия устойчивости склонов описываются в работах Березанцева В.Г. [1], Соколовского В.В. [2], Фисенко Г.Л. [3], Цитовича Н.А. [4] и ряда других авторов.

В работах Боровкова Ю.А. [5] отмечается, что рельеф земной поверхности оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) массива горных пород. Величина влияния функционально изменяется в зависимости от горнотехнических условий и формы рельефа по степенному закону. Как отмечается в работах Гаврюка А.Г. [6] и Гаврюка Г.Ф. [7], согласно натурным наблюдениям, влияние рельефа земной поверхности на параметры процесса сдвижения в условиях горизонтального залегания залежи приводит к уменьшению размеров зоны влияния горной выработки со стороны падения склона и к увеличению в сторону восстания. Все перечисленные работы подчеркивают важность учета мезорельефа, как фактора при прогнозе деформаций земной поверхности, но не проясняют вопроса о способах его учета.

1. Методика выполнения работ. Результаты анализа наблюдений на маркшейдерских наблюдательных станциях показывают, что под влиянием мезорельефа может происходить как отклонение фактической величины оседаний от прогнозной, так и смещение участка проявления прогнозных оседаний. Диаграмма сравнения фактических и прогнозных величин оседаний на шахте ГУП «Комсомолец Донбасса» приведена на рисунке 1 .

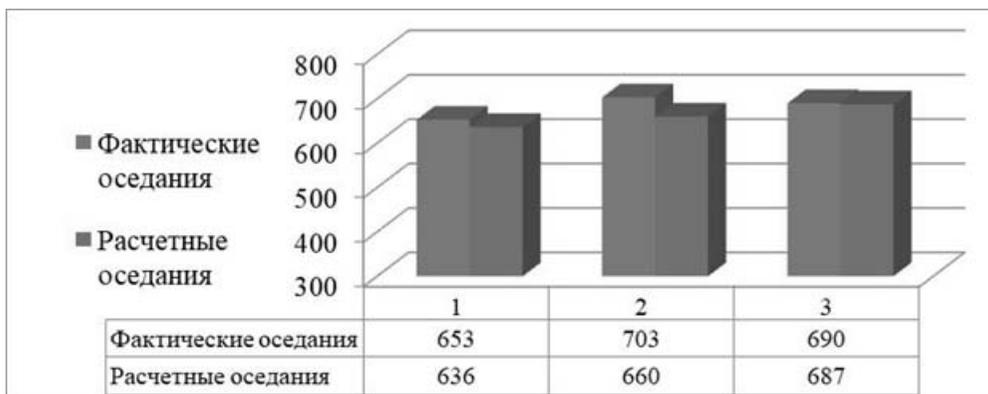


Рис. 1. Сравнение абсолютной величины фактических и прогнозных оседаний

Стоит отметить, что, несмотря на незначительные отклонения абсолютной величины максимальных оседаний, наблюдаются существенные смещения зон локализации сдвижений. Данное явление может объясняться значительным изменением реальной глубины лавы в пределах зоны её влияния за счет перепада рельефа поверхности. При этом действующие методики и существующие модели не позволяют учитывать влияние данного фактора.

С увеличением средней глубины отработки и угла наклона рельефа отклонение длины полумульды от рассчитанной по классической методике линейно

растет. Схема определения изменения размеров мульды сдвижений при различных углах наклона рельефа (λ) приведена на рисунке 2.

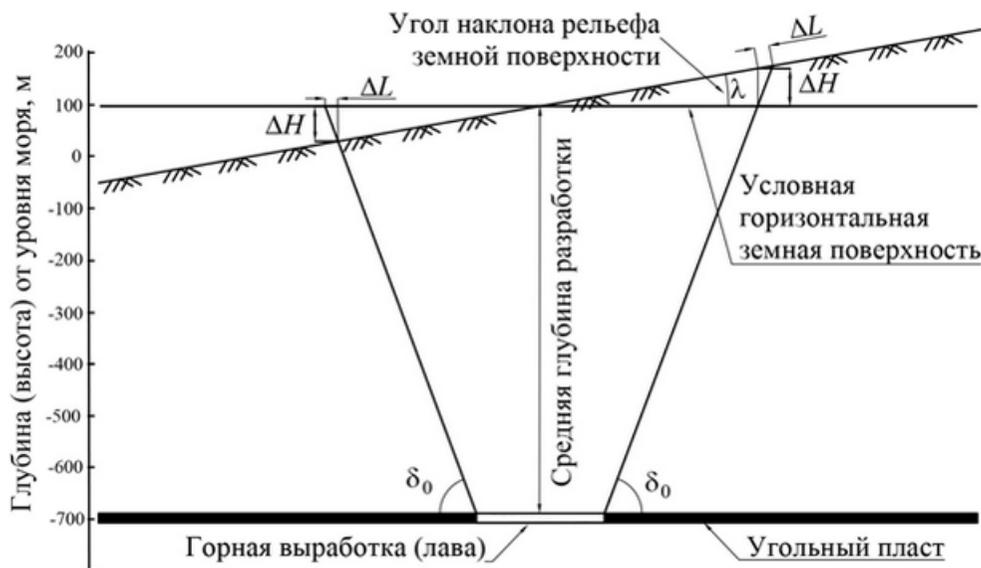


Рис. 2. Схема определения изменения размеров мульды сдвижений при различных углах наклона рельефа (λ)

Тестовый аналитический расчет длины полумульды показал, что значения прироста полумульды на ее концевых участках при абсолютных отметках поверхности, превышающих условную линию, принятую для средней глубины, в значительной степени зависят от глубины разработки и величины перепада рельефа в пределах влияния зоны сдвижения.

Согласно приведенной на рисунке 2 схеме, для расчета погрешности определения вызванной влиянием мезорельефа величины полумульды можно использовать следующую зависимость:

$$\Delta L = \cos (\lambda) \left(\Delta H \frac{\tan (90 - \delta_0)}{\cos ((90 - \delta_0) + \lambda)} \right), \quad (1)$$

где ΔH – перепад глубины в крайней точке мульды сдвижения между вычисленной по классической методике величиной и с учетом рельефа, м; λ – угол наклона рельефа поверхности (угол между прямой, проведенной на уровне средней отметки поверхности, учитываемой при определении средней глубины лавы, и прямой, проведенной от проекции точки середины лавы на прямую к граничной точке мульды сдвижения на склоне рельефа), градус; δ_0 – граничный угол, определяемый согласно «Правил...» [8], градус.

Подтверждение подобных параметров отклонений деформаций массива в сторону восстания рельефа находит отражение и при моделировании аналогичной схемы деформирования методом конечных элементов.

Практика расчетов конечно-элементных моделей горного массива показывает, что модель изотропии не способна в полной мере описать углепородный массив, так как физико-механические свойства горного массива в различных направлениях могут отличаться в несколько раз. Поэтому при описании горных пород предпочтительней использовать модели ортотропии физико-механических свойств. В модели ортотропии через каждую точку массива проходит три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии. Согласно исследованиям [9], уравнение обобщенного закона Гука для модели ортотропного массива можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = E_1 \frac{R_{x4}}{R_{x5}} \varepsilon_x + E_1 \frac{R_{x2}}{R_{x5}} \varepsilon_y + E_1 \frac{R_{x6}}{R_{x5}} \varepsilon_z; \quad \tau_{yz} = G_{23} \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_y = E_2 \frac{R_{y1}}{R_{y2}} \varepsilon_x + E_2 \frac{R_{y3}}{R_{y2}} \varepsilon_y + E_2 \frac{R_{y4}}{R_{y2}} \varepsilon_z; \quad \tau_{xz} = G_{13} \cdot \gamma_{xz}; \\ \sigma_z = E_3 \frac{R_{z1}}{R_{z2}} \varepsilon_x + E_3 \frac{R_{z3}}{R_{z2}} \varepsilon_y + E_3 \frac{R_{z4}}{R_{z2}} \varepsilon_z; \quad \tau_{xy} = G_{12} \cdot \gamma_{xy}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где E_1, E_2, E_3 – модули упругости для растяжения-сжатия вдоль главных направлений упругости X, Y, Z соответственно, Па; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модули сдвига для главных плоскостей YOZ, XOZ, XOY, Па.

Компоненты векторов напряжений и деформаций в модели ортотропного массива можно связать, согласно [9], при помощи матрицы D уравнением следующего вида:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (3)$$

При этом согласно [9], матрица D будет иметь следующий вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} E_1 \frac{R_{x4}}{R_{x5}} & E_1 \frac{R_{x2}}{R_{x5}} & E_1 \frac{R_{x6}}{R_{x5}} & 0 & 0 & 0 \\ E_2 \frac{R_{y2}}{R_{y5}} & E_2 \frac{R_{y3}}{R_{y2}} & E_2 \frac{R_{y4}}{R_{y2}} & 0 & 0 & 0 \\ E_3 \frac{R_{z6}}{R_{z5}} & E_2 \frac{R_{z4}}{R_{z2}} & E_3 \frac{R_{z4}}{R_{z2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

На основании изложенного подхода, используя существующие представления о деформациях горных пород, была разработана конечно-элементная модель сдвижения земной поверхности и горного массива. В основу модели были заложены 2-й и 3-й законы Ньютона, упрощенная форма закона Кулона-Мора, основные законы, регламентирующие деформации в упругом теле. В качестве исходных данных для модели задавались следующие физико-механические показатели: модуль упругости (Юнга) в направлениях осей X, Y, Z; коэффициент Пуассона (величина, отражающая отношение поперечного сжатия породы к её

продольному растяжению) в направлениях осей X, Y, Z; модули сдвига для главных плоскостей YOZ, XOZ, XOY; удельное сцепление, характеризующее силу структурных связей между пластами; угол внутреннего трения; плотность.

Для оптимизации вычислительной мощности компьютера и возможности решения задачи по построению геомеханической модели конечно-элементная сетка формировалась неравномерно, со сгущениями в областях, расположенных над лавой и на верхнем слое модели, отображающем поверхность. Глубина разработки 696 м, длина моделируемой лавы 200 м.

Над лавой моделировались следующие зоны: зона беспорядочного обрушения пород в виде кусков, глыб и блоков, определяемая из эмпирического соотношения $6m$ (где m – мощность отрабатываемого пласта); зона прогиба толщи пород в сторону выработанного пространства с образованием крупных блоков, разделенных трещинами; зона плавного прогиба пород.

В пределах указанных зон моделировалась зона водопроводящих трещин. В результате расчета были получены схемы оседаний, приведенные на рисунке 3.

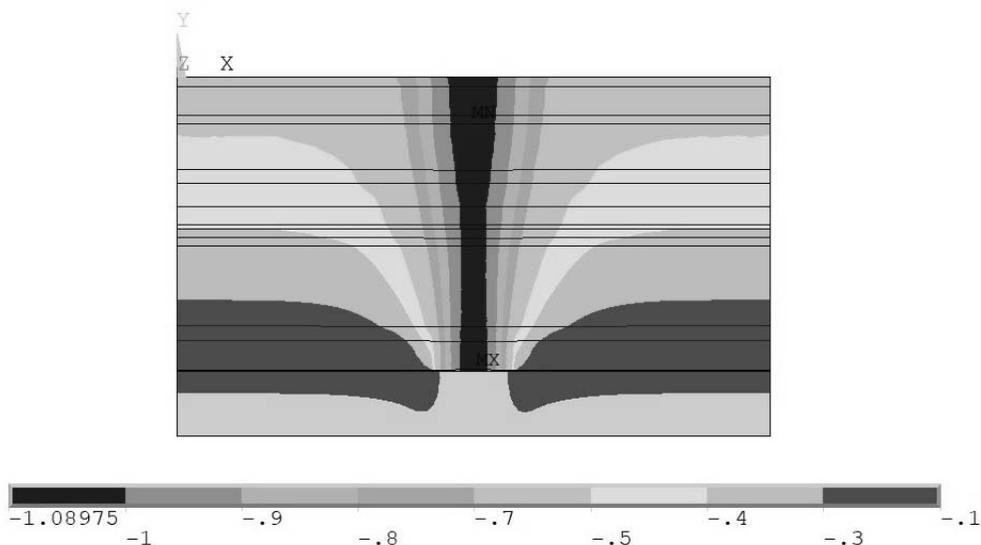


Рис. 3. Изображение модели оседаний горного массива и земной поверхности с горизонтальной поверхностью

По результатам анализа модели с горизонтальной поверхностью, можно сделать вывод о равномерном распределении оседаний в обеих полумульдах, а также о соответствии схемы сдвижения горного массива классическим представлениям, описанным в трудах Зари Н.М., Акимова А.Г. и Борисова А.А. [10–12], что говорит об адекватности работы модели. Для дальнейшего моделирования влияния рельефа на характер сдвижения в модели последовательно увеличивался угол его наклона вплоть до 10 градусов при сохранении средней глубины отработки. В результате расчетов была получена схема оседаний, представленная на рисунке 4.

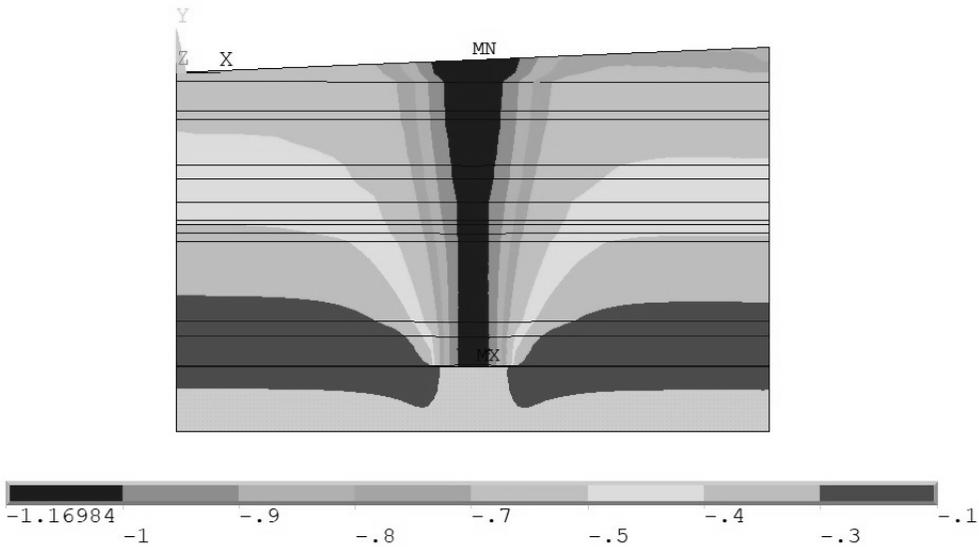


Рис. 4. Изображение модели оседаний горного массива и земной поверхности с углом наклона земной поверхности 10 градусов

Анализ полученных в результате расчетов графиков, приведенных на рисунке 5, показывает, что оседания земной поверхности при угле падения мезорельефа до 10 градусов могут смещаться до 20–25 м. Максимум оседаний при этом также смещается в сторону восстания рельефа, а зона проявления максимальных оседаний увеличивается до 40 м. Подобные перемещения приводят к изменению длин полумульд, и, как следствие, относительных деформаций.

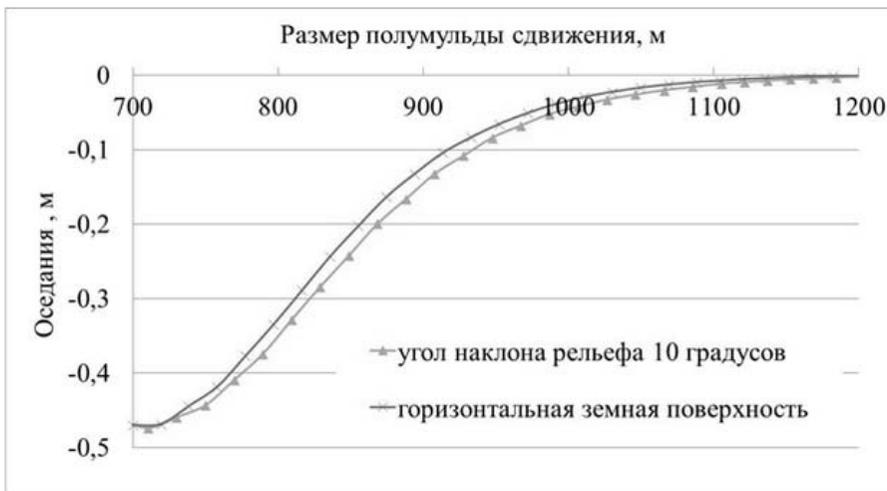


Рис. 5. Графики оседаний для горизонтальной земной поверхности и с учетом угла наклона рельефа 10 градусов

Тестовый расчет длины полумульды показывает, что значения прироста полумульды на ее концевых участках при абсолютных отметках поверхности, превышающих условную линию, принятую для средней глубины, в значительной степени зависят от глубины отработки и величины перепада рельефа в пределах влияния зоны сдвижения.

С увеличением средней глубины отработки от 300 м до 900 м, при угле наклона рельефа не более 5 градусов, отклонение длины полумульды от рассчитанной по классической методике достигает от 10 м до 32 м при полной подработке.

Аналогичный анализ влияния величины угла наклона мезорельефа показал, что для средней глубины добычи 600 м при полной подработке изменение угла наклона мезорельефа 1–10 градусов влечет за собой отклонение длины полумульды от рассчитанной по классической методике на 8–43 м соответственно.

Выводы. Полученные результаты исследований доказывают, что даже незначительные величины углов наклона рельефа могут приводить к существенному изменению длины полумульд и, как следствие, к перераспределению точек расчета оседаний (значений функции $S(z)$), что в результате ведет к изменению участков локализации относительных горизонтальных деформаций земной поверхности. Такой подход позволяет повысить точность и достоверность определения на склонах рельефа зоны влияния очистных горных выработок на земную поверхность. Учет влияния форм рельефа на процесс сдвижения актуален как при определении попадающих в зону влияния очистных работ зданий и сооружений, так и при прогнозе деформаций подземных трубопроводов, где смещение участка локализации деформаций на несколько десятков метров может привести к неправильному применению мер защиты или возникновению аварийной ситуации.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 123092600006-9).

1. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. Изд. 2 / В.В. Соколовский. – М.: Гостеиздат, 1954. – 152 с.
2. Фисенко Г.Л. Устойчивость бортов угольных карьеров / Г.Л. Фисенко. – М.: Углетехиздат, 1956. – 230 с.
3. Цытович Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М.: Госстройиздат, 1960. – 252 с.
4. Маслов Н.Н. Механика грунтов в практике строительства (оползни и борьба с ними) / Н.Н. Маслов. – М.: Стройиздат, 1977. – 320 с.
5. Боровков Ю.А. Определение степени влияния рельефа земной поверхности на напряженно-деформированное состояние массива горных пород и параметры горных выработок / Ю.А. Боровков // Московский геолого-разведочный институт. Записки горного института. – 2003. – Т. 154. – С. 234–236.
6. Гаврюк А.Г. Графоаналитический способ определения длин полумульд с учетом рельефа земной поверхности / А.Г. Гаврюк, Г.А. Антипенко, Г.Ф. Гаврюк // Научный вестник НГУ. – 2007. – № 2. – С. 30–33.
7. Гаврюк Г.Ф. К вопросу распределения горизонтальных деформаций в полумульде с учетом рельефа земной поверхности / Г.Ф. Гаврюк // Збірник наукових праць Національного гірничого університету. – 2012. – № 37. – С. 70–75.
8. ГСТУ 101.00159226.001 – 2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01.01.2004. – К., 2004. – 128 с.

9. *Корнев Е.С.* Разработка комплекса программ и численное моделирование геомеханических процессов в угленосном массиве: автореф. дис. . . канд. техн. наук. – Новокузнецк, 2013. – 19 с.
10. *Заря Н.М.* Схема механизма сдвижения толщи пород при выемке пологих пластов для одиночной лавы / Н.М. Заря, Ф.И. Музафаров // Уголь Украины. – 1966. – № 12. – С. 9–12.
11. *Акимов А.Г.* Сдвижение горных пород при подземной разработке угольных и сланцевых месторождений / А.Г. Акимов, В.Н. Земисев, Н.Н. Кацнельсон и др. – М.: Недра, 1970. – 245 с.
12. *Борисов А.А.* Основы геомеханики горных массивов / А.А. Борисов – Л.: ЛГИ, 1989. – 294 с.

Ph.M. Golubev, V.P. Sazhnev

The influence of the slope angle on the formation parameters of the subsidence trough.

The article analyzes the degree of influence of relief on the nature of the distribution of earth surface displacements during underground coal mining. It describes the method of forming finite element models that take into account the influence of relief, and conducts a comparative analysis of displacement parameters in models with horizontal and inclined surfaces.

Keywords: *earth's surface shift, underground coal mining, complex relief structure, finite element model, relative deformations.*

*Статья поступила в редакцию 02.08.2024;
доработана 23.08.2024;
рекомендована к печати 06.09.2024.*

УДК 622.831.322:63
doi:10.24412/0136-4545-2024-1-91-106
EDN:ZNPBCT



©2024. Н.И. Лобков¹, А.Г. Радченко²

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ОПАСНЫХ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В СЛОЯХ ПОРОД И В УГОЛЬНЫХ ПЛАСТАХ

Показана важность комплексного учета влияния геологических, тектонических, технологических и геомеханических процессов на газодинамические и термодинамические параметры, физико-механические, газокинетические свойства и напряженно-деформированное состояние породных слоев и угольных пластов. Выполнен анализ недостатков физико-механической модели, предложенной В.В. Ходотом, по формированию выбросоопасных зон в угольных пластах. Рассмотрены достоинства и преимущества применения новых физико-химической и геомехано-газотермодинамической моделей формирования выбросоопасных зон в угольных пластах. Применение физико-химической и геомехано-газотермодинамической моделей является важным условием для обеспечения принятия правильных инженерных решений и способствует повышению уровня безопасного ведения горных работ в различных сложных горно-геологических условиях.

Ключевые слова: выбросы породных слоев, выбросы угля и газа, физико-механическая модель, физико-химическая модель, геомехано-газотермодинамическая модель, газодинамические параметры, термодинамические параметры.

Введение. При ведении горных работ в земных недрах происходят внезапные выбросы солей, песчаников, порфиристов, углей и газов. Вопросам формирования выбросоопасных зон в породных слоях и в угольных пластах в многочисленной литературе по горному делу уделено недостаточное внимание. В литературе недостаточно полно рассмотрена физическая сущность формирования выбросоопасных зон в слоях солей, песчаников, порфиристов и в угольных пластах. Предложенная В.В. Ходотом физико-механическая модель формирования и проявления внезапных выбросов угля и газа [1] имеет ряд существенных недостатков: а) с позиций этой модели формирование выбросоопасных зон рассмотрено в общем виде, т. е. без разделения на региональный, локальный и текущий

¹Лобков Николай Иванович – доктор техн. наук, зав. отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: nilobkov@mail.ru.

Lobkov Nikolay Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

²Радченко Александр Григорьевич – вед. инженер отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: aradov2022@yandex.ru.

Radchenko Aleksandr Grigor'evich – Leading Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

уровни; б) на региональном уровне не учитывается влияние степени метаморфизма углей на формирование выбросоопасных зон; в) на локальном и текущем уровнях не учитывается существенное влияние геомеханических процессов на изменение физико-механических свойств (ФМС), газокинетических свойств (ГКС) и на изменение напряженно-деформированного состояния (НДС) призабойной части угольных пластов. В связи с вышесказанным были определены цели исследований: а) установление основных процессов и факторов, способствующих формированию выбросоопасных зон в слоях солей, песчаников, порфириров и в угольных пластах; б) анализ недостатков физико-механической модели формирования выбросоопасных зон в угольных пластах (по В.В. Ходоту); в) рассмотрение основных положений новых, прогрессивных моделей формирования выбросоопасных зон в углях разных стадий метаморфизма на региональном, локальном и текущем уровнях.

1. Методика проведения исследований. Обзор литературы [2, 3, 4] показал, что: а) анализ формирования выбросоопасных зон в породных слоях и в угольных пластах необходимо выполнять на региональном, локальном и текущем уровнях; б) в формировании выбросоопасных зон принимают участие геологические, тектонические, технологические и геомеханические процессы – рисунок 1.



Рис. 1. Геомехано-газотермодинамическая модель формирования выбросоопасных зон на локальном и текущем уровнях: ФМС – физико-механические свойства породных слоев и угольных пластов; НДС – напряженно-деформированное состояние породных слоев и угольных пластов; ГКС – газокинетические свойства породных слоев и угольных пластов; ГДЯ – газодинамические явления

Рассмотрим кратко влияние каждого из перечисленных процессов на формирование выбросоопасных зон в породных слоях и в угольных пластах.

2. Геологические процессы. По мнению академика М.А. Садовского, основным свойством земных недр является их неоднородность. Горный массив является неоднородным, слоистым, анизотропным. В связи с неровностями и волнистым строением подстилающего рельефа осадконакопление по площадям происходило неравномерно, что обусловило изменчивость мощностей, углов падения и прочностных свойств геологических слоев. Изменению ФМС, ГКС и НДС породных слоев способствовали также процессы флюидизации. Формирование неоднородностей различных масштабов и уровней в породных слоях и в угольных пластах происходило при многократном, многоциклическом воздействием геологических, тектонических факторов и процессов флюидизации. В Армении для переброски воды из реки Арпа в озеро Севан велась проходка гидротехнического тоннеля протяженностью 48,3 км (две параллельные ветки). Тоннель проводился в горах, в толще Варденисского хребта, минимальная глубина проходки составляла 100 м, а максимальная – 750 м. На участке тоннеля № 2 в забое 8 шахты № 3 на глубине свыше 600 м 13.03.1977 г. произошел внезапный выброс пород и газа [5]. Ориентировочно было выброшено 1500 т породы и 105000 м³ углекислого газа, погибло 22 человека. Выброс произошел в изверженных трещиновато-пористых магматических породах – порфиритах, в обширной зоне влияния Анкаван-Сюникского разлома. Под действием термальных, высокоминерализованных, газосодержащих флюидов сформировались выбросоопасные участки порфиритов, которые характеризуются повышенной пористостью, газоносностью и пониженной прочностью. Обзор литературы [4, 5, 6] показал, что под воздействием процессов флюидизации происходят изменения структурно-химических свойств (СХС) солей, песчаников и порфиритов; возрастает неоднородность их строения, снижается прочность, возрастают пористость, газоносность и потенциальная выбросоопасность. Вышерассмотренные факты указывают на важность учета структурно-химических свойств (СХС) не только породных слоев, но и СХС угольных пластов.

В работе [7] показано, что степень метаморфизма углей тесно связана со сложным полимодальным характером проявления внезапных выбросов угля и газа в ряду углефикации. Изменения в молекулярной и надмолекулярной организации углей вызывают сложные нелинейные изменения структурно-химических свойств углей, которые являются причиной появления углей разного марочного состава. Угли разных стадий метаморфизма отличаются по своим физико-механическим и газокинетическим свойствам. Установлена непосредственная взаимосвязь характера проявления внезапных выбросов угля и газа в ряду метаморфизма со скачками углефикации [7]. С позиций энергетической теории В.В. Ходота [1] нельзя объяснить факт повышенной выбросоопасности углей средней стадии метаморфизма. В работе [8] предложена более прогрессивная региональная физико-химическая модель формирования и проявления внезапных выбросов угля и газа в ряду метаморфизма, которая учитывает особенности измене-

ния структурно-химических, физико-механических и газокинетических свойств углей в ряду углефикации.

3. Тектонические процессы. Роль тектоники сводится к усилению неоднородности строения горного массива, появлению его блокового строения, а также к перераспределению напряженно-деформированного и газодинамического состояний в угленосном массиве. Тектоническая нарушенность породных слоев и угольных пластов является причиной появления и усиления структурных неоднородностей различных уровней и масштабов. Зоны горно-геологических нарушений (ГГН) являются участками, опасными по проявлению различных видов газодинамических явлений: суфляры, прорывы газа из угольных пластов, внезапные разломы кровли и почвы с повышенным газовыделением, внезапные выбросы угля и газа и т. д. Например, в условиях шахты «Калиновская – Восточная» ПО «Макеевуголь» был выполнен анализ влияния крупных тектонических нарушений на перераспределение природной газоносности в угольных пластах X_{np} , м³/т.с.б.м. Исходные данные по X_{np} были взяты из работы [9]. Анализ данных работы [9] показал, что в зонах влияния геологических нарушений изменяются физико-механические, газокинетические свойства и напряженно-деформированное состояние угленосного массива, происходит перераспределение по площадям следующих показателей: 1) природной газоносности в угольных пластах – X_{np} ; 2) температуры во вмещающих породах почвы – $T^{\circ}_{пор}$, С; 3) предела прочности вмещающих пород на сжатие $\sigma_{сж}$. Так, по площади пласта k_4^1 в зоне влияния надвига № 9 и Французского надвига значения X_{np} возрастают, а по площадям по пластам l_1^1 ; l_1 и k_8^B в зоне влияния Итальянского надвига значения X_{np} снижаются. При увеличении глубины залегания угольных пластов под влиянием тектонических нарушений наблюдается высокая изменчивость показателей X_{np} , $\sigma_{сж}$ и $T^{\circ}_{пор}$.

4. Технологические процессы. Существующие горно-геологические условия определяют комплекс проводимых технологических мероприятий по вскрытию, подготовке и эксплуатации выбранного участка месторождения. Комплекс технологических мероприятий включает: способы и схемы вскрытия, подготовки и разработки угольных шахтопластов; способы проведения выработок; способы отбойки угля; способы управления кровлей; противовыбросные мероприятия; способы дегазации горного массива и т. д. Своевременный учет быстро изменяющихся горно-геологических условий залегания слоев вмещающих пород и угольных пластов позволяет оперативно принимать правильные, объективные технологические решения в процессе эксплуатации месторождения.

5. Геомеханические процессы. В процессе проведения горных выработок в угленосном массиве формируются неоднородные пространственно-временные структуры, обусловленные следующими факторами: 1) циклические, периодические посадки непосредственной и основной кровель, которые связаны с циклическостью работ по проведению горных выработок; 2) периодический изгиб, расслоение, разрушение, обрушение и сдвигание породных слоев. В работах [10, 11] указывается на образование перемещающихся зон разгрузки и при-

грузки впереди очистного забоя с последующим образованием перемещающейся зоны разрушения породного массива. Впереди проводимых горных выработок наблюдается чередование зон сжатия и растяжения в угольном массиве. Эти зоны характеризуются повышенными и пониженными значениями напряженного состояния угольного пласта σ , природной газоносности X_{np} и давления газов $P_{газ}$ [4, 10]. Согласно [12], в районе сопряжения горизонтальной выработки с вертикальным стволом по мере удаления от ствола волнообразно изменяются уровень электромагнитной эмиссии и кажущееся электрическое сопротивление пород.

В работе Ж.М. Канлыбаевой [13] указывается на знакопеременное поведение угольного пласта и вмещающих пород впереди проводимой лавы: как по ходу движения забоя, так и по вертикали, измеряемой от кровли пласта до земной поверхности. Явление волнообразного изменения напряженно-деформированного состояния плит и балок на упругом основании известно из теории упругости. Затухающий волнообразный характер изменения напряжений впереди проводимого забоя ранее предсказал Вебер. В работе Ю.Н. Гавриленко [14] показано, что в зонах дизъюнктивных геологических нарушений происходит неравномерное, скачкообразное сдвигание углепородного массива, подрабатываемого горными работами.

При проведении горных выработок слои подрабатываемого породного массива передают нагрузку на призабойную часть угольного пласта. Эта пригрузка формирует зону опорного давления впереди проводимой выработки. Важной практической задачей геомеханики является правильное количественное определение величин: а) расстояния до максимума напряжений в угольном пласте $L \sigma_{уг}^{max}$; б) величины опорного давления $L_{опор}$. Эффективная и безопасная отработка ударо- и выбросоопасных угольных пластов возможна только на основании достоверного определения величины $L \sigma_{уг}^{max}$, которая изменяется в процессе подвигания очистной выработки. Следует отметить, что в работах [15, 16] для простоты расчетов величины $L_{опор}$, м горный массив был принят как сплошная, однородная среда. Такой подход приводит к ошибкам при расчете величины $L_{опор}$, что было показано в работе [17]. Горный массив является слоистым, блочным, неоднородным [18]. Геомеханическая модель углепородного массива, применяемая в работах [15, 16], не учитывает газокинетические и термодинамические параметры выбросоопасных угольных пластов. Указанная модель [15, 16] на протяжении длительного времени используется в теории защитных пластов, в теории опорного давления, в теории формирования горных ударов. Следует отметить, что закономерности формирования и проявления внезапных выбросов угля и газа существенно отличаются от закономерностей формирования и проявления горных ударов. При формировании выбросоопасных участков в угольных пластах необходимо решать сопряженную задачу, т. е. необходимо учитывать совместное воздействие на краевую часть угольного пласта не только действующих статических напряжений, динамических нагрузок, возникающих в процессе сдвигания подработанных породных слоев кровли, но также сле-

дует учитывать влияние газодинамических и термодинамических параметров, постоянно изменяющихся в призабойной части угольного пласта (рис. 1).

Интенсивность протекания геомеханических процессов в углепородном массиве зависит от следующих факторов: состав подрабатываемых породных слоев; мощности слоев; углы падения слоев; прочностные свойства слоев; расстояние расположения мощного подрабатываемого породного слоя относительно кровли разрабатываемого угольного пласта R , м; длина лавы $L_{л}$, м; суточная скорость подвигания лавы V , м/сут.; расстояние отхода лавы от места посадки основной кровли $R_{отх}$, м; количество одновременно работающих лав на данном участке шахтопласта $N_{лав}$ и т. д. Алгоритм расчета величины максимального опорного давления $P_{оп}^{max}$ при работе лавы рассмотрен в работе [19].

Геомеханические процессы неразрывно связаны с газодинамическими и термодинамическими процессами, которые наблюдаются в угольных пластах. В процессе ведения очистных работ происходит изгиб породных слоев основной кровли над выработанным пространством, при этом длина пролета достигает предельной величины. При предельном пролете мощного прочного породного слоя наблюдается его поднятие над пластом впереди лавы и происходит разгрузка на отдельном участке угольного пласта. Согласно работе [20], впереди лавы, в зоне разгрузки пласта образуется участок свободного метана, который является потенциально выбросоопасным и способен под давлением выдавливаться в призабойное пространство.

Совместное воздействие геологических и тектонических процессов на горный массив приводит к усилению неоднородности, изменчивости свойств углепородного массива: усиливается неравномерность в распределении его напряженно-деформированного состояния, его физико-механических, газокинетических свойств (природная газоносность $X_{нр}$, давление газа $P_{газ}$), термодинамических свойств (температура угля $T^{\circ}_{уг}$, C ; температура пород $T^{\circ}_{пор}$, C) как по площадям, так и по глубине. На неравномерное распределение энергии в горном массиве как по площадям, так и по глубине указывают в своих работах Г.Н. Фейт, А.Ф. Булат, В.И. Дырда, Е.Л. Звягильский, В.А. Привалов, Е.А. Панова и другие.

6. Газодинамические процессы. При ведении очистных работ геомеханические процессы, протекающие в углепородном массиве, характеризуются периодичностью, цикличностью и обуславливают периодические изменения газо- и термодинамических параметров в призабойной части угольного пласта. В работе [21] были исследованы деформации пород основной кровли вблизи забоя очистной выработки с учетом вращающего момента, возникающего от зависающего над выработанным пространством участка основной кровли и действующего на краевую зону угольного пласта. Показано, что впереди лавы возникают зона максимальных напряжений (зона пригрузки) и зона разгрузки, в которой, наряду с повышенными значениями газоносности и трещиноватости угольного пласта, возможно формирование «газового мешка» – зоны с повышенной вероятностью развития опасных газодинамических явлений: суфляров, прорывов газа, внезапных выдавливаний угольного массива, внезапных выбросов угля и газа.

В работе [22] показаны периодические изменения вторичных шагов обрушения основной кровли, давления на крепь и волнообразный характер изменения газовыделения из угольного пласта в подготовительные выработки. В работе [23] доказано, что объем отжимаемого угля по длине лавы изменяется волнообразно, т. е. горное давление, действующее на угольный пласт, имеет волнообразный характер.

При выемке угля очистным комбайном в лаве, в призабойной части угольного массива создается поле повышенных напряжений (локальное ядро горного давления), а непосредственно за ним образуется поле повышенного давления газа (локальное ядро газового давления) [24]. За работающим комбайном движется поле повышенных скоростей сближения вмещающих пород (локальное ядро повышенных скоростей сближения пород) [24].

В работе [4] приведены результаты шахтных исследований, выполненных сотрудником МакНИИ Волошиным Н.Е., в условиях ПО «Донецкуголь» на шахте № 7/8 им. М.И. Калинина, в угольном пласте h_8 «Прасковиевский». В очистном забое измеряли давление газа - $P_{\text{газ}}$ при подходе комбайна к месту установки манометров. В результате выполненных экспериментов было установлено, что при приближении комбайна к местам установки манометров наблюдается резкий скачок давления газа. Следует отметить следующее: а) в манометре № 2, расположенном на расстоянии 5,1 – 3,4 м от поверхности очистного забоя, давление газа увеличилось с 9,5 до 13,3 МПа; б) в манометре № 5, расположенном на расстоянии 5,2 – 3,8 м от поверхности забоя, давление газа увеличилось с 9,4 до 13,0 МПа; в) в манометре № 7, расположенном на расстоянии 4,4 – 3,2 м от поверхности забоя, давление газа увеличилось с 9,8 до 13,4 МПа. При дальнейшем приближении очистного забоя к месту замеров на расстояние 2,0 м давление газа в пласте начинало падать до 0,0 МПа. Таким образом, впереди движущегося комбайна формируется локальный участок с повышенными значениями градиентов напряженно-деформированного и газодинамического состояний.

По данным [4], шахтные экспериментальные исследования были проведены в условиях ш/у «Донбасс» на шахте «Запореваляная-2» на особо выбросоопасном угольном пласте h_{10} «Ливенский» в ряде очистных забоев. В очистных забоях в скважинах диаметром $d = 42$ мм и длиной $L = 8 - 9$ м последовательно, поинтервально через каждый 1,0 м измеряли начальную скорость газовыделения g_n , л/мин и производили отбор проб для определения концентрации He , %. Измерения выполняли в средней части лавы, через 1,0 м сразу после бурения каждого последующего интервала скважины и при длине измерительной газовой камеры $l_k = 0,20$ м. Затем измерения g_n повторяли через 1, 2 и 3 часа. Установлено, что изменение параметра g_n по длине скважины носит волнообразный характер с двумя максимумами, расположенными на расстояниях: 1) 3–4 м и 2) 6–7 м от поверхности забоя, [4]. Выполненные исследования показали, что в скважинах, пробуренных впереди очистных забоев по ходу движения лав, начальная скорость газовыделения из скважин g_n и концентрация гелия He , %, измеренные последовательно, поинтервально через 1,0 м, изменяются волнообразно.

В условиях шахты «Красноармейская-Западная-1» по пласту d_4 в блоке № 10 в подготовительных забоях были проведены шахтные экспериментальные исследования характера изменения газовыделения в призабойной части угольного массива. Измерения выполнялись по методике ведения текущего прогноза выбросоопасности угольных пластов по g_n согласно [2]. В результате выполненных исследований установлено, что впереди забоя подготовительных выработок наблюдается чередование участков с повышенными и пониженными значениями суммарного газовыделения из шпуров $\sum g_n$ [25].

В работе [26] рассмотрены результаты физического и численного моделирования влияния процесса обрушения пород кровли на параметры зоны опорного давления. Установлено, что процесс нагружения со стороны прочных породных слоев кровли разделяется на три фазы: начальная фаза, фаза динамической нагрузки и фаза статической нагрузки [26]. В работе [27] приведены результаты замеров горного давления в лаве в стойках механизированной крепи. Измерения проводились в 30, 60, 75, 90, 105, 120 и 150 м от конвейерного штрека по длине очистного забоя. Установлено, что изменения горного давления на крепь имеют волнообразную форму как по ходу движения лавы (по оси обрабатываемого столба), так и по линии очистного забоя.

К газодинамическим параметрам угольных пластов относятся: природная газоносность угольных пластов X_{np} ; остаточная газоносность угольных пластов X_{oc} , м³/т.с.б.м.; P давление газа в угольном пласте, МПа; начальная скорость газоотдачи угля ΔP ; начальная скорость газовыделения из шпуров и скважин g_n л/мин; объём сорбированного углем газа $V_{сорб}$, м³/т; объём свободного газа в угле V , м³/т; величина зоны разгрузки по угольному пласту $L_{раз}$, м и т. д. На величину зоны разгрузки в угольном пласте $L_{раз}$, м оказывают влияние геологические, тектонические, технологические и геомеханические факторы.

К геологическим факторам относятся: мощность разрабатываемого пласта m , м; угол падения пласта a , град; глубина залегания пласта H , м; степень метаморфизма угля (весовой выход летучих веществ V^{daf} , % и толщина пластического слоя y , мм); естественная влага в угле Wa , %; литологический состав пород кровли (мощность породных слоев, их крепость, углы падения) и т.д.

К тектоническим факторам относятся: наличие зон горно-геологических нарушений (ГГН) различных типов (дизъюнктивные, пликативные, структурные); амплитуда разрывного нарушения A , м; угол падения сместителя β , град; ширина зоны ГГН B , м; протяженность зоны ГГН $L_{нар}$, м; степень тектонической нарушенности угля ΔJ ; интенсивность трещиноватости участка угольного пласта $J_{тр}$ и т.д.

К технологическим и геомеханическим факторам относятся: длина лавы $L_{л}$, м; скорость подвигания лавы V , м/сут; расстояние отхода лавы от места посадки основной кровли $R_{отх}$, м; количество лав, одновременно работающих на данном участке шахтопласта $N_{лав}$; способ управления кровлей; способ крепления выработки; способ выемки угля; способ дегазации угольного пласта; применяемые противовыбросные мероприятия; площадь выработанного пространства S , м²;

шаг посадки основной кровли $L_{\text{пос}}$, м; высота свода обрушения пород кровли h , м; угол сдвижения породных слоев кровли ψ , град; угол прогиба породных слоев кровли φ , град; расстояние до максимума опорного давления в лаве $L_{\sigma^{\text{max}}}$; величина зоны разгрузки в краевой части угольного пласта $L_{\text{раз}}$, м; величина безопасной выемки угля L , м и т. д.

Анализ литературы и обобщение опыта ведения горных работ в сложных горно-геологических условиях [25] показали, что при ведении очистных работ впереди забоя лавы формируются следующие зоны: I – зона отжима и разрушения угольного пласта; II – зона пластических деформаций; III – зона упругих деформаций (рис. 2). По данным шахтных измерений и выполненного численного моделирования были построены графики изменения начальной скорости газовыделения из скважины (g_n), л/мин – график 1 и изменения напряжений в призабойной части угольного пласта (σ , МПа) – график 2 (рис. 2). В условиях ш/у «Донбасс» на шахте «Заперевальная-2» по пласту h_{10} в нижней части лавы были выполнены измерения показателя g_n , л/мин в скважинах через каждые 0,5 м длиной 8–9 м.

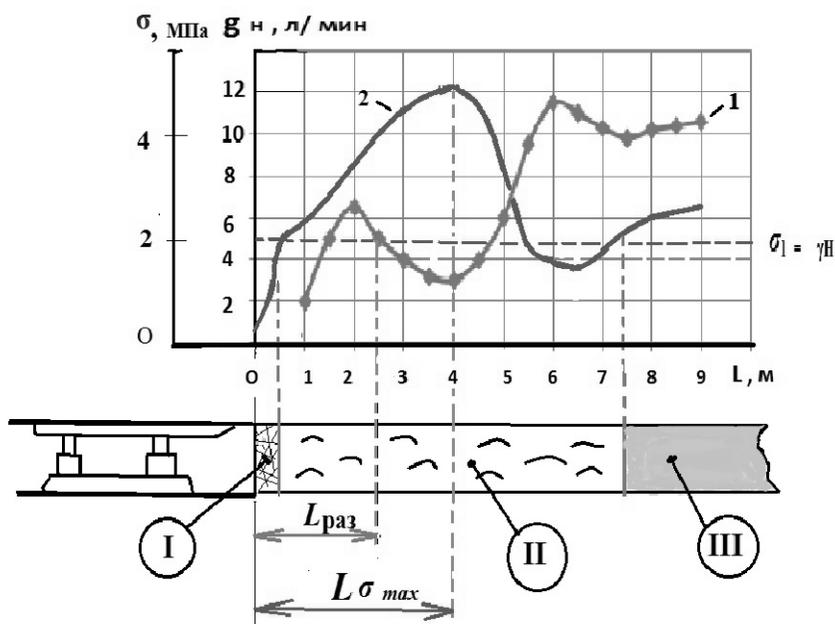


Рис. 2. Графики изменения показателей: 1 – начальной скорости газовыделения из скважины (g_n), л/мин; 2 – напряженного состояния по длине скважины (σ , МПа)

Величина зоны разгрузки $L_{\text{раз}}$, определяемая по методике ведения динамики газовыделения из скважин по показателю (g_n , л/мин), согласно [2] составила $L_{\text{раз}} = 2,5$ м. Согласно [2] имеем: $L_{\text{без}} = L_{\text{раз}} - 1,0$ м, тогда глубина безопасной выемки равна $L_{\text{без}} = 1,5$ м (рис. 2). Расстояние до максимума опорного давления

составило $L \sigma^{\max} = 4,0$ м, а коэффициент концентрации напряжений составил $K = 2,5$. Следует отметить, что на графике изменения показателя g_n , л/мин наблюдается два максимума. Минимальные значения начальной скорости газовыделения наблюдаются при $g_n = 3,0$ л/мин, что соответствует максимальным значениям напряжений σ^{\max} . Из рисунка 2 следует, что в интервале протяженности скважины $L = 5,5 - -7,0$ м отмечены пониженные напряжения, т. е. на данном участке угольного пласта при наличии трудно обрушаемой кровли образуется зона разгрузки, в которой возможно образование участка со свободным скоплением метана. Следует отметить, что указанному участку пониженных напряжений соответствует второй максимум значений показателя g_n , л/мин. Таким образом, газодинамическое состояние угольного пласта неразрывно связано с его напряженно-деформированным состоянием.

7. Термодинамические процессы. Состояние призабойной части угольного пласта неразрывно связано с протекающими геомеханическими процессами в углепородном массиве. Результаты выполненных обширных, фундаментальных, шахтных экспериментальных исследований приведены в работе [28]. По данным работы [28], перед внезапными выбросами угля и газа в Донбассе наблюдаются задержки в смещении боковых пород, т. е. скорость сближения боковых пород существенно снижается. Следовательно, в результате задержки в смещении боковых пород газо- и теплоотдача пласта снижаются, в призабойной части пласта возрастают градиенты напряжений, газового давления и температуры.

В работе [29] указывается, что под влиянием тектонических и геохимических процессов в угольных пластах в течение длительного геологического времени сформировались области с аномальными физико-химическими и физико-механическими свойствами на всех уровнях структурной организации угольного вещества. Повышение температуры угольного пласта является информативным показателем: с его помощью можно выделить зоны повышенного горного давления и зоны разгрузки и дегазации пласта [29]. В работе [30] показано, что при возрастании уровня напряжений в образцах угля, вариации температуры и интенсивности ИК-излучения увеличиваются. В работе [31] указывается, что изменение температуры угольного пласта является показателем интенсивности происходящих в нем геомеханических, газо- и термодинамических процессов и может служить в качестве показателя для оценки степени выбросоопасности угольного пласта.

Весьма интересные данные приведены в работе [32]. Согласно [32], при работе лавы в выработанном пространстве возникают деформационно-волновые процессы, которые обуславливают появление температурных аномалий в подработанных вмещающих породных слоях.

Анализ и обобщение данных работ [4, 13, 20–23, 29–33] позволил разработать следующее рабочую гипотезу. Впереди действующего очистного забоя возникают деформационно-волновые процессы, которые обуславливают нелинейное волнообразное изменение опорного давления во вмещающих породных слоях и в угольном пласте. Волнообразное изменение напряженно-деформированного

состояния угольного пласта впереди лавы обуславливает неравномерное, нелинейное изменение газодинамического и термодинамического состояний угольного пласта. Впереди забоя лавы образуются зоны пригрузки и разгрузки, в зонах пригрузки механическая энергия опорного горного давления переходит в тепловую и вызывает образование участков с повышенными значениями температуры. Впереди лавы возникают температурные аномалии: в зонах пригрузки температура угольного пласта повышается, в зонах разгрузки образуется зона свободного метана и температура угля на данном участке угольного пласта снижается, т. е. наблюдается эффект Джоуля-Томсона. Данные работ [33–36] полностью подтверждают основные положения разработанной рабочей гипотезы.

В работе [34] рассмотрены результаты измерений температуры на выбросоопасных пластах Донбасса. Температуру измеряли в условиях ПО «Донецк-уголь», ш/у «Донбасс», на шахтах «Заперевальная-1», «Заперевальная-2» и «Глубокая» в забоях подготовительных выработок в шпурах на интервалах 1,0–2,0 и 2,0–3,0 м. Измерения показали, что в каждой отдельной выработке температура, измеренная в призабойной части угольных пластов распределена весьма неравномерно. Критерием оценки выбросоопасности пласта является максимальная величина градиента температуры угля в шпуре на расстояниях 1,0–2,0 м и 2,0–3,0 м от поверхности забоя. По данным И.А. Рыженко, И.Я. Еремина, В.П. Черняка участок пласта относится: а) к неопасным при условии: $\Delta T_{2-1}, \Delta T_{3-2} < 2 \text{ }^\circ\text{C}$; б) ситуация считается угрожаемой при $2 \text{ }^\circ\text{C} \leq \Delta T_{2-1}, \Delta T_{3-2} < 2,5 \text{ }^\circ\text{C}$; в) участок относится к выбросоопасным при условии: $\Delta T_{2-1}, \Delta T_{3-2} \geq 2,5 \text{ }^\circ\text{C}$. Следует отметить, что в работе [34] физическая сущность неравномерного распределения температуры в угольном массиве и в местах повышения температуры в выбросоопасных зонах не объясняется.

В работе [32] указывается, что в условиях Карагандинского угольного бассейна впереди движущейся лавы № 36 в зоне геологического нарушения в шпурах на глубине 3,6 м зафиксировано повышение температуры до 45°C по сравнению с фоновой, равной $30\text{--}31^\circ\text{C}$. По данным работы [32] на шахте им. В.И. Ленина впереди движущейся лавы в зоне максимального опорного горного давления температура угольного пласта возрастает в 2–3 раза против фоновых значений. Далее отмечается, что графики изменения температуры угля хорошо согласуются с закономерностями изменения опорного горного давления по мере продвижения лавы, в том числе и с шагом посадки основной кровли в очистном забое [32].

В работе [35] приведены результаты шахтных комплексных измерений температуры и напряженно-деформированного состояния угольного пласта. Измерения проводились в Центральном геолого-промышленном районе Донбасса на шахте «Юнком». Шахтные измерения напряжений выполняли с помощью гидравлических датчиков горного давления следующих двух типов: ПГД-2 или ДДС-1. Установлена неоднородность распределения теплового поля угольных пластов в зоне влияния горных выработок. Далее отмечается, что в зоне макси-

мальных концентраций напряжений впереди забоя ($\sigma = 42 - 44$ кгс/см²) температура также растет и достигает $T = 57^\circ C$ по сравнению с участками, характеризующимися более низкими значениями напряжений, на которых температура составляла $T = 30^\circ - 32^\circ C$. По данным [35], на пласте Смоляниновском, на горизонте $H = 716$ м в зоне максимальной концентрации напряжений на расстоянии 4,0 м от забоя лавы наблюдалась максимальная температура $T = 45^\circ C$, а на расстоянии 8,0–9,5 м от поверхности забоя температура составляла $T = 20^\circ - 25^\circ C$ и далее на расстоянии 12,0–13,0 м от поверхности забоя температура была равна $T = 39^\circ - 40^\circ C$. Такое волнообразное изменение температуры впереди движущейся лавы авторы работы [35] объяснить не смогли.

Выполненные обзор литературы, обобщение опыта ведения горных работ на шахтах Донбасса и анализ данных шахтных экспериментальных исследований [25, 30–35] позволили разработать геомехано-газотермодинамическую модель формирования выбросоопасных зон на локальном и текущем уровнях [8].

8. Полученные результаты. Выполненный анализ литературы, статистический анализ внезапных выбросов угля и газа, произошедших на шахтах Донбасса, обобщение шахтных экспериментальных исследований и опыта ведения горных работ на шахтах Донбасса за последние 65 лет позволили разработать новые физико-химическую и геомеханогазотермодинамическую модели формирования и проявления внезапных выбросов угля и газа в угольных шахтах [8]. Использование основных положений вышеуказанных моделей позволило получить следующие результаты.

1. Разработаны новые рабочие гипотезы формирования и проявления внезапных выбросов угля и газа: а) в ряду метаморфизма; б) с ростом глубины; в) проявления внезапных выбросов по площадям [36]. Выполнены статистическая, аналитическая и экспериментальная проверка основных положений этих рабочих гипотез.

2. Получены два патента на полезные модели, в которых изложены усовершенствованные способы ведения регионального прогноза выбросоопасности угольных пластов Донбасса [37, 38].

3. С учетом марочного состава углей и углов падения угольных пластов для углей разных групп метаморфизма предложены значения минимальных глубин проявления внезапных выбросов угля и газа $H_{\text{мин}}$, м [39].

4. Для шахт Донбасса определены граничные условия проявления внезапных выбросов угля и газа для углей низких стадий метаморфизма: $V^{daf} \leq 43, \%$; $X_{\text{гп}} \geq 8,0$ м³/т.с.б.м.; $y \geq 6,0$ мм [39]

5. Построен график обобщенной кривой, описывающей характер изменения комплексного показателя степени метаморфизма углей $S_{\text{м об}}$ в ряду углефикации на шахтах Донбасса [40].

Выводы. Проанализированы недостатки модели, предложенной В.В. Ходотом, о формировании выбросоопасных зон в угольных пластах. Показаны преимущества применения новых разработанных физико-химической и геомеханогазотермодинамической моделей формирования выбросоопасных зон в угольных

пластах.

Рассмотрены взаимосвязи, взаимообусловленность и совместное воздействие геологических, тектонических, технологических и геомеханических факторов на изменения газодинамических и термодинамических параметров в призабойной части разрабатываемых угольных пластов.

Показано, что деформационно-волновые процессы, протекающие в слоистом углепородном массиве, обуславливают волнообразное изменение опорного давления в призабойной части разрабатываемых угольных пластов и вызывают сложные, нелинейные изменения газодинамических и термодинамических параметров в угольном массиве.

Применение основных положений разработанных физико-химической и геомехано-газотермодинамической моделей позволяет выполнить многоуровневую комплексную оценку состояния призабойной части угольных пластов. Указанная многоуровневая комплексная оценка включает в себя поэтапный анализ, который выполняется последовательно на региональном, локальном и текущем уровнях. При проведении данной оценки состояния призабойной части угольных пластов рассматривается и учитывается совместное воздействие геологических, тектонических, технологических и геомеханических факторов на изменения газодинамических и термодинамических параметров угольного массива.

Основные положения разработанной методики комплексной оценки состояния призабойной части газоносных угольных пластов при их отработке могут быть успешно применены в условиях угольных шахт Российской Федерации, Казахстана, Вьетнама, Китая, Ирана, а также в условиях угольных месторождений Африки и Южной Америки.

1. *Ходот В.В.* Внезапные выбросы угля, породы и газа / В.В. Ходот // М.: Госгортехиздат, 1961. – 363 с.
2. СОУ 10.1.00174088.011-2005 Правила ведения горных работ на пластах, склонных к газодинамическим явлениям. – Киев: Минуглепром Украины, 2005. – 225 с.
3. РД-350-00 Инструкция по безопасному ведению горных работ на пластах, опасных по внезапным выбросам угля (породы) и газа. – М.: Госгортехнадзор России, 2000. – 160 с.
4. *Минеев С.П.* Горные работы в сложных условиях на выбросоопасных угольных пластах: [монография] / С.П. Минеев, А.А. Рубинский, О.В. Витушко, А.Г. Радченко // Донецк: ООО «Восточный издательский дом», 2010. – 603 с.
5. *Потураев В.Н.* Прогноз и предотвращение выбросов пород и газа / В.Н. Потураев, А.Н. Зорин, В.Е. Забигаило и др. // К.: Наукова думка, 1986. – 160 с.
6. *Лобков Н.И.* Общность природы формирования выбросоопасности солей, порфиритов и песчаников / Н.И. Лобков, А.Г. Радченко, А.А. Радченко // В кн.: Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр. Под редакцией академика К.Н. Трубецкого // Составители: канд. техн. наук А.З. Вартанов, канд. техн. наук А.Г. Крапивин, канд. техн. наук Н.А. Милетенко – М.: ИПКОН РАН. – 2016. – С. 430–433.
7. *Радченко А.Г.* Структурно-химические свойства углей в ряду метаморфизма и их выбросоопасность / А.Г. Радченко, Н.Н. Киселев, С.М. Федотов, А.А. Радченко // Проблемы горного давления. – 2020. – № 1-2 (38-39). – С.121–139.
8. *Радченко А.Г.* Новые модели формирования выбросоопасных зон в угольных пластах на региональном и текущем уровнях / А.Г. Радченко, Н.Н. Киселев, С.М. Федотов, Т.А. Решетняк, А.А. Радченко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. –

№ 3 (76). – С. 53–68.

9. Геологический отчет о переоценке запасов каменных углей поля шахты «Калиновская-Восточная» ПО «Макеевуголь» (подсчет запасов по состоянию на 01.01.1989 г.) в 10 книгах, четырех папках. Книга 2. МУП СССР, ПО «Укруглегеология», Макеевская геологоразведочная экспедиция. Текст отчета, Донецк, – 1989. – 166 с.
10. *Ильяшов М.А.* Закономерности самоорганизации грунтовых и породных массивов, ослабленных подземными выработками / М.А. Ильяшов., Б.М. Усаченко, А.А. Яланский [и др.] // Материалы международной конференции «Форум горняков – 2008». – Днепропетровск: НГУ, 2008. – С. 59–72.
11. Научное открытие № 188. Явление образования перемещающихся нарушенных зон в напряженных горных породах / В.Я. Кириченко, Е.Л. Звягильский, А.В. Левшин [и др.] // Сборник кратких описаний научных открытий, научных идей, научных гипотез. – 2002. – С. 62–63.
12. *Усаченко Б.М.* Синергетические эффекты и волновая природа геомеханических процессов в углепородном массиве / Б.М. Усаченко, А.А. Яланский, Т.А. Паламарчук, В.В. Левит // Сб. научн. тр. НГУ. – 1998. – №3. – С. 58–61.
13. *Канлыбаева Ж.М.* Закономерности сдвижения горных пород в массиве / Ж.М. Канлыбаева. – Алма-Ата: изд. «Наука», 1968. – 108 с.
14. *Гавриленко Ю.Н.* Исследование сдвижения земной поверхности при нарушенном залегании пород в Донецко-Макеевском районе Донбасса / Ю.Н. Гавриленко // Известия вузов. Горный журнал. – 1991. – № 3. – С. 55–62.
15. *Петухов И.М.* Механика горных ударов и выбросов / И.М. Петухов, А.М. Линьков. – М.: Недра, 1983. – 280 с.
16. *Петухов И.М.* Теория защитных пластов / И.М. Петухов, А.М. Линьков, В.С. Сидоров, И.А. Фельдман. – М.: Недра, 1976. – 224 с.
17. *Киселев Н.Н.* Анализ способа расчета величины опорного давления / Н.Н. Киселев, Л.А. Камбурова, А.Г. Радченко, А.А. Радченко // Проблемы горного дела. – Донецк: Институт горного дела и геологии. ГОУВПО «ДонНТУ», 2021. – С. 109–114.
18. *Лобков Н.И.* Геодинамические основы формирования опорного давления в результате подвигания очистных забоев / Н.И. Лобков, А.Г. Радченко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 132–139. – doi:10.24412/0136-4545-2023-3-132-139. – EDN:ZJFAUG.
19. *Лобков Н.И.* Алгоритм прогнозирования максимального опорного давления в процессе работы лавы / Н.И. Лобков, В.С. Маевский, А.А. Лобков // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 2 (75). – С. 74–82.
20. *Лобков Н.И.* Влияние сдвижения пород кровли на возможность концентрации свободного метана впереди лавы / Н.И. Лобков, В.С. Маевский, Н.С. Федосова, А.А. Лобков // Труды РАНМИ: сб. научн. тр. – 2022. – № 16-17 (31-32). – С. 41–45.
21. *Дырдин В.В.* Образование «газового мешка» в зоне опорного давления угольного массива впереди забоя очистной выработки / В.В. Дырдин, А.А. Фофанов, В.Г. Смирнов, А.В. Дягилева // Известия вузов. Горный журнал. – 2017. – № 4. – С. 41–46.
22. *Шинкевич М.В.* Взаимосвязи основных особенностей процессов разгрузки и сдвижения вмещающих пород с динамикой выделения метана из разрабатываемого пласта при его отработке длинными выемочными столбами / М.В. Шинкевич, Е.Н. Козырева // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2006. – № 6. – С. 17–19.
23. *Шинкевич М.В.* Изменения горного давления по длине лавы / М.В. Шинкевич // Вестник НЦ ВостНИИ. – 2018. – № 3. – С. 38–44.
24. *Петросян А.Э.* Причины возникновения внезапных выбросов угля и газа / А.Э. Петросян, Б.М. Иванов // Основы теории внезапных выбросов угля, породы и газа. – М.: Недра, 1978. – С. 3–61.
25. *Киселев Н.Н.* Исследование особенностей изменения газодинамического и напряженно-деформированного состояний в призабойной части пласта d4 / Н.Н. Киселев, В.П. Коптиков, А.Г. Радченко, А.А. Радченко // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2011. –

- Вип. 9, ч. 1. – С. 336–342.
26. Zhang B. Evolution Law of Coal Seam Abutment Pressure under the Influence of Shallow Buried Complex Strata: A Case Study / B. Zhang., D. Sun, R. Zheng // Shock and Vibration. – 2021. – Vol. 2021. – 13 p. – doi:10.1155/2021/6670175.
 27. Полевщиков Г.Я. «Деформационно-волновые» процессы в массиве горных пород при движении очистного забоя в угольных пластах / Г.Я. Полевщиков. – Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2013. – № 5. – С. 50–60.
 28. Бобров И.В. Способы безопасного проведения подготовительных выработок на пластах, опасных по внезапным выбросам угля и газа / И.В. Бобров. – М.: Госгортехиздат, 1961. – 263 с.
 29. Булат А.Ф. Некоторые проблемы газодинамических явлений в угольном массиве в контексте нелинейной неравновесной термодинамики / А.Ф. Булат, В.И. Дырда // Геотехническая механика. – 2013. – Вып. 108. – С. 3–30.
 30. Опарин В.Н. О некоторых особенностях взаимодействия между геомеханическими и физико-химическими процессами в угольных пластах Кузбасса / В.Н. Опарин, Т.А. Киряева, В.Ю. Гаврилов, Р.А. Шутилов, А.П. Ковчавцев, А.С. Танайно, В.П. Ефимов, И.Е. Астраханцев, И.В. Гренев // ФТПРПИ. – 2015. – № 2. – С. 3–30.
 31. Киряева Т.А. Изменение температуры при разработке углеметанового пласта – как мера его выбросоопасности / Т.А. Киряева // German International Journal of Modern Science. – 2021. – № 6. – Р. 11–14.
 32. Киряева Т.А. К вопросу о механизме возникновения высоких температур при разработке угольных пластов / Т.А. Киряева., Р.И. Родин // Уголь. – 2010. – № 2. – С. 29–31. – URL: <https://rucont.ru/efd/461237>.
 33. Лобков Н.И. Особенности распределения температуры по площадям в угольных пластах и вмещающих породах / Н.И. Лобков, А.Г. Радченко // Материалы 6-й конференции Международной научной школы академика РАН К.Н. Трубецкого «Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр», 17-21 июня 2024 г. – М.: ИПКОН РАН, 2024. – С. 58–61.
 34. Рыженко И.А. Прогноз выбросоопасности призабойной части пластов по температурному режиму / И.А. Рыженко, И.Я. Еремин // Уголь Украины. – 1988. – № 3. – С. 36–38.
 35. Фейт Г.Н. Некоторые результаты натурных исследований температуры угольных пластов в зоне влияния горных выработок / Г.Н.Фейт, Э.И.Гайко, С.М.Денисенко, П.М.Канцан // Вопросы вентиляции и борьбы с газом и внезапными выбросами в угольных шахтах: Науч. сообщ. / Ин-т горн. дела им. А.А.Скочинского. – 1977. – Вып. 157. – С. 141–144.
 36. Анциферов А.В. Краткий исторический обзор геологических и научных исследований залежей угольных пластов в Донбассе / Анциферов А.В., Киселев Н.Н., Радченко А.Г., Федосова Н.С., Новикова О.А., Радченко А.А. // Проблемы горного давления. – 2022. – № 1-2 (42-43). – С. 3–32. – URL: <http://pgd.donntu.ru>
 37. Патент на полезную модель № 68676. Способ определения категории выбросоопасности угольных пластов низкой и средней стадий метаморфизма углей. Номер заявки: U 2011 09993, E 21F 5/00. / В.А. Канин, Н.Н. Киселев, А.Г. Радченко, А.А. Радченко, Н.В. Жолоб. – Дата публикации 10.04.2012. – Бюл. № 7. – 4 с.
 38. Патент на полезную модель № 75981. Способ определения категории выбросоопасности угольных пластов. Номер заявки: U 2012 04854, E 21F 5/00. / В.А. Канин, Н.Н. Киселев, В.П. Коптиков, А.Г. Радченко, А.А. Радченко. – Дата публикации 25.12.2012. – Бюл. № 24. – 5 с.
 39. Анциферов А.В. Граничные условия и минимальные глубины проявления внезапных выбросов угля и газа на шахтах Донбасса / А.В. Анциферов, Н.Н. Киселев, А.Г. Радченко, С.М. Федотов, А.А. Радченко // Труды РАНИМИ. – 2020. – № 10–11 (25–26). – С. 204–223.
 40. Анциферов А.В. Внезапные выбросы углей и газа в условиях Донбасса в ряду метаморфизма и с ростом глубины / А.В. Анциферов, Л.А. Камбурова, Н.Н. Киселев, Радченко А.Г., Радченко А.А. // Труды РАНИМИ. – 2019. – № 8 (23), ч. 2. – С. 173–192.

N.I. Lobkov, A.G. Radchenko

Features of the formation of dangerous geomechanical phenomena in rock layers and in coal seams.

The importance of complex consideration of the influence of geological, tectonic, techno-logical and geomechanical processes on gas-dynamic and thermodynamic parameters, physico-mechanical, gas-kinetic properties and stress-strain state of rock layers and coal seams is shown. The analysis of the shortcomings of the physico-mechanical model proposed by V.V. Khodot on the formation of explosive zones in coal seams has been performed. The advantages and advantages of using new physico-chemical and geomechanical-gas-thermodynamic models for the formation of explosive zones in coal seams are considered. The use of physico-chemical and geomechanical-gas-thermodynamic models is an important condition for ensuring the adoption of correct engineering decisions and contributes to increasing the level of safe mining operations in various difficult mining and geological conditions.

Keywords: *emissions of rock layers, emissions of coal and gas, physico-mechanical model, physico-chemical model, geomechanical-gas-thermodynamic model, gas-dynamic parameters, thermodynamic parameters, mining safety.*

*Статья поступила в редакцию 09.08.2024;
доработана 02.09.2024;
рекомендована к печати 13.09.2024.*

УДК 622.847

doi:10.24412/0136-4545-2024-1-107-117

EDN:ZOLAUD



©2024. В.А. Дрибан¹, Н.А. Дуброва²

ОЦЕНКА ЕМКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНОГЕННО-НАРУШЕННЫХ МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД

В статье рассмотрены емкостные характеристики техногенных комплексов, определяющие скорость затопления горных выработок при консервации шахт. Рассмотрен механизм формирования пустотности подработанного массива горных пород в различных горно-геологических условиях. Разработан и реализован новый интегральный подход к оценке пустотности подработанного массива.

Ключевые слова: емкостные характеристики, пустотность, геометрия выработанного пространства, интегральный подход, коэффициент пустотности

Введение. Актуальность задачи определения емкостных характеристик техногенных комплексов в первую очередь связана с реализацией программы реструктуризации угольной промышленности Донбасса, когда получение их достоверных значений является определяющим при расчете сроков и скорости затопления, и лежит в основе составления достоверного гидрогеологического прогноза.

В рамках реструктуризации горнодобывающей промышленности Донецкой Народной Республики (ДНР) осуществляется ликвидация ряда горнодобывающих предприятий методом «мокрой» консервации, предполагающая частичное или полное затопление выработанного пространства. При этом подавляющее большинство затапливаемых горнодобывающих предприятий, расположено в пределах городских агломераций с высокой плотностью жилой и промышленной застройки. Затопление выработанного пространства влечет за собой активизацию негативных геомеханических и гидрогеологических процессов в массиве горных пород, что создает угрозу безопасности, как объектам на поверхности, так и смежным горнодобывающим предприятиям. При этом ключевым вопросом охраны земной поверхности является точность и объективность гидрогео-

¹ Дрибан Виктор Александрович – доктор техн. наук, директор РАНМИ, Донецк, e-mail: viktor-driban@yandex.ru.

Driban Victor Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Director, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

² Дуброва Наталья Александровна – канд. техн. наук, зав. отдела проблем геомеханики обводненных горных массивов РАНМИ, Донецк, e-mail: dubrovan@mail.ru.

Dubrova Natalia Alexandrovna – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanics of Watered Mountain Massifs.

логических прогнозов, которые лежат в основе определения скорости, сроков и безопасной глубины затопления, что в свою очередь определяет основные временные и технико-экономические показатели необходимых мероприятий.

Основными параметрами, используемыми при составлении гидрогеологических прогнозов являются: величина шахтного водопритока (Q); коэффициент заполнения горных выработок при затоплении или коэффициент пустотности (k_p); коэффициент фильтрации (k_f); мощность водоносных горизонтов (m). При этом одной из определяющих задач при составлении достоверного гидрогеологического прогноза, является оценка емкостных свойств подработанного горного массива.

При аналитической оценке режима затопления угледобывающих предприятий емкостными характеристиками техногенного комплекса являются: коэффициент пустотности (k_p), коэффициент суммарной пустотности (k_s), коэффициент недостатка насыщения (μ) и коэффициент упругоэластичности (β).

1. Анализ существующих представлений об определении емкостных свойств подработанного массива. В настоящее время используется несколько методов определения коэффициента пустотности (k_p):

- метод аналогий, возможность применения которого ограничена наличием опыта затопления, предполагающий установление значения коэффициента пустотности путем решения обратной задачи по известным значениям притоков и объемов затопленного выработанного пространства;
- по данным разведочного бурения, которые в подавляющем большинстве случаев не дают удовлетворительных результатов, что связано в первую очередь с критическим недостатком экспериментальных данных;
- рекомендации нормативных документов [1-3].

Рассмотрим рекомендации действующих на данный момент нормативных документов. Документ [1], при отсутствии фактических данных, дает рекомендации по численным значениям коэффициента пустотности. Однако применение рекомендованных значений на практике в большинстве случаев не представляется возможным в виду не полной и не конкретной классификации условий отработки и широкого разброса значений коэффициента пустотности k_p . Так, согласно данным [1], рекомендованные значения $k_p = 0,3 - 0,6$, для выработок, пройденных по аргиллитам (алевролитам) и погашенных с извлечением крепи, находятся в неприемлемо широком, для решения практических задач, диапазоне. Например, при определении объемов затопления старых горных выработок шахты 17-17 «бис» над действующими горными работами шахты им. А.А. Скочинского при применении коэффициента пустотности k_p в указанном диапазоне, объемы, зависевшей в массиве воды, варьируются от 2,5 до 5 млн. м³, что принципиально различным образом влияет на принятие инженерных решений.

Что касается категории очистных выработок, пройденных в зоне выветривания угленосной толщи, представленной преимущественно песчаниками, где k_p варьируется в диапазоне 0,4-1,0, не только не понятно, какое количественное содержание песчаника в массиве следует понимать как преимущественное, но и

разброс в 2,5 раза не дает возможности внятного гидропрогноза. Отсутствует фактическое и логическое обоснование выбора граничной глубины в 100 м для определения значений k_p , которые изменяются в диапазоне 0,05-0,1 и 0,2-0,4 соответственно. Не определены условия зависания пород кровли, что является принципиальным моментом при решении региональных задач, когда идет речь не о единичных лавах, а о группах шахтных полей. Нормативный документ [2], регламентирует аналитическое определение значения коэффициента техногенной пустотности (k_p) по формуле:

$$k_p = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\eta_i \cdot F_i}{m_i}}{n \cdot \sum_{i=1}^{i=n} F_i}, \quad (1)$$

где η_i - оседание земной поверхности на i -ом участке шахтного поля; m_i - средняя мощность вынутаго угольного пласта на i -ом участке шахтного поля; F_i - площадь участка номер i ; n - число расчетных участков.

Также в документе [2] отмечено, что если не имеется информации о фактических оседаниях земной поверхности на конкретном шахтном поле, то ориентировочное значение коэффициента пустотности можно определить по формуле:

$$k_p = 1 - q_0 \cdot \cos \alpha, \quad (2)$$

где q_0 - коэффициент, определяемый по таблице значений для основных угольных бассейнов; α - угол падения угольного пласта.

Приведенный в [2] подход к определению k_p , основанный на идее сравнения значений оседания и вынутаго мощности пласта на конкретном участке, не лишен логики и может служить «протоидеей» для разработки нового подхода к оценке коэффициента пустотности. Однако подобный «площадной» подход демонстрирует неполное понимание основ теории сдвижения, что наиболее ярко проявляется в виде приведенной формулы (2). Во-первых, отсутствие фактических данных об оседаниях земной поверхности на конкретном участке можно с легкостью компенсировать расчетными данными. Во-вторых, формула не выдерживает критики с точки зрения проверки ее адекватности на больших углах падения. Например, в случае $\alpha = 60^\circ$ коэффициент пустотности равен $k_p = 1 - 0,8 \cdot 0,4 = 0,6$, а в случае $\alpha = 90^\circ$ k_p равен 1, что совершенно невозможно.

В нормативном документе [3] коэффициент пустотности k_p обозначен как коэффициент заполнения K_Z и рассчитывается по формуле:

$$K_Z = K_1 \cdot \alpha, \quad (3)$$

где K_1 - коэффициент заполнения для средних горно-геологических условий, приведенный в таблице 2 этого документа; α - поправочный коэффициент, равный:

$$\alpha = K_L \cdot K_\alpha \cdot K_N \cdot K_D, \quad (4)$$

где K_L – коэффициент, учитывающий литологический состав пород кровли в зоне обрушения (при наличии более 40 процентов песчаников $K_L=1,3$); K_α – коэффициент, учитывающий угол падения пластов (при крутом залегании $K_\alpha = 0,75$); K_N – коэффициент, учитывающий количество отработанных пластов (для одного пласта $K_N = 1$, для двух $K_N = 0,9$, для трех-пяти $K_N = 0,8$, свыше пяти $K_N = 0,7$); K_D – коэффициент, учитывающий глубину залегания пласта (при глубине более 600 м $K_D = 0,7$).

Предложенный в [3] подход к определению коэффициента пустотности базируется на использовании избыточного количества поправочных коэффициентов, заведомо ограничивающих диапазон разброса значений K_Z . То есть, поправочные коэффициенты подобраны таким образом, что практически при любых начальных значениях коэффициента заполнения K_1 и не зависимо от условий разработки, итоговые значения коэффициента заполнения находятся в диапазоне 0,2-0,3. Более того, в случаях расчета для свиты пластов в условиях крутого падения на больших глубинах, когда K_Z уменьшается до значений 0,15, в силу вступают ограничения, регламентирующие минимально возможные показатели на уровне 0,2 для крутого и 0,3 для пологого залегания угольных пластов.

Таким образом, нормативные документы [2, 3] ограничивают минимальное значение k_p на уровне 0,2-0,3 и не ниже. Объясняется это спецификой практического применения предложенных методик, когда речь идет о решении практических гидрогеомеханических задач, связанных с оценкой объемов «зависшей» в массиве воды или устойчивостью барьерных целиков. На первый взгляд, использование завышенных минимальных значений k_p , оправдано, понятно и психологически комфортно, так как ошибочно полагается, что заведомая переоценка объемов скопившейся в массиве воды исключает риск возникновения опасных ситуаций. На самом деле, ситуация обстоит с точностью до наоборот. «Искусственное» увеличение значений k_p не только ничем не обосновано, но и может провоцировать аварийные ситуации. Например, на устойчивость барьерных целиков, в первую очередь влияет не объем скопившейся в массиве воды, а высота гидравлического столба, оказывающего на него давление. При этом расчет его высоты базируется на значениях коэффициента пустотности, завышенные показатели которого способны привести к недооценке возникающего давления. Также принципиально не важно, какое именно количество воды скопилось в массиве – тысячи тонн или миллионы - в случае внезапного прорыва нанесенный урон будет одинаково катастрофичным, по крайней мере, с точки зрения безопасности.

Подобная завышенная оценка минимальных значений k_p может привести и к не менее серьезным ошибкам в случаях решения задач, связанных с определением сроков и скорости затопления ликвидируемых шахт, проявившись в уменьшении прогнозной скорости затопления и увеличении его сроков. Неверно рассчитанные сроки и скорости затопления могут приводить к срыву работ по строительству водоотливных комплексов, что, помимо существенных материальных убытков, может привести к изливу подземных вод на земную поверх-

ность, подтоплению и заболачиванию территорий, перетокам и прорывам в действующие горные выработки и т.п. Дополнительно отметим, что предложенные в [2, 3] методические подходы ориентированы на группы горных выработок и не позволяют оценить остаточную пустотность одиночной лавы, что может быть важно при решении ряда практических задач.

Отметим, что коэффициент пустотности характеризует пустотность выработанного пространства, образовавшуюся в процессе ведения горных работ и не учитывает естественную трещиноватость подработанного массива горных пород. При наличии экспериментальных данных о режиме затопления шахты в аналогичных условиях, коэффициент суммарной пустотности (техногенной и естественной) может быть определен по формуле [2]:

$$k_s = \frac{V_v}{V_s} = \frac{Q \cdot t}{V_s}, \quad (5)$$

где V_v – объем подземных вод, поступивший в горные выработки при затоплении шахты в аналогичных условиях, м³; V_s – суммарный объем угля, извлеченный в аналогичных условиях, м³; Q – средний водоприток в течении времени t , м³/сут.

Еще одним влияющим фактором при оценке скорости затопления является удельная емкостная характеристика техногенного комплекса – коэффициент недостатка насыщения, который аналогичен коэффициенту гравитационной водоотдачи, характеризующему емкостные свойства породного массива при его осушении. Учитывая то, что коэффициент пустотности характеризует техногенную и естественную пустотность только техногенного комплекса, коэффициент недостатка насыщения μ определяют по формуле [2]:

$$\mu = \frac{k_p \cdot m_{sr}}{M_{sr}}, \quad (6)$$

где k_p – коэффициент пустотности; m_{sr} – средняя мощность отработанного угольного пласта, м; M_{sr} – средняя мощность техногенного комплекса, м.

При затоплении глубоких шахт, водоприток расходуется не только на насыщение сдренированного трещиноватого массива в пределах техногенного комплекса, но и на заполнение пустотности массива, обусловленной его разуплотнением при снижении эффективных напряжений в породном скелете за счет повышения гидростатических давлений [4]. Таким образом, водонасыщенный массив характеризуется коэффициентом упругоэластичности (β), который соответствует объему воды, поглощенному водонасыщенным массивом при увеличении гидростатического давления или напора на 1 м. Величина коэффициента упругоэластичности определяется литологическим составом пород, их прочностными характеристиками и пористостью. Для прочных песчаников, алевролитов и известняков коэффициент упругоэластичности может быть принят в интервале от 10^{-5} – 10^{-7} , для песчано-глинистых отложений 10^{-3} – 10^{-4} [5]. Для приближительных оценок коэффициент упругоэластичности метаморфизованных отложений

может быть определен по формуле [2]:

$$\beta = \frac{10^{-3}}{Z}, \quad (7)$$

где β – коэффициент упругоэластичности, $1/\text{м}$; Z – глубина залегания расчетного слоя в породном массиве.

Суммируя, можно сделать вывод о том, что указанные неточности и неопределенности в рекомендациях действующих нормативных документов не только затрудняют их полноценное применение на практике, но и в целом ряде геомеханических ситуаций приводят к возникновению ошибок первого рода.

2. Цель работы. Исходя из изложенного, целью данной работы является разработка нового подхода к оценке пустотности выработанного пространства и выявление особенностей ее формирования в различных горно-геологических условиях.

Подчеркнем, что для получения интегральных оценок пустотности подработанного массива, первостепенным является определение k_p для области выработанного пространства. Обусловлено это тем обстоятельством, что объем пустотности выработанного пространства на 1 – 2 порядка больше объема капитальных выработок, несмотря на принципиально различные значения k_p .

Идея работы заключается в сравнении объема выработанного пространства и объема мульды сдвижения на земной поверхности. При этом нормированный дефицит объемов и даст расчетный коэффициент пустотности k_p .

3. Оценка пустотности подработанного массива горных пород. Итак, исходя из идеи сравнения объема выработанного пространства и объема мульды сдвижения на земной поверхности, искомое значение коэффициента пустотности определяется формулой:

$$k_p = 1 - V^{-1} \iint_{\Omega} \eta(x, y) dx dy, \quad (8)$$

где $\eta(x, y)$ – оседания земной поверхности; Ω – область мульды сдвижения; V – объем выработанного пространства.

Отметим, что полученное выражение складывается из двух компонент:

- 1) непосредственно пустотность в зоне выработанного пространства;
- 2) общее разуплотнение (как с разрывом сплошности, так и без последнего) подработанного массива при формировании напряженно-деформированного состояния массива под воздействием очистных выработок.

Основными факторами, влияющими на k_p , являются: геометрические параметры выработанного пространства, глубина отработки, угол падения, параметры сдвижения в данном горнопромышленном районе.

Для оценки остаточной пустотности массива на пологом падении в условиях Донецко-Макеевского района Донбасса было проведено имитационное моделирование. Геометрия выработанного пространства по простиранию и падению горных пород изменялась в диапазоне от 200 м до 2000 м. Глубина отработки от

200 до 1400 м. Угол падения горных пород 0° . При шаге расчета 200 м, число расчетных вариантов – 968.

Для каждого расчетного варианта вычислены значения объема лавы и мульды сдвижения. Параметры мульды рассчитаны на основании действующих «Правил подработки..» [5].

На основании полученных данных построены карты распределения коэффициента общей пустотности k_p в зависимости от размеров выработанного пространства.

Анализ полученных результатов выявил необходимость унификации представления полученных экспериментальных данных, для чего было выполнено нормирование размеров выработанного пространства относительно глубины отработки. Как будет показано далее, данный подход позволил систематизировать распределение k_p в порядке и последовательности, образующей четкую систему, удобную для использования и анализа. Дело в том, что при оценке остаточной пустотности, принципиальное значение имеют соотношения геометрии выработанного пространства и глубины отработки, которые и определяют ее численные значения. Соответствующие карты распределения k_p по нормированному параметру приведены на рисунке 1.

Предложенный подход к унификации геометрии выработанного пространства дает принципиальную возможность совместного рассмотрения карт распределения для различных горнотехнических ситуаций и позволяет установить типовые закономерности распределения k_p . На рисунке 2 представлена совмещенная карта распределения k_p .

Анализ полученных результатов позволяет выявить закономерности в характере распределения значений коэффициента пустотности. Обратим внимание на факт совпадения численных значений k_p , рассчитанных для различных глубин. Указанное замечание свидетельствует об универсальности сформулированного интегрального подхода. Таким образом, можно утверждать, что установлены типовые распределения коэффициента пустотности. Заметим дополнительно, что при решении практических гидрогеомеханических задач в основном необходимы значения «прямой» пустотности выработанного пространства.

Для выделения прямой пустотности и пустотности, обусловленной разуплотнением массива, применен подход пошаговой минимизации глубины разработки при расчете коэффициента пустотности. Как видно из рисунка 1, на малых глубинах ведения горных работ, значения коэффициента остаточной пустотности составляют 0,2-0,1 и менее. То есть практически весь объем вынужденного полезного ископаемого проявляется на земной поверхности в виде мульды сдвижения, что позволяет считать распределение k_p на малых глубинах свободным от пустотности за счет разуплотнения массива. Взяв за основу данное соображение, мы получаем возможность выделять прямую пустотность и пустотность обусловленную разуплотнением массива для любых вариантов соотношений геометрии выработанного пространства в условиях пологого залегания угольных пластов [6].

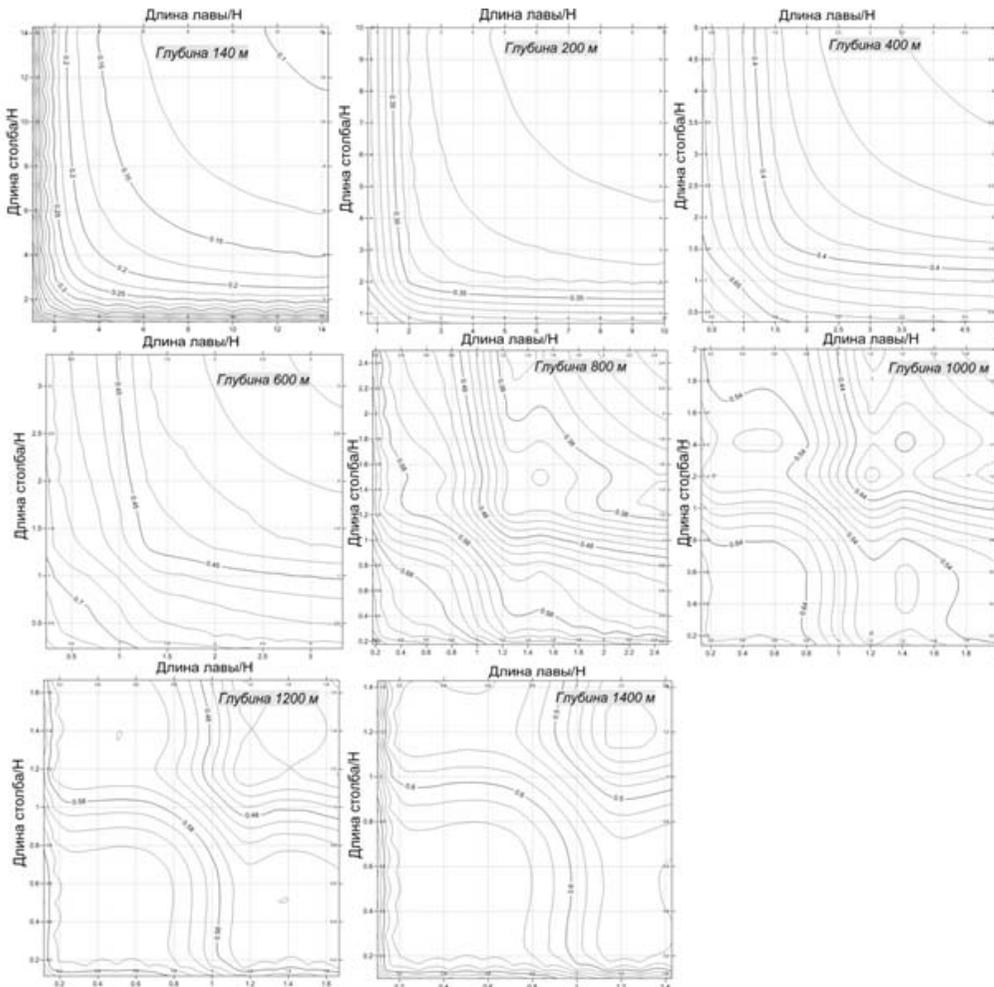


Рис. 1. Распределение коэффициента общей пустотности k_p в зависимости от нормированных параметров.

Механизмы формирования пустотности массива в условиях крутого падения будут иными. Обусловлено это как спецификой теории сдвижения, так и особенностями ведения горных работ: в подавляющем большинстве случаев отработка ведется последовательно сверху вниз с приблизительно равным шагом изменения средней глубины разработки. При этом применение идеологии минимизации глубины требует дополнительной корректировки в силу особенностей теории сдвижения на крутом падении.

Для оценки остаточной пустотности массива в условиях крутого падения было проведено имитационное моделирование. Геометрия выработанного пространства по падению горных пород изменялась с учетом типичной погоризонтной отработки (шаг 110 м), по простиранию – от 500 м до 2000 м. Угол падения горных пород 60° .

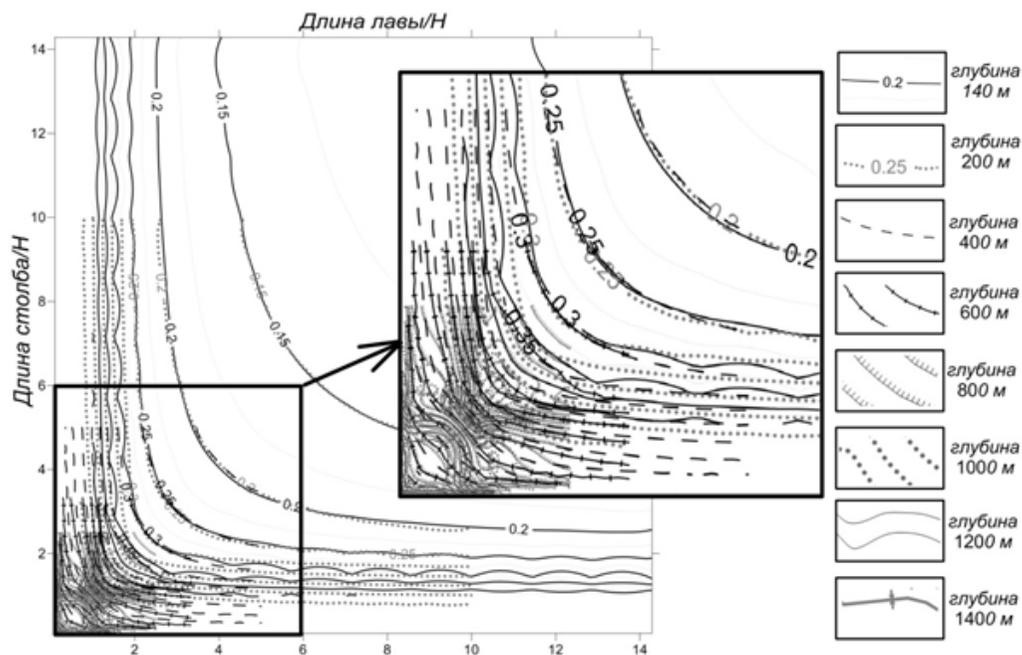


Рис. 2. Совмещенная карта распределения k_p .

Аналогично для каждого расчетного варианта вычислены значения объема лавы и мульды сдвижения [4] и рассчитаны значения коэффициента пустотности по формуле (5). На основании полученных данных построены графики распределения коэффициента общей пустотности k_p в зависимости от глубины разработки для выработанного пространства разного размера (рис. 3). Отметим, что для каждого расчетного варианта была принята максимально возможная, с учетом угла падения и приповерхностного целика, длина лавы, а длина выемочного столба варьировалась, как представлено на графиках (рис. 3).

Анализ полученных результатов позволил выявить линейную закономерность в характере распределения значений k_p для выработанного пространства больших размеров по простиранию (полная подработка) в зависимости от глубины разработки. Так для выработанного пространства с длиной выемочного столба: 2000 м – k_p изменяется в диапазоне 0,23–0,29; 1500 м – k_p изменяется в диапазоне 0,24–0,32; 1000 м – k_p изменяется в диапазоне 0,25–0,38 и демонстрирует стабильный несущественный рост с увеличением глубины отработки.

Установлено, что размер выработанного пространства по простиранию оказывает основное влияние на формирование остаточной пустотности. Так численные значения k_p для «больших» лав колеблются в пределах 0,25–0,35, в то время как k_p «малых» лав достигают значений 0,53–0,58. Влияние условий полной и не полной подработки прослеживается на верхних графиках рисунка 3 (250 и 500 м).

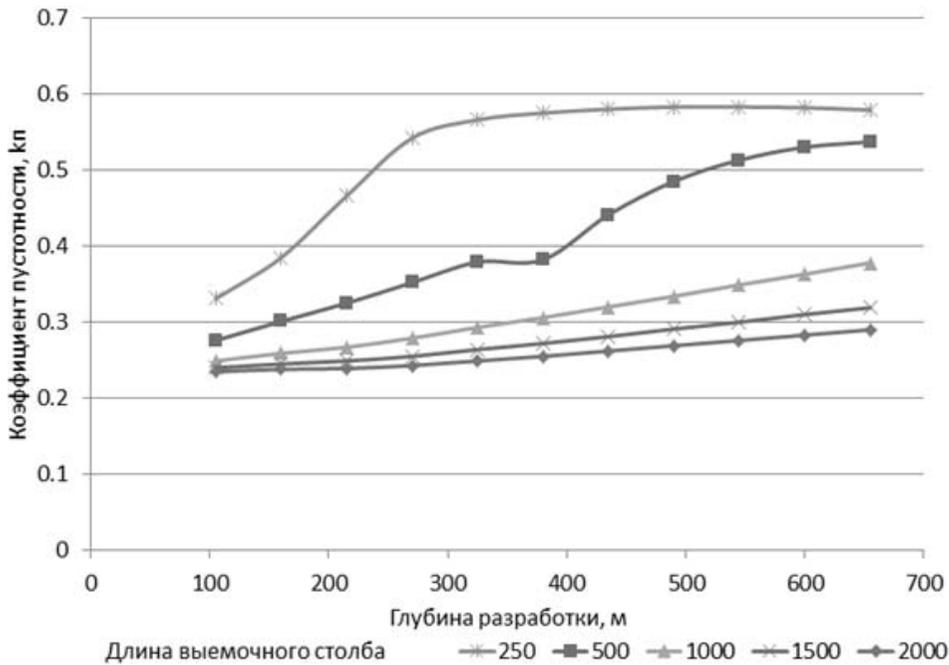


Рис. 3. Графики изменения k_p от глубины разработки.

Разработанный подход позволяет оценивать остаточную пустотность как отдельных горных выработок, так и выработанного пространства в масштабах горнодобывающего предприятия и групп шахтных полей, что важно при решении практических гидрогеомеханических задач по ликвидации кустов шахт методом мокрой консервации. Отметим, что влияние кольматации, повторного деформирования массива и введение поправочных коэффициентов в полученные значения будет являться предметом дальнейших исследований. При этом очевидно, что введение поправок приведет к понижению полученных расчетных значений.

Закключение. Установлено, что ключевым фактором при формировании техногенной пустотности подработанного массива является горно-техническая ситуация отработки угольного пласта. Разработан и реализован новый интегральный подход к оценке пустотности подработанного массива горных пород. Выявлены основные закономерности в характере распределения значений коэффициента пустотности в различных горно-геологических условиях, что свидетельствует об универсальности предложенной методики, которая может быть использована при решении широкого ряда практических гидрогеомеханических задач.

1. Методические указания по оценке гидрогеологических условий ликвидации угольных шахт, обоснованию мероприятий по управлению режимом подземных вод и обеспечению экологической безопасности. – М.: ИПКОН РАН, 1997. – 24 с.

2. Методическое руководство по прогнозу гидрогеологических условий ликвидации угольных шахт и обоснованию мероприятий, обеспечивающих предотвращение негативных экологических последствий. – СПб.: ВНИМИ, 2008. – 79 с.
3. Методические положения по решению гидрогеологических задач при разработке проекта ликвидации шахты (пособие проектировщику) РТМ 6.04.95. – Донецк: Донгипрошахт, 1995. – 17 с.
4. *Мироненко В.А.* Динамика подземных вод / В.А. Мироненко. – М.: Недра, 1983. – 357 с.
5. ГСТУ 101.00159226.001- 2003 Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01.01.2004. – К.: 2004. – 128 с.
6. *Дрибан В.А.* Оценка пустотности подработанного массива горных пород / В.А. Дрибан, Н.А. Дуброва // Труды РАНМИ: сб.научн.трудов. – 2019. – № 7(22). – С. 170–177.

V.A. Driban, N.A. Dubrova

The capacitive characteristics of technogenically disturbed rock mass assessment.

The article considers the capacitive characteristics of technogenic com-plexes that determine the mine conservation flooding rate. The voidness-formation mechanisms of the underworked ground under varying mining and geological conditions are shown. A new integrated approach to assess voidness of the underworked rock mass is devised and utilized.

Keywords: *capacitive characteristics, voidness, geometry of mined-out space, integral approach, voidness coefficient.*

*Статья поступила в редакцию 19.08.2024;
доработана 12.09.2024;
рекомендована к печати 20.09.2024.*