

ISSN 2415-7058 (Print)  
ISSN 2415-7066 (Online)

# Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ  
ЖУРНАЛ  
*Основан  
в 1997 году*

---

*Серия А*  
**Естественные  
науки**

---

**2/2024**

---

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»**

**Главный редактор** – д-р физ.-мат. наук, проф. *С.В. Беспалова*.

**Зам. главного редактора** – д-р биол. наук, проф. *О.С. Горецкий*.

**Ответственный секретарь** – канд. физ.-мат. наук *М.В. Фоменко*.

**Члены редколлегии:** д-р биол. наук, проф. *В.В. Акатов*, д-р хим. наук, проф. *А.С. Алемасова*; д-р биол. наук, проф. *В.Г. Артюхов*; канд. хим. наук, доц. *О.В. Баранова*; канд. хим. наук, доц. *С.Г. Бахтин*; д-р хим. наук, доц. *Н.И. Белая*; канд. хим. наук, доц. *А.В. Белый*; д-р философии, проф. *С.В. Белый*; д-р пед. наук, доц. *Т.В. Вардун*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Вал.В. Волчков*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Вит.В. Волчков*; д-р биол. наук, проф. *А.З. Глухов*; д-р физ.-мат. наук, проф. *А.С. Гольцев*; д-р биол. наук, доц. *С.Н. Горбов*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Г.В. Горр*; д-р хим. наук, проф. *А.В. Гулевская*; д-р биол. наук, доц. *Т.В. Денисова*; д-р хим. наук, проф. *В.Д. Дяченко*; д-р физ.-мат. наук, проф. *В.П. Заставный*; д-р физ.-мат. наук, доц. *А.В. Зыза*; д-р геогр. наук, проф. *К.Ш. Казеев*; д-р биол. наук, проф. *В.Н. Калаев*; канд. биол. наук, доц. *Е.А. Калаева*; д-р физ.-мат. наук, проф. *С.А. Калоеров*; д-р биол. наук, с.н.с. *О.Е. Клименко*; д-р с-х наук, проф. *С.И. Колесников*; д-р физ.-мат. наук, доц. *Б.И. Коносевиц*; канд. биол. наук *В.О. Корниенко*; д-р хим. наук, проф. *Т.П. Кустова*; д-р биол. наук, доц. *Е.В. Лопатина*; д-р хим. наук, проф. *В.М. Михальчук*; д-р физ.-мат. наук, доц. *И.А. Моисеенко*; д-р биол. наук, проф. *И.В. Мухина*; д-р физ.-мат. наук, доц. *Р.Н. Нескородев*; д-р биол. наук, проф. *В.Б. Павленко*; д-р биол. наук, доц. *С.В. Погодина*; канд. биол. наук, доц. *А.И. Сафонов*; д-р биол. наук, проф. *В.И. Соболев*; д-р техн. наук, проф. *В.И. Сторожев*; канд. мед. наук, доц. *В.В. Труш*; д-р хим. наук *Т.Г. Тюрин*; д-р биол. наук, доц. *М.Г. Холявка*; д-р хим. наук, доц. *И.Н. Щербаков*.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences”**

**The Editor-in-Chief** – Dr. of phys. and math., prof. *S.V. Bepalova*.

**The Deputy of the Editor-in-Chief** – Dr. of biol., prof. *O.S. Goretskii*.

**Executive Secretary** – Cand. of phys. and math. *M.V. Fomenko*.

**The Members of the Editorial Board:** Dr. of biol., prof. *V.V. Akatov*; Dr. of chem., prof. *A.S. Alemasova*; Dr. of biol., prof. *V.G. Artyuhov*; Cand. of chem., docent *O.V. Baranova*; Cand. of chem., docent *S.G. Bahtin*; Dr. of chem., docent *N.I. Belaya*; Cand. of chem., docent *A.V. Belyj*; Dr. of philosophy, prof. *S.V. Belyi*; Dr. of Ped. docent *T.V. Varduni*; Dr. of phys. and math., prof. *Val.V. Volchkov*; Dr. of phys. and math., prof. *Vit.V. Volchkov*; Dr. of biol., prof. *A.Z. Glukhov*; Dr. of phys. and math., prof. *A.S. Goltsev*; Dr. of biol., docent *S.N. Gorbov*; Dr. of phys. and math., prof. *G.V. Gorr*; Dr. of chem., prof. *A.V. Gulevskaya*; Dr. of biol., docent *T.V. Denisova*; Dr. of chem., prof. *V.D. Dyachenko*; Dr. of phys. and math., prof. *V.P. Zastavnyj*; Dr. of phys. and math., docent *A.V. Zyza*; Dr. of geogr. prof. *K.Sh. Kazeev*; Dr. of biol., prof. *V.N. Kalaev*; Cand. of biol., docent *E.A. Kalaeva*; Dr. of phys. and math., prof. *S.A. Kaloerov*; Dr. of biol., s.r. *O.E. Klimenko*; Dr. of Agric. prof. *S.I. Kolesnikov*; Dr. of phys. and math., docent *B.I. Konosevich*; Cand. of biol. *V.O. Kornienko*; Dr. of chem., prof. *T.P. Kustova*; Dr. of biol., docent *E.V. Lopatina*; Dr. of chem., prof. *V.M. Mikhal'chuk*; Dr. of phys. and math., docent *I.A. Moiseyenko*; Dr. of biol., prof. *I.V. Muhina*; Dr. of phys. and math., docent *R.N. Neskorodev*; Dr. of biol., prof. *V.B. Pavlenko*; Dr. of biol., docent *S.V. Pogodina*; Cand. of biol., docent *A.I. Safonov*; Dr. of biol., prof. *V.I. Sobolev*; Dr. of tech., prof. *V.I. Storozhev*; Cand. of med., docent *V.V. Trush*; Dr. of chem. *T.G. Tyurina*, Dr. of biol., docent *M.G. Holyavka*, Dr. of chem., docent *I.N. Shcherbakov*.

**Адрес редакции:** ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, РФ.

**Тел:** +7 (856) 302-92-56, 302-09-92. **E-mail:** [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru) **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

С 09.04.2024 г. научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» (далее – Журнал) включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (**Перечень ВАК РФ**) по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

*физико-математические науки:* 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин, 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела;  
*химические науки:* 1.4.3. Органическая химия, 1.4.4. Физическая химия;  
*биологические науки:* 1.5.2. Биофизика, 1.5.5. Физиология человека и животных, 1.5.15. Экология, 1.5.19. Почвоведение.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Издается по решению Ученого совета ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Протокол № 10 от 13.09.2024 г.*

© ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», 2024

# Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 2

Донецк 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Математика*

- Волчков В. В., Пилипенко И. С.* Аппроксимация функций в  $L_p$  линейными комбинациями индикаторов . . . . . 3
- Волчков В. В., Тимофеева К. В.* Аналоги теоремы Дзядька о голоморфности для вещественно аналитических функций . . . . . 9
- Заставный В. П.* Продолжение радиальной функции с внешности шара до функции, положительно определенной на всем пространстве . . . . . 14
- Иванов А. Ю., Мельник А.-В. В.* Об уточнении множества применимости метода конструирования магических квадратов при помощи ортогональных трансверсалей . . . . . 29
- Лиманский Д. В.* О характеристике системы минимальных дифференциальных операторов посредством априорных оценок в пространствах Соболева . . . . . 38
- Манов А. Д.* О приближении финитных положительно определённых функций гладкими функциями . . . . . 57
- Машаров П. А., Власенко И. С.* Экстремальный вариант проблемы Помпейю для семейства из равнобедренного треугольника и квадрата . . . . . 62
- Сушков В. В.* О спектре и собственных функциях в решении двухгруппового уравнения переноса с постоянным ядром . . . . . 70

### *Механика*

- Бондаренко Н. С., Гольцев А. С.* Анализ термоупругого состояния изотропных пластин с теплопроницаемым разрезом на базе обобщенной теории . . . . . 81
- Калоеров С. А., Полянский М. А., Сероштанов А. В.* Решение задачи электромагнитоупругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами . . . . . 90
- Калоеров С. А., Сошина Е. И., Мироненко А. Б.* Кручение анизотропного цилиндра с продольными полостями и плоскими трещинами . . . . . 108

# Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A. Natural Sciences

№ 2

Donetsk 2024

---

## CONTENTS

### *Mathematics*

<i>Volchkov V. V., Pilipenko I. S.</i> Approximation of functions in $L_p$ by linear combinations of indicators . . . . .	3
<i>Volchkov V. V., Timofeeva K. V.</i> Analogs of Dzyadyk's theorem on holomorphicity for real analytic functions . . . . .	9
<i>Zastavnyi V. P.</i> The continuation of the radial function from the exterior of the ball to a function positively defined on the entire space . . . . .	14
<i>Ivanov A. Yu., Melnik A.-V. V.</i> On clarifying the set of applicability of the method of constructing magic squares using orthogonal transversals . . . . .	29
<i>Limanskii D. V.</i> On characterization of a system of minimal differential operators by a priori estimates in the Sobolev spaces . . . . .	38
<i>Manov A. D.</i> On the approximation of positive definite functions with compact support by smooth functions . . . . .	57
<i>Masharov P. A., Vlasenko I. S.</i> The extreme version of Pompeiu's problem for a family of a isosceles triangle and e squire . . . . .	62
<i>Sushkov V. V.</i> Spectrum and eigenfunctions in solving the two-group constant-kernel transfer equation . . . . .	70

### *Mechanics*

<i>Bondarenko N. S., Goltsev A. S.</i> Analysis of the thermoelastic state of isotropic plates with a heat permeable cut based on the generalized theory . . . . .	81
<i>Kaloerov S. A., Polianskii M. A., Seroshtanov A. V.</i> Solution of the electromagnetoelasticity problem for a half-plane with holes and cracks . . . . .	90
<i>Kaloerov S. A., Soshyna E. I., Mironenko A. B.</i> Torsion of an anisotropic cylinder with longitudinal cavities and planar cracks . . . . .	108

## АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ В $L_p$ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ИНДИКАТОРОВ

© 2024. В. В. Волчков, И. С. Пилипенко

В работе установлены условия на открытое множество  $G$ , при которых для любой функции  $f \in L^p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует конечная линейная комбинация  $g_\varepsilon$  индикаторов замкнутых единичных квадратов и замкнутых единичных полукругов, содержащихся в  $G$ , таких что  $\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(G)} < \varepsilon$ . Также рассмотрены случаи, когда данной аппроксимации не существует.

**Ключевые слова:** аппроксимация функций, теорема Винера, локальное свойство Помпейю, индикаторы множеств.

**Введение.** Пусть  $\mathbb{R}^n$  — вещественное евклидово пространство размерности  $n$ ,  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , — пространство функций, суммируемых с  $p$ -й степенью на  $\mathbb{R}^n$ . Классическая теорема Винера о ”замыкании сдвигов” утверждает, что линейные комбинации сдвигов функций  $f_m \in L(\mathbb{R}^1)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , плотны в  $L(\mathbb{R}^1)$  тогда и только тогда, когда преобразования Фурье всех функций  $f_m$  не имеют общего нуля на  $\mathbb{R}^1$  (см., например, [1]).

Позже были получены аналоги этого результата для локально-компактных абелевых групп (см., например, [2] и библиографию к этой работе, а также [3, гл.7, §37]). Теорема Винера получила дальнейшее развитие и уточнение во многих работах (см. [4] - [7]).

Весьма актуальными являются вопросы аппроксимации функций в пространстве  $L^p$  на ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  линейными комбинациями сдвигов финитных функций. В отличие от  $\Omega = \mathbb{R}^n$  при этом возникают новые эффекты: возможность и скорость аппроксимации существенно зависят от размеров  $\Omega$  и размеров носителей приближающих функций. Кроме того, замыкание линейной оболочки сдвигов одной функции из  $L^p(\Omega)$ , таких, что носитель каждого сдвига содержится в  $\Omega$ , не совпадает с  $L^p(\Omega)$ .

Указанные явления тесно связаны с некоторыми аспектами периодичности в среднем и имеют место для некомпактных двухточечно-однородных пространств (см. [6]- [8]).

В работе [9] получены локальные аналоги теоремы Винера для  $n$ -мерной сферы. Там же приводятся некоторые результаты об аппроксимации функций на подмножествах сферы линейными комбинациями индикаторов. Их доказательства основаны на новом методе изучения множеств единственности решений уравнения свертки на сфере.

Отметим также, что рассмотренные выше вопросы тесно связаны с локальным вариантом проблемы Помпейю (см. обзоры [10], [11], а также книги [4], [7], [8] с обширной библиографией).

**Формулировка основных результатов.** Перейдём к формулировкам основных результатов работы. Нам потребуются следующие определение.

**Определение 1.** Пусть  $r_1, r_2 > 0$ . Открытое множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  будем называть  $(r_1, r_2)$ -областью, если выполняются следующие условия:

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6)

1.  $G$  содержит замкнутый круг радиуса  $r_1$ ;
2.  $G$  является объединением замкнутых кругов радиуса  $r_2$ ;
3. центры двух любых замкнутых кругов радиуса  $r_2$ , содержащихся в  $G$ , можно соединить ломаной так, что всякий замкнутый круг радиуса  $r_2$  с центром на этой ломаной содержится в  $G$ .

Всюду в дальнейшем рассматривается случай  $n = 2$ .

**Теорема 1.** Пусть множество  $G$  является  $(r_1, r_2)$ -областью при  $r_1 = \frac{\sqrt{65}}{8}$ ,  $r_2 = \sqrt{2}/2$ . Тогда для любой функции  $f \in L^p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует конечная линейная комбинация  $g_\varepsilon$  индикаторов замкнутых единичных квадратов и замкнутых единичных полукругов, содержащихся в  $G$ , таких что

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(G)} < \varepsilon.$$

При  $p = \infty$  данное утверждение неверно.

Очевидно, что утверждение теоремы 1 не может выполняться без каких-либо условий на открытое множество  $G$ , поскольку оно должно содержать хотя бы один замкнутый единичный квадрат или полукруг. Поэтому возникает вопрос о том, насколько можно ослабить условия на  $G$  из определения 1, содержащиеся в условии теоремы 1. Как уже отмечено выше, величину  $r_2 = \sqrt{2}/2$  уменьшить нельзя, т.к. это радиус круга, описанного вокруг единичного квадрата. Следующий результат показывает, что условие 3 о связности множества центров кругов из определения 1 в общем случае убрать нельзя.

**Теорема 2.** Пусть  $r_1 > 0$ ,  $r_2 = \sqrt{2}/2$ . Тогда существует область  $G \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1.  $G$  содержит замкнутый круг радиуса  $r_1$ ;
2.  $G$  является объединением замкнутых кругов радиуса  $r_2$ ;
3. для области  $G$  утверждение теоремы 1 не выполняются ни при каком  $p \geq 1$ .

**Вспомогательные утверждения.** Обозначим через  $\mathcal{K}(G)$  множество функций  $f \in L_{loc}(G)$ , имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам, лежащим в области  $G \subset \mathbb{R}^2$  (если  $G$  не содержит таких квадратов, то полагаем  $\mathcal{K}(G) = L_{loc}(G)$ ). Пусть также  $\mathcal{K}^\infty(G) = \mathcal{K}(G) \cap C^\infty(G)$ . Далее нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения о свойствах  $\mathcal{K}(G)$ , часть из которых уже использовалась в предыдущих работах.

**Лемма 1.** Пусть  $f \in \mathcal{K}^\infty(G)$ . Тогда выполнены следующие утверждения:

1. все частные производные от  $f$  принадлежат  $\mathcal{K}^\infty(G)$ ;
2. для любого замкнутого единичного квадрата  $K \subset G$  суммы значений  $f$  в противоположных вершинах  $K$  равны.

**Доказательство.** Пусть  $K \subset G$  – замкнутый единичный квадрат. Тогда

$$\int_K f(x+h)dx = 0$$

для всех  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ , таких что  $K+h \subset G$ . Дифференцируя это равенство по  $h_1$  и  $h_2$ , а затем полагая  $h = 0$ , получим требуемые утверждения.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\delta > 0$ ,  $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \delta + \sqrt{2}/2\}$  и  $f \in \mathcal{K}^\infty(G)$ . Тогда в области  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2} - \delta < |x| < \frac{\sqrt{2}}{2} + \delta\}$  функция  $f$  имеет вид

$$f(x_1, x_2) = c_1(x_1^2 + x_2^2) + c_2x_1 + c_3x_2 + c_4,$$

где  $c_1, \dots, c_4$  — комплексные постоянные.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Второе утверждение леммы 1 показывает, что лемма 2 является частным случаем теоремы 3, полученной в работе [9].  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\rho > 0$ ,  $L$  — ломаная в  $\mathbb{R}^2$  и  $M$  — объединение всех замкнутых кругов радиуса  $\rho$  с центрами на  $L$ . Пусть также  $f \in C(M)$ ,  $f = 0$  на каждой из окружностей радиуса  $\rho$  с центром на  $L$  и  $f = 0$  в некотором круге радиуса  $\rho$  с центром на  $L$ . Тогда  $f = 0$  на  $M$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно заметить, что при указанных условиях множество  $M$  является объединением всех окружностей радиуса  $\rho$  с центрами на  $L$  и круга радиуса  $\rho$ , на котором  $f$  равна нулю.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть область  $G \subset \mathbb{R}^2$  удовлетворяют условиям 2 и 3 из определения 1 при  $r_2 = \sqrt{2}/2$ . Пусть также  $f \in \mathcal{K}(G)$  и  $f = 0$  в некотором круге радиуса  $r > \sqrt{2}/2$ , содержащимся в  $G$ . Тогда  $f = 0$  в  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно доказать, что для любой точки  $x \in G$  функция  $f$  является нулевой в некоторой окрестности  $x$ . Итак, пусть  $x \in G$ , тогда существует замкнутый круг радиуса  $r_2 = \sqrt{2}/2$ , содержащийся в  $G$ , для которого точка  $x$  является внутренней. Обозначим через  $x'$  центр этого круга, и пусть  $x''$  — центр круга радиуса  $r$ , на котором  $f = 0$ . Из условия леммы следует, что существует ломаная  $L$  с концами  $x'$  и  $x''$ , такая что всякий замкнутый круг радиуса  $r_2$  с центром на  $L$  содержится в  $G$ . Пусть  $M$  — объединение всех этих кругов, тогда  $M$  — компактное подмножество  $G$ . Отсюда следует, что существует  $\delta \in (0, r - \sqrt{2}/2)$ , такое что всякий замкнутый круг радиуса  $\delta$  с центром на  $M$  содержится в  $G$ . Пусть  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  и  $\varphi(x) = 0$  при  $|x| \geq \delta$ . Тогда функция

$$(f * \varphi)(x) = \int_G f(y)\varphi(x - y)dy$$

принадлежит классу  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  и имеет нулевой интеграл по любому замкнутому единичному квадрату, лежащему в объединении всех открытых кругов радиуса  $\delta$  и центром на  $M$ . Пусть  $F$  — некоторая частная производная третьего порядка от функции  $f * \varphi$ . Из свойств функции  $f * \varphi$  и лемм 1 и 2 получаем, что  $F \in C^\infty(M)$ ,  $F = 0$  на каждой окружности радиуса  $r_2$  с центром на  $L$  и  $F = 0$  в круге  $|x - x''| \leq r_2$ . Тогда  $F = 0$  на  $M$  в силу леммы 3. Поскольку это выполнено для любой частной производной от  $f * g$  третьего порядка, это означает, что функция  $f * \varphi$  является многочленом не выше второй степени на  $M$ . Учитывая указанное выше свойство нулевых интегралов от  $f * \varphi$  по квадратам, имеем  $f * \varphi = 0$  на  $M$  (см. лемма 7 в [13]). Далее, поскольку функцию  $\varphi$  можно выбрать произвольно, отсюда следует, что  $f = 0$  на  $M$ . В частности,  $f = 0$  в окрестности точки  $x$ , а это и требовалось.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  является  $(r_1, r_2)$ -областью при  $r_1 = \frac{\sqrt{65}}{8}$ ,  $r_2 = \sqrt{2}/2$ . Пусть также  $f \in \mathcal{K}(G)$  и интеграл от  $f$  по любому замкнутому единичному полукругу, содержащемуся в  $G$ , равен нулю. Тогда  $f = 0$  в  $G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что  $G$  содержит открытый круг радиуса  $R > r_1$ . Отсюда и из теоремы 1 из [13] получаем, что  $f = 0$  в этом круге. Согласно лемме 4, это означает, что  $f = 0$  в  $G$ .  $\square$

#### Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть  $X$  — множество всех индикаторов замкнутых единичных квадратов и замкнутых единичных полукругов, содержащихся в  $G$ . Рассмотрим произвольный линейный непрерывный функционал  $F$  на пространстве  $L^p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , такой что

$$F(\chi) = 0 \text{ для всех } \chi \in X. \quad (1)$$

Из теоремы Рисса об общем виде линейных непрерывных функционалов в  $L^p(G)$  следует, что существует функция  $\varphi \in L^q(G)$ ,  $q = p/(p - 1)$ , такая что

$$F(u) = \int_G \varphi(x)u(x)dx \text{ для любой } u \in L^p(G). \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$\int_G \varphi(x)\chi(x)dx = 0 \text{ для всех } \chi \in X.$$

Таким образом, функция  $\varphi \in L^q(G)$  имеет нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам и всем замкнутым единичным полукругам, содержащимся в  $G$ . Отсюда и из леммы 5 получаем  $\varphi = 0$ . Согласно (2), это означает, что

$$F(u) = 0 \text{ для всех } u \in L^p(G). \quad (3)$$

Из условия (3) и теоремы Хана-Банаха следует, что замыкание в  $L^p(G)$  линейной оболочки множества  $X$  совпадает с  $L^p(G)$ .

Осталось доказать, что при  $p = \infty$  данное утверждение неверно. Для этого рассмотрим функцию  $f$ , равную ненулевой тождественной константе  $c$  на  $G$ . Для любого конечного набора замкнутых единичных квадратов и замкнутых единичных полукругов, содержащихся в  $G$ , их объединение является замкнутым множеством и поэтому не совпадает с  $G$ . Более того, существует открытый круг  $B \subset G$ , не пересекающийся ни с одним из квадратов и полукругов из рассматриваемого набора. Поэтому любая линейная комбинация индикаторов множеств из данного набора равна нулю на  $B$ . Поскольку  $f = c \neq 0$  на  $B$ , отсюда видно, что при  $p = \infty$  и  $\varepsilon \in (0, c)$  доказанное выше утверждение не выполняется. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим область  $G \subset \mathbb{R}^2$ , которая является объединением полуплоскости

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$$

и круга

$$\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = \left( x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + x_2^2 < \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \delta \right)^2 \right\},$$

где  $\delta > 0$ . Очевидно, для любого  $r_1 > 0$  область  $G$  содержит замкнутый круг радиуса  $r_1$  и является объединением замкнутых кругов радиуса  $r_2$ . Выберем теперь  $\delta > 0$  и  $r > 0$  настолько малыми, чтобы выполнялись следующие условия:

1. круг  $B = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = \left( x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + x_2^2 < r^2 \right\}$  не пересекается ни с одним из замкнутых единичных полукругов, содержащихся в  $G$ ;

2. любой замкнутый единичный квадрат  $K \subset G$  либо содержит  $B$ , либо  $K \cap B = \emptyset$ .

Из указанных условий следует, что всякая линейная комбинация индикаторов замкнутых единичных полукругов и замкнутых единичных квадратов, содержащихся в  $G$ , равна тождественной константе на  $B$ . Это означает, что любая функция  $f \in L^p(G)$ , которая не является константой на  $B$ , не может быть приближена с любой точностью в  $L^p(G)$  рассматриваемыми линейными комбинациями индикаторов. Таким образом, при достаточно малых  $\delta > 0$  область  $G$  удовлетворяет всем условиям, требуемым в теореме 2.  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции о теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – Москва: Наука, 1965. – 408 с.
2. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении / Р. Эдвардс. – Москва: Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.
3. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ / Л. Люмис. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1956. – 251 с.
4. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
5. Rawat R. The injectivity of the Pompeiu transform and  $L^p$ -analogues of the Wiener Tauberian theorem / R. Rawat, A. Sitaram. // Israel J. Math. – 1995. – V. 91. – P. 307-316.
6. Волчков В. В. Аппроксимация функций на ограниченных областях в  $R^n$  линейными комбинациями сдвигов / В. В. Волчков // ДАН. – 1994. – Т. 334. – №5. – С. 560-561.
7. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer. – 2009. – 671 p.
8. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser, Basel. – 2013. – 592 p.
9. Волчков Вит. В. Аппроксимация функций на сфере линейными комбинациями сдвигов / Вит. В. Волчков // ДАН. – 2004. – Вып. 398, №1. – С. 7-9.
10. Zalcman L. In: Approximation by Solutions of Partial Differential Equations, Quadrature Formulae and Related Topics / L. Zalcman. – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185-194.
11. Berenstein C. A. Analysis and Partial Differential Equations / C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger. – Ed. C. Sadosky. N. Y.; Basel: Marcel Dekker, 1990. – P. 35-50.
12. Волчков В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю / В. В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Вып. 59 № 5 – С. 671-680.
13. Волчков В. В. Экстремальные задачи, связанные с множествами Помпейю / В. В. Волчков, И. С. Пилипенко // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2023. – № 2 – С. 13–20.

Поступила в редакцию 02.07.2024 г.

### APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN $L^p$ BY LINEAR COMBINATIONS OF INDICATORS

V. V. Volchkov, I. S. Pilipenko

The paper establishes conditions for an open set  $G$  under which for any function  $f \in L^p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$  and any  $\varepsilon > 0$  there exists a finite linear combination of  $g_\varepsilon$  indicators of closed unit squares and closed unit semidisks contained in  $G$  such that  $\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(G)} < \varepsilon$ . Cases where this approximation does not exist are also considered.

**Keywords:** approximation of functions, Wiener's theorem, the local Pompeiu property, set indicators.

**Волчков Валерий Владимирович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ;  
ФГБНУ «Институт прикладной математики и ме-  
ханики», г. Донецк, РФ.  
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

**Пилипенко Ирина Сергеевна**

студентка кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.  
E-mail: irinasergeevnapilipenko@yandex.ru

**Volchkov Valeriy Vladimirovich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences,  
Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia;  
Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Donetsk, Russia.

**Pilipenko Irina Sergeevna**

Student, Donetsk State University, Donetsk, Russia.

## АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ДЗЯДЫКА О ГОЛОМОРФНОСТИ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННО АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2024. В. В. Волчков, К. В. Тимофеева

Рассмотрены аналоги классической теоремы Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций. Исследуется случай, когда функции являются вещественно аналитическими в области, а равенство площадей предполагается лишь над всеми замкнутыми единичными квадратами, содержащимся в рассматриваемой области.

**Ключевые слова:** голоморфность, теорема Дзядыка, свойство Помпейю

**§ 1. Введение.** Всюду в дальнейшем  $u, v$  – вещественные функции, заданные в области  $\Omega$  на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Известная теорема Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций утверждает, что если  $u, v \in C^1(\Omega)$ , то для того чтобы хотя бы одна из функций  $u+iv$ ,  $u-iv$  была голоморфна в  $\Omega$ , необходимо и достаточно, чтобы площади поверхностей графиков функций  $u, v, \sqrt{u^2 + v^2}$ , расположенные над любым компактным подмножеством из  $\Omega$ , были равны [1]. Теорема Дзядыка получила дальнейшее развитие и уточнение в работах других авторов [2–4]. Например, было показано [2], что в ее формулировке вместо функции  $\sqrt{u^2 + v^2}$  можно взять произвольную гладкую функцию  $\varphi(u, v)$ , с не равными нулю тождественно производными, для которой выполнены условия

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = 1 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0. \quad (1)$$

В частности, можно положить

$$\varphi = \alpha u + \beta v,$$

где  $\alpha, \beta$  – ненулевые вещественные постоянные, удовлетворяющие условию  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

Что касается снятия такого обременительного условия, как непрерывная дифференцируемость  $u, v$ , то известный пример функции Бора  $w = x + i|y|$  на плоскости показывает, что даже условия Липшица не может обеспечить справедливость теоремы. Тем не менее, для некоторых  $\varphi$  теорема Дзядыка допускает усиление, а именно, вместо непрерывности частных производных от  $u, v$  можно требовать лишь их существование всюду в области [3].

Для всякой функции  $f \in C^1(\Omega)$  и компактного множества  $A \subset \Omega$  символом  $S(f, A)$  обозначим площадь поверхности графика  $f$ , расположенной над  $A$ . Положим также

$$f_1 = u, \quad f_2 = v, \quad f_3 = \varphi(u, v),$$

где  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  — заданная функция с условием (1). В работе [4, часть 5, гл.4] рассмотрена следующая проблема.

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6)

**Проблема 1.** Пусть  $\mathcal{A}$  – некоторая совокупность компактных подмножеств  $\Omega$  и пусть  $u, v \in C^1(\Omega)$ . Предположим, что

$$S(f_1, A) = S(f_2, A) = S(f_3, A) \quad \text{для любого } A \in \mathcal{A}. \quad (2)$$

При каких условиях на  $\mathcal{A}$  можно утверждать, что хотя бы одна из функций  $u + iv, u - iv$  голоморфна в  $\Omega$ ?

Например, если  $\mathcal{A}$  состоит из всех компактных подмножеств  $\Omega$  нулевой меры, то этого утверждать нельзя (условие (2) в этом случае выполняется для любых  $u, v \in C^1(\Omega)$ ).

Обозначим символом  $\mathcal{D}_\Omega$  множество всех пар  $u, v$  функций в  $\Omega$ , таких что хотя бы одна из функций  $u + iv, u - iv$  голоморфна в  $\Omega$ . В [4, часть 5, гл. 4] получены положительные результаты, связанные с проблемой 1. В частности, показано, что если  $u, v \in C^1(\Omega)$ , то из (2) следует, что  $(u, v) \in \mathcal{D}_\Omega$  в случае, когда  $\mathcal{A} = \{gA\}$ , где  $A$  – фиксированное множество со свойством Помпейю в  $\Omega$ , а  $g$  – любой элемент группы евклидовых движений плоскости  $\mathbb{C}$ , для которого  $gA \subset \Omega$  (определение и основные свойства множеств со свойством Помпейю см. в [4, часть 4], [5, гл. 19], [6, часть 2]).

В работе [7] изучался случай, когда  $\mathcal{A}$  состоит из всех замкнутых кругов в неограниченной области  $\Omega$ , радиусы которых принадлежат заданному двухэлементному множеству из положительных чисел. При этом для кругов каждого из этих радиусов предполагается выполнение только одного из равенств в (2). Вместо другого равенства требуется лишь оценка сверху для разности соответствующих площадей в терминах некоторых интегральных средних.

В данной работе получены аналоги теоремы Дзядыка для вещественно аналитических функций. При этом предполагается равенство площадей лишь над всеми замкнутыми единичными квадратами, содержащимся в рассматриваемой области.

**§ 2. Формулировки основных результатов.** Перейдём к формулировкам основных результатов работы.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что область  $\Omega \subset \mathbb{C}$  является объединением замкнутых кругов радиуса  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $u, v$  являются вещественно аналитическими в  $\Omega$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha\beta \neq 0$  и  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Пусть также

$$S(u, K) = S(v, K) = S(\alpha u + \beta v, K) \quad (3)$$

для любого замкнутого единичного квадрата  $K \subset \Omega$ . Тогда  $(u, v) \in \mathcal{D}_\Omega$ .

Аналогичный результат имеет место, если заменить в условии теоремы 1 функцию  $\alpha u + \beta v$  на функцию  $\sqrt{u^2 + v^2}$ .

**Теорема 2.** Пусть функции  $u, v$  являются вещественно аналитическими в  $\Omega$ ,  $u^2 + v^2 \neq 0$  и равенства

$$S(u, K) = S(v, K) = S(\sqrt{u^2 + v^2}, K)$$

выполнены для любого замкнутого единичного квадрата  $K \subset \Omega$ . Тогда  $(u, v) \in \mathcal{D}_\Omega$ .

В следующем разделе мы получим вспомогательную лемму, необходимую для доказательства. Доказательство теоремы 1 и теоремы 2 см. в параграфе 4.

**§ 3. Вспомогательная лемма.**

**Лемма 1.** Пусть функция  $f$  вещественно аналитическая в области  $G \subset \mathbb{C}$ . Тогда для любого компактного множества  $K \subset G$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq j} (M_q(f, K))^{1/q}} = +\infty,$$

где

$$M_q(f, K) = \max \left\{ \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(x, y) \right|, \alpha_1 + \alpha_2 = q, x + iy \in K \right\}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку  $f$  вещественно аналитична в  $G$ , для любой точки  $z_0 = x_0 + iy_0 \in K$  существует окрестность  $\{|x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \varepsilon\}$ , зависящая от  $z_0$  и лежащая в  $G$ , в которой имеет место равенство

$$f(x, y) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1!} \cdot \frac{1}{\alpha_2!} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(x_0, y_0) (x - x_0)^{\alpha_1} (y - y_0)^{\alpha_2}.$$

Более того, ряд в правой части, этого равенства сходится в области

$$U_\varepsilon = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 - x_0| < \varepsilon, |z_2 - y_0| < \varepsilon\}$$

к некоторой голоморфной в  $U_\varepsilon$  функции двух комплексных переменных  $z_1$  и  $z_2$ , совпадающей с  $f$  при  $z_1 = x, z_2 = y$ . Сохраним для этой функции обозначение  $f$  в  $U_\varepsilon$ . По формуле Коши для функций двух переменных при  $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}, |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{4}$  имеем

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(x, y) = \frac{\alpha_1! \cdot \alpha_2!}{(2\pi i)^2} \int_{|z_1 - x| = \frac{\varepsilon}{2}} \int_{|z_2 - y| = \frac{\varepsilon}{2}} \frac{f(z_1, z_2) dz_1 dz_2}{(z_1 - x)^{\alpha_1 + 1} (z_2 - y)^{\alpha_2 + 1}}.$$

Оценим интеграл с учетом неравенства

$$|f(z_1, z_2)| \leq M = \max \left\{ |f(z_1, z_2)|, |z_1 - x| = |z_2 - y| = \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Имеем

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(x, y) \right| \leq \frac{M \cdot \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot 2^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\varepsilon^{\alpha_1 + \alpha_2}}, \tag{4}$$

при этом константа  $M$  зависит, вообще говоря, от точки  $z_0$  и от  $\varepsilon$ . Однако, по лемме Гейне-Бореля о покрытиях компакт  $K$  можно покрыть конечным числом областей вида  $\{|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}, |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{4}\}$ , где  $x_0 + iy_0 \in K$  и  $\varepsilon > 0$ . Поэтому неравенство вида (4) выполняется при всех  $x + iy \in K, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$  с константами  $M > 0$  и  $\varepsilon > 0$ , не зависящими от  $x, y, \alpha_1, \alpha_2$ . Тогда при  $q = \alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$  имеем

$$(M_q(f, K))^{\frac{1}{q}} \leq \frac{2}{\varepsilon} (M + 1)^{\frac{1}{q}} (q!)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(C_q^{\alpha_1})^{1/q}} \leq \frac{2}{\varepsilon} (M + 1)q,$$

где  $C_q^{\alpha_1}$  – число сочетаний из  $q$  по  $\alpha_1$ . Из последнего неравенства следует утверждение леммы.  $\square$

**§ 4. Доказательства основных результатов.** Перейдём к доказательству теоремы

1. Пусть  $E$  – замкнутый круг радиуса  $r > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , содержащийся в  $\Omega$ .

Площади поверхностей графиков вещественно аналитических функций  $u, v, \alpha u + \beta v$ , расположенных над  $K$ , соответственно равны

$$S(u, K) = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

$$S(v, K) = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

$$S(\alpha u + \beta v, K) = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Пусть

$$h_1(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

$$h_2(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2},$$

$$h_3(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial y}\right)^2}. \text{ Тогда равенства (3) можно записать в следующем виде}$$

$$\int_K h_1(x, y) dx dy = \int_K h_2(x, y) dx dy = \int_K h_3(x, y) dx dy.$$

Тогда

$$\int_K (h_1(x, y) - h_2(x, y)) dx dy = 0,$$

$$\int_K (h_2(x, y) - h_3(x, y)) dx dy = 0.$$

Положим также

$$g_1 = h_1 - h_2, \quad g_2 = h_2 - h_3, \tag{5}$$

тогда

$$\int_K g_1(x, y) dx dy = 0 \tag{6}$$

и

$$\int_K g_2(x, y) dx dy = 0 \tag{7}$$

для любого  $K \subset \Omega$ .

Согласно лемме 1 можно применить теорему о квадратах для квазианалитических функций (см. [8]). Тогда из указанной теоремы и равенств (6), (7) следует, что  $g_1 \equiv 0$  и  $g_2 \equiv 0$  в  $E$ . В силу того, что  $\Omega$  является объединением замкнутых кругов радиуса  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , получаем, что  $g_1 \equiv 0$  и  $g_2 \equiv 0$  в  $\Omega$ . Из (5) следует, что  $h_1 = h_2 = h_3$  в  $\Omega$ .

Тогда площади поверхностей графиков функций  $u, v, \alpha u + \beta v$ , расположенные над любым компактным подмножеством из  $\Omega$ , равны. Отсюда и из теоремы Дзядька получаем, что  $(u, v) \in \mathcal{D}_\Omega$ . Таким образом, теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 достаточно повторить рассуждения из доказательства теоремы 1, при этом необходимо заменить функцию  $\alpha u + \beta v$  на функцию  $\sqrt{u^2 + v^2}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык В. К. Геометрическое определение аналитических функций / В. К. Дзядык // УМН. – 1960. – Т. 15. – Вып. 1(91). – С. 191–194.
2. Goodman A. On the criterium of analytical function / A. Goodman // Amer. Math. Monthly. – 1964. – V. 71. – P. 265-267.
3. Трохимчук Ю.Ю. Об одном критерии аналитичности функций / Ю. Ю. Трохимчук // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 10. – С. 1410-1418.
4. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations / V.V. Volchkov // Dordrecht: Kluwer. – 2003. – P. 454.
5. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Springer: Verlag London. – 2009. – P. 671
6. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Birkhauser. – 2013. – P. 592
7. Волчков В. В. Аналоги теоремы Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций / В.В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2023. – С. 3-13.
8. Волчков В. В. Квазианалитичность и локальное свойство Помпейю / В.В. Волчков, К. В. Тимофеева // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2023. – С. 21-27.

*Поступила в редакцию 07.08.2024 г.*

#### ANALOGS OF DZYADYK'S THEOREM ON HOLOMORPHICITY FOR REAL ANALYTIC FUNCTIONS

*V. V. Volchkov, K. V. Timofeeva*

Analogs of Dzyadyk's classical theorem on the geometric description of holomorphic functions are considered. The case is investigated when the functions are real analytic in the domain, and the equality of areas is assumed only over all closed unit squares contained in the domain under consideration.

**Keywords:** holomorphicity, Dzyadyk's theorem, Pompeius property.

##### **Волчков Валерий Владимирович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ;  
ФГБНУ «Институт прикладной математики и ме-  
ханики», г. Донецк, РФ.  
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

##### **Volchkov Valeriy Vladimirovich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences,  
Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia;  
Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Donetsk, Russia.

##### **Тимофеева Карина Витальевна**

аспирант кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.  
E-mail: ktimofeeva75@gmail.com

##### **Timofeeva Karina Vitalievna**

Postgraduate student, Donetsk State University,  
Donetsk, Russia.

## ПРОДОЛЖЕНИЕ РАДИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ С ВНЕШНОСТИ ШАРА ДО ФУНКЦИИ, ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2024. *В. П. Заставный*

Рассматривается следующая задача. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ , и функция  $g$  задана на  $[a, +\infty)$ . Существует ли непрерывная на  $[0, +\infty)$  функция  $f$  такая, что функция  $f(\|x\|)$  является положительно определённой на  $\mathbb{R}^n$  и  $f(t) \equiv g(t)$  на  $[a, +\infty)$ ? В теоремах 1 и 2 получены соответственно необходимые и достаточные условия решения этой задачи. Для степенной функции  $g(t) = t^{-\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , эта задача была рассмотрена в 1987 г. Р. М. Тригубом. Для  $g(t) = t^{2-n}$ ,  $n \geq 3$ ,  $a = 1$ , эта задача в других терминах рассмотрена в 2024 г. А. В. Ивановым. В теореме 3 получено сравнительно простое представление для интеграла от произведения трёх функций Бесселя, из которого следует, что решение А. В. Иванова на отрезке  $[0, 1]$  является элементарной функцией, а если число  $n$  нечётное, то многочленом степени  $n - 2$ .

**Ключевые слова:** положительно определённая функция, условия Аски-Тригуба.

**§ 1. Введение. Постановка задачи. Основные результаты.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  называется положительно определённой на  $\mathbb{R}^n$  ( $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , если неравенство

$$\sum_{k,j=1}^p c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0$$

выполняется для любого натурального  $p \in \mathbb{N}$  и для любых конечных систем комплексных чисел  $\{c_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{C}$  и точек  $\{x_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{R}^n$ . Множество всех непрерывных функций  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что функция  $f(\|x\|) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ , обозначим символом  $\Phi_n$  – класс непрерывных радиальных положительно определённых на  $\mathbb{R}^n$  функций. Мы используем стандартное обозначение для скалярного произведения  $(u, v) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$  двух векторов  $u = (u_1, \dots, u_n)$  и  $v = (v_1, \dots, v_n)$  из  $\mathbb{R}^n$ , и  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$  для евклидовой нормы вектора  $u$ . С ростом  $n$  классы  $\Phi_n$  очевидно сужаются, т.е.  $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$ . В 1970 г. У. Рудин [1] доказал, что любую непрерывную радиальную положительно определённую на шаре  $\|x\| \leq a$  в  $\mathbb{R}^n$  функцию (в определении берутся произвольные точки из шара  $\|x\| \leq a/2$ ) можно продолжить до функции из класса  $\Phi_n$ . В работе рассматривается следующая задача о продолжении радиальной функции с внешности шара до радиальной функции, положительно определённой на всем пространстве.

**Проблема 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$  и функция  $g$  задана на  $[a, +\infty)$ . Существует ли функция  $f \in \Phi_n$  такая, что  $f(t) \equiv g(t)$  на  $[a, +\infty)$ ?

Добавляя к решению задачи 1 функции из класса  $\Phi_n$ , равные нулю на  $[a, +\infty)$ , получим также решения этой задачи. В качестве таких функций можно взять, например, функции вида  $(a - t)_+^\delta h(t)$ , где  $\delta \geq (n + 1)/2$ , а  $h$  – произвольная функция из  $\Phi_n$  (более подробно см., например, [2]). Поэтому, если задача 1 имеет хотя бы одно решение, то их бесконечно много. Решения этой задачи для конкретных функций находят применения в теории приближения для получения аппроксимативных характеристик некоторых классов

периодических функций  $n$  переменных (см., например, Тригуб [3, Теорема 3],  $g(t) = t^{-\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Решение задачи 1 для функции  $g(t) = t^{2-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , применяется для регуляризации обрезанием к фундаментальному решению оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , (см. работу А.В. Иванова [4], в которой вместо положительной определённости используется неотрицательность преобразования Фурье). В одномерном случае ( $n = 1$ ) автором [5] рассмотрена задача о продолжении функции с промежутка  $[a, +\infty)$  (функция не обязательно вещественнозначная) на всю ось до функции из класса  $\Phi(\mathbb{R})$ . С помощью решения этой задачи для функции  $g(t) = ct^{-r}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $r \geq 0$ , была получена аппроксимативная характеристика периодических функций с условием  $|f_{\beta}^{(r)}(x)| \leq M$  почти всюду на  $\mathbb{R}$ .

В следующей теореме 1 приведены необходимые условия принадлежности  $\Phi(\mathbb{R}^n)$  (при  $n = 1$  см. [5, Теорема 1. 1]).

**Теорема 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливы утверждения:

- 1) Если  $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  и  $|\operatorname{Re} f| + \operatorname{Re} f \in L(\mathbb{R}^n)$ , то  $\operatorname{Re} f \in L(\mathbb{R}^n)$ .
- 2) Если  $f \in \Phi_n$  и  $t^{n-1}(|f(t)| + f(t)) \in L[0, +\infty)$ , то  $t^{n-1}f(t) \in L[0, +\infty)$ .

Необходимые условия другого характера получил в 1987 Тригуб [3]:

**Теорема А.** Пусть  $f \in \Phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f \in C^p(0, +\infty)$  при  $p = [(n - 1)/2]$  и при любом  $x > 0$  сходится интеграл

$$\int_0^x \frac{f^{(p)}(x+t) - f^{(p)}(x-t)}{t^{\frac{n-1}{2}+1-p}} dt.$$

- 2) Если  $n \geq 2$ , то у функции  $f(x)$  существует конечный предел при  $x \rightarrow +\infty$ .
- 3) Если  $n \geq 3$ , то  $\lim_{x \rightarrow +0} x^k f^{(k)}(x) = 0$  для любого целого  $k \in [1, (n - 1)/2]$ .
- 4) Если  $n \geq 4$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f^{(k)}(x) = 0$  и  $\int_0^{+\infty} x^{k-1} |f^{(k)}(x)| dx < \infty$  для любого целого  $k \in [1, (n - 1)/2]$ .

В теореме 2 приведены достаточные условия на функцию  $g$ , при которых задача 1 имеет решение.

**Теорема 2.** Пусть  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и для некоторого целого  $m \geq (n + 1)/2$  функция  $g \in C^{m-1}[a, +\infty)$ , а функции  $(-1)^k g^{(k)}$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$ , неотрицательны, убывают и выпуклы вниз на  $[a, +\infty)$ . Если в точке  $a$  существует конечная правая производная  $g_+^{(m)}(a)$ , то функция  $f$ , определенная равенствами  $f(t) := g(t)$  при  $t \geq a$  и

$$f(t) := \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k g_+^{(k)}(a)}{k!} (a-t)^k, \quad 0 \leq t \leq a,$$

принадлежит классу  $\Phi_n$ . Если дополнительно  $g(t) \not\equiv g(a)$  на  $[a, +\infty)$ , то на отрезке  $[0, a]$  функция  $f$  является многочленом степени  $m$ .

Так как при любом натуральном  $n$  выполняется равенство

$$\min\{m \in \mathbb{Z} : m \geq (n + 1)/2\} = [n/2] + 1,$$

то в теореме 2 всегда можно взять  $m = [n/2] + 1$ . Доказательство теоремы 2 основано на признаке из [2, § 4,  $(\mathbb{R}^n, \rho) = l_2^n$ ] принадлежности классу  $\Phi_n$  (по существу это признак Аски-Тригуба [6, 7], а при  $n = 1$  это признак Пойа [8], [9, Theorem 4.3.1]). Условию теоремы 2 удовлетворяет, например, степенная функция  $g(t) = t^{-\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ . Для такой функции не сложно построить и другие продолжения, которые получаются из следующего общего факта (см., например, [2]).

**Предложение 1** ([2, Lemma 1. (2),  $(E, \rho) = l_2^n$ ]). Пусть  $h \in \Phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu$  – конечная неотрицательная борелевская мера на  $[0, +\infty)$ , а  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  является неотрицательной борелевской функцией на  $[0, +\infty)$ . Тогда  $f \in \Phi_n$ , где

$$f(t) := \int_0^{+\infty} h(t\varphi(s))d\mu(s), \quad t \geq 0.$$

Из утверждения 1 сразу получаются следующие примеры.

**Пример 1.** Пусть  $h \in \Phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$  функция  $h_\alpha \in \Phi_n$ , где

$$h_\alpha(t) := \int_1^{+\infty} h(ts)s^{-\alpha-1}ds = \begin{cases} t^\alpha \int_t^{+\infty} h(u)u^{-\alpha-1}du & , \quad t > 0, \\ \frac{h(0)}{\alpha} & , \quad t = 0. \end{cases}$$

Если дополнительно при некотором  $a > 0$  функция  $h(t) = 0$  при  $t \geq a$ , то и  $h_\alpha(t) = 0$  при  $t \geq a$ .

**Пример 2.** Пусть  $h \in \Phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $\lambda > 0$  функция  $f_\lambda \in \Phi_n$ , где

$$f_\lambda(t) := \int_0^1 h(ts)s^{\lambda-1}ds = \begin{cases} t^{-\lambda} \int_0^t h(u)u^{\lambda-1}du & , \quad t > 0, \\ \frac{h(0)}{\lambda} & , \quad t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Кроме того, справедливы утверждения:

- 1) Если дополнительно функция  $h$  на  $[0, a]$  является многочленом степени  $p \in \mathbb{N}$ , то функция  $f_\lambda$  на  $[0, a]$  также является многочленом степени  $p$ .
- 2) Если дополнительно при некотором  $a > 0$  функция  $h(t) = 0$  при  $t \geq a$ , то  $f_\lambda(t) = f_\lambda(a)a^\lambda t^{-\lambda}$  при  $t \geq a$  и  $f_\lambda(a) \geq 0$  при  $\lambda \in (0, n]$ . Если дополнительно  $f_\lambda(a) > 0$  при некотором  $\lambda > 0$ , то функция  $f_\lambda(t)a^{-\lambda}/f_\lambda(a)$  является решением задачи 1 для функции  $g(t) = t^{-\lambda}$ ,  $t \geq a$ .

Неравенство  $f_\lambda(a) \geq 0$  при  $\lambda \in (0, n]$  в утверждении 2) примера 2 вытекает из утверждения 2) теоремы 1.

Следующие достаточные условия принадлежности  $\Phi_n$  получил в 1987 Тригуб.

**Предложение 2** ([3], см. также [10, 6.3.5]). 1) Пусть  $h \in \Phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $\varepsilon \geq 0$  функция  $g_\beta \in \Phi_{n+k}$ , где  $\beta = k + \varepsilon$  и

$$g_\beta(t) := \int_0^1 h(ts)s^{n-1}(1-s^2)^{\frac{\beta-2}{2}}ds.$$

2) Пусть  $h \in \Phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $\lambda \in (0, n]$  функция  $f_\lambda \in \Phi_{n+2}$ , где  $f_\lambda$  определяется по формуле (1).

В связи с примером 2 (и не только) представляет интерес положительно определённые сплайны специального вида. Обозначим через  $S_n$  множество всех четных, заданных на  $\mathbb{R}$  сплайнов, равных нулю при  $x > 1$ , являющихся на  $[0, 1]$  вещественным алгебраическим многочленом степени не выше  $n$ . Следующие сплайны были введены в 1983-1987 гг. Тригубом [3, 7, 11–16], [10, § 6.2.13, 6.2.16, 6.3.12], [17, § 6]. При  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \in \mathbb{N}$  четные сплайны Тригуба  $a_n$  и  $A_{r,2k-1}$  определяются по формулам:  $a_n(x) := 0$  при  $|x| \geq 1$  и

$$a_n(\sqrt{x}) := 2^{n-1} \frac{(2n-1)}{(2n-1)!!} \sqrt{x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ x^{n-\frac{3}{2}} (1-\sqrt{x})^n \right\}, \quad x \in (0, 1).$$

$$A_{0,1}(x) := a_1(x), \quad A_{0,2k-1}(x) := \gamma_{0,k} \int_0^1 (1-u^2)^{k-2} a_k(ux) du, \quad k \geq 2,$$

$$A_{r,1}(x) := \gamma_{r,1} \int_1^{|x|} (|x| - u)^{2r-1} a_{r+1}(u) du, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$A_{r,2k-1}(x) := \gamma_{r,k} \int_0^1 (1-u^2)^{k-2} \int_1^{|x|u} (|x|u - t)^{2r-1} a_{r+k}(t) dt du, \quad r \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$$

Числа  $\gamma_{r,k}$  выбираются из условия  $A_{r,2k-1}(0) = 1$  и вычисляются по формулам

$$\gamma_{0,k} = \frac{2^{k-1}}{(2k-4)!!}, \quad k \geq 2, \quad \gamma_{r,1} = \frac{(-1)^r 2^r (3r+1)!}{(2r-1)!(2r-1)!(r+1)!}, \quad r \geq 1,$$

$$\gamma_{r,k} = \frac{(-1)^r 2^{r+k-1} (3r+k)!}{(2k-4)!!(2r-1)!(2r-1)!(r+k)!}, \quad r \geq 1, \quad k \geq 2.$$

В 1987 г. Тригуб [7, 10, 18] доказал следующие теоремы **В** и **С**.

**Теорема В.** При  $n \in \mathbb{N}$  существует единственный сплайн  $s \in S_n$  такой, что:  $s_n(0) = 1$ ,  $s_n(1) = 0$  и  $\int_0^1 x^{2k} s_n(x) dx = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , (если  $n \geq 2$ ). Этим условиям удовлетворяет сплайн  $a_n$ . При этом  $a_n \in \Phi(\mathbb{R})$  и  $\hat{a}_n(x) = \frac{n!}{(3n-2)!} x^{2n-2} \hat{A}_{n-1,1}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Теорема С.** При любых  $r \in \mathbb{Z}_+$  и  $k \in \mathbb{N}$  существует единственный сплайн  $s \in S_{3r+k}$  такой, что  $s(\|\cdot\|) \in C^{2r}(\mathbb{R}^{2k-1}) \cap \Phi(\mathbb{R}^{2k-1})$  и  $s(0) = 1$ . Этим условиям удовлетворяет сплайн  $A_{r,2k-1}$ .

Среди решений задачи 1 для функции  $g$ , удовлетворяющей условию теоремы 2 и  $g(t) \neq g(a)$  на  $[a, +\infty)$ , имеется такое, которое на  $[0, a]$  совпадает с многочленом степени  $[n/2] + 1$  и таких многочленов бесконечно много (следует учесть, что  $\alpha(1-t)_+^{[n/2]+1} \in \Phi_n$  при любом  $\alpha \geq 0$ ). Естественно возникает задача о существовании таких решений задачи 1 для функции  $g$ , которые на  $[0, a]$  являются многочленом степени не выше  $[n/2]$ .

**Замечание 1.** Пусть при некоторых  $n \in \mathbb{N}$  и  $a > 0$  функция  $f$  является решением задачи 1 для функции  $g$ , заданной на  $[a, +\infty)$ . Тогда по теореме А функция  $f \in C^p(0, +\infty)$  при  $p = [(n-1)/2]$ . Пусть  $n$  – нечётное. Тогда  $[(n-1)/2] = [n/2]$ . Поэтому, если  $f$  на  $[0, a]$  является многочленом степени не выше  $[n/2]$ , то он единственный и совпадает с многочленом Тейлора

$$f(t) := \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k g_+^{(k)}(a)}{k!} (a-t)^k, \quad 0 \leq t \leq a.$$

При  $n = 1$  получается полином нулевой степени, т.е.  $f(t) = g(a)$ ,  $t \in [0, a]$ . Хорошо известно, что если непрерывная положительно определенная на  $\mathbb{R}$  функция принимает одинаковые значения в точках  $0$ ,  $t_1$  и  $t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  несоизмеримы, то она постоянна на  $\mathbb{R}$ . Поэтому  $g(t) \equiv g(a) \geq 0$  при  $t \in [a, +\infty)$ . В случае нечетного  $n \geq 3$  в 1987 г. Тригуб [7] доказал следующую теорему **Д**.

**Теорема Д.** Для любого  $k \in \mathbb{N}$ , и  $\lambda \in (0, 2k-1]$  существует единственная функция  $f \in \Phi_{2k+1}$  такая, что  $f(t) = t^{-\lambda}$  при  $t \geq 1$ , а на  $[0, 1]$  она равна многочлену степени  $k$ .

Доказательство теоремы **D** следующее. При любом натуральном  $n$  финитная функция  $h(t) := (1 - t)_+^{[n/2]+1}$  принадлежит классу  $\Phi_n$ . К этой функции при  $n = 2k - 1$  применяем утверждение 2) предложения **2**. Т.к.  $f_\lambda(1) = B(k + 1, \lambda) > 0$ , то функция  $f(t) := f_\lambda(t)/f_\lambda(1)$  искомая. Единственность отмечена в замечании **1**.

Ещё одно решение задачи **1** для функции  $g(t) = t^{2-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , связано с применением теоремы Шенберга.

**Теорема Е** (Шенберг [19, Theorem 1]). *Функция  $f \in \Phi_n$  тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера  $\mu$  на  $[0, +\infty)$  такая, что*

$$f(t) = \int_0^{+\infty} j_{\frac{n}{2}-1}(tu) d\mu(u), \quad t \geq 0.$$

Здесь  $J_\lambda$  - функция Бесселя первого рода (см. [20, § 3.1]), а

$$j_\lambda(x) := \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k + \lambda + 1)} \cdot \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Из результата Bailey (1936) [21, (8.2)] следует, что  $2^{\nu+1}\nu\Gamma(\nu + 1)H_\nu^a(t) = t^{-2\nu}$  при  $t \geq 2a$ , где (см. (25) в § 5)

$$H_\nu^a(t) := \int_0^{+\infty} u^{2\nu-1} j_\nu^2(au) j_\nu(tu) du, \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0, \quad t \geq 0.$$

А из теоремы Шенберга **E** следует, что  $H_{\frac{n}{2}-1}^a \in \Phi_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , и  $a > 0$ . В теореме **3** получено сравнительно простое представление функции  $H_\nu^a$  на отрезке  $[0, 2a]$ , из которого следует (см. следствие **1**), что функция  $H_{\frac{n}{2}-1}^a(t)$  при  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , и  $a > 0$  на отрезке  $[0, 2a]$  является элементарной, а если число  $n$  нечётное, то многочленом степени  $n - 2$ . Отметим, что в работе А.В. Иванова [4] другим методом (применяется преобразование Фурье обобщённых функций) по существу получено представление функции  $H_{\frac{n}{2}-1}^a(t)$  при  $a = 1/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , на отрезке  $[0, 1]$  через гипергеометрическую функцию  ${}_2F_1$ .

**§ 2. Доказательство теоремы **1**.** В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин (в одномерном случае) доказали следующий критерий положительной определённости в  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема F** (Бохнер). *Функция  $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера  $\mu$  на  $\mathbb{R}^n$  такая, что*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,x)} d\mu(u), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [10]. Как прямое следствие, мы получаем следующий простой критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье: *если  $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L(\mathbb{R}^n)$ , то  $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{f}(u) = F_n(f)(u) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(u,x)} f(x) dx \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

и в этом случае  $\widehat{f} \in L(\mathbb{R}^n)$  (см. [22, Chapter I, §1, Corollary 1.26]). С помощью этого критерия не трудно показать, что функции  $e^{-x^2}$ ,  $e^{-|x|}$  и  $(1 - |x|)_+$  являются положительно определёнными на  $\mathbb{R}$  и  $e^{-\|x\|^2} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** Докажем утверждение 1). Хорошо известно, что если  $f, g \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ , то  $\operatorname{Re} f, fg \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ . Пусть  $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $\operatorname{Re} f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ . Так как при  $\alpha > 0$  функция  $f_\alpha(x) = e^{-\alpha\|x\|^2} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ , то и  $f_\alpha \operatorname{Re} f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ . Кроме того  $f_\alpha \operatorname{Re} f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L(\mathbb{R}^n)$  и, значит,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) \operatorname{Re} f(x) dx \geq 0.$$

Если  $|\operatorname{Re} f| + \operatorname{Re} f \in L(\mathbb{R}^n)$ , то

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) |\operatorname{Re} f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) (|\operatorname{Re} f(x)| + \operatorname{Re} f(x)) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (|\operatorname{Re} f(x)| + \operatorname{Re} f(x)) dx$$

и осталось перейти к пределу при  $\alpha \rightarrow +0$  и применить теорему Лебега.

Утверждение 2) следует из утверждения 1), если учесть, что  $g(\|x\|) \in L(\mathbb{R}^n) \iff t^{n-1}g(t) \in L[0, +\infty)$ .  $\square$

**§ 3. Доказательство теоремы 2.** Воспользуемся следующим достаточным условием принадлежности  $\Phi_n$ .

**Теорема G** (см. [2, § 4,  $(\mathbb{R}^n, \rho) = l_2^n$ ]). Пусть  $f \in C[0, +\infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и для некоторого целого  $m \geq (n + 1)/2$  выполняется одно из трёх условий:

- 1)  $f \in C^{m-1}(0, +\infty)$ , при любом целом  $k \in [0, m - 1]$  функция  $(-1)^k f^{(k)}$  неотрицательна, убывает и выпукла вниз на  $(0, +\infty)$ ;
- 2)  $f \in C^{m-1}(0, +\infty)$ , функция  $(-1)^{m-1} f^{(m-1)}$  неотрицательна, убывает и выпукла вниз на  $(0, +\infty)$  и существует конечный предел  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \geq 0$ ;
- 3) Существует неотрицательная, конечная борелевская мера  $\mu$  на  $[0, +\infty)$  такая, что

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (1 - st)_+^m d\mu(s), \quad t \geq 0.$$

Тогда  $f(t^\gamma) \in \Phi_n$  при любом  $\gamma \in (0, 1]$ .

При  $\gamma = 1$  это по существу достаточные условия Аски-Тригуба [6, 7], а при  $n = 1$  это признак Пойа [8], [9, Theorem 4.3.1].

Для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться, что функция  $f$  из теоремы 2 удовлетворяет условию 2) теоремы G. Для этого нам понадобятся несколько простых известных утверждений. Напомним определение выпуклой функции.

**Определение 1.** Пусть  $I$  – промежуток в  $\mathbb{R}$  и  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $h$  называется выпуклой вниз на промежутке  $I$ , если

$$\forall t_1, t, t_2 \in I, t_1 < t < t_2, \text{ вып. неравенство } h(t) \leq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} h(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} h(t_2). \quad (3)$$

Из определения 1 тривиально получается следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $I$  – промежуток в  $\mathbb{R}$  и  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда условие (3) эквивалентно любому из следующих условий (4), (5) и (6):

$$\forall t_1, t, t_2 \in I, t_1 < t < t_2, \text{ вып. неравенство } \frac{h(t) - h(t_1)}{t - t_1} \leq \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad (4)$$

$$\forall t_1, t, t_2 \in I, t_1 < t < t_2, \text{ вып. неравенство } \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{h(t_2) - h(t)}{t_2 - t}, \quad (5)$$

$$\forall t_1, t, t_2 \in I, t_1 < t < t_2, \text{ вып. неравенство } \frac{h(t) - h(t_1)}{t - t_1} \leq \frac{h(t_2) - h(t)}{t_2 - t}. \quad (6)$$

**Лемма 2.** Если функция  $h$  выпукла вниз на промежутке  $I$  и в точке  $a \in I$  существует или конечная правая производная  $h'_+(a)$  или конечная левая производная  $h'_-(a)$ , то соответственно справедливо или первое или второе неравенство в (7)

$$\left[ \begin{array}{l} h'_+(a) \leq \frac{h(s) - h(t)}{s - t}, \quad s, t \in I, a \leq t < s, \quad (7.1) \\ h'_-(a) \geq \frac{h(t) - h(s)}{t - s}, \quad s, t \in I, s < t \leq a. \quad (7.2) \end{array} \right. \quad (7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем неравенство (7.1). В (4) берём  $t_1 = a, t_2 = s, s \in I, a < t < s$ , и переходим к пределу при  $t \rightarrow a + 0$ . Получаем  $h'_+(a) \leq \frac{h(s) - h(a)}{s - a}$ . Осталось воспользоваться неравенством (5) при  $t_1 = a, t_2 = s, s \in I$  и  $a < t < s$ .

Аналогично доказывается неравенство (7.2): в (5) берём  $t_2 = a, t_1 = s, s \in I, s < t < a$ , переходим к пределу при  $t \rightarrow a - 0$ , и учитываем (4) при  $t_2 = a, t_1 = s, s \in I, s < t < a$ .  $\square$

Следующая лемма о склеивании двух выпуклых функций имеет прозрачный геометрический смысл.

**Лемма 3.** Пусть выполнены следующие три условия:

- (1). Функция  $\varphi$  выпукла вниз на ограниченном сверху промежутке  $J, \sup J = a \in J$ , и в точке  $a$  существует конечная левая производная  $\varphi'_-(a)$ .
- (2). Функция  $h$  выпукла вниз на ограниченном снизу промежутке  $I, \inf I = a \in I$ , и в точке  $a$  существует конечная правая производная  $h'_+(a)$ .
- (3).  $\varphi(a) = g(a)$  и  $\varphi'_-(a) \leq h'_+(a)$ .

Тогда функция  $H$  является выпуклой вниз на промежутке  $J \cup I$ , где

$$H(t) := \begin{cases} \varphi(t) & , \quad t \in J; \\ h(t) & , \quad t \in I. \end{cases}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Надо доказать, что

$$\forall t_1, t, t_2 \in J \cup I, t_1 < t < t_2, \text{ вып. неравенство } H(t) \leq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} H(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} H(t_2). \quad (8)$$

Так как функция  $H$  выпукла вниз на промежутках  $J$  и  $I$ , то неравенство (8) выполняется, если  $t_1 \in I$  или  $t_2 \in J$ . Поэтому неравенство (8) осталось доказать для любых  $t_1 \in J \setminus \{a\}, t_2 \in I \setminus \{a\}, t_1 < t < t_2$ . Возможны два случая: 1)  $t_1, t \in J, t_2 \in I \setminus \{a\}, t_1 < t < t_2$ ; 2)  $t_1 \in J \setminus \{a\}, t, t_2 \in I, t_1 < t < t_2$ .

Так как  $\varphi(a) = g(a)$ , то не сложно проверить, что в случае 1) или 2) неравенство (8) эквивалентно соответственно первому или второму неравенству в (9)

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{t_2 - t_1}{t_2 - a} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(t_1)}{t - t_1} + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(a)}{t_2 - a} \leq \frac{h(t_2) - h(a)}{t_2 - a}, \quad (9.1) \\ \frac{\varphi(a) - \varphi(t_1)}{a - t_1} - h'_+(a) \leq -h'_+(a) + \frac{t - t_1}{a - t_1} \cdot \frac{h(t_2) - h(t)}{t_2 - t} + \frac{h(a) - h(t)}{a - t_1}. \quad (9.2) \end{array} \right. \quad (9)$$

Левая часть неравенства (9.1) не больше  $\varphi'_-(a)$  (см. (7.2) для  $\varphi$ ), а правая часть не меньше  $h'_+(a)$  (см. (7.1) для  $h$ ). Учитывая, что  $\varphi'_-(a) \leq h'_+(a)$ , получаем неравенство (9.1).

Докажем неравенство (9.2). Из (7.2) для  $\varphi$  и неравенства  $\varphi'_-(a) \leq h'_+(a)$  следует, что левая часть неравенства (9.2) всегда  $\leq 0$ . Поэтому достаточно убедиться, что

$$l(t_1) := h'_+(a)(t_2 - t)(t_1 - a) + (h(t_2) - h(t))(t - t_1) + (h(a) - h(t))(t_2 - t) \geq 0, \quad t_1 < a.$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из следующих рассуждений. Функция  $l(t_1)$  линейная по  $t_1$  и её производная равна  $l'(t_1) \equiv (t_2 - t)(h'_+(a) - h(t_2) + h(t)) \leq 0$  (см. (7.1) для  $h$ ). Учитывая ещё, что функция  $h$  выпукла вниз на промежутке  $I$ , получаем при всех  $t_1 < a$  неравенство  $l(t_1) \geq l(a) = (t_2 - t)h(a) + (t - a)h(t_2) - (t_2 - a)h(t) \geq 0$ . Это доказывает неравенство (9.2) и лемму 3.  $\square$

**Замечание 2.** Хорошо известно, что любая выпуклая вниз на промежутке функция  $h$  (в смысле определения 1), непрерывна в любой внутренней точке  $a$  этого промежутка и в этой точке существуют конечные односторонние производные, для которых выполняется неравенство  $h'_-(a) \leq h'_+(a)$ . Поэтому три условия в лемме 3 являются не только достаточными, но и необходимыми для выпуклости вниз функции  $H$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.** Докажем, что функция  $f$  из теоремы 2 удовлетворяет условию 2) теоремы G. Очевидно существует конечный предел  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \geq 0$ ,  $f \in C^{m-1}[0, +\infty)$ , и

$$(-1)^{m-1} f^{(m-1)}(t) = \begin{cases} (-1)^{m-1} g_+^{(m-1)}(a) + (-1)^{m-1} g_+^{(m)}(a)(t - a) & , \quad 0 \leq t \leq a; \\ (-1)^{m-1} g^{(m-1)}(t) & , \quad a \leq t < +\infty. \end{cases}$$

Так как  $(-1)^{m-1} g_+^{(m-1)}(a) \geq 0$  и  $(-1)^{m-1} g_+^{(m)}(a) \leq 0$ , то функция  $(-1)^{m-1} f^{(m-1)}$  убывает и неотрицательна на  $(0, +\infty)$ , а по лемме 3 функция  $(-1)^{m-1} f^{(m-1)}$  ещё и выпукла вниз на  $(0, +\infty)$ .

Если  $g_+^{(m)}(a) = 0$ , то из неравенства (7) для неотрицательной, убывающей и выпуклой вниз на  $[a, +\infty)$  функции  $h(t) := (-1)^{m-1} g^{(m-1)}(t)$ , следует, что  $h(t) = h(a)$  при  $t \geq a$ . Поэтому функция  $g$  на промежутке  $[a, +\infty)$  является полиномом степени не выше  $m$ . Из ограниченности  $g$  на  $[a, +\infty)$  следует, что  $g$  является константой. Таким образом, если дополнительно  $g(t) \not\equiv g(a)$  на  $[a, +\infty)$ , то  $g_+^{(m)}(a) \neq 0$  и, значит, на отрезке  $[0, a]$  функция  $f$  является многочленом степени  $m$ .  $\square$

**§ 4. Асимптотика и неравенства для функций Бесселя.** Из равенства (2) следует, что  $j_\lambda$  является четной целой функцией. Известно [23, Лес. 1], что порядок  $\rho > 0$  и тип  $\sigma$  целой функции  $f$  можно определить по формулам

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \frac{1}{|c_n|}}, \quad \sigma = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|c_n|^\rho}, \quad \text{где } c_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя эти равенства и формулу Стирлинга, не трудно показать, что функция  $j_\lambda$  имеет порядок  $\rho = 1$  и тип  $\sigma = 1$ . Поэтому  $j_\lambda$  является целой функцией экспоненциального типа при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Для функций Бесселя при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$  известна следующая асимптотика [20, § 7.21]:  $J_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \cos \left( x - \frac{(2\lambda+1)\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Отсюда сразу следует, что при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$  существует константа  $c(\lambda) > 0$  такая, что

$$|j_\lambda(x)| \leq \frac{c(\lambda)}{(1 + |x|)^{\operatorname{Re} \lambda + \frac{1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Для целых функций  $f$  экспоненциального типа  $\sigma$ , которые ограничены на  $\mathbb{R}$ , справедливо неравенство Бернштейна:  $|f^{(k)}(x)| \leq \sigma^k \sup_{u \in \mathbb{R}} |f(u)|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Из этого неравенства и (10) вытекает неравенство для производных

$$|j_\lambda^{(k)}(x)| \leq \sup_{u \in \mathbb{R}} |j_\lambda(u)| \leq c(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq -\frac{1}{2}.$$

**§ 5. Интегралы от произведения трех функций Бесселя.** При фиксированных параметрах

$$a > 0, b > 0, \operatorname{Re} \rho > 0, \operatorname{Re}(\rho - \mu - \nu) < \frac{5}{2} \quad (11)$$

рассмотрим следующую функцию как несобственный интеграл с параметром  $t > 0$ :

$$G_{\mu, \nu, \rho}^{a, b}(t) := \int_0^{+\infty} u^{2\rho-1} j_\mu(au) j_\nu(bu) j_\rho(tu) du = \\ t^{-\rho} a^{-\mu} b^{-\nu} \int_0^{+\infty} u^{\rho-\mu-\nu-1} J_\mu(au) J_\nu(bu) J_\rho(tu) du, \quad t > 0. \quad (12)$$

Условие  $\operatorname{Re} \rho > 0$  обеспечивает сходимость этого интеграла в нуле, а сходимость на  $+\infty$  обеспечивает условие  $\operatorname{Re}(\rho - \mu - \nu) < \frac{5}{2}$  (можно применить асимптотику для функции Бесселя и признак Дирихле).

**Замечание 3.** Если  $a, b > 0, \operatorname{Re} \rho > 0$  и  $\operatorname{Re}(2\rho - \mu - \nu) < 1$ , то интеграл (12) сходится абсолютно и равномерно при  $t \geq 0$  и  $G_{\mu, \nu, \rho}^{a, b} \in C_{[0, +\infty)}$ . Это следует из неравенства  $|j_\rho(tu)| \leq c(\rho), t, u \geq 0$  и того, что  $u^{2\rho-1} j_\mu(au) j_\nu(bu) \in L_{[0, +\infty)}$  (см. (10)).

Определим следующие дифференциальные операторы

$$D^0 f := f, \quad D^1(f)(t) := -t^{-1} f'(t), \quad D^{k+1} := D^1(D^k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

**Предложение 3.** Пусть  $a, b > 0, \operatorname{Re} \rho > 0$  и для некоторого неотрицательного целого  $k$  выполняется неравенство  $\operatorname{Re}(\rho - \mu - \nu) < \frac{3}{2} - k$ . Тогда  $G_{\mu, \nu, \rho}^{a, b} \in C_{(0, +\infty)}^k$  и  $D^k(G_{\mu, \nu, \rho}^{a, b})(t) = G_{\mu, \nu, \rho+k}^{a, b}$  при  $t > 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть неравенство  $\operatorname{Re}(\rho - \mu - \nu) < \frac{3}{2} - k$  выполняется при  $k = 0$ . Из неравенства (10) и признака Вейерштрасса следует, что интеграл (12) сходится равномерно на промежутке  $[\delta, +\infty)$  при любом  $\delta > 0$ . Поэтому  $G_{\mu, \nu, \rho}^{a, b} \in C_{(0, +\infty)}$ .

Пусть неравенство  $\operatorname{Re}(\rho - \mu - \nu) < \frac{3}{2} - k$  выполняется при  $k = 1$ . Тогда интеграл (12) и интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \{u^{2\rho-1} j_\mu(au) j_\nu(bu) j_\rho(tu)\} du = -t \int_0^{+\infty} u^{2\rho+1} j_\mu(au) j_\nu(bu) j_{\rho+1}(tu) du = \\ -t G_{\mu, \nu, \rho+1}^{a, b}(t), \quad t > 0,$$

сходятся равномерно на промежутке  $[\delta, +\infty)$  при любом  $\delta > 0$ . Здесь мы воспользовались рекуррентным соотношением  $j'_\rho(z) = -z j_{\rho+1}(z), \rho, z \in \mathbb{C}$  (соответствующее равенство для бесселевых функций см. в [20, § 3.2, (4)]). Поэтому можно применить теорему о дифференцируемости несобственного интеграла с параметром. Тогда  $G_{\mu, \nu, \rho}^{a, b} \in C_{(0, +\infty)}^1$  и справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \{G_{\mu, \nu, \rho}^{a, b}(t)\} = -t \int_0^{+\infty} u^{2\rho+1} j_\mu(au) j_\nu(bu) j_{\rho+1}(tu) du = -t G_{\mu, \nu, \rho+1}^{a, b}(t), \quad t > 0. \quad (13)$$

Далее применяем индукцию по  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Предложение 3 доказано.  $\square$

Bailey (1936) [21, (8.2)] доказал, что при выполнении условий (11) имеет место равенство

$$\int_0^{+\infty} u^{\rho-\mu-\nu-1} J_\mu(au) J_\nu(bu) J_\rho(tu) du = \frac{2^{\rho-\mu-\nu-1} a^\mu b^\nu \Gamma(\rho)}{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1)} \cdot t^{-\rho}, \quad t > a + b. \quad (14)$$

Поэтому при выполнении условий (11) из равенства (14) получается следующее представление функции  $G_{\mu,\nu,\rho}^{a,b}(t)$  при  $t > a + b$

$$G_{\mu,\nu,\rho}^{a,b}(t) = \frac{2^{\rho-\mu-\nu-1} \Gamma(\rho)}{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1)} \cdot t^{-2\rho}, \quad t > a + b. \quad (15)$$

Далее рассматриваем частный случай, когда  $\rho = \mu = \nu$ . При фиксированных параметрах

$$a > 0, b > 0, \operatorname{Re} \nu > 0 \quad (16)$$

рассмотрим функцию

$$g_{\nu}^{a,b}(t) := G_{\nu,\nu,\nu}^{a,b}(t) = \int_0^{+\infty} u^{2\nu-1} j_{\nu}(au) j_{\nu}(bu) j_{\nu}(tu) du, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Так как  $\operatorname{Re}(\rho - \mu - \nu) = -\operatorname{Re} \nu$  и  $\operatorname{Re}(2\rho - \mu - \nu) = 0$ , то при выполнении условия (16) функция  $g_{\nu}^{a,b}$  непрерывна на полуинтервале  $[0, +\infty)$  (см. замечание 3) и  $g_{\nu}^{a,b} \in C_{(0,+\infty)}^k$ , где  $k := \max\{p \in \mathbb{Z} : p < \operatorname{Re} \nu + 3/2\} \geq 1$  (см. предложение 3). Из равенств (15) и (13) соответственно получаем

$$g_{\nu}^{a,b}(t) = \frac{2^{-\nu-1}}{\nu \Gamma(\nu+1)} \cdot t^{-2\nu}, \quad t \geq a + b. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{g_{\nu}^{a,b}(t)\} &= -t \int_0^{+\infty} u^{2\nu+1} j_{\nu}(au) j_{\nu}(bu) j_{\nu+1}(tu) du = \\ &= -t^{-\nu} (ab)^{-\nu} \int_0^{+\infty} u^{-\nu} J_{\nu}(au) J_{\nu}(bu) J_{\nu+1}(tu) du, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Значение последнего интеграла известно при  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$  (см. [20, § 13.46, (2)])

$$\int_0^{+\infty} u^{-\nu} J_{\nu}(au) J_{\nu}(bu) J_{\nu+1}(tu) du = \frac{(ab/2)^{\nu}}{t^{\nu+1} \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(1/2)} \int_0^{A(t)} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi, \quad t > 0, \quad (20)$$

где функция  $A(t)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$  и определяется по формуле (21)

$$A(t) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < |a - b|, \quad a \neq b, \\ \arccos \frac{a^2 + b^2 - t^2}{2ab} & , \quad |a - b| < t < a + b, \\ \pi & , \quad t > a + b. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, при выполнении условий (16) из (19) и (20) получается равенство

$$\frac{d}{dt} \{g_{\nu}^{a,b}(t)\} = -\frac{2^{-\nu} t^{-2\nu-1}}{\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(1/2)} \int_0^{A(t)} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi, \quad t > 0. \quad (22)$$

Интеграл в правой части равенства (22) при  $|a - b| < t \leq a + b$  после замены  $\varphi = \arccos(1 - 2u)$  будет равен

$$\int_0^{A(t)} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi = 2^{2\nu} \int_0^{\frac{t^2 - (a-b)^2}{4ab}} u^{\nu-\frac{1}{2}} (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} du, \quad |a - b| < t \leq a + b. \quad (23)$$

В частности

$$\int_0^{A(a+b)} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi = 2^{2\nu} \int_0^1 u^{\nu-\frac{1}{2}}(1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} du = \frac{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1/2)}{\Gamma(2\nu+1)} = \frac{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Из равенства (22) следует, что производная функции  $g_\nu^{a,b}(t)$  равна 0, если  $0 < t \leq |a-b|$ ,  $a \neq b$ , и равна  $-2^{-\nu} t^{-2\nu-1}/\Gamma(\nu+1)$  при  $t \geq a+b$  (этот случай также следует из (18)). Поэтому  $g_\nu^{a,b}(t) = g_\nu^{a,b}(|a-b|)$ , если  $0 \leq t \leq |a-b|$ ,  $a \neq b$ .

Если  $|a-b| < t < a+b$ , то

$$\begin{aligned} g_\nu^{a,b}(t) &= g_\nu^{a,b}(a+b) - \int_t^{a+b} \frac{d}{ds} \{g_\nu^{a,b}(s)\} ds = \\ &= \frac{2^{-\nu-1}}{(a+b)^{2\nu} \nu \Gamma(\nu+1)} + \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_t^{a+b} s^{-2\nu-1} \left( \int_0^{A(s)} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi \right) ds = \\ &= \frac{2^{-\nu-1}}{(a+b)^{2\nu} \nu \Gamma(\nu+1)} - \frac{2^{-\nu-1}}{\nu \Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \cdot \\ &= \left[ s^{-2\nu} \int_0^{A(s)} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi \right]_{s=t}^{a+b} - \int_t^{a+b} s^{-2\nu} \left( 1 - \left( \frac{a^2+b^2-s^2}{2ab} \right)^2 \right)^{\nu-1/2} \frac{s}{ab} ds \end{aligned}$$

Учитывая равенство (23) окончательно получаем следующее представление функции  $g_\nu^{a,b}(t)$  при  $|a-b| < t \leq a+b$

$$\begin{cases} g_\nu^{a,b}(t) = \frac{2^{\nu-1}}{\nu \Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \cdot (Q_{1,\nu}^{a,b}(t) + Q_{2,\nu}^{a,b}(t)), & |a-b| < t \leq a+b, \text{ где} \\ Q_{1,\nu}^{a,b}(t) := t^{-2\nu} \int_0^{\frac{t^2-(a-b)^2}{4ab}} u^{\nu-\frac{1}{2}}(1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} du = (2t)^{-2\nu} \int_{\frac{a^2+b^2-t^2}{2ab}}^1 (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} ds, & (24) \\ Q_{2,\nu}^{a,b}(t) := \frac{2}{(4ab)^{2\nu}} \int_t^{a+b} s^{-2\nu+1} (s^2 - (a-b)^2)^{\nu-\frac{1}{2}} ((a+b)^2 - s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} ds. \end{cases}$$

Второй интеграл в представлении для  $Q_{1,\nu}^{a,b}$  получается из первого заменой  $u = (1-s)/2$ .

И наконец рассмотрим частный случай функции  $g_\nu^{a,b}(t)$ , когда  $b = a > 0$  и  $\operatorname{Re} \nu > 0$ :

$$H_\nu^a(t) := g_\nu^{a,a}(t) = G_{\nu,\nu,\nu}^{a,a}(t) = \int_0^{+\infty} u^{2\nu-1} j_\nu^2(au) j_\nu(tu) du, \quad a > 0, \operatorname{Re} \nu > 0, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Свойства этой функции, доказанные выше в общем случае, сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 3.** Пусть  $a > 0$  и  $\operatorname{Re} \nu > 0$ . Тогда функция  $H_\nu^a$  непрерывна на полуинтервале  $[0, +\infty)$  и  $H_\nu^a \in C_{(0,+\infty)}^k$ , где  $k := \max\{p \in \mathbb{Z} : p < \operatorname{Re} \nu + 3/2\} \geq 1$ . Кроме того

$$H_\nu^a(t) = \begin{cases} \frac{2^{-\nu-1}}{\nu \Gamma(\nu+1)} \cdot t^{-2\nu} & , \quad t \geq 2a, \\ \frac{2^{\nu-1}}{\nu \Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \cdot (R_{1,\nu}^a(t) + R_{2,\nu}^a(t)) & , \quad 0 < t \leq 2a, \\ \frac{2^{\nu-1}}{(2a)^{2\nu} \nu \Gamma(\nu+1)} & , \quad t = 0, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$R_{1,\nu}^a(t) := t^{-2\nu} \int_0^{\frac{t^2}{4a^2}} u^{\nu-\frac{1}{2}}(1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} du = (2t)^{-2\nu} \int_{1-\frac{t^2}{2a^2}}^1 (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} ds, \tag{27}$$

$$R_{2,\nu}^a(t) := \frac{2}{(4a^2)^{2\nu}} \int_t^{2a} ((2a)^2 - s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} ds = \frac{2}{(2a)^{2\nu}} \int_{\frac{t}{2a}}^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (26) при  $t > 0$  следует из (18) и (24). Осталось найти только значение  $H_\nu^a(0)$ . Очевидно

$$R_{2,\nu}^a(+0) = \frac{2}{(2a)^{2\nu}} \int_0^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{(2a)^{2\nu}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Если в первом интеграле в представлении для  $R_{1,\nu}^a$  сделать замену  $u = t^2s$ , то получим

$$R_{1,\nu}^a(t) = t \int_0^{\frac{1}{4a^2}} s^{\nu-\frac{1}{2}}(1-t^2s)^{\nu-\frac{1}{2}} ds, \quad 0 < t \leq 2a, \tag{28}$$

и, значит,  $R_{1,\nu}^a(+0) = 0$ . Тогда  $H_\nu^a(0) = H_\nu^a(+0) = \frac{2^{\nu-1}}{(2a)^{2\nu}} \cdot \frac{1}{\nu\Gamma(\nu+1)}$ . □

**Замечание 4.** Если  $2\nu \in \mathbb{N}$ , то оба интеграла в (27) выражаются через элементарные функции. Поэтому при  $2\nu \in \mathbb{N}$  функция  $H_\nu^a(t)$  на отрезке  $[0, 2a]$  является элементарной, а если число  $2\nu$  нечётное, то многочленом степени  $2\nu$  (см. (27) и (28)).

Из теоремы 3 и теоремы Шенберга получается следующее следствие.

**Следствие 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , и  $a > 0$ . Тогда  $H_{\frac{n}{2}-1}^a \in \Phi_n$  и функция

$$f_n^a(t) := 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) H_{\frac{n}{2}-1}^a(t), \quad t \geq 0,$$

является решением задачи 1 для функции  $g(t) = t^{2-n}$ ,  $t \geq 2a$ , и  $f_n^a(0) = a^{2-n}$ . Функция  $H_{\frac{n}{2}-1}^a(t)$  на отрезке  $[0, 2a]$  является элементарной, а если число  $n$  нечётное, то многочленом степени  $n - 2$ .

**§ 6. Заключение.** В заключении отметим следующую экстремальную задачу.

**Проблема 2.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ . Предположим, что для функции  $g$ , заданной на  $[a, +\infty)$ , задача 1 имеет решение, т.е. существует функция  $f \in \Phi_n$  такая, что  $f(t) \equiv g(t)$  на  $[a, +\infty)$ . Пусть  $U(n, g, a)$  – множество всех таких решений. Требуется найти величину

$$U_{\inf}(n, g, a) := \inf\{f(0), f \in U(n, g, a)\}.$$

Если  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n < m$ , то из общих свойств положительно определённых функций сразу получаются неравенства

$$U_{\inf}(n, g, a) \leq U_{\inf}(m, g, a),$$

$$U_{\inf}(n, g_1g_2, a) \leq U_{\inf}(n, g_1, a) U_{\inf}(n, g_2, a).$$

Для степенной функции  $g(t) = t^{-\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , точное значение величины  $U_{\inf}(n, t^{-\lambda}, a)$  автору не известно. Оценку сверху можно получить из теоремы 2:

$$U_{\inf}(n, t^{-\lambda}, a) \leq a^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[n/2]+1} \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)k!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0, \quad \lambda > 0. \tag{29}$$

Другую оценку сверху можно получить с помощью следующих рассуждений. Пусть  $\mathfrak{F}_a(\mathbb{R}^n)$  – множество функций  $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  таких, что  $\varphi(0) = 1$  и  $\varphi(x) = 0$  при  $\|x\| \geq a$ . Пусть  $\Phi_{n,a}$  – множество функций  $h \in \Phi_n$  таких, что  $h(0) = 1$  и  $h(u) = 0$  при  $u \geq a$ , а  $\Phi_{n,a,\lambda}$  – множество функций  $h \in \Phi_{n,a}$  таких, что  $\int_0^a h(u)u^{\lambda-1}du > 0$ . Класс  $\Phi_{n,a,\lambda}$  не пуст, так как  $(a - t)_+^{(n+1)/2} \in \Phi_{n,a,\lambda}$ .

По функции  $h \in \Phi_{n,a,\lambda}$  строим по формуле (1) функцию  $f_\lambda$ . Тогда (см. пример 2) функция

$$\frac{f_\lambda(t)a^{-\lambda}}{f_\lambda(a)} = \frac{\int_0^1 h(ts)s^{\lambda-1}ds}{\int_0^a h(u)u^{\lambda-1}du}, \quad t \geq 0,$$

является решением задачи 1 для функции  $g(t) = t^{-\lambda}, t \geq a$ . Поэтому

$$U_{\inf}(n, t^{-\lambda}, a) \leq \frac{\lambda^{-1}}{\sup_{h \in \Phi_{n,a,\lambda}} \int_0^a h(u)u^{\lambda-1}du} = \frac{\lambda^{-1}}{\sup_{h \in \Phi_{n,a}} \int_0^a h(u)u^{\lambda-1}du}.$$

С другой стороны, не сложно показать, что при  $\beta > -n$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} M(n, \beta, a) &:= \sup_{\varphi \in \mathfrak{F}_a(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \|x\|^\beta dx = \sup_{h \in \Phi_{n,a}} \int_{\mathbb{R}^n} h(\|x\|) \|x\|^\beta dx = \\ &= nV_n \sup_{h \in \Phi_{n,a}} \int_0^a h(u)u^{\beta+n-1}du, \end{aligned}$$

где  $V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$  –  $n$ -мерный объём единичного шара в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом,

$$U_{\inf}(n, t^{-\lambda}, a) \leq \frac{nV_n}{\lambda M(n, \lambda - n, a)}, \quad n \in \mathbb{N}, a > 0, \lambda > 0. \tag{30}$$

Точное значение величины  $M(n, \beta, a)$  при  $\beta = 0$  нашли Зигель [24] в 1935 году и независимо Боас и Кац [25] в 1945 году при  $n = 1$ , а при  $\beta = 2, n \in \mathbb{N}$ , и  $\beta = 2m, m \in \mathbb{N}, n = 1$ , в 2024 году нашел А.Д. Манов [26]. Результат Зигеля также был заново открыт Д.В. Горбачевым [27] в 2001 г. другими методами.

$$\begin{aligned} M(n, 0, a) &= V_n \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^n, \\ M(n, 2, a) &= nV_n \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{\sqrt{n(n+4)}}\right). \end{aligned}$$

Тогда при  $\lambda = n$  и  $\lambda = n + 2$  получаем оценки сверху

$$\begin{aligned} U_{\inf}(n, t^{-n}, a) &\leq \left(\frac{2}{a}\right)^n, \\ U_{\inf}(n, t^{-n-2}, a) &\leq \left(\frac{2}{a}\right)^{n+2} \left(1 + \frac{n+2}{\sqrt{n(n+4)}}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Если вместо примера 2 применить второе утверждение в предложении 2 с заменой  $n$  на  $n - 2$ , то получаем, что

$$U_{\inf}(n, t^{-\lambda}, a) \leq \frac{(n-2)V_{n-2}}{\lambda M(n-2, \lambda-n+2, a)}, \quad n \geq 3, \quad a > 0, \quad \lambda \in (0, n-2]. \quad (32)$$

Тогда при  $\lambda = n - 2$  получаем следующую оценку сверху

$$U_{\inf}(n, t^{-n+2}, a) \leq \left(\frac{2}{a}\right)^{n-2}, \quad n \geq 3. \quad (33)$$

Для этого случая можно воспользоваться примером из следствия 1 (с заменой  $a$  на  $a/2$ ), из которого получается та же оценка (33).

Отметим, что оценку снизу для величины  $U_{\inf}(n, t^{-\lambda}, a)$  при  $n = 1$ , возможно удастся получить, если воспользоваться результатами Нады [28], которые также изложены и в монографии Шапиро [29, Chapter 7].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudin W. An extension theorem for positive-definite functions / W. Rudin // Duke Math. J. – 1970. – Vol. 37, № 1. – P. 49–53.
2. Zastavnyi V. P. On positive definiteness of some functions / V. P. Zastavnyi // Journal of Multivariate Analysis. – 2000. – Vol. 73. – С. 55–81.
3. Тригуб Р.М. Некоторые свойства преобразования Фурье меры и их применение / Тригуб Р.М. – Теория приближения функций. Труды международной конференции по теории приближения функций. Киев, 1983. – М.: Наука, 1987. – С. 439–443.
4. Иванов А.В. Условие применимости регуляризации обрезанием в координатном представлении / А.В. Иванов // Функциональный анализ и его приложения. – URL: <http://mi.mathnet.ru/faa4221>
5. Заставный В.П. Продолжение функции с внешности интервала до положительно определённой на всей оси функции и аппроксимационная характеристика класса  $W_M^{\tau, \beta}$  / В.П. Заставный // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 3. – С. 983–990.
6. Askey R. Radial characteristic functions / R. Askey // Tech. Report No. 1262. – Math. Research Center, University of Wisconsin-Madison. – 1973.
7. Тригуб Р.М. Критерий характеристической функции и признак типа Пойа для радиальных функций нескольких переменных / Р.М. Тригуб // Теор. вероятностей и её прим. – 1989. – Т. 34. – С. 805–810.
8. Polya G. Remarks on characteristic functions. In Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability / ed. J. Neyman. – Univ. of California Press, 1949. – P. 115–123.
9. Polya G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen / G. Polya // Math.Z. – 1918. – Vol. 2. – P. 352–383.
10. Trigub R.M. Fourier Analysis and Approximation of Functions / R.M. Trigub, E.S. Belinsky. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.
11. Заставный В.П. Положительно определённые сплайны / В.П. Заставный, Р.М. Тригуб. – 39 с. – Деп. в Укр.НИИТИ, № 593-Ук.87.
12. Тригуб Р.М. Положительно определённые радиальные функции и сплайны / Р.М. Тригуб // Межд. конф. по конструктивной теории функций (Варна, 25-31.05.1987). – София, 1987. – С. 123.
13. Тригуб Р.М. Положительно определённые функции и сплайны / Р.М. Тригуб // Теория функций и приближений: Труды 5-й Саратовской зимней школы (25.01-4.02.1990). – Ч. I. – Саратов, 1992. – С. 68–75.
14. Trigub R.M. Some Topics in Fourier Analysis and Approximation Theory / R.M. Trigub // ArXiv – 1996. – 71 p. URL: <https://arxiv.org/abs/funct-an/9612008>
15. Тригуб Р.М. О положительно определённых радиальных сплайнах специального вида / Р.М. Тригуб // Internat. conf. OFEA'2001 "Optimization of finite element approximation & splines and wavelets" (25-29.06.2001). – St.Petersburg, 2001. – P. 174.
16. Тригуб Р.М. Положительно определённые финитные радиальные функции полиномиального вида и максимальной гладкости / Р.М. Тригуб // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т. 9, № 3. – С. 394–400.
17. Trigub R.M. On the Fourier transform of function of two variables which depend only on the maximum of these variables / R.M. Trigub // ArXiv – 2015. – 30 p. URL: <http://arxiv.org/abs/1512.03183>

18. Заставный В. П. Положительно определённые сплайны специального вида / В.П. Заставный, Р.М. Тригуб // Мат. Сборник. – 2002. – Т. 193, № 12. – С. 41–68.
19. Schoenberg I.J. Metric spaces and completely monotone functions / I.J. Schoenberg // Ann. Math. – 1938. – V. 39, № 4. – P. 811–841.
20. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: ИЛ, 1949.
21. Bailey W.N. Some Infinite Integrals Involving Bessel Functions / W.N. Bailey // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1936. – Vol. s2-40, Issue 1. – P. 37–48.
22. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – Москва: Мир, 1974. – 336 с.
23. Lectures on Entire Functions / Levin B.Ya., in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko. – Transl. Math. Monographs. – Vol. 150. – Amer. Math. Soc. – 1996. – 248 p.
24. Siegel C.L. Über Gitterpunkte in convexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem / C.L. Siegel // Acta Math. – 1935. – Vol. 65, № 1. – P. 307–323.
25. Boas R.P. , Jr. Inequalities for Fourier transforms of positive functions / R.P. Boas, Jr., M. Кас // Duke Math. J. – 1945. – Vol. 12, № 1. – P. 189–206.
26. Манов А.Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определенных функций с носителем в шаре / А.Д. Манов // Матем. сб. – 2024. – Т. 215, № 7. – С. 61–73.
27. Горбачев Д.В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре / Д.В. Горбачев // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69, № 3. – С. 346–352.
28. Sz.-Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II: Nicht-periodischer Fall / B. Sz.-Nagy // Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. – 1939. – Vol. 91. – P. 3–24.
29. Shapiro H.S. Topics in approximation theory / H.S. Shapiro. – Lecture Notes in Math. – Vol. 187. – New York: Springer-Verlag, 1971. – 275 p.

*Поступила в редакцию 28.08.2024 г.*

## THE CONTINUATION OF THE RADIAL FUNCTION FROM THE EXTERIOR OF THE BALL TO A FUNCTION POSITIVELY DEFINED ON THE ENTIRE SPACE

*V. P. Zastavnyi*

The following problem is considered. Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ , and let  $g$  be a function defined on  $[a, +\infty)$ . Is there a continuous function  $f$  on  $[0, +\infty)$  such that  $f(|x|)$  is a positive definite function on  $\mathbb{R}^n$  and  $f(t) \equiv g(t)$  on  $[a, +\infty)$ ? In Theorems 1 and 2, necessary and sufficient conditions are obtained for solving this problem, respectively. For a power function  $g(t) = t^{-\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , this problem was considered by R. M. Trigub in 1987. For  $g(t) = t^{2-n}$ ,  $n \geq 3$ ,  $a = 1$ , this problem was considered in other terms by A. V. Ivanov in 2024. In Theorem 3, a comparatively simple representation is obtained for the integral of the product of three Bessel functions. From this, it follows that A. V. Ivanov's solution on the interval  $[0, 1]$  is an elementary function. If the number  $n$  is odd, it is a polynomial of degree  $n - 2$ .

**Keywords:** positive definite function, Askey-Trigub conditions.

**Заставный Виктор Петрович**

доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.  
E-mail: zastavn@rambler.ru

**Zastavnyi Viktor Petrovych**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences,  
Associate Professor, Donetsk State University,  
Donetsk, Russia.

## ОБ УТОЧНЕНИИ МНОЖЕСТВА ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА КОНСТРУИРОВАНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ПРИ ПОМОЩИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ

© 2024. А. Ю. Иванов, А.-В. В. Мельник

В статье исследуется множество порядков, для которых применим авторский метод конструирования магических квадратов. Кроме того, делается набор замечаний о количестве магических квадратов, построенных при помощи данного метода.

**Ключевые слова:** Магический квадрат, латинский квадрат, перестановка, трансверсаль.

**Введение.** С древних времен человечество интересуется свойствами магических квадратов — матриц порядка  $n$ , заполненных числами от 1 до  $n^2$  так, что их суммы в каждой строке, столбце и диагоналях равны  $\frac{n(n^2+1)}{2}$  [1]. С течением времени набор разрозненных фактов сложился в математическую теорию магических квадратов с историей становления и развития которой можно познакомиться, например, в работах [2], [3].

Основными направлениями исследований в рамках данного раздела математики являются построение алгоритмов конструирования магических квадратов заданного порядка, а также вычисление количества уникальных магических квадратов для фиксированного порядка  $n$  [1], [4].

В статье авторов [5] строится алгоритм конструирования магических квадратов. Для использования данного алгоритма необходимо построение пары совместимых покрывающих совокупностей, удовлетворяющих некоторым специальным ограничениям. Естественным образом возникает вопрос о применимости алгоритма для заданного порядка  $n$ .

В данной статье авторы обосновывают возможность применения данного алгоритма на случай нечетных, не делящихся на 3 порядков  $n$ , а также проводят вычислительные эксперименты по определению количества различных магических квадратов, продуцируемых алгоритмом для заданной пары совместимых покрывающих совокупностей.

**Вспомогательные понятия и утверждения.** Следующий набор понятий и утверждений введен в работах авторов [2], [5], [6].

Совокупность матриц  $n \times n$ , элементами которых являются числа от 1 до  $n^2$  без повторений будем обозначать  $M(n)$ .

**Определение 1.** Матрицу  $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$  такую, что  $b_{i,j} = n(i-1) + j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , будем называть базовой.

**Определение 2.** Множество  $\alpha = \{b_{1,j_1}, b_{2,j_2}, \dots, b_{n,j_n}\}$  из  $n$  элементов базовой матрицы  $B_n$ , где  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  является перестановкой  $(1 2 \dots n)$ , будем называть подходящим набором.

**Определение 3.** Совокупность  $\Omega$  из  $n$  подходящих наборов  $\alpha_1 = \{b_{1,j_1^1}, b_{2,j_2^1}, \dots, b_{n,j_n^1}\}$ ,  $\alpha_2 = \{b_{1,j_1^2}, b_{2,j_2^2}, \dots, b_{n,j_n^2}\}, \dots, \alpha_n = \{b_{1,j_1^n}, b_{2,j_2^n}, \dots, b_{n,j_n^n}\}$  называется покрывающей, если

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

не существует элемента  $b_{i,j}$  базовой матрицы  $B_n$ , принадлежащего сразу двум различным подходящим наборам данной совокупности.

**Определение 4.** Две покрывающие совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$  называются совместимыми, если для каждой пары подходящих наборов  $\alpha \in \Omega, \beta \in \Pi$  существует единственный элемент  $b_{i,j}$  базовой матрицы  $B_n$  такой, что  $\alpha \cap \beta = b_{i,j}$ .

Учитывая взаимосвязь построенного авторами метода конструирования магических квадратов с латинскими квадратами, нам потребуется ввести ряд понятий из данного раздела математического знания [7].

**Определение 5.** Латинским квадратом порядка  $n$  называется квадратная матрица  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ , элементами  $t_{i,j}$  которой являются элементы некоторого множества  $U$  мощности  $n$ , при этом в каждой строке и каждом столбце латинского квадрата  $T$  каждый элемент множества  $U$  встречается ровно один раз.

Для определенности далее будем полагать, что множество  $U = \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Определение 6.** Два латинских квадрата  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$  и  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$  порядка  $n$  называются ортогональными латинскими квадратами, если все возможные упорядоченные пары  $(l_{i,j}, t_{i,j})$   $i, j = \overline{1, n}$ , образованные данными латинскими квадратами, различны.

Рассмотрим произвольный латинский квадрат  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$  порядка  $n$ . Будем говорить, что совокупность наборов элементов базовой матрицы  $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$  соответствует латинскому квадрату  $L$ , если каждый набор  $\alpha_k$  состоит из таких элементов  $b_{i,j} \in B_n$ , что  $l_{i,j} = k-1$ .

С доказательством следующего утверждения можно ознакомиться в работе авторов [6].

**Лемма 1.** Пусть  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$  и  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$  образуют пару ортогональных латинских квадратов, а  $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$  и  $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$  являются покрывающими совокупностями, которые соответствуют латинским квадратам  $L$  и  $T$  соответственно. Тогда  $\Omega$  и  $\Pi$  являются совместимыми покрывающими совокупностями.

**Определение 7.** Трансверсалью  $\tau^T$  латинского квадрата  $T$  называется множество элементов  $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ , где  $t_{i,j_i} \in T$ ,  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  является перестановкой  $(1 2 \dots n)$  и  $t_{i,j_i} \neq t_{k,j_k}$ ,  $i, k = \overline{1, n} (i \neq k)$ .

**Определение 8.** Трансверсаль  $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$  латинского квадрата  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$  будем называть совпадающей с трансверсалью  $\kappa^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$  латинского квадрата  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ , если перестановки  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  и  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  набора  $(1 2 \dots n)$  совпадают между собой.

**Определение 9.** Трансверсали  $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ ,  $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$  латинского квадрата  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$  называются ортогональными, если соответствующие им перестановки  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  и  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  набора  $(1 2 \dots n)$  удовлетворяют условию  $j_k \neq i_k, k = \overline{1, n}$ .

**Определение 10.** Пусть  $n$  – нечетное, тогда трансверсали  $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ ,  $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$  латинского квадрата  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$  будем называть почти ортогональными, если соответствующие им перестановки  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  и  $(i_1 i_2 \dots i_n)$  набора  $(1 2 \dots n)$  удовлетворяют следующим условиям:

(i) существует  $p$  такое, что  $i_p = j_p$ ;

(ii)  $j_k \neq i_k, k = \overline{1, n} (k \neq p)$ .

Также нам потребуется следующее тривиальное утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть  $n > 1$  нечетно и не делится на 3, тогда числа  $n$  и  $2n - 3$  являются взаимно простыми.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что  $n$  и  $2n - 3$  имеют общий делитель  $d > 1$ , тогда разность  $2n - (2n - 3) = 3$  также делится на  $d$ . Значит  $d = 3$ , что невозможно, так как  $n$  не делится на 3. Таким образом,  $n$  и  $2n - 3$  являются взаимно простыми числами.  $\square$

**Основной результат.** Пусть порядок рассматриваемых матриц будет нечетным  $n = 2k + 1$ . Рассмотрим пару ортогональных латинских квадрата  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$  и  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ , имеющих две пары совпадающих и почти ортогональных трансверсалей  $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ ,  $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$  латинского квадрата  $T$  и  $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2}, \dots, l_{n,j_n}\}$ ,  $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$  латинского квадрата  $L$ . Пусть данные трансверсали удовлетворяют следующим условиям: существуют натуральные  $r, r' \leq n$  такие, что  $t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$  и  $l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$ , а кроме того, для всякого натурального  $s (\neq r) \leq n$  существуют натуральные  $p (\neq r), p' (\neq r'), s' (\neq r')$  такие, что  $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$ ,  $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$ ,  $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$  и  $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$ .

Будем говорить, что совместимые покрывающие совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$ , соответствующие латинским квадратам  $L$  и  $T$ , удовлетворяют условию **В**. Пару перестановок  $(u_1 u_2 \dots u_n)$  и  $(v_1 v_2 \dots v_n)$  набора  $(1 2 \dots n)$  будем называть **В-ассоциированной** парой перестановок к  $\Omega$  и  $\Pi$ , если существуют натуральные  $r, r' \leq n$  такие, что  $v_{k+1} - 1 = t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$  и  $u_{k+1} - 1 = l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$ , а кроме того, для всякого натурального  $s (\neq r) \leq n$  существуют натуральные  $p (\neq r), p' (\neq r'), s' (\neq r')$  такие, что  $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$ ,  $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$ ,  $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$  и  $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$ .

**Определение 11.** Множество, состоящее из натуральных чисел  $n$ , для которых существует пара, удовлетворяющих условию **В**, совместимых покрывающих совокупностей  $\Omega$  и  $\Pi$  базовой матрицы  $B_n$ , будем обозначать **MAVV**.

Представленный ниже алгоритм, позволяющий конструировать магические квадраты порядка  $n \in \text{MAVV}$ , обоснован в работе авторов [5].

**Алгоритм.** Пусть  $n \in \text{MAVV}$ , тогда для построения матрицы  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$ , являющейся магическим квадратом порядка  $n$ , достаточно выполнить следующую последовательность действий:

- (i) Построить две совместимые покрывающие совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$ , удовлетворяющие условию **В**.
- (ii) Пронумеровать подходящие наборы каждой из покрывающих совокупностей от 1 до  $n$ :  $\alpha_i \in \Omega, i = \overline{1, n}, \beta_j \in \Pi, j = \overline{1, n}$ .
- (iii) Взять пару **В-ассоциированных** перестановок  $(u_1 u_2 \dots u_n)$  и  $(v_1 v_2 \dots v_n)$  к  $\Omega$  и  $\Pi$  (для удобства их можно записать напротив строк и столбцов конструируемой матрицы).
- (iv) Заполнить ячейки конструируемой матрицы так, что каждый ее элемент  $a_{t,p}$  определяется следующим соотношением:  $a_{t,p} = \alpha_{u_t} \cap \beta_{v_p}$ .

**Замечание 1.** Рассуждения производимые в данной статье производятся для случая нечетных порядков  $n$ , однако же их можно распространить и на случай четных  $n$  [5].

Приведенные выше рассуждения вообще говоря не отвечают на вопрос о том, содержит ли множество MAVV хотя бы один элемент. Следующая теорема является основным результатом данной работы.

**Теорема 1.** Пусть  $n > 1$  нечетно и не делится на 3, тогда  $n \in \text{MAVV}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что для всех нечетных  $n > 1$ , не кратных 3, существует пара совместимых покрывающих совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$ , удовлетворяющих условию **B**. Для этого нам достаточно построить пару ортогональных латинских квадрата  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$  и  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ , имеющих две пары совпадающих и почти ортогональных трансверсалей  $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ ,  $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$  латинского квадрата  $T$  и  $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2}, \dots, l_{n,j_n}\}$ ,  $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$  латинского квадрата  $L$  соответственно, причем трансверсали  $\tau_1^T, \tau_2^T, \kappa_1^L, \kappa_2^L$  удовлетворяют следующим условиям: существуют натуральные  $r, r' \leq n$  такие, что  $t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$  и  $l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$ , а кроме того, для всякого натурального  $s (\neq r) \leq n$  существуют натуральные  $p (\neq r), p' (\neq r'), s' (\neq r')$  такие, что  $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$ ,  $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$ ,  $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$  и  $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$ .

Рассмотрим квадратные матрицы  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$  и  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$  порядка  $n = 2k + 1$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$l_{i,j} = j - 1 - 2(i - 1) \pmod{2k + 1}; \quad t_{i,j} = i - 1 - 2(j - 1) \pmod{2k + 1}$$

Прежде всего покажем, что данные матрицы являются латинскими квадратами. Так как 2 и  $2k + 1$  являются взаимно простыми числами, то при любом фиксированном  $j$  выражение  $2(i - 1) \pmod{2k + 1}$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n = 2k + 1$ , а значит в каждом столбце матрицы  $L$  находятся все натуральные числа от 0 до  $2k$ . При любом фиксированном  $i$  выражение  $j$  также пробегает полную систему вычетов по модулю  $n = 2k + 1$ , следовательно, каждая строка матрицы  $L$  содержит все натуральные числа от 0 до  $2k$ . Таким образом, матрица  $L$  является латинским квадратом. Аналогично получаем, что матрица  $T$  также является латинским квадратом.

Покажем, что латинские квадраты  $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$  и  $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$  образуют ортогональную пару. Предположим, что это не так, тогда существует пара различных ячеек с координатами  $(i, j)$  и  $(x, y)$  таких, что упорядоченные пары, образованные в этих ячейках совпадают, т.е.  $(l_{i,j}, t_{i,j}) = (l_{x,y}, t_{x,y})$ . Данное равенство образует следующую систему сравнений:

$$\begin{cases} j - 1 - 2(i - 1) \equiv y - 1 - 2(x - 1) \pmod{2k + 1} \\ i - 1 - 2(j - 1) \equiv x - 1 - 2(y - 1) \pmod{2k + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j - y \equiv 2(i - x) \pmod{2k + 1} \\ i - x \equiv 2(j - y) \pmod{2k + 1} \end{cases}$$

Значит  $j - y \equiv 4(j - y) \pmod{2k + 1}$ , откуда получаем  $(4k - 1)(j - y) \equiv 0 \pmod{2k + 1}$ . Заметим, что  $n$  нечетно и не делится на 3, тогда из утверждения 1 следует, что числа  $4k - 1 = 2n - 3$  и  $2k + 1 = n$  взаимно простые. В совокупности с последним сравнением получаем равенство  $j = y$ , а значит и  $i = x$ . Таким образом, получили, что латинские квадраты  $L$  и  $T$  образуют различные упорядоченные пары  $(l_{i,j}, t_{i,j})$  для всех  $i, j = \overline{1, n}$ , следовательно  $L$  и  $T$  являются ортогональными латинскими квадратами.

Покажем, что главные и побочные диагонали латинских квадратов  $L$  и  $T$  являются трансверсальями, для этого достаточно показать, что элементы на каждой диагонали различны.

$l_{i,i} = i - 1 - 2(i - 1) \pmod{2k + 1} \equiv 1 - i \pmod{2k + 1}$ , таким образом,  $(1 - i)$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n = 2k + 1$  при  $i = \overline{1, n}$ . Значит элементы по главной диагонали матрицы  $L$  образуют трансверсаль  $\kappa_1^L = \{l_{1,1}, l_{2,2}, \dots, l_{n,n}\}$ .

$l_{i,2k+2-i} = 2k + 2 - i - 1 - 2(i - 1) \pmod{2k + 1} \equiv 2 - 3i \pmod{2k + 1}$ , так как 3 и  $n = 2k + 1$  взаимно простые числа, то  $(2 - 3i)$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n = 2k + 1$  при  $i = \overline{1, n}$ . Значит элементы по побочной диагонали матрицы  $L$  образуют трансверсаль  $\kappa_2^L = \{l_{1,n}, l_{2,n-1}, \dots, l_{n,1}\}$ .

Аналогично элементы главной и побочной диагоналей матрицы  $T$  образуют трансверсали  $\tau_1^T = \{t_{1,1}, t_{2,2}, \dots, t_{n,n}\}$  и  $\tau_2^T = \{t_{1,n}, t_{2,n-1}, \dots, t_{n,1}\}$ .

Проверим выполнимость условия **В**. Заметим, что

$$l_{i,i} \equiv 1 - i \pmod{2k + 1}, l_{m,2k+2-m} \equiv 2 - 3m \pmod{2k + 1},$$

$$t_{i,i} \equiv 1 - i \pmod{2k + 1}, t_{m,2k+2-m} \equiv 3m - 1 \pmod{2k + 1}.$$

Очевидно, что трансверсали  $\tau_1^T, \tau_2^T$  и  $\kappa_1^L, \kappa_2^L$  пересекаются в центральных элементах матриц  $L$  и  $T$ , и, следовательно,  $r = r' = k + 1$ .

Зафиксируем натуральное  $m (\neq k + 1) \leq n$  и покажем, что однозначно определяется натуральное  $i (\neq k + 1) \leq n$ , удовлетворяющее условию **В**, если  $p' = i, s = n + 1 - m, p = m, s' = n + 1 - i$ . Для этого рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s} \\ t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p} \\ t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s} \\ l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{i,i} = l_{n+1-m,m} \\ t_{i,i} = t_{m,n+1-m} \\ t_{n+1-m,m} = t_{n+1-i,n+1-i} \\ l_{n+1-i,n+1-i} = l_{m,n+1-m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - i \equiv 3m - 1 \pmod{2k + 1} \\ 1 - i \equiv 3m - 1 \pmod{2k + 1} \\ 2 - 3m \equiv i \pmod{2k + 1} \\ i \equiv 2 - 3m \pmod{2k + 1} \end{cases}$$

Следовательно,  $i \equiv 2 - 3m \pmod{2k + 1}$ . Найденное решение единственно, потому что 3 и  $n = 2k + 1$  взаимно простые числа, а значит  $(2 - 3m)$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n = 2k + 1$  кроме значения  $k + 1$ , так как  $m \neq k + 1$ .

Таким образом, соответствующие построенным латинским квадратам  $L$  и  $T$  совместимые покрывающие совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$  удовлетворяют условию **В**, откуда и следует искомое утверждение. □

Следует отметить, что теорема 1 не только получает достаточные условия принадлежности  $n$  к множеству  $MAVV$ , но и содержит в доказательстве метод построения по одной паре латинских квадратов  $L$  и  $T$ , соответствующие которым покрывающие совокупности  $\Omega$  и  $\Pi$  удовлетворяют условию **В**, для каждого такого  $n$ .

Важной характеристикой любого алгоритма построения магических квадратов является значение числа продуцируемых квадратов для фиксированного порядка  $n$ . Прежде всего отметим, что каждая пара совместимых покрывающих совокупностей порождает уникальный набор магических квадратов, т.к. однозначным образом определяет наборы элементов, составляющие каждую строку и столбец конструируемых матриц. Считая два квадрата одинаковыми, если один из другого можно получить поворотом или отражением, получаем, что для каждой пары покрывающих совокупностей удовлетворяющих условию **В**, для каждой конкретной пары подходящих почти ортогональных трансверсалей, построенный алгоритм дает  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor!$  различных магических квадратов. Для определения общего количества продуцируемых с помощью построенного Алгоритма магических квадратов заданного порядка  $n$ , необходимо знать общее количество различных пар совместимых покрывающих совокупностей, удовлетворяющих условию **В**, однако математическая теория латинских квадратов не содержит сведений по этому поводу.

Заметим также, что не всякая пара совместимых покрывающих совокупностей име-

ет пару ортогональных совпадающих трансверсалей, на которых можно задать пару **В-ассоциированных** перестановок. Рассмотрим, например, пару диагональных ортогональных латинских квадратов порядка 10, построенных в [8] (рис. 1). Главная и побочная трансверсали этих матриц образуют ортогональные совпадающие трансверсали. Тем не менее, покрывающие совокупности, соответствующие данным латинским квадратам, условию **В** не удовлетворяют, а значит представленный выше Алгоритм конструирования магических квадратов не применим.

0	9	4	6	1	7	5	8	2	3
7	1	9	4	5	3	8	0	6	2
4	6	2	8	3	1	7	5	9	0
6	0	7	3	2	8	4	9	1	5
5	3	6	7	4	2	9	1	0	8
8	4	1	2	9	5	0	6	3	7
2	5	3	0	8	9	6	4	7	1
3	2	8	9	0	4	1	7	5	6
9	7	5	1	6	0	3	2	8	4
1	8	0	5	7	6	2	3	4	9

0	8	5	1	7	3	4	6	9	2
5	1	7	2	9	8	0	3	4	6
1	7	2	9	5	6	8	0	3	4
9	6	4	3	0	2	7	1	5	8
3	0	8	6	4	1	5	9	2	7
4	3	0	8	6	5	9	2	7	1
7	2	9	5	1	4	6	8	0	3
6	4	3	0	8	9	2	7	1	5
2	9	6	4	3	7	1	5	8	0
8	5	1	7	2	0	3	4	6	9

**Рис. 1.** Пара диагональных ортогональных латинских квадратов  $L_{10}$  и  $T_{10}$  с трансверсалими на диагоналях

Невозможность построения **В-ассоциированных** перестановок на трансверсалиях, образованных диагоналями данных квадратов означает, что элементы базовой матрицы  $B_{10}$ , соответствующие данным трансверсалиям (в данном случае элементы находящиеся на диагоналях матрицы  $B_{10}$ ), не могут находиться одновременно на диагоналях, конструируемых при помощи Алгоритма матриц. Расположим теперь на одной из диагоналей элементы базовой матрицы, соответствующие совпадающим трансверсалиям главных диагоналей представленных латинских квадратов. Для этого в пункте (iii) Алгоритма нужно выбрать соответствующую пару перестановок (одна перестановка произвольная, а вторая выбирается однозначно исходя из правила заполнения ячеек конструируемой матрицы, заключенном в пункте (iv) Алгоритма). Построенный таким образом вычислительный эксперимент выявил 13440 различных магических квадратов среди  $\frac{10!}{2} = 1814400$  рассмотренных вариантов (квадраты, полученные друг из друга при помощи поворотов и отражений, тут считаются равными). Проведя аналогичный эксперимент для элементов, соответствующих трансверсалиям побочных диагоналей, получено 7680 различных магических квадратов. Отметим, что так как данные пары трансверсалей не позволяют строить **В-ассоциированные** перестановки, то все построенные магические квадраты в результате проведенных экспериментов различны, т. е. для данной пары латинских квадратов построено 21120 уникальных магических квадратов.

Из приведенных выше рассуждений видно, что для построения значительного количества магических квадратов заданного порядка требуется находить пары ортогональных латинских квадратов, имеющие совпадающие трансверсали. В этом смысле особенно обращают на себя внимание группы попарно ортогональных латинских квадратов [7]. Приведем несколько фактов из математической теории латинских квадратов, связанных

с этим вопросом: для каждого  $n \geq 53$  существует группа попарно ортогональных латинских квадратов, состоящая не менее чем из 4 квадратов [9]; для  $n \geq 63$  — не менее чем из 5 квадратов [10]; для  $n \geq 90$  — не менее чем из 6 квадратов [11]; для  $n \geq 3$ , являющимся простым числом или его натуральной степенью, существует группа попарно ортогональных латинских квадратов состоящая из  $n - 1$  квадрата [12].

Рассмотрим группу попарно ортогональных латинских квадратов порядка  $n = 12$  состоящую из 5 квадратов рис. 2 — данная группа построена Дюльмаж, Джонсон и Мендельсон [13] непосредственным построением.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	0	7	8	9	10	11	6
2	3	4	5	0	1	8	9	10	11	6	7
3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8
4	5	0	1	2	3	10	11	6	7	8	9
5	0	1	2	3	4	11	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	8	9	10	11	6	1	2	3	4	5	0
8	9	10	11	6	7	2	3	4	5	0	1
9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1	2
10	11	6	7	8	9	4	5	0	1	2	3
11	6	7	8	9	10	5	0	1	2	3	4

0	6	8	2	7	1	9	11	4	10	5	3
1	7	9	3	8	2	10	6	5	11	0	4
2	8	10	4	9	3	11	7	0	6	1	5
3	9	11	5	10	4	6	8	1	7	2	0
4	10	6	0	11	5	7	9	2	8	3	1
5	11	7	1	6	0	8	10	3	9	4	2
6	0	2	8	1	7	3	5	10	4	11	9
7	1	3	9	2	8	4	0	11	5	6	10
8	2	4	10	3	9	5	1	6	0	7	11
9	3	5	11	4	10	0	2	7	1	8	6
10	4	0	6	5	11	1	3	8	2	9	7
11	5	1	7	0	6	2	4	9	3	10	8

0	3	6	1	9	11	2	8	5	4	7	10
1	4	7	2	10	6	3	9	0	5	8	11
2	5	8	3	11	7	4	10	1	0	9	6
3	0	9	4	6	8	5	11	2	1	10	7
4	1	10	5	7	9	0	6	3	2	11	8
5	2	11	0	8	10	1	7	4	3	6	9
6	9	0	7	3	5	8	2	11	10	1	4
7	10	1	8	4	0	9	3	6	11	2	5
8	11	2	9	5	1	10	4	7	6	3	0
9	6	3	10	0	2	11	5	8	7	4	1
10	7	4	11	1	3	6	0	9	8	5	2
11	8	5	6	2	4	7	1	10	9	0	3

0	8	1	11	5	9	3	10	2	7	6	4
1	9	2	6	0	10	4	11	3	8	7	5
2	10	3	7	1	11	5	6	4	9	8	0
3	11	4	8	2	6	0	7	5	10	9	1
4	6	5	9	3	7	1	8	0	11	10	2
5	7	0	10	4	8	2	9	1	6	11	3
6	2	7	5	11	3	9	4	8	1	0	10
7	3	8	0	6	4	10	5	9	2	1	11
8	4	9	1	7	5	11	0	10	3	2	6
9	5	10	2	8	0	6	1	11	4	3	7
10	0	11	3	9	1	7	2	6	5	4	8
11	1	6	4	10	2	8	3	7	0	5	9

0	4	11	10	2	7	8	6	9	1	3	5
1	5	6	11	3	8	9	7	10	2	4	0
2	0	7	6	4	9	10	8	11	3	5	1
3	1	8	7	5	10	11	9	6	4	0	2
4	2	9	8	0	11	6	10	7	5	1	3
5	3	10	9	1	6	7	11	8	0	2	4
6	10	5	4	8	1	2	0	3	7	9	11
7	11	0	5	9	2	3	1	4	8	10	6
8	6	1	0	10	3	4	2	5	9	11	7
9	7	2	1	11	4	5	3	0	10	6	8
10	8	3	2	6	5	0	4	1	11	7	9
11	9	4	3	7	0	1	5	2	6	8	10

Рис. 2. Группа ортогональных латинских квадратов порядка 12 с отмеченной общей трансверсалью для первых четырех матриц

Заметим, что подходящие наборы, соответствующие некоторому латинскому квадрату, являются трансверсальями для любого ортогонального ему латинского квадрата. Поэтому проблему нахождения совпадающих трансверсалей можно решить следующим образом. Зафиксировав любой подходящий набор пятого квадрата из приведенной выше

группы, получаем совпадающие трансверсали в каждом из остальных четырех квадратов рис. 2.

Вычислительные эксперименты для каждой из пар первых четырех ортогональных квадратов с элементами базовой матрицы  $B_{12}$ , соответствующими выбранным совпадающим трансверсалим и расставленными по главной диагонали конструируемых магических квадратов, показали следующие результаты: из  $\frac{12!}{2} = 239500800$  вариантов для I и II квадратов получено 1267200; для I и III квадратов получено 1451520; для I и IV квадратов получено 1589760; для II и III квадратов получено 806400; для II и IV квадратов получено 552960; для III и IV квадратов получено 714240. Всего, таким образом, получено 6382080 различных магических квадратов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников М. М. Магические квадраты / М. М. Постников. – Москва: Наука, математическая библиотека, 1964 – 84 с.
2. Иванов А. Ю. О построении магических квадратов / А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020 – № 2. – С. 61–67.
3. Ollerenshaw K. Magic Squares of Order Four / K. Ollerenshaw, H. Bondi // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Mathematical and Physical Sciences. Royal Society – 1982 – V. 306, No 1495 – P. 443–532.
4. Чебраков Ю. В. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ / Ю. В. Чебраков. – СПб: СПбГТУ, 1995 – 388 с.
5. Иванов А. Ю. Новый метод конструирования магических квадратов при помощи ортогональных трансверсалей / А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2023 – № 2. – С. 58–65.
6. Иванов А. Ю. Особенности построения магических квадратов при помощи латинских квадратов / А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022 – № 2. – С. 52–63.
7. Keedwell A. D. Latin squares and their applications / A. D. Keedwell, J. Dénes. – Elsevier, Second edition – 2015 – 424 p.
8. Brown J. W. et al. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares / J. W. Brown. // Lecture notes in pure and applied mathematics, – 1992 – V. 139. – С. 43–49.
9. Guérin R. Existence et propriétés des carrés latins orthogonaux / R. Guérin // I. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris – 1966 – V. 15. – P. 113–213.
10. Hanani H. On the number of orthogonal latin squares / H. Hanani // J. Combin. Theory – 1970 – V. 8. – P. 247–271.
11. Wilson R. M. Concerning the number of mutually orthogonal latin squares / R. M. Wilson // Discrete Math. – 1974 – V. 9. – P. 181–198.
12. Bose R. C. On the application of the properties of Galois fields to the construction of hyper-Graeco-Latin squares / R. C. Bose // Sankhyā, – 1938 – V. 3. – P. 323–338.
13. Dulmage A. L. Orthomorphisms of groups and orthogonal Latin squares / A. L. Dulmage, D. M. Johnson, N. S. Mendelsohn // Canad.I.Math. – 1961 – V. 13. – P. 356–372.

*Поступила в редакцию 30.08.2024 г.*

## ON CLARIFYING THE SET OF APPLICABILITY OF THE METHOD OF CONSTRUCTING MAGIC SQUARES USING ORTHOGONAL TRANSVERSALS

*A. Yu. Ivanov, A.-V. V. Melnik*

The article explores the set of orders for which the author's method of constructing magic squares is applicable. Also, there are a set of observations is made about the number of magic squares constructed using this method.

**Keywords:** Magic square, latin square, permutation, transversal.

**Иванов Александр Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математического анализа и диф-  
ференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.  
E-mail: a.ju.ivanov.dongu@mail.ru

**Ivanov Alexandr Jurievich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Donetsk State University, Donetsk, Russia.

**Мельник Анна-Валентина Валентиновна**

кандидат технических наук,  
доцент кафедры прикладной механики и компью-  
терных технологий,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.  
E-mail: Anna-Valentina@yandex.ru

**Melnik Anna-Valentina Valentinovna**

Candidate of Technical Sciences,  
Donetsk State University, Donetsk, Russia.

## О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОСРЕДСТВОМ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

© 2024. *Д. В. Лиманский*

В работе приводятся результаты о характеристике эллиптических и  $l$ -квазиэллиптических систем минимальных дифференциальных операторов при помощи априорных оценок в изотропных и анизотропных пространствах Соболева  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . При заданном наборе  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$  доказаны критерии существования  $l$ -квазиэллиптических и слабо коэрцитивных систем, а также указаны широкие классы слабо коэрцитивных в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , неэллиптических и неквазиэллиптических систем.

**Ключевые слова:** априорная оценка, дифференциальный оператор, коэрцитивность, пространство Соболева, тензорное произведение.

### § 1. Введение.

Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Обозначим через  $L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N)$  линейное пространство операторов  $Q(x, D)$ , подчиненных системе минимальных дифференциальных операторов  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  в  $L^p(\Omega)$ , т. е. пространство операторов  $Q(x, D)$ , удовлетворяющих *априорной оценке*

$$\|Q(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1)$$

где константа  $C > 0$  не зависит от выбора  $f$ .

В случае  $N = 1$  говорят, что минимальный оператор  $P$  *сильнее* оператора  $Q$ .

Напомним, что *минимальный оператор*  $P = P_{\min}$  в  $L^p(\Omega)$ , ассоциированный с дифференциальным выражением  $P(x, D)$ , определяется как замыкание оператора  $P'$ , являющегося сужением  $P(x, D)$  на множество  $C_0^\infty(\Omega)$ , т. е.  $P = \overline{P'}$  и  $P' := P(x, D) \upharpoonright C_0^\infty(\Omega)$ . По определению,  $C_0^\infty(\Omega)$  плотно в норме графика оператора  $P_{\min}$ . В этих обозначениях теорема о замкнутом графике показывает, что оценка (1) эквивалентна (непрерывному) вложению

$$\text{dom } Q \supset \bigcap_{j=1}^N \text{dom } P_j$$

областей определения соответствующих операторов в норме графика (см. [27]).

Операторы  $P_j(x, D)$  порядка  $l$  имеют вид

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (2)$$

Здесь  $D := (D_1, \dots, D_n)$ ,  $D_k := -i\partial/\partial x_k$ ,  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$  и  $a_{j\alpha}(x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$ . *Полный символ* оператора (2) имеет вид

$$P_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (3)$$

т. е. получается заменой  $D_k$  на  $\xi_k$ , где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим также через

$$P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=l} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (4)$$

главный символ (старшую однородную форму порядка  $l$ ) оператора (3).

**Предложение 1** ([2, 3, 12]). Пусть  $\{P_j(D)\}_1^N$  — система операторов с постоянными коэффициентами. Тогда для всех  $p \in [1, \infty]$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$  из оценки

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega) \quad (5)$$

вытекает алгебраическое неравенство для символов операторов:

$$|Q(\xi)| \leq C \sum_{j=1}^N |P_j(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

При  $p = 2$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$  из равенства Парсеваля вытекает, что оценка (5) и неравенство (6) эквивалентны. Кроме того, при  $p \in (1, \infty)$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$  эквивалентность оценки (5) алгебраической оценке (6) доказана В. П. Ильиным [2, 9] в случае дифференциальных мономов  $Q(D)$  и  $\{P_j(D)\}_1^N$  (см. далее теорему 9). Однако в общем случае при  $p \neq 2$  эквивалентность (5)  $\iff$  (6), вообще говоря, не имеет места.

Далее, при  $N = 1$ ,  $p = 2$  и ограниченной области  $\Omega$  Л. Хёрмандером [27] получен следующий фундаментальный критерий справедливости оценки (1).

**Теорема 1** ([27]). Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда для дифференциальных полиномов  $Q(D)$  и  $P(D)$  включение  $Q \in L_{2,\Omega}^0(P)$  эквивалентно алгебраическому неравенству

$$|Q(\xi)|^2 \leq C \tilde{P}^2(\xi) := \sum_{\alpha} |D^\alpha P(\xi)|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что предложение 1, вообще говоря, неверно для ограниченных областей  $\Omega$ .

**Пример 1.** Рассмотрим операторы  $Q(D) := D_1$  и  $P(D) := D_1^2 - D_2^2$ . Если область  $\Omega$  ограничена и  $p = 2$ , то оценка (5) справедлива в силу теоремы 1, хотя неравенство  $|\xi_1| \leq C|\xi_1^2 - \xi_2^2|$  не имеет места для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Напомним, что оператор  $P(D)$  порядка  $l$  называют эллиптическим, если

$$P^l(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (8)$$

(см. далее определение 5). Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда оператор  $P(D)$  порядка  $l$  эллиптивен в точности тогда, когда пространство  $L_{2,\Omega}^0(P)$  содержит все операторы  $Q(D)$  порядка  $\deg Q \leq l$ , т. е. оператор  $P(D)$  сильнее любого оператора  $Q(D)$  порядка  $\leq l$ .

Предложение 2 также распространяется на операторы с переменными коэффициентами, действующие в  $L^p$  при  $p \in (1, \infty)$  (см. далее теорему 8).

Другим важным классом операторов, чью «силу» можно охарактеризовать в терминах символов, являются операторы главного типа, введенные Хёрмандером.

**Определение 1** ([27]). Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ . Оператор  $P(D)$  порядка  $l$  называют *оператором главного типа* в  $L^2(\Omega)$ , если

$$\nabla P^l(\xi) := \left( \frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial P^l}{\partial \xi_n} \right)(\xi) \neq (0, \dots, 0), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

**Пример 2.** Гиперболический оператор

$$P(D) := D_1^2 + \dots + D_k^2 - D_{k+1}^2 - \dots - D_n^2, \quad k \in \{1, \dots, n-1\} \quad (9)$$

является оператором главного типа в  $L^2(\Omega)$ .

**Пример 3.** Эллиптический оператор — главного типа в  $L^2(\Omega)$  (см. [27]).

**Следствие 1.** Оператор  $P(D)$  главного типа в  $L^2(\Omega)$  порядка  $l$  сильнее любого оператора  $Q(D)$  порядка  $\leq l-1$ .

Доказательство вытекает из теоремы 1, а также из общего свойства эллиптической системы  $\{D_k P^l(\xi)\}_1^n$  (см. теорему 8 в «изотропном» случае  $l_1 = \dots = l_n = l$ ).

Утверждение, обратное к предложению 1, вообще говоря, не имеет места. Например, в силу теоремы 1 параболический оператор

$$P(D) := D_1^2 + \dots + D_{n-1}^2 + iD_n \quad (10)$$

сильнее в  $L^2(\Omega)$  любого оператора  $Q(D) = D_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , но не является оператором главного типа. Этот факт вытекает из теоремы 1 Хёрмандера, но также является следствием более общего свойства  $l$ -квазиэллиптического оператора (см. теорему 8).

Кроме того, следствие 1 не имеет места при  $p \neq 2$ . Демонстрацией этого факта служит следующий глубокий результат Литтмана [18].

**Теорема 2** ([18]). Пусть  $\Omega$  — куб в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , и  $P(D)$  — волновой оператор вида (9) с  $k = n-1$ . Тогда при любом  $p \geq \frac{2n}{n-1}$  оценка (5) с операторами  $Q(D) = D_k$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  не имеет места.

Следующая характеристика также принадлежит Хёрмандеру.

**Предложение 3** ([27]). Пусть  $P(D)$  — оператор порядка  $l$  в  $L^2(\Omega)$  и  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $P(D)$  является оператором главного типа в  $L^2(\Omega)$  в точности тогда, когда  $P(D)$  и любой другой оператор  $R(D)$  с той же главной частью,  $P^l(\xi) \equiv R^l(\xi)$ , имеют одинаковую «силу» в том смысле, что пространства  $L_{p,\Omega}^0(P)$  и  $L_{p,\Omega}^0(R)$  совпадают.

Результаты, аналогичные теореме 1 и предложению 3, справедливы при  $N > 1$  для системы операторов с постоянными коэффициентами (см. [2, 21]). Из этого, в частности, вытекает, что пространство  $L_{2,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N)$  для эллиптической системы  $\{P_j(D)\}_1^N$  порядка  $l$  имеет максимально возможную размерность, т. е. оценка (5) справедлива для любого оператора  $Q(D)$  порядка  $\leq l$ . То же утверждение верно и для нормы в пространстве  $L^p(\Omega)$  при  $p \in (1, \infty)$ , но утрачивает силу в концах шкалы, т. е. при  $p = 1$  и  $p = \infty$ .

При  $p = \infty$  Б. С. Митягиным [22] доказана невозможность оценки (1) при  $N = 2$  для операторов  $Q(D) = D_1 D_2$  и  $P_j(D) = D_j^2$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Первый общий результат об оценках в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  получен де Лю и Миркилом [19]. Именно, они получили следующее необходимое условие справедливости оценки (5) в пространстве  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 3** ([19]). Пусть  $P_j(D)$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , — операторы с постоянными коэффициентами порядка  $l$ , и  $Q(D)$  — оператор порядка  $\leq l$ . Тогда из оценки (5) при  $p = \infty$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$  вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

для главных символов  $Q^l(\xi)$  и  $P_j^l(\xi)$  операторов  $Q(D)$  и  $P_j(D)$  соответственно, с некоторыми константами  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ .

В частности, для однородных полиномов  $P_j(\xi) = P_j^l(\xi)$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , и  $Q(\xi) = Q^l(\xi)$  оценка (5) при  $p = \infty$  эквивалентна тождеству (11).

Отметим также, что в недавней работе Казанецкого и Войцеховского [5] доказан аналог вышеупомянутого результата Митягина на пространстве аналитических тригонометрических полиномов.

Напомним определение понятия мультипликатора в  $L^p$ , играющее важную роль в дальнейшем.

**Определение 2** ([26]). Пусть  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье в  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  называют мультипликатором в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , если оператор свертки  $f \mapsto T_\Phi f =: \mathcal{F}^{-1} \Phi \mathcal{F} f$  отображает  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  и ограничен в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Совокупность всех мультипликаторов из  $L^p$  в  $L^p$  обозначается  $\mathcal{M}_p$ .

Простое описание пространств  $\mathcal{M}_p$  известно лишь при  $p \in \{1, 2, \infty\}$ . Так, алгебра  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty$  состоит из преобразований Фурье — Стильеса конечных борелевских мер в  $\mathbb{R}^n$  (см. [26]):

$$\Phi \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty \iff \Phi(\xi) = \widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (12)$$

Для остальных значений  $p \in (1, \infty)$  известны лишь достаточные условия включения  $\Phi \in \mathcal{M}_p$  (см. [2, 26]).

Следующий результат де Лю и Миркила дополняет теорему 3 и дает критерий справедливости оценки (5) при  $p = \infty$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$  в терминах мультипликаторов.

**Теорема 4** ([19]). Пусть  $Q(D)$  и  $\{P_j(D)\}_1^N$  — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Тогда оценка (5) при  $p = \infty$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$  эквивалентна тождеству

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

в котором  $\{M_j(\cdot)\}_1^N$  — мультипликаторы в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Приведем еще один важный результат, касающийся оценок в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

В дальнейшем мы определяем главную часть дифференциального оператора по отношению к произвольному вектору  $l = (l_1, \dots, l_n)$  с натуральными компонентами. Для  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  полагают  $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$ .

**Определение 3.** Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ . Полином  $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$  называется  $l$ -однородным, если справедливо тождество

$$P(t^{1/l_1} \xi_1, \dots, t^{1/l_n} \xi_n) = t P(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Далее везде будем считать, что операторы  $Q(x, D)$  и  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  имеют вид

$$Q(x, D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} b_\alpha(x) D^\alpha, \quad P_j(x, D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha. \quad (15)$$

Отметим, что в изотропном случае, т. е. при  $l_1 = \dots = l_n = l$ , неравенство  $|\alpha : l| \leq 1$  принимает обычный вид  $|\alpha| \leq l$ .

**Определение 4.** Операторы

$$Q^l(x, D) := \sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha(x) D^\alpha, \quad P_j^l(x, D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (16)$$

называют *l-главными частями*, а их *l-однородные символы*

$$Q^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}$$

называют *l-главными символами* соответственно операторов  $Q(x, D)$  и  $P_j(x, D)$ .

При  $l_1 = \dots = l_n = l$  определение 4 совпадает с «изотропным» определением главных символов, данным ранее (см. выше формулу (4)).

Отметим, что при заданном операторе существуют различные векторы  $l$ , задающие  $l$ -главные части этого оператора. Например, параболический оператор  $P(D)$  вида (10) имеет главные части  $P^l(D) = D_1^2 + \dots + D_{n-1}^2$  при  $l := (2, \dots, 2, 2)$  и  $P^{l'}(D) := D_1^2 + \dots + D_{n-1}^2 + iD_n$  при  $l' := (2, \dots, 2, 1)$ .

Следующая теорема М.М. Маламуда обобщает теорему 3 де Лю и Миркила.

**Теорема 5** ([20, 21]). Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , а  $Q(x, D)$  и  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  — дифференциальные операторы вида (15) с коэффициентами  $a_{j\alpha}(\cdot), b_\alpha(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$  при  $|\alpha : l| < 1$  и  $a_{j\alpha}(\cdot), b_\alpha(\cdot) \in C^1(\Omega)$  при  $|\alpha : l| = 1$ .

Тогда из априорной оценки

$$\|Q(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega) \quad (17)$$

вытекает тождество

$$Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(x) P_j^l(x, \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (18)$$

в котором функции  $\lambda_j(\cdot) \in C^1(\Omega)$ .

Если коэффициенты операторов  $Q(x, D)$  и  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  постоянны, то функции  $\lambda_j(x)$  в (18) также постоянны,  $\lambda_j(x) \equiv \lambda_j$ .

В частности, для  $l$ -однородных операторов  $P_j(x, D) = P_j^l(x, D)$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , и  $Q(x, D) = Q^l(x, D)$  оценка (17) при  $p = \infty$  эквивалентна тождеству (18).

Отметим, что метод доказательства теоремы 5, предложенный в [20, 21], в отличие от метода работы [19], позволяет охватить случай операторов с переменными коэффициентами.

Условие (18), как и условие (11), является лишь необходимым, но не достаточным для справедливости оценки (1). Кроме того, «анизотропная» теорема 5 демонстрирует полезность неоднозначного выделения  $l$ -главной части дифференциального оператора.

**Пример 4.** Пусть  $N = 1$  и  $P(D) := D_1^4 + D_2^2 + iD_3$ . При  $l := (4, 4, 4)$  равенство (18) не исключает наличие оценки (17) для

$$Q_1(D) = D_1^4, \quad Q_2(D) = D_2^2, \quad Q_3(D) = D_3, \quad Q_4(D) = D_1^4 + D_2^2, \quad Q_5(D) = D_1^4 + iD_3. \quad (19)$$

Но при  $l' := (4, 2, 1)$  оценка (17) противоречит теореме 5 для каждого из приведенных выше операторов  $Q_j(D)$ . Действительно,  $l'$ -главная часть  $P(D)$  равна  $P^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2 + i\xi_3$ , в то время как  $l'$ -главные части  $Q_j(D)$  имеют вид

$$Q_1^{l'}(\xi) = \xi_1^4, \quad Q_2^{l'}(\xi) = \xi_2^2, \quad Q_3^{l'}(\xi) = \xi_3, \quad Q_4^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2, \quad Q_5^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + i\xi_3.$$

Ясно, что  $Q_j^{l'}(\xi)$  не пропорциональна  $P^{l'}(\xi)$  для каждого  $j \in \{1, \dots, 5\}$ . Значит, как тождество (18), так и оценка (17) с  $Q(D) = Q_j(D)$  вида (19) не имеют места.

Отсутствие оценки (17) при  $\Omega = \mathbb{R}^3$  для операторов (19) показывает также, что

$$\Phi_j(\xi) := \frac{Q_j(\xi)}{P(\xi)}, \quad j \in \{1, \dots, 5\}, \quad (20)$$

не являются мультипликаторами в  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Действительно, предполагая противное, т. е. что  $\Phi_j \in \mathcal{M}_\infty$  для некоторого  $j \in \{1, \dots, 5\}$ , перепишем соответствующее тождество (20) в виде  $Q_j(\xi) = \Phi_j(\xi) P(\xi)$ , что противоречит теореме 4 де Лю и Миркила.

Остановимся кратко на результатах об оценках в  $L^1$ . Орнштейном [24] впервые был получен следующий результат, являющийся  $L^1$ -версией теоремы 3.

**Теорема 6** ([24]). Пусть  $Q(D)$  и  $P_j(D)$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  — однородные операторы порядка  $l$  с постоянными коэффициентами. Тогда оценка (5) при  $p = 1$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$  эквивалентна тождеству (11) с некоторыми константами  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

Изотропный аналог теоремы 5 при  $N = 1$  для пространства  $L^1(\mathbb{R}^n)$  получен в работе Кирхгайма и Кристенсена [7]. Наконец, в работе Казанецкого, Столярова и Войцеховского [6] теорема 6 Орнштейна обобщена на анизотропный случай  $l$ -однородных операторов с постоянными коэффициентами.

## § 2. Оценки для квазиэллиптической системы в $L^p$ при $p \in [1, \infty]$ .

Наиболее употребительными в приложениях являются априорные оценки для эллиптических и  $l$ -квазиэллиптических систем операторов.

**Определение 5** ([2, 4]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ . Систему дифференциальных операторов  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  вида (15) называют  $l$ -квазиэллиптической, если

$$(P_1^l(x, \xi), \dots, P_N^l(x, \xi)) \neq 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \quad (21)$$

В частности, в изотропном случае, т. е. при  $l_1 = \dots = l_n = l$ , систему  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  называют эллиптической порядка  $l$ .

**Определение 6** ([2]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ . Анизотропным пространством Соболева  $W_p^l(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , называют множество функций  $f \in L^p(\Omega)$  таких, что для всех  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $|\alpha : l| \leq 1$ , существуют обобщенные производные  $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ . Норма в этом пространстве определяется как

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha : l| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}. \quad (22)$$

Подпространство в  $W_p^l(\Omega)$ , совпадающее с замыканием множества  $C_0^\infty(\Omega)$  в норме (22), обозначают через  $W_{p,0}^l(\Omega)$ .

**Определение 7** ([2]). Систему дифференциальных операторов  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  называют *коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева  $W_{p,0}^l(\Omega)$ , если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W_{p,0}^l(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (23)$$

в которой константы  $C_1, C_2 > 0$  не зависят от  $f$ .

Другими словами, система  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  коэрцитивна в  $W_{p,0}^l(\Omega)$ , если линейное пространство  $L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N)$  имеет максимально возможную размерность.

Для доказательства критерия коэрцитивности нам понадобится следующая классическая теорема Михлина — Лизоркина о мультипликаторах в  $L^p$  при  $p \in (1, \infty)$ .

**Теорема 7** ([2]). Пусть функция  $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$  ограничена на множестве

$$\mathbb{R}_*^n := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_k \neq 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}\}$$

вместе со всеми производными  $D^\alpha \Phi(\cdot)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_2^n := \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$ , где  $\mathbb{Z}_2 := \{0; 1\}$ . Если

$$|\xi^\alpha D^\alpha \Phi(\xi)| \leq C, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2^n, \quad \xi \in \mathbb{R}_+^n, \quad (24)$$

то  $\Phi \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$  при каждом  $p \in (1, \infty)$ .

Хорошо известен следующий классический результат о характеристизации  $l$ -квазиэллиптических систем посредством оценок.

**Теорема 8** ([2,4]). Пусть  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  — система операторов вида (15) с непрерывными в области  $\Omega$  коэффициентами. Тогда эта система коэрцитивна в анизотропном пространстве  $W_{p,0}^l(\Omega)$  при каждом фиксированном  $p \in (1, \infty)$  в точности тогда, когда она  $l$ -квазиэллиптическая.

**НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.** Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами.

(i) Если система  $\{P_j(D)\}_1^N$   $l$ -квазиэллиптическая, то легко проверить, что функции

$$\Phi_{j\alpha}(\xi) := \frac{\xi^\alpha \overline{P_j^l(\xi)}}{\sum_{k=1}^n |P_k^l(\xi)|^2}, \quad |\alpha : l| \leq 1, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (25)$$

удовлетворяют условиям теоремы 7 и, следовательно, функции (25) являются мультипликаторами в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  при каждом  $p \in (1, \infty)$ . Доказательство теоремы 8 теперь вытекает из тождества

$$\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^N \Phi_{j\alpha}(\xi) P_j(\xi) \widehat{f}(\xi), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (26)$$

Именно, после применения обратного преобразования Фурье к обеим частям (26) получаем

$$D^\alpha f = \sum_{j=1}^N T_j(P_j(D)f), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (27)$$

где  $T_j$  — ограниченный оператор свертки в  $L^p$  с символом  $\Phi_{j\alpha}(\cdot)$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Из равенства (27) вытекает оценка (5) с  $Q(D) = D^\alpha$ .

(ii) Обратно, пусть теперь система  $\{P_j(D)\}_1^N$  коэрцитивна в  $W_{p,0}^l(\Omega)$  при некотором  $p \in (1, \infty)$ . Для доказательства того, что эта система  $l$ -квазиэллиптическая, предположим противное, т. е. что  $P_j^l(\xi^0) = 0, j \in \{1, \dots, N\}$ , при некотором  $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Положим при  $t > 0$

$$f_t(x) := \chi(x) \exp \left[ i \sum_{k=1}^n t^{1/l_k} \xi_k^0 x_k \right], \quad (28)$$

где  $\chi(\cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$  — ненулевая функция. Подставляя функции (28) в обе части неравенства (23), ввиду соотношений  $P_j^l(\xi^0) = 0, j \in \{1, \dots, N\}$ , легко получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|D_k^{l_k} f_t\|_{L^p(\Omega)} &= t \sum_{k=1}^n |\xi_k^0|^{l_k} \|\chi\|_{L^p(\Omega)} + o(t), \quad t \rightarrow +\infty; \\ \sum_{j=1}^N \|P_j(D) f_t\|_{L^p(\Omega)} &= t \sum_{j=1}^N |P_j^l(\xi^0)| \|\chi\|_{L^p(\Omega)} + o(t) = o(t), \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Сравнивая оба соотношения, видим, что неравенство (23) неверно при больших  $t$ .  $\square$

Далее, обозначим через  $\text{ch}(\mathcal{A})$  выпуклую (замкнутую) оболочку множества  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . Следующая теорема В. П. Ильина дает критерий справедливости оценки (5) для случая, когда  $Q(D)$  и  $\{P_j(D)\}_1^N$  — дифференциальные мономы в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in (1, \infty)$ .

**Теорема 9** ([9]). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+^n$  — конечное подмножество и  $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ . Тогда при каждом  $p \in (1, \infty)$  оценка

$$\|D^\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (29)$$

эквивалентна условию  $\beta \in \text{ch}(\mathcal{A})$  с константой  $C = C_{\mathcal{A}}$  (не зависящей от  $f$ ).

При  $p = 1$  и  $p = \infty$   $l$ -квазиэллиптическая система является коэрцитивной в  $W_{\infty,0}^l(\Omega)$  и  $W_{1,0}^l(\Omega)$  в исключительных случаях (см. теорему 5). Тем не менее она является слабо коэрцитивной в  $W_{p,0}^l(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , в смысле следующего определения.

**Определение 8** ([12]). Систему дифференциальных операторов  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  называют *слабо коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева  $W_{p,0}^l(\Omega)$ , если верна оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D) f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega) \quad (30)$$

с некоторыми постоянными  $C_1, C_2 > 0$ , не зависящими от  $f$ .

Оценка (30) для  $l$ -квазиэллиптической системы  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  при  $p \in (1, \infty)$  вытекает из (23), а при  $p = \infty$  доказана в [21]. В случае постоянных коэффициентов она доказана в [1] при всех  $p \in [1, \infty]$ .

Для случая  $N = 1$  де Лю и Миркил [19] охарактеризовали эллиптический оператор  $P(D) = P_1(D)$  с постоянными коэффициентами при помощи априорных оценок в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Именно, ими доказан следующий результат.

**Теорема 10** ([19]). Пусть  $n \geq 3$ . Тогда эллиптичность дифференциального полинома  $P(D)$  порядка  $l \geq 2$  эквивалентна его слабой коэрцитивности в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ .

Условие  $n \geq 3$  в теореме существенно: Мальгранж [19] привел простой пример неэллиптического оператора  $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$ , слабо коэрцитивного в  $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^2)$ .

В связи с теоремой 10 возникает естественная задача о характеристизации эллиптических,  $l$ -квазиэллиптических операторов и их систем при помощи априорных оценок типа слабой коэрцитивности в пространствах  $W_{p,0}^l(\Omega)$  при  $p \in [1, \infty]$ .

Введем другой подкласс слабо коэрцитивных систем.

**Определение 9** ([16]). Систему операторов  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  будем называть  $\varepsilon$ -слабо коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева  $W_{p,0}^l(\Omega)$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется константа  $C_\varepsilon > 0$ , не зависящая от  $f$  и такая, что верна оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega). \quad (31)$$

Для доказательства условий слабой коэрцитивности в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  при  $p \in [1, \infty]$  нам понадобится результат о мультипликаторах в  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , полученный Э. С. Белинским, М. З. Двейриным и М. М. Маламудом в [1].

**Теорема 11** ([1]). Пусть  $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$  и при некоторых постоянных  $\delta \in (0, 1)$  и  $A_\delta > 0$  удовлетворяет следующим условиям:

(i) справедливо неравенство

$$\prod_{j=1}^n (1 + |\xi_j|)^\delta |\Phi(\xi)| \leq A_\delta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (32)$$

(ii) для любых мультииндексов  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^n$  таких, что  $\alpha + \beta = (1, 1, \dots, 1)$ , существуют производные  $D^\alpha \Phi$  и выполнено неравенство

$$\prod_{j \in \mathbb{N}_\alpha} |\xi_j|^{1-\delta} (1 + |\xi_j|^{2\delta}) \prod_{j \in \mathbb{N}_\beta} (1 + |\xi_j|)^\delta |D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \Phi(\xi)| \leq A_\delta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (33)$$

Здесь  $\mathbb{N}_\alpha \subset \{1, \dots, n\}$  — носитель мультииндекса  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ , т. е. множество индексов  $j \in \{1, \dots, n\}$ , для которых  $\alpha_j > 0$ .

Тогда  $\Phi \in \mathcal{M}_1$  и, значит,  $\Phi \in \mathcal{M}_p$  при  $p \in [1, \infty]$ .

**Замечание 1.** При  $\delta = 0$  условие (i) теоремы 11 выполняется автоматически, а условие (ii) принимает вид

$$|\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \Phi(\xi)| \leq A_\delta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (34)$$

где  $\alpha_j \in \{0; 1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . В этом случае условие теоремы 11 превращается в условие (24) Михлина — Лизоркина из их теоремы 7. Следовательно, можно рассматривать теорему 11 как обобщение теоремы 7 Михлина — Лизоркина на случай всей  $L^p$ -шкалы, тогда как теорема 7 дает включение  $\Phi \in \mathcal{M}_p$  лишь при  $p \in (1, \infty)$ .

С помощью теоремы 11 в работе [1] был получен следующий результат о коэрцитивности во всей  $L^p$ -шкале.

**Теорема 12** ([1]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$  и  $\{P_j(D)\}_1^N$  —  $l$ -квазиэллиптическая система операторов вида (15) с постоянными коэффициентами. Тогда система  $\{P_j(D)\}_1^N$  является  $\varepsilon$ -слабо коэрцитивной в шкале  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ .

Еще одно применение теоремы 11 приведено С. В. Кисляковым, Д. В. Максимовым и Д. М. Столяровым в работе [8].

Далее, в работе [1] при помощи теоремы 11 было получено другое (более простое и короткое) доказательство критерия Бомана [3] о «силе» системы дифференциальных мономов в  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Этот результат является естественным распространением теоремы 9 Ильина на случай  $p = \infty$ .

Для его формулировки обозначим через  $\text{int}_k(\mathcal{A})$  множество внутренних точек  $\mathcal{A}$  относительно  $k$ -мерного аффинного подпространства  $E_k \subset \mathbb{R}^n$ , где  $\mathcal{A} \subset E_k$ .

**Теорема 13** ([3]). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+^n$  — конечное подмножество и  $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ .

(i) Если существует  $k$ -мерное аффинное подпространство  $E_k \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \{0, \dots, n\}$ , параллельное  $k$ -мерной координатной плоскости в  $\mathbb{R}^n$  и такое, что

$$\beta \in \text{int}_k(\text{ch}(E_k \cap \mathcal{A})), \quad (35)$$

то оценка (29) верна при  $p = \infty$ .

(ii) Обратно, из оценки (29) при  $p = \infty$  вытекает включение (35).

Следующий результат утверждает, что при каждом  $p \in (1, \infty]$  неравенство (31) с любым  $\varepsilon > 0$  уже характеризует эллиптические системы в классе всех слабо коэрцитивных в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$  систем с постоянными коэффициентами в их главных частях.

**Теорема 14** ([12]). Пусть  $p \in (1, \infty]$ ,  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$  и  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  — операторы порядка  $l$ , главные части которых имеют постоянные коэффициенты, и  $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$  при  $|\alpha| < l$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Тогда система  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  эллиптика в точности тогда, когда она  $\varepsilon$ -слабо коэрцитивна в  $W_{p,0}^l(\Omega)$ .

Для операторов  $P_j(D)$  с постоянными коэффициентами результат остается верным и при  $p = 1$ .

В частности, операторы типа Мальгранжа, т. е. операторы вида  $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$ , являются слабо коэрцитивными, но не  $\varepsilon$ -слабо коэрцитивными в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ .

### § 3. Оценки в $L^\infty$ для эллиптических и $l$ -квазиэллиптических систем.

В этом параграфе мы распространяем теорему 10 де Лю и Миркила на случай одного оператора с переменными коэффициентами. Кроме того, мы приводим аналоги этой теоремы для системы с постоянными коэффициентами в изотропном и анизотропном случаях. Всюду в этом параграфе предполагается, что  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

#### 3.1. Изотропный случай.

Вначале приведем общие результаты о слабо коэрцитивных системах в изотропных пространствах  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , представляющие самостоятельный интерес.

**Теорема 15** ([12]). Пусть  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  — система операторов вида (2) порядка  $l \geq 2$ , коэффициенты главных частей которых постоянны. Пусть также система  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  слабо коэрцитивна в изотропном пространстве  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$  при некотором  $p \in [1, \infty]$ .

(i) Если коэффициенты операторов  $P_j(x, D)$  непрерывны,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , то при каждом фиксированном  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  множество нулей  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : P_1(x_0, \xi) = \dots = P_N(x_0, \xi) = 0\}$  системы полиномов  $\{P_j(x_0, \xi)\}_1^N$  компактно.

(ii) Если  $\{Q_j(x, D)\}_1^N$  — система операторов порядка  $\leq l - 2$ , то возмущенная система  $\{P_j(x, D) + Q_j(x, D)\}_1^N$  также слабо коэрцитивна в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ .

(iii) Пусть  $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  — нуль отображения  $P^l := (P_1^l, \dots, P_N^l) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ , т. е.  $P_j^l(\xi^0) = 0$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , и  $T_{2j-1}(\xi) := \text{Re } P_j^l(\xi)$ ,  $T_{2j}(\xi) := \text{Im } P_j^l(\xi)$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

Если  $n \geq 2N + 1$ , то ранг якобиевой матрицы отображения  $T := (T_1, \dots, T_{2N}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$  в точке  $\xi^0$  не превосходит  $2N - 1$ .

(iv) Пусть дополнительно  $N = 1$ ,  $p = \infty$ ,  $n \geq 2$  и  $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  — нуль полинома  $P^l(\xi)$ . Пусть также  $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  при  $|\alpha| < l - 1$  и  $a_{j\alpha}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  при  $|\alpha| = l - 1$ . Тогда  $\nabla P^l(\xi^0) \neq 0$ . В частности, при  $n = 2$  нули полинома  $P^l(\xi)$  простые.

**Теорема 16** ([12, 13]). Пусть  $l \geq 2$ ,  $n \geq 3$  и  $P(x, D)$  — дифференциальный оператор порядка  $l$  вида (3) с постоянными коэффициентами в его главной части,  $P^l(x, D) = P^l(D)$ . Пусть, кроме того,  $a_\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  при  $|\alpha| < l - 1$ , а также  $a_\alpha(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  при  $|\alpha| = l - 1$ .

Тогда оператор  $P(x, D)$  слабо коэрцитивен в изотропном пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$  в точности тогда, когда он эллиптивен.

Перейдем теперь к случаю системы  $\{P_j(D)\}_1^N$  в изотропном пространстве  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ . Не нарушая общности, можно считать, что главные символы  $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$  линейно независимы.

**Теорема 17** ([12]). Пусть  $\{P_j(D)\}_1^N$  — система линейно независимых операторов с постоянными коэффициентами порядка  $l \geq 2$ , удовлетворяющая условиям:

(i)  $n \geq 2N + 1$ ;

(ii) главные символы  $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$  операторов  $\{P_j(D)\}_1^N$ , суженные на любое двумерное подпространство пространства  $\mathbb{R}^n$ , остаются линейно независимыми.

Тогда система  $\{P_j(D)\}_1^N$  слабо коэрцитивна в изотропном пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$  в точности тогда, когда она эллиптивна.

**Пример 5.** (1) Условие (ii) теоремы 17 существенно для ее справедливости. Например, для системы

$$P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad P_2(\xi) := (\xi_4 + i)(\xi_5 + i)$$

выполнено условие (i) ( $n = 2N + 1 = 5$ ), но сужения главных символов  $P_1^2(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$  и  $P_2^2(\xi) = \xi_4 \xi_5$  полиномов  $\{P_j(\xi)\}_1^2$  на двумерное подпространство  $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$  линейно зависимы (поскольку последнее из них — нулевое). Тогда условие (ii) нарушено. При этом система  $\{P_j(D)\}_1^2$  слабо коэрцитивна в  $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^5)$ , но не эллиптивна.

(2) В то же время условие (ii) теоремы 17 не является необходимым: система

$$P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad P_2(\xi) := \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2$$

слабо коэрцитивна в  $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^5)$ , хотя сужения полиномов  $\{P_j(\xi)\}_1^2$  на подпространство  $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$  линейно зависимы.

(3) При  $n = 2N$  для системы

$$P_j(\xi) := (\xi_{2j-1} + i)(\xi_{2j} + i), \quad j \in \{1, \dots, N\}$$

нарушены оба условия (i) и (ii) теоремы 17. Она также слабо коэрцитивна в  $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^n)$ , но не эллиптивна.

### 3.2. Анизотропный случай.

Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ . Подпространство  $E \subset \mathbb{R}^n$  назовем *координатным*, если оно имеет вид  $E = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_{i_1} = \dots = \xi_{i_k} = 0\}$ , где  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ .

Обозначим через  $P(\xi) \upharpoonright E$  сужение полинома  $P(\xi)$  на координатное подпространство  $E$ , а через  $P(D) \upharpoonright E$  — соответствующий оператор. Не ограничивая общности,

расположим числа  $l_1, \dots, l_n$  в порядке убывания (нестрогого):

$$l_1 = \dots = l_{n_1} > l_{n_1+1} = \dots = l_{n_2} > \dots > l_{n_{m-1}+1} = \dots = l_n.$$

Пусть также  $n_0 := 0, n_m := n$ . Тогда пространство  $\mathbb{R}^n$  разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^m E_k, \tag{36}$$

в которой  $\{E_k\}_1^m$  — «однородные» координатные подпространства, т. е.  $E_k = \text{span}\{\xi_{n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_k}\}, k \in \{1, \dots, m\}$ , порождено переменными  $\xi_{n_{k-1}+1}, \dots, \xi_{n_k}$ , соответствующими  $k$ -й группе равных между собой компонент вектора  $l = (l_1, \dots, l_n)$ .

Для каждого  $k \in \{1, \dots, m\}$  и всех  $j \in \{1, \dots, N\}$  обозначим через  $P_j(\xi) \upharpoonright E_k$  сужение полинома  $P_j(\xi)$  на подпространство  $E_k$ . При этом система  $\{P_j^l(\xi) \upharpoonright E_k\}_1^N$  является однородной степени  $l_{n_k}$  для каждого фиксированного  $k \leq m$ .

**Теорема 18** ([10]). Пусть  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$  и  $\{E_k\}_1^m$  — система «однородных» подпространств из разложения (36).

(i) Если система операторов  $\{P_j(D)\}_1^N$  является  $l$ -квазиэллиптической, то

$$\text{«суженная» система операторов } \{P_j(\xi) \upharpoonright E_k\}_1^N \text{ эллиптивна } \forall k \leq m. \tag{37}$$

(ii) Обратное, если система  $\{P_j(D)\}_1^N$  слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$  и выполнено условие (37), то она  $l$ -квазиэллиптивна.

**Следствие 2** ([10]). Пусть  $l_1 > l_2 > \dots > l_n$  и выполнено условие

$$(P_1^l(0, \dots, 0, \xi_k, 0, \dots, 0), \dots, P_N^l(0, \dots, 0, \xi_k, 0, \dots, 0)) \neq 0 \text{ при } \xi_k \neq 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Тогда система операторов  $\{P_j(D)\}_1^N$  слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$  в точности тогда, когда она  $l$ -квазиэллиптивна.

Следующие леммы иногда упрощают проверку условия (37).

**Лемма 1** ([10]). Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  — координатное подпространство. Если система  $\{P_j(D)\}_1^N$  слабо коэрцитивна в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ , то «суженная» система  $\{P_j(D) \upharpoonright E\}_1^N$  остается слабо коэрцитивной в  $W_{\infty,0}^{l'}(E)$ , где  $l' := l \upharpoonright E$ .

**Лемма 2** ([10]). Пусть  $n = 2, l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2, l_1 > l_2 \geq 2$  и оператор  $P(x, D)$  вида (15) слабо коэрцитивен в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^2)$ . Тогда:

(i)  $a_{l_1,0} \neq 0$ , т. е.  $P^l(1, 0) \neq 0$ ;

(ii) если к тому же  $l_2$  не является делителем  $l_1$ , то  $a_{0,l_2} \neq 0$ , т. е.  $P^l(0, 1) \neq 0$ .

**Замечание 2.** Подчеркнем, что условия леммы 2 являются необходимыми. Так, при  $l_1 = l_2$  или  $l_2 = 1$  заключение леммы неверно. В первом случае контрпример дает оператор  $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$ , а во втором — оператор  $P(D) = D_1^{l_1-1}$ .

Леммы 1, 2 и теорема 18 играют существенную роль в доказательстве следующей теоремы, являющейся анизотропным аналогом теоремы 10 де Лю и Миркила.

**Теорема 19** ([10, 11]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n, l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n \geq 2$  и  $P(D)$  — оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha D^\alpha. \tag{38}$$

Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

(i)  $l_{n-2} = l_{n-1} = l_n$ ;

(ii)  $l_n$  не является делителем хотя бы одного из  $l_k$  при  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Тогда оператор  $P(D)$  слабо коэрцитивен в анизотропном пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$  в точности тогда, когда он  $l$ -квазиэллиптический.

Теорема 19 показывает, что в анизотропном случае слабая коэрцитивность оператора (38) в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$  влечет его  $l$ -квазиэллиптичность для п. в. векторов  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ . Другими словами, вышеупомянутая импликация нарушается только в исключительных случаях. В § 5 мы покажем, что условие (ii) этой теоремы является существенным (см. теорему 25).

Дополним теорему 19, рассмотрев случай  $n = 2$ .

**Следствие 3** ([10]). Пусть  $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $l_1 > l_2 \geq 2$  и  $P(D)$  — оператор вида (38). Если  $l_2$  не является делителем  $l_1$ , то слабая коэрцитивность оператора  $P(D)$  в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^2)$  эквивалентна его  $l$ -квазиэллиптичности.

**Замечание 3.** При  $N > 1$ , в отличие от случая  $N = 1$ , условие (37) не вытекает из слабой коэрцитивности системы  $\{P_j(D)\}_1^N$  в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$  даже в изотропном случае. Так, система

$$P_1(D) = D_1^{k+1}, \quad P_2(D) = D_2^k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (39)$$

слабо коэрцитивна в изотропном пространстве  $W_{\infty,0}^{k+1}(\mathbb{R}^2)$ , но не эллиптическая. Отметим, что слабая коэрцитивность системы (39) в  $W_{\infty,0}^{k+1}(\mathbb{R}^2)$  вытекает из ее  $l$ -квазиэллиптичности при  $l = (k+1, k)$ .

Менее тривиальный пример дает система

$$P_1(D) = D_1^5 + iD_2^3, \quad P_2(D) = D_3^2, \quad P_3(D) = D_1^3 D_3, \quad P_4(D) = D_1 D_3^2, \quad P_5(D) = D_1 D_2 D_3,$$

которая не  $l$ -квазиэллиптическая при  $l = (5, 3, 3)$ , но слабо коэрцитивна в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^3)$ .

#### § 4. Условия существования $l$ -квазиэллиптических систем.

Согласно результату Лопатинского (см. [17]), при  $n \geq 3$  эллиптический оператор  $P(D)$  в  $\mathbb{R}^n$  имеет четный порядок, а также является собственно эллиптическим. В [12] автором и М. М. Маламудом получено следующее полное описание тех векторов  $l$ , для которых существуют  $l$ -квазиэллиптические системы  $\{P_j(x, D)\}_1^N$ .

**Теорема 20** ([11, 12]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$  и  $n \geq 2N + 1$ . Для существования  $l$ -квазиэллиптических систем  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  необходимо и достаточно, чтобы среди чисел  $l_1, \dots, l_n$  было не более  $2N - 1$  нечетных.

**НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.** Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами и  $n = 2N + 1$ .

(i) **Необходимость.** Пусть вначале все  $\{l_j\}_1^n$  нечетны. Обозначим  $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  и рассмотрим отображение  $T := (T_1, \dots, T_{2N}) : \mathbb{S}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ , в котором

$$T_{2j-1}(\xi) := \operatorname{Re} P_j^l(\xi), \quad T_{2j}(\xi) := \operatorname{Im} P_j^l(\xi), \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (40)$$

Поскольку  $T$  нечетно на  $\mathbb{S}^{2N}$ ,  $T(-\xi) = -T(\xi)$ , то, согласно теореме Борсука — Улама [25],  $T(\xi^0) = 0$  в некоторой точке  $\xi^0 \in \mathbb{S}^{2N}$ . Но это противоречит  $l$ -квазиэллиптичности системы  $\{P_j(D)\}_1^N$ .

(ii) Пусть среди чисел  $l_j$  есть ровно одно четное. Для определенности, пусть  $l_1 = 2^m l'_1$ , где  $m \in \mathbb{N}$  и  $l'_1, l_2, \dots, l_n$  нечетны. Тогда из соотношения  $|\alpha : l| = 1$  вытекает  $\alpha_1 = 2^m \alpha'_1$ ,  $\alpha'_1 \in \mathbb{Z}_+$ . Полагая  $\xi'_1 := \xi_1^{2^{-m}}$  и подставляя  $\xi'_1$  в полных символах  $P_j(\xi)$ , приходим

к  $l'$ -квазиэллиптической системе  $\{P_j(\xi'_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\}_1^N$  с вектором  $l' := (l'_1, l_2, \dots, l_n)$ , в котором все компоненты нечетны.

(iii) *Достаточность.* Пусть  $n = 2N + 1$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$ , где  $l_1, \dots, l_{n-2}$  нечетны, а  $l_{n-1}$  и  $l_n$  четны. Тогда система операторов  $\{P_j(D)\}_1^N$  с полными символами

$$P_1(\xi) := \xi_1^{l_1} + i\xi_2^{l_2}, \dots, P_{N-1}(\xi) := \xi_{n-4}^{l_{n-4}} + i\xi_{n-3}^{l_{n-3}}, \quad P_N(\xi) := i\xi_{n-2}^{l_{n-2}} + \xi_{n-1}^{l_{n-1}} + \xi_n^{l_n}$$

является  $l$ -квазиэллиптической, причем ровно два числа из  $\{l_j\}_1^n$  четны. □

**Замечание 4.** Условие  $n \geq 2N + 1$  теоремы 20 является точным: система

$$P_1(D) := D_1^{l_1} + iD_2^{l_2}, \quad \dots, \quad P_N(D) := D_{2N-1}^{l_{2N-1}} + iD_{2N}^{l_{2N}}. \quad (41)$$

является  $l$ -квазиэллиптической при  $n = 2N$  и любом  $l = (l_1, \dots, l_{2N})$ .

**Следствие 4** ([12]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$  и  $n \geq 3$ . Тогда  $l$ -квазиэллиптические операторы существуют в точности тогда, когда среди чисел  $l_1, \dots, l_n$  не более одного нечетного.

В изотропном случае теорема 20 обобщает результат Лопатинского, принимая следующий вид.

**Следствие 5** ([12]). Пусть  $l_1 = \dots = l_n = l$  и  $\{P_j(x, D)\}_1^N$  — эллиптическая система порядка  $l$ . Если  $n \geq 2N + 1$ , то  $l$  четно.

**§ 5. Условия существования слабо коэрцитивных систем.**

Перейдем теперь к условиям существования слабо коэрцитивных систем при  $p \in [1, \infty]$ . В анизотропном случае справедлив более общий, чем лемма 2, результат.

**Предложение 4** ([11]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-k} > l_{n-k+1} = \dots = l_n$  и оператор  $P(D)$  вида (3) слабо коэрцитивен в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ . Тогда его  $l$ -главный символ  $P^l(\xi)$  может обращаться в нуль лишь в точках  $k$ -мерного координатного подпространства  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-k} = 0\}$ .

Следующая теорема распространяет «половину» теоремы 20 на случай слабо коэрцитивных систем.

**Теорема 21** ([11]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $n \geq 2N + 1$  и система

$$P_j(D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_{j\alpha} D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (42)$$

слабо коэрцитивна в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$  для некоторого  $p \in [1, \infty]$ . Пусть также  $\{T_j(\xi)\}_1^{2N}$  определяются равенствами (40), а отображение

$$T := (T_1, \dots, T_{2N}) : \mathbb{S}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}, \quad (43)$$

имеет конечное число нулей на единичной сфере  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Тогда среди компонент вектора  $l$  не более  $2N$  нечетных.

**Следствие 6** ([11]). Пусть  $n \geq 3$  и оператор  $P(D)$  вида (38) слабо коэрцитивен в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ , а  $l$ -главный символ  $P^l(\xi)$  оператора  $P(D)$  имеет конечное число нулей на сфере  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Тогда среди чисел  $l_1, \dots, l_n$  не более двух нечетных.

Комбинируя предложение 4 с теоремой 21, получим следующее утверждение.

**Следствие 7** ([11]). Пусть  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $n \geq 3$ , и среди чисел  $l_1, \dots, l_n$  не менее трех нечетных. Тогда не существует операторов, слабо коэрцитивных в  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ .

Из теоремы 21 вытекает следующий «изотропный» результат.

**Предложение 5** ([11]). Пусть  $l_1 = \dots = l_n = l$  и  $n \geq 2N + 1$ . Если система  $\{P_j(D)\}_1^N$  вида (42) слабо коэрцитивна в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$  при некотором  $p \in [1, \infty]$  и отображение  $T$  вида (43) имеет конечное число нулей на сфере  $\mathbb{S}^{n-1}$ , то  $l$  чётно.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Можно предполагать, что  $n = 2N + 1$ . Так как  $T$  имеет только конечное число нулей на  $\mathbb{S}^{n-1}$ , найдется сфера  $\mathbb{S}^{n-2}$  такая, что  $T \upharpoonright \mathbb{S}^{n-2}$  не имеет нулей. Пусть для простоты  $\mathbb{S}^{n-2} = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x_n = 0\}$ .

Предположим противное, т. е. что  $l$  нечётно. Тогда отображение  $T^r := T/\|T\| : \mathbb{S}_r^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}_r^{n-2}$ , где  $T^r$  — однородное отображение (43) с  $n - 2 = 2N - 1$  вместо  $2N$ , непрерывно и нечётно для любого  $r > 0$ . Здесь  $\mathbb{S}_r^{n-2} := \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : \|x\| = r, x_n = 0\}$ . По теореме Борсука [23], оно имеет нечётную степень и, следовательно, гомотопически нетривиально. Поскольку  $T^r(\xi) \neq 0$  при  $\xi \in \mathbb{S}_r^{n-2}$ , заключаем, что отображение

$$P^r := (\operatorname{Re} P_1(\xi), \operatorname{Im} P_1(\xi), \dots, \operatorname{Re} P_N(\xi), \operatorname{Im} P_N(\xi)) : \mathbb{S}_r^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

также не имеет нулей при больших  $r$ .

С другой стороны, отображения  $T^r$  и  $P^r$  гомотопны в пространстве непрерывных отображений из  $\mathbb{S}_r^{n-2}$  в  $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ . Значит,  $P^r$  также гомотопически нетривиально и, следовательно, любое его продолжение внутрь замкнутого шара  $B_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| \leq r\}$  имеет нуль [23]. Так как  $\mathbb{S}_+^{n-1} := \{x \in \mathbb{S}_r^{n-1} : x_n \geq 0\}$  гомеоморфно  $B_r^{n-1}$ , то  $P^r$  имеет нули при больших  $r$ , что противоречит теореме 15, (i).  $\square$

В связи с ограничениями в теоремах 17–19 на систему операторов перейдем теперь к вопросу об условиях существования неэллиптических (неквазиэллиптических), но слабо коэрцитивных систем в изотропном (анизотропном) пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ .

При  $n = 2$  критерий де Лю и Миркила (см. теорему 10) не имеет места. Так, Мальгранж впервые указал, что неэллиптический оператор  $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$  является слабо коэрцитивным в  $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^2)$  (см. [19]).

В следующей теореме дается полная характеристика операторов, слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^2)$  и алгебраический критерий слабой коэрцитивности.

**Теорема 22** ([11, 12]). Пусть  $R(D)$  — оператор порядка  $l \geq 2$ ,  $\deg R(D) \geq 2$ .

(i) Если  $R(D)$  слабо коэрцитивен в изотропном пространстве  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^2)$ , то он допускает представление

$$R(D) = P(D) \prod_{k=1}^m [\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k] + Q(D), \quad (44)$$

где  $P(D)$  — эллиптический оператор порядка  $l - m$ ,  $Q(D)$  — произвольный оператор порядка  $\leq l - 2$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $\{(\lambda_k, \mu_k)\}_1^m$  — неколлинеарные векторы в  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \leq l$ .

(ii) Обратно, всякий оператор  $R(D)$  вида (44) слабо коэрцитивен в шкале изотропных пространств Соболева  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^2)$ ,  $p \in [1, \infty]$ .

**Следствие 8.** Пусть  $n = 2$  и  $R(D) = P(D)S(D)$ , где  $P(D)$  — эллиптический порядка  $l$ , а  $S(D)$  слабо коэрцитивен в  $W_{\infty,0}^m(\mathbb{R}^2)$ . Тогда  $R(D)$  слабо коэрцитивен в  $W_{\infty,0}^{l+m}(\mathbb{R}^2)$ .

**Теорема 23** ([12]). Пусть  $P(D)$ ,  $D = (D_1, D_2)$  — оператор порядка  $l$ , а все коэффициенты и корни полинома  $P^l(\xi)$  вещественны. Тогда оператор  $P(D)$  слабо коэр-

цитивен в изотропном пространстве Соболева  $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^2)$  в точности тогда, когда полиномы  $P^l(\xi)$  и  $\text{Im } P^{l-1}(\xi)$  не имеют общих нетривиальных вещественных нулей. Здесь  $P^{l-1}(\xi) := \sum_{|\alpha|=l-1} a_\alpha \xi^\alpha$  обозначает  $(l-1)$ -однородную часть  $P(\xi)$ .

В следующей теореме приводятся широкие классы неэллиптических систем, слабо коэрцитивных в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ .

**Теорема 24** ([12]). Пусть  $\{P_j(D)\}$  — эллиптическая система операторов с постоянными коэффициентами порядка  $l$ ,  $R_{pq}(D)$  — операторы вида

$$R_{pq}(D) := (D_p + i)(D_q + i), \quad 1 \leq p < q \leq n. \quad (45)$$

Тогда система операторов

$$S_{j pq}(D) := P_j(D)R_{pq}(D), \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad p, q \in \{1, \dots, n\}, \quad p > q \quad (46)$$

слабо коэрцитивна в изотропном пространстве Соболева  $W_{p,0}^{l+2}(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , но не эллиптическая.

В доказательстве теоремы 24 используется теорема 11 о мультипликаторах в шкале  $L^p$ ,  $p \in [1, \infty]$ . В частности, при  $N = 1$  используются мультипликаторы вида

$$\Phi_\alpha(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\alpha}{P(\xi) \sum_{k=2}^n (1 + \xi_k^2)}, \quad |\alpha| \leq l + 1,$$

где  $P(\xi)$  — эллиптический полином степени  $l$ ,  $\alpha_1 \leq l - 1$ , а  $\chi(\xi)$  — гладкая функция, такая, что  $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$ ,  $\chi(\xi) \equiv 0$  при  $|\xi| < r$ ,  $\chi(\xi) \equiv 1$  при  $|\xi| > r_1 > r > 0$ , где  $B_r$  — шар, содержащий все нули полинома  $P(\xi)$ . Конструкция мультипликаторов для случая системы операторов ( $N > 1$ ) более сложная и опускается (см. детали в [12]).

При  $N = 1$  из теоремы 24 получаем следующее утверждение.

**Следствие 9** ([12]). Пусть  $P(D)$  — эллиптический оператор порядка  $l$ ,  $R_{pq}(D)$  — операторы вида (45). Тогда система  $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$  слабо коэрцитивна в изотропном пространстве  $W_{p,0}^{l+2}(\mathbb{R}^n)$ , но не эллиптическая.

Как показывает следующее утверждение, теорема 9 точна при  $p = \infty$ .

**Предложение 6** ([12]). Пусть  $P(D)$  — эллиптический оператор порядка  $l$ , а  $R_{pq}(D)$  — операторы вида (45). Тогда система  $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$  перестает быть слабо коэрцитивной в изотропном пространстве  $W_{\infty,0}^{l+2}(\mathbb{R}^n)$  после удаления из нее любого оператора.

В следующей теореме предъявляются широкие классы слабо коэрцитивных операторов в шкале анизотропных пространств  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , не являющихся  $l$ -квазиэллиптическими. Это, в частности, показывает точность условий теоремы 19 при п. в.  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ .

**Теорема 25** ([11]). Пусть  $n \geq 2$ ,  $l := (2km_1, \dots, 2km_{n-1}, k)$ ;  $k, m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}$ , а  $P(D)$  —  $l$ -квазиэллиптический оператор вида (3) с постоянными коэффициентами. Пусть также  $l_+ := (2(k+1)m_1, \dots, 2(k+1)m_{n-1}, k+1)$ .

Предположим также, что выполнено одно из следующих двух условий:

- (i) все коэффициенты оператора  $P(D)$  вещественны;
- (ii) все коэффициенты оператора  $P(D)$ , кроме  $a_{0, \dots, 0, k}$ , вещественны.

Тогда оператор

$$R(D) := P(D) \sum_{j=1}^{n-1} D_j^{2m_j} + bD_n^k$$

слабо коэрцитивен в шкале анизотропных пространств  $W_{p,0}^{l+}(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Здесь  $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  в первом случае и  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  во втором случае. При этом оператор  $R(D)$  не является  $l_+$ -квазиэллиптическим.

В доказательстве теоремы 25 также используется теорема 11, с помощью которой доказывается, что функции вида

$$\Psi_\alpha(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\alpha}{P(\xi) \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^{2m_j} + i\xi_n^k}, \quad |\alpha : l_+| < 1,$$

являются мультипликаторами в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Здесь  $l$  и  $l_+$  — векторы в условии теоремы 25,  $P(\xi)$  —  $l$ -квазиэллиптический полином с вещественными коэффициентами,  $\chi(\xi)$  — гладкая функция, такая, что  $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$ ,  $\chi(\xi) \equiv 0$  при  $|\xi| < r$ ,  $\chi(\xi) \equiv 1$  при  $|\xi| > r_1 > r > 0$ , где  $B_r$  — шар, содержащий все нули полинома  $P(\xi)$ .

**Замечание 5.** Из теоремы 25 при  $l := (2, 4, \dots, 2n)$  вытекает, что оператор

$$P(D) = (D_1^2 + D_2^4 + \dots + D_{n-1}^{2(n-1)} + D_n^{2n})(D_1^2 + D_2^4 + \dots + D_{n-1}^{2(n-1)}) + iD_n$$

слабо коэрцитивен в  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$  при  $p \in [1, \infty]$ , но не является  $l$ -квазиэллиптическим.

### § 6. Оценки для тензорного произведения эллиптических операторов.

В этом параграфе рассмотрим случай, когда система состоит только из одного дифференциального оператора  $P(D)$  с постоянными коэффициентами.

Л. Хёрмандер [27] полностью описал пространство  $L_{2,\Omega}^0(P)$  в случае ограниченной области  $\Omega$  для произвольного оператора  $P(D)$  (см. теорему 1). Отправляясь от этого результата, им доказано, что для *тензорного произведения* дифференциальных полиномов

$$P(D) := P_1(D) \otimes P_2(D) := P_1(D_1, \dots, D_{p_1}) P_2(D_{p_1+1}, \dots, D_n), \quad p_1 \in [1, n), \quad (47)$$

т. е. произведения операторов, действующих по различным группам переменных, пространство  $L_{2,\Omega}^0(P)$  изоморфно тензорному произведению пространств  $L_{2,\Omega}^0(P_1)$  и  $L_{2,\Omega}^0(P_2)$ . Другими словами, в [27] показано, что пространство  $L_{2,\Omega}^0(P)$  совпадает с линейной оболочкой произведений  $Q_1 Q_2$  операторов  $Q_k \in L_{2,\Omega}^0(P_k)$ .

В связи с упомянутым результатом Хёрмандера возникает задача об описании пространства  $L_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P)$  для тензорного произведения  $P = P_1 \otimes P_2$  двух эллиптических дифференциальных полиномов при  $p = \infty$  и  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

Назовем полный символ  $P(\xi)$  оператора  $P(D)$  *невыврожденным*, если  $P(\xi) \neq 0$  при всех  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 26** ([12]). Пусть  $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$ , где  $P_1(D)$  и  $P_2(D)$  — эллиптические операторы, символы  $P_1(\xi)$  и  $P_2(\xi)$  которых зависят от  $n_1$  и  $n_2$  переменных соответственно,  $n_1 + n_2 = n$ .

(i) Если полные символы операторов  $P_1(D)$  и  $P_2(D)$  невырождены, то  $L_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P) \simeq L_{\infty,\mathbb{R}^{n_1}}^0(P_1) \otimes L_{\infty,\mathbb{R}^{n_2}}^0(P_2)$ . Другими словами, справедлива эквивалентность

$$Q \in L_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P) \iff Q(\xi) = \sum_{k=1}^m Q_{k1}(\xi) Q_{k2}(\xi), \quad Q_{kj} \in L_{\infty,\mathbb{R}^{n_j}}^0(P_j), \quad j \in \{1, 2\}.$$

(ii) Если полные символы операторов  $P_1(D)$  и  $P_2(D)$  однородны (т. е. не содержат младших членов), то  $D^\alpha \notin L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P)$  при каждом  $\alpha \neq 0$ .

Результат теоремы 26 был впоследствии усилен автором.

**Теорема 27** ([14]). Пусть  $P(D)$  — дифференциальный оператор вида (47), где  $P_1(D)$  и  $P_2(D)$  — однородные эллиптические операторы. Тогда включение  $Q \in L_{\infty, \mathbb{R}^n}^0(P)$  эквивалентно равенству  $Q(D) = c_1 P(D) + c_2$  с некоторыми  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

Отдельный интерес представляет случай оператора  $P(D)$  от двух переменных, являющегося тензорным произведением двух обыкновенных дифференциальных операторов  $P_1(D_1)$  и  $P_2(D_2)$ . В работе [15] было получено описание пространства  $L_{\infty, \mathbb{R}^2}^0(P)$  для случая, когда один из сомножителей имеет специальный вид (все его нули — вещественные и простые), а второй произволен.

**Теорема 28** ([15]). Пусть  $P(D) = P_1(D_1) \otimes P_2(D_2)$  — дифференциальный оператор такой, что  $P_1(\xi_1)$  — полином степени  $l$ , все нули которого вещественные и простые, а  $P_2(\xi_2)$  — произвольный полином степени  $m$ . Тогда включение  $Q \in L_{\infty, \mathbb{R}^2}^0(P)$  эквивалентно равенству

$$Q(\xi) = P(\xi) \cdot \frac{q(\xi_2)}{p_{22}(\xi_2)} + r(\xi_1). \quad (48)$$

Здесь  $p_{22}(\xi_2)$  — максимальный делитель  $P_2(\xi_2)$ , не имеющий вещественных нулей,  $q(\xi_2)$  — произвольный полином степени  $\leq s := \deg p_{22}$ , а  $r(\xi_1)$  — произвольный полином степени  $\leq l - 1$ , если  $s = m$ , и произвольная постоянная, если  $s < m$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belinsky E. S. Multipliers in  $L_1$  and estimates for systems of differential operators / E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrjn, M. M. Malamud // Russian Journal of Math. Phys. – 2005. – V. 12, No 1. – P. 6-16.
2. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 480 с.
3. Boman J. Supremum norms for partial derivatives of functions of several real variables / J. Boman // Illinois J. Math. – 1972. – V. 16. – P. 203-216.
4. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
5. Kazaniecki K. On the analytic version of the Mityagin – de Leeuw – Mirkhil non-equality on bi-disc / K. Kazaniecki, M. Wojciechowski. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.09526>.
6. Kazaniecki K. Anisotropic Ornstein non-inequalities / K. Kazaniecki, D. M. Stolyarov, M. Wojciechowski // Analysis and PDE. – 2017. – V. 10, No 2. – P. 351-366.
7. Kirchheim B. On rank one convex functions that are homogeneous of degree one / B. Kirchheim, J. Kristensen // Arch. for Rat. Mech. and Anal. – 2016. – V. 221, No 1. – P. 527-558.
8. Kislyakov S. V. Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension / S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, D. M. Stolyarov // Journal of Functional Analysis. – 2015. – V. 269, No 10. – P. 3220-3263.
9. Ильин В. П. Об условиях справедливости неравенств между  $L_p$ -нормами частных производных функций многих переменных / В. П. Ильин // Тр. МИАН СССР. – 1968. – Т. 96. – С. 205-242.
10. Лиманский Д. В. О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в  $L^1$  и  $L^\infty$  / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 397, № 4. – С. 453-458.
11. Лиманский Д. В. Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в  $W_p^l(\mathbb{R}^n)$  / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Доклады академии наук. – 2007. – Т. 415, № 5. – С. 583-588.
12. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75-112.
13. Лиманский Д. В. Об аналоге теоремы де Лю и Миркила для операторов с переменными коэффициентами / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Матем. заметки. – 2008. – Т. 83, № 5. – С. 783-786.

14. Лиманский Д. В. Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов // Укр. матем. вісник. – 2011. – Т. 8, № 1. – С. 101–111.
15. Лиманський Д. В. Умови підпорядкованості для тензорного добутку двох звичайних диференціальних операторів / Д. В. Лиманський // Доповіді Національної академії наук України. – 2012. – № 4. – С. 25-29.
16. Лиманский Д. В. Об условиях подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2024. – Т. 70, № 1. – С. 121-149.
17. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1 / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
18. Littman W. The wave operator and  $L^p$  norms / W. Littman // Journal of Mathematics and Mechanics. – 1963. – V. 12, No 1. – P. 55-68.
19. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in  $L_\infty$  norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. – 1964. – V. 8, No 1. – P. 112-124.
20. Маламуд М. М. Дифференциальные свойства функций и коэрцитивность в пространствах с равномерной нормой / М. М. Маламуд // Укр. мат. журнал. – 1982. – Т. 34, № 5. – С. 553-558.
21. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в  $L_p(\Omega)$  / М. М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т. 56. – С. 206-261.
22. Митягин Б. С. О некоторых свойствах функций двух переменных / Б.С. Митягин // Вестник МГУ. Сер. матем. – 1959. – № 5. – С. 137-152.
23. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. - М.: Мир, 1977. – 232 с.
24. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the  $L_1$  norm / D. Ornstein // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – V. 11, No 1. – P. 40-49.
25. Спеньер Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
26. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
27. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.

*Поступила в редакцию 15.08.2024 г.*

#### ON CHARACTERIZATION OF A SYSTEM OF MINIMAL DIFFERENTIAL OPERATORS BY A PRIORI ESTIMATES IN THE SOBOLEV SPACES

**D. V. Limanskii**

In this paper we provide results on the characterization of elliptic and  $l$ -quasielliptic systems of minimal differential operators by a priori estimates in isotropic and anisotropic Sobolev spaces  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . For a given set  $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$  we prove criteria for the existence of  $l$ -quasielliptic and weakly coercive systems and indicate wide classes of weakly coercive in  $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , nonelliptic, and nonquasielliptic systems.

**Keywords:** a priori estimate, differential operator, coercivity, Sobolev space, tensor product.

**Лиманский Дмитрий Владимирович**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.  
E-mail: d.limanskiy@donnu.ru

**Limanskii Dmitrii Vladimirovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Associate Professor, Donetsk State University,  
Donetsk, Russia.

## О ПРИБЛИЖЕНИИ ФИНИТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ ГЛАДКИМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2024. А. Д. Манов

В данной работе изучается вопрос об аппроксимации непрерывных положительно определённых функций на  $\mathbb{R}^n$  с фиксированным значением в нуле, носитель которых содержится в центрально симметричном выпуклом теле  $A$  (класс  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ ) посредством гладких функций из того же класса  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ . Нами доказано, что если  $\varphi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся функция  $\psi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$  такая, что  $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon$ .

**Ключевые слова:** положительно определённые функции, теорема Бохнера, преобразование Фурье.

**0. Обозначения.** Фиксируем некоторые обозначения:  $|\cdot|$  – евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{B}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$  – открытый шар радиуса  $r > 0$  с центром в нуле,  $\overline{\mathbb{B}_r}$  – его замыкание,  $\text{int } X$  – внутренность множества  $X$ ,  $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$  и

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt,$$

$L_\infty^{loc}(\mathbb{R}^n)$  – пространство локально ограниченных п. в. на  $\mathbb{R}^n$  функций.

**1. Введение.** Комплекснозначная функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  называется положительно определённой на  $\mathbb{R}^n$  ( $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ ), если для любого  $m \in \mathbb{N}$ , и для любых элементов  $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ , а также для любого набора комплексных чисел  $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$  выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0. \quad (1)$$

В данной работе нас будет интересовать следующее выпуклое подмножество положительно определённых функций. Пусть  $A$  – центрально симметричное выпуклое тело (выпуклый симметричный относительно нуля компакт с непустой внутренностью). Символом  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$  обозначим множество функций  $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  таких, что  $\varphi(0) = 1$  и  $\text{supp } \varphi \subset A$ . Если  $A = \mathbb{B}_r$ ,  $r > 0$ , то  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n) := \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ .

Класс функций  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$  не пуст. Например, если взять функцию  $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$  такую, что  $u(x) = 0$  при  $x \notin \frac{1}{2}A$  и  $\|u\|_2 = 1$ , то функция  $\varphi = u * \tilde{u}$  принадлежит  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ . Действительно,  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$  и  $\text{supp } \varphi \subset \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A$ ; справедливость неравенства (1) для функции  $\varphi$  проверяется непосредственно. Отметим, что при  $n = 1$  из теоремы Боаса-Каца, Крейна (см., например, [1, Theorem 3.10.2]) следует, что класс  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$  исчерпывается функциями такого вида. При  $n \geq 2$ , это вообще говоря, не верно.

В некоторых вопросах, возникающих при изучении свойств функций из класса  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$  удобно ограничиться гладкими функциями из этого класса. В данной работе мы докажем следующую теорему, которая позволяет это сделать.

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – центрально симметричное выпуклое тело и  $\varphi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся функция  $\psi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp } \psi \subset \text{int } A$  такая, что  $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon$ .

Теорема 1, в частности, позволяет уточнить недавние результаты автора, полученные в [2]. В работе автора [2] рассматривалась следующая экстремальная задача.

**Задача А.** Пусть  $r > 0$  и функция  $\rho \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$  является радиальной и вещественнозначной. Требуется найти следующую величину:

$$M(n, \rho, r) := \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \rho(x) dx \right| : \varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Данная задача связана с нахождением точных констант в неравенствах типа Бернштейна-Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа. Более подробную информацию о Задаче А можно найти в [2] и [3]. Автором было получено следующее решение данной задачи.

**Теорем А.** Пусть  $n \neq 2$ ,  $r > 0$  и функция  $\rho \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$  является радиальной и вещественнозначной. Определим оператор  $A_\rho : L_2(\mathbb{B}_{r/2}) \rightarrow L_2(\mathbb{B}_{r/2})$  следующим образом:

$$(A_\rho u)(t) := \int_{\mathbb{B}_{r/2}} \rho(t-x) u(x) dx, \quad u(x) \in L_2(\mathbb{B}_{r/2}).$$

Тогда  $A_\rho$  – компактный самосопряжённый оператор в  $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$  и справедливо равенство:

$$M(n, \rho, r) = \|A_\rho\|,$$

где  $\|A_\rho\|$  – норма оператора  $A_\rho$  в  $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$ .

“Неестественное” условие  $n \neq 2$  в формулировке Теоремы А вытекает из ограниченности применения Теоремы Рудина-Ефимова (см. [2, Теорема 5]), которая играла важную роль в решении Задачи А. Если же в Задаче А ограничиться гладкими функциями из  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ , то теоремой Рудина-Ефимова можно воспользоваться и в случае  $n = 2$ . Из Теоремы 1 следует, что

$$M(n, \rho, r) = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \rho(x) dx \right| : \varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{supp } \varphi \subset \mathbb{B}_r \right\}.$$

Таким образом, Теорема А справедлива и при  $n = 2$ .

Дальше работа организована следующим образом. В разделе 2 приведены некоторые вспомогательные факты и утверждения. В разделе 3 мы докажем Теорему 1.

## 2. Вспомогательные факты и утверждения

Отметим следующие свойства функций из  $\Phi(\mathbb{R}^n)$ . Пусть  $f, f_i \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ . Тогда:

- 1)  $|f(x+y) - f(x)|^2 \leq 2f(0)(f(0) - \text{Re} f(y))$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  (неравенство Крейна);
- 2)  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \bar{f}, \text{Re } f, f_1 f_2 \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ , где  $\lambda_i \geq 0$ ;
- 3) если для всех  $x \in \mathbb{R}$  существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: g(x)$ , то  $g \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ .

Свойства 1) – 3) хорошо известны (см., например, [1, 4]).

В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин доказали следующий критерий положительной определённости:

**Теорема 2** (Бохнер-Хинчин). *Функция  $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера  $\mu$  на  $\mathbb{R}^n$  такая, что*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1, 4]. Как прямое следствие (см., например, [1, Theorem 1.8.7]), мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье:

**Следствие 1.** *Если  $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ , то  $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff \widehat{f}(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}^n$ , где*

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(t,x)} dx, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

*и в этом случае  $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ .*

Из следствия 1, в частности, вытекает, что  $f * g \in \Phi(\mathbb{R}^n)$  для любых функций  $f, g \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ .

**3. Доказательство теоремы 1.** Пусть  $\varphi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$  и  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим последовательность  $\{r_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  такую, что  $r_m > 1$  и  $r_m \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow \infty$ . Например, можно взять  $r_m = 1 + 1/m, m \in \mathbb{N}$ . Построим теперь последовательность функций:

$$\theta_m(x) := \varphi(r_m x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что  $\theta_m \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ . Кроме того, справедливы включения:

$$\text{supp } \theta_m \subset (1/r_m)A \subset \text{int } A.$$

Из неравенства Крейна следует, что

$$|\varphi(x) - \theta_m(x)|^2 = |\varphi(x) - \varphi(r_m x)|^2 \leq 2(1 - \text{Re } \varphi((1 - r_m)x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, найдётся  $m_0 \in \mathbb{N}$  такое, что

$$|\varphi(x) - \theta_{m_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in A. \quad (2)$$

Пусть  $k(x) := (\eta * \tilde{\eta})(x), x \in \mathbb{R}^n$ , где  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  и  $\text{supp } \eta \subset \overline{\mathbb{B}}_{1/2}$ . В качестве  $\eta$  можно взять следующую функцию:

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1/4 - |x|^2}}, & |x| < 1/2, \\ 0, & |x| \geq 1/2 \end{cases}.$$

Тогда  $k \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n), k(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$  и  $\text{supp } k \subset \text{supp } \eta + \text{supp } \eta \subset \overline{\mathbb{B}}_1$ . По функции  $k$  построим аппроксимативную единицу:

$$\omega_t(x) = \frac{1}{Ct^n} k\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad \text{где } C = \int_{\mathbb{R}^n} k(x) dx.$$

Далее, так как  $\theta_{m_0} \in C(\mathbb{R}^n)$  и  $\theta_{m_0}(0) = 1$ , то на любом ограниченном подмножестве  $K \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{(\theta_{m_0} * \omega_t)(x)}{(\theta_{m_0} * \omega_t)(0)} \Rightarrow \theta_{m_0}(x) \text{ при } t \rightarrow 0, x \in K.$$

Таким образом, найдётся  $\delta > 0$  такое, что для всех  $t \in (0, \delta)$  справедливо неравенство:

$$\left| \theta_{m_0}(x) - \frac{(\theta_{m_0} * \omega_t)(x)}{(\theta_{m_0} * \omega_t)(0)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, x \in A. \quad (3)$$

Выберем  $t_0$  из интервала  $(0, \delta)$  такое, что справедливо включение:

$$\bigcup_{x \in (1/r_m)A} (x + \overline{\mathbb{B}}_{t_0}) \subset \text{int } A.$$

Это можно сделать, т.к. множество  $(1/r_m)A$  является компактны и  $(1/r_m)A \subset \text{int } A$ .

Положим теперь

$$\psi(x) := \frac{(\theta_{m_0} * \omega_{t_0})(x)}{(\theta_{m_0} * \omega_{t_0})(0)}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что  $\psi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$  и  $\psi(0) = 1$ . Далее, так как  $\omega_{t_0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , то  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Кроме того, так как  $\text{supp } \omega_{t_0} \subset \overline{\mathbb{B}}_{t_0}$ , то

$$\text{supp } \psi \subset \text{supp } \theta_{m_0} + \text{supp } \omega_{t_0} \subset (1/r_m)A + \overline{\mathbb{B}}_{t_0} \subset \text{int } A.$$

Таким образом,  $\psi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$  и  $\text{supp } \psi \subset \text{int } A$ . Из неравенств (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &= |\varphi(x) - \theta_{m_0}(x) + \theta_{m_0}(x) - \psi(x)| \\ &\leq |\varphi(x) - \theta_{m_0}(x)| + |\theta_{m_0}(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad x \in A. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что  $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon$ . □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / Z. Sasvári. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 366 p.
2. Манов А. Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определенных функций с носителем в шаре / А. Д. Манов // Матем. сб.. – 2024. – Т. 215, № 7. – С. 61–73.
3. Манов А. Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций / А. Д. Манов // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22, № 5. – С. 161 – 171.
4. Trigub R. M. Fourier Analysis and Approximation of Functions / R. M. Trigub, E. S. Belinsky. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.

*Поступила в редакцию 30.08.2024 г.*

## ON THE APPROXIMATION OF POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS WITH COMPACT SUPPORT BY SMOOTH FUNCTIONS

*A. D. Manov*

In this paper we study a problem on approximation of continuous positive definite functions on  $\mathbb{R}^n$  with fixed value at the origin whose support is contained in a centrally symmetric convex body  $A$  (the class  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ )

by smooth functions from the same class  $\mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ . We prove that if  $\varphi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n)$ , then for every  $\varepsilon > 0$  there is  $\psi \in \mathfrak{F}_A(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$  such that  $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon$ .

**Keywords:** positive-definite functions, extremal problems, Fourier transform.

**Манов Анатолий Дмитриевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математической физики,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.

E-mail: manov.ad@ro.ru

**Manov Anatoliy Dmitrievych**

Candidate of Physico-Mathematical Science,  
Associate Professor, Donetsk State University,  
Donetsk, Russia.

## ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ИЗ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА И КВАДРАТА

© 2024. *П. А. Машаров, И. С. Власенко*

Найдено значение наименьшего радиуса круга, в котором данный набор множеств является семейством Помпейю. Рассмотрен набор из равнобедренного треугольника и квадрата. Экстремальный радиус Помпейю оказался меньше минимального из экстремальных радиусов Помпейю для треугольника и квадрата.

**Ключевые слова:** множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, семейство Помпейю, экстремальный радиус Помпейю для семейства.

**Введение.** В работе рассматриваются вещественное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n \geq 2$  с евклидовой нормой  $|\cdot|$ , группа  $M(n)$  движений  $\mathbb{R}^n$ .

Для компактного множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  и открытого  $D \subset \mathbb{R}^n$  часть этой группы  $\text{Mot}(A, D) = \{\lambda \in M(n) : \lambda A \subset D\}$ , шар в  $\mathbb{R}^n$  радиуса  $R$   $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ .

Компактное множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \tag{1}$$

при всех  $\lambda \in M(n)$ , равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю заключается в описании класса  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  множеств  $A$  с указанным условием. Обозначенная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  получены в XX веке (см. обзор литературы в [1]).

Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [2], описывающую довольно широкий набор множеств Помпейю.

Пусть  $A$  — открытое ограниченное подмножество  $\mathbb{R}^n$  с липшицевой границей, гомотопной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание  $\bar{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , то граница  $A$  является вещественно-аналитическим подмногообразием в  $\mathbb{R}^n$ .

Из упомянутого результата следует, что многие множества  $A$  с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . Примерами множеств  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  с вещественно-аналитической границей для любого  $n \geq 2$  являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [3].

Есть также примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева. Одним из таких множеств является «снежинка Кох» [4].

Интересное обобщение проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю. Одному из таких вариантов посвящена данная работа.

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

**Постановка задачи.** Пусть функция  $f$  локально суммируема в шаре  $\mathbb{B}_R^n$ , и равенство (1) выполняется при всех  $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R^n)$ . Если из этого следует, что  $f = 0$  почти всюду в  $\mathbb{B}_R^n$ , будем говорить, что  $A$  является множеством Помпейю на шаре  $\mathbb{B}_R^n$  и обозначать  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ . Если  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , то для достаточно большого значения радиуса  $R$  (относительно размеров множества  $A$ ) выполняется  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$  [5–7].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{ R > 0 : A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю для множества  $A$ .

В [7] поставлена следующая

**Проблема 1.** Для данного компактного  $A \subset \mathbb{R}^n$  найти значение  $\mathcal{R}(A)$ .

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины  $\mathcal{R}(A)$ , получены К. А. Бернштейном и Р. Гэем [5, 6], а также В. В. Волчковым [7, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [7–15].

Пусть имеем некоторое фиксированное семейство компактных множеств  $\{A_j\}_{j=1}^m$ . Если для комплекснозначной локально суммируемой в шаре  $\mathbb{B}_R^n$  функции  $f$  из выполнения условия (1) при всех  $A = A_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) и  $\lambda_j \in \mathbf{M}(n)$  таких, что  $\lambda_j A_j \subset \mathbb{B}_R^n$ , следует, что  $f = 0$  п.в. в  $\mathbb{B}_R^n$ , будем говорить, что  $\{A_j\}_{j=1}^m$  является семейством Помпейю в шаре  $\mathbb{B}_R^n$  и обозначать  $\{A_j\} \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ .

Аналогично проблеме 1 возникает (см., например, [1, 13, 16, 17])

**Проблема 2.** Для данного семейства  $\{A_j\}_{j=1}^m$  компактных множеств  $A_j \subset \mathbb{R}^n$  найти значение

$$\mathcal{R}(\{A_j\}) = \inf \{ R > 0 : \{A_j\} \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \}.$$

Отметим, что если по крайней мере для одного  $k \in \{1, \dots, m\}$  множество  $A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ , то всё семейство  $\{A_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ . Отсюда следует

**Лемма 1.** Для любой совокупности множеств  $\{A_j\}_{j=1}^m$  верно неравенство

$$\mathcal{R}(\{A_j\}_{j=1}^m) \leq \min \{ \mathcal{R}(A_1), \dots, \mathcal{R}(A_m) \}. \quad (2)$$

При этом возникает вопрос, существует ли набор множеств  $\{A_j\}_{j=1}^m$ , для которого неравенство в условии (2) является строгим? Примеры совокупностей таких множеств построены в [1, 13, 16].

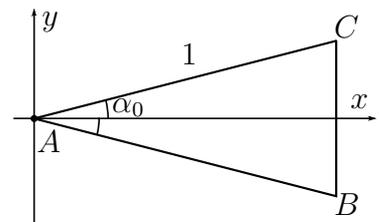
В данной работе проблема 2 решена для семейства, состоящего из равнобедренного треугольника и квадрата в  $\mathbb{R}^2$ . Таким образом, здесь будет получен еще один пример совокупности, для которого неравенство в условии (2) строгое.

Рассмотрим равнобедренный треугольник  $T = \triangle ABC$  в  $\mathbb{R}^2$  с боковыми сторонами  $AB = AC = 1$  и углом между ними  $\angle BAC = \pi/6$ . Всюду далее  $\alpha_0 = \pi/12$ . Таким образом (см. рис. 1),

$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \cos \alpha_0, -x \operatorname{tg} \alpha_0 \leq y \leq x \operatorname{tg} \alpha_0 \}.$$

Также в работе рассматриваем квадрат  $K_1$  со стороной единичной длины

$$K_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 \leq x \leq 1/2, -1/2 \leq y \leq 1/2 \}.$$



**Рис. 1.** Треугольник  $T$

Для произвольного компактного множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  и положительного числа  $\mu$  рассмотрим множество  $\mu A = \{x \in \mathbb{R}^n : x/\mu \in A\}$ . Очевидно, что для любого такого  $\mu$  и компакта  $A$  имеет место равенство  $\mathcal{R}(\mu A) = \mu \mathcal{R}(A)$ .

Поскольку  $\mathcal{R}(T) = \sqrt{6}/4$ ,  $\mathcal{R}(K_1) = \sqrt{5}/2$  (см., например, [19], [14, § 32, 36]), рассмотрим  $K = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} K_1 = \frac{\sqrt{30}}{10} K_1$ . В этом случае  $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(K) = \sqrt{6}/4$ . Основным результатом работы является

**Теорема 1.** *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}(\{T, K\}) = \sqrt{3}/3. \quad (3)$$

**Вспомогательные обозначения и утверждения.** Далее будем рассматривать пространство размерности  $n = 2$ , круг в нем будем обозначать  $\mathbb{B}_R = \mathbb{B}_R^2$ . Для  $R > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$  рассмотрим  $\mathbb{B}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : r < |x| < R\}$  — кольцо при  $r \geq 0$ , или круг  $\mathbb{B}_R$ , если  $r < 0$ .

Для  $k \in \mathbb{N}$  и открытого непустого множества  $D \subset \mathbb{R}^2$  под  $C^k(D)$  будем понимать класс функций, все частные производные порядка  $k$  которых (включая смешанные) непрерывны в  $D$ ,  $C(D)$  — класс непрерывных на  $D$  функций,  $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(D)$ .

Под  $\mathfrak{F}(A, D)$  будем понимать класс локально суммируемых в  $D$  функций, для которых равенство (1) верно для всех  $\lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, D)$ . Добавляя гладкость, получим классы функций  $\mathfrak{F}^k(A, D) = \mathfrak{F}(A, D) \cap C^k(D)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{F}^\infty(A, D) = \mathfrak{F}(A, D) \cap C^\infty(D)$ ;  $\mathfrak{F}_0^\infty(A, \mathbb{B}_R^n)$  — класс радиальных функций из  $\mathfrak{F}^\infty(A, \mathbb{B}_R^n)$ , то есть таких, что для всех  $x, y \in \mathbb{B}_R^n$ , для которых  $|x| = |y|$ , выполняется  $f(x) = f(y)$ .

Для обозначения частных производных функции  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  по переменным  $x$  и  $y$  будем использовать выражения  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  соответственно. Символ  $\Delta$  обозначает оператор Лапласа:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Величина  $r^*(A) = \inf\{r > 0 : \text{Mot}(A, \mathbb{B}_r) \neq \emptyset\}$  играет важную роль в локальном варианте проблемы Помпейю, поскольку для широкого класса множеств, включающего треугольники и квадраты, имеет место оценка  $\mathcal{R}(A) \leq 2r^*(A)$  [7].

В случае локального варианта проблемы Помпейю для семейства множеств  $\{A_1, A_2\}$  данная величина также важна по следующей причине. Пусть имеет место соотношение  $r^*(A_1) < r^*(A_2) < \mathcal{R}(A_1)$ . Так как в этом случае для  $R < r^*(A_2)$  имеет место равенство  $\text{Mot}(A_2, \mathbb{B}_R) = \emptyset$ , то интегралы вида (1) рассматриваются только для  $A = A_1$ , откуда не следует  $f = 0$  п.в. в  $\mathbb{B}_R$ . Значит  $\mathcal{R}(\{A_1, A_2\}) \geq r^*(A_2)$ .

Значение  $r^*(T) = 1/(2 \cos \alpha_0) \approx 0,52$  найдено в [19]. Очевидно, что  $r^*(K)$  является радиусом описанной около  $K$  окружности и равно  $r^*(K) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{10} \approx 0,39$ . Учитывая  $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(K) = \sqrt{6}/4 \approx 0,61$ , отсюда получаем оценку  $\mathcal{R}(\{T, K\}) \geq 1/(2 \cos \alpha_0)$ .

Важную роль в решении локальных вариантов проблемы Помпейю играет также величина  $r_*(A) = \sup\{r : \forall \lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_r) \Rightarrow O \in \lambda A\}$ , где  $O(0, 0)$  — начало координат. Для выпуклого множества  $A$  выполнение неравенства  $R < r_*(A)$  означает, что найдётся такое  $r_1 > 0$ , что для любого  $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_r)$  будет выполняться включение  $\mathbb{B}_{r_1} \subset \lambda A$ . В этом случае несложно построить ненулевую функцию из класса  $\mathfrak{F}_0^\infty(A, \mathbb{B}_R)$ . Отсюда следует неравенство  $\mathcal{R}(A) \geq r_*(A)$ .

Для треугольника  $T$  величина  $r_*(T) = \sqrt{3}/3 \approx 0,58$  найдена в [7]. Для квадрата  $K$  значение  $r_*(K) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{10} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,61$ . Следовательно,  $\mathcal{R}(\{T, K\}) \geq \sqrt{3}/3$ , и геометрические конструкции целесообразно рассматривать при

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < R < \frac{\sqrt{6}}{4}. \quad (4)$$

Рассмотрим дифференциальные операторы  $\nu_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nu_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nu_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nu_4 = \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nu_5 = \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nu_6 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\nu_7 = \nu_1 \nu_2 \nu_3$ ,  $\nu_8 = \nu_1 \nu_3 \nu_6$ ,  $\nu_9 = \nu_1 \nu_2 \nu_4$ ,  $\nu_{10} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ . Заметим, что вершины треугольника  $T$  (см. рис. 1) имеют координаты  $A(0, 0)$ ,  $B(\cos \alpha_0, -\sin \alpha_0)$ ,  $C(\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$ .

Доказательство следующей леммы можно найти в [19].

**Лемма 2.** Пусть  $f \in C^3(T)$ . Тогда имеют место равенства

$$\int_T \nu_8 f(x, y) dx dy = \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \Delta f(\cos \alpha_0, t) dt + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \nu_6 f(A) - \nu_5 f(C) - \nu_4 f(B); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_T \nu_9 f(x, y) dx dy &= 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \nu_6 f(A) - \nu_5 f(C) - \nu_4 f(B) + \\ &+ 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} \Delta f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_T \nu_7 f(x, y) dx dy = 2 \operatorname{tg} \alpha_0 (\nu_2 f)(A) - (\nu_3 f)(B) + (\nu_1 f)(C). \quad (7)$$

Доказательство следующей леммы можно найти в [13].

**Лемма 3.** Пусть  $f \in C^2(K)$ . Тогда имеет место равенство

$$\int_K \nu_{10} f(x, y) dx dy = f(P) - f(N) - f(Q) + f(M), \quad (8)$$

где  $P(\frac{\sqrt{30}}{20}, \frac{\sqrt{30}}{20})$ ,  $N(-\frac{\sqrt{30}}{20}, \frac{\sqrt{30}}{20})$ ,  $M(-\frac{\sqrt{30}}{20}, -\frac{\sqrt{30}}{20})$ ,  $Q(\frac{\sqrt{30}}{20}, -\frac{\sqrt{30}}{20})$  — вершины квадрата  $K$ .

Доказательство следующей леммы можно найти в [1].

**Лемма 4.** Пусть  $A$  — компакт в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathfrak{d}$  — один из дифференциальных операторов  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ , и для некоторого открытого множества  $D$ , для которого  $\operatorname{Mot}(A, D) \neq \emptyset$ , выполнено  $f \in \mathfrak{F}^\infty(A, D)$ . Тогда  $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{F}^\infty(A, D)$ .

Учитывая, что все  $\nu_j$  ( $j = \overline{1, 10}$ ) являются линейными комбинациями операторов дифференцирования по  $x$  и  $y$  или произведениями других из них, получаем (см. [1])

**Следствие 1.** Пусть  $A$  — компакт в  $\mathbb{R}^2$ , и для некоторого открытого множества  $D$ , для которого  $\operatorname{Mot}(A, D) \neq \emptyset$ , выполнено  $f \in \mathfrak{F}^\infty(A, D)$ . Тогда для любого  $j = \overline{1, 10}$  имеет место  $\nu_j f \in \mathfrak{F}^\infty(A, D)$ .

Пусть  $\rho(e) = \rho(O, \lambda e) = \inf\{\|\vec{OX}\| : X \in e\}$  — расстояние от центра круга, точки  $O(0, 0)$ , до элемента  $\lambda e$  треугольника  $\lambda T$  (вершины или стороны) при фиксированном  $\lambda \in \operatorname{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ . В зависимости от значения  $R$ , удовлетворяющего (4), рассмотрим интересные нас максимальные и минимальные возможные расстояния до соответствующих элементов по всем  $\lambda \in \operatorname{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ :

$$\begin{aligned} \max(A) &= \sup\{\rho(A)\}, & \max(C) &= \sup\{\rho(C)\}, & \max(AB) &= \sup\{\rho(AB)\}, \\ \max(BC) &= \sup\{\rho(BC)\}, & \min(A) &= \inf\{\rho(A)\}, & \min(C) &= \inf\{\rho(C)\}, \\ \min(AB) &= \inf\{\rho(AB)\}, & \min(BC) &= \inf\{\rho(BC)\}. \end{aligned}$$

Доказательство следующей леммы содержится в [19].

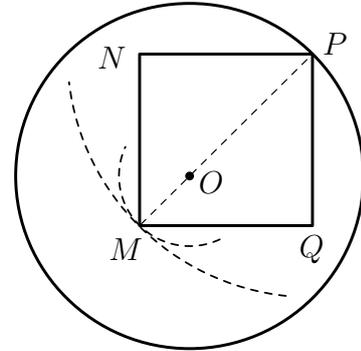
**Лемма 5.** При выполнении (4) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max(A) &= \max(C) = R, & \max(AB) &= \sqrt{R^2 - (1/4)}, \\ \max(BC) &= \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}, & \min(A) &= \cos \alpha_0 - \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}, \\ \min(C) &= 1 - R, & \min(AB) &= 0, & \min(BC) &= \max\{\cos \alpha_0 - R; 0\}. \end{aligned}$$

По аналогии с треугольником, для квадрата  $K = \square PNMQ$  рассмотрим

$$\max(M) = \sup\{\rho(M)\}, \quad \min(M) = \inf\{\rho(M)\}.$$

Максимальное расстояние до вершины квадрата равно радиусу круга:  $\max(M) = R$ . Минимальное достигается при условии, что противоположная вершина принадлежит окружности (см. рис. 2). Если точки  $M, O, P$  лежат на одной прямой, то  $OM = MP - OP = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{10} - R = \frac{\sqrt{15}}{5} - R$ . Это значение является  $\min(M)$ , так как если изобразить окружности с центром в точке  $P$  радиуса  $MP = \frac{\sqrt{15}}{5}$  и с центром в точке  $O$  радиуса  $OM = \frac{\sqrt{15}}{5} - R$ , то вторая находится внутри первой. Таким образом, приходим к следующему утверждению.



**Рис. 2.** Расстояния до вершин квадрата

**Лемма 6.** При выполнении (4) имеют место равенства

$$\max(M) = R, \quad \min(M) = \frac{\sqrt{15}}{5} - R.$$

**Лемма 7** ( $\min(M) < \max(AB)$ ). Если  $R$  удовлетворяет (4), то

$$\frac{\sqrt{15}}{5} - R < \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}. \tag{9}$$

**Доказательство.** Так как выполняется (4), то обе части (9) неотрицательны. Возведением их в квадрат получим эквивалентное неравенство

$$\frac{15}{25} - \frac{2\sqrt{15}}{5}R + R^2 < R^2 - \frac{1}{4}.$$

После перенесения однородных слагаемых получим

$$\frac{2\sqrt{15}}{5}R > \frac{17}{20},$$

откуда

$$R > \frac{17\sqrt{15}}{120}.$$

Учитывая, что  $\frac{17\sqrt{15}}{120} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ , приходим к утверждению леммы.  $\square$

Перед формулировкой необходимого в дальнейшем утверждения, доказательство которого можно найти в [7], введем используемые в нём обозначения. Для набора точек  $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$ , где  $v_i \neq v_j$  для  $1 \leq i, j \leq k$ ,  $i \neq j$ , числа  $\varepsilon > 0$  положим  $\Omega_{\nu, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\}$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ . Для открытого непустого множества  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  под  $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$  понимается класс радиальных локально суммируемых в  $\mathcal{U}$  распределений,  $\vec{\partial} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ .

**Утверждение 1.** (Теорема 3.2 из [7]) Пусть  $F_\nu \in \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu,\varepsilon})$  для  $\nu = 1, \dots, k$  и существуют многочлены  $P_\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  такие, что для любого  $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$  выполняется  $\sum_{\nu=1}^k (P_\nu(\vec{\partial})F_\nu)(x + v_\nu) = 0$ , которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен  $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $P(\Delta)F_\nu = 0$  в  $\Omega_{\nu,\varepsilon}$ .

**Лемма 8.** Пусть (4), и  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R)$ . Тогда существует ненулевой многочлен  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $q(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}(\frac{\sqrt{15}}{5} - R, R)$ .

**Доказательство.** Применяя утверждение 1 к функции  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R) \subset \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu,\varepsilon})$  для вершин  $P, N, M, Q$  квадрата  $K$ , учитывая (8) из леммы 3 (по следствию 1 его левая часть в данном случае обращается в нуль), приходим к существованию нетривиального многочлена  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , для которого  $q(\Delta)f = 0$  в  $\Omega_{\nu,\varepsilon}$ . Последнее множество представляет из себя набор точек из  $\mathbb{B}_R$ , в которых могут оказаться вершины  $\lambda M$  при  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R)$ . Применяя лемму 6, приходим к утверждению леммы.  $\square$

**Лемма 9.** Пусть  $R > \sqrt{3}/3$ , и  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R)$ . Тогда существует ненулевой многочлен  $\tilde{q}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $\tilde{q}(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_R$ .

**Доказательство.** Учитывая лемму 7, для указанных в условии леммы значений  $R$  выполняется неравенство  $\min(M) < \max(AB)$ .

Рассмотрим многочлен  $q$  из леммы 8 и функцию  $F = q(\Delta)f$ . По следствию 1, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, получаем  $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R)$ . При этом  $F = 0$  в  $\mathbb{B}(\sqrt{15}/5 - R, R)$ . Доопределим  $F$  нулём вне  $\mathbb{B}_R$ .

Заменив в (6)  $f$  на  $F$ , а  $T$  на  $\lambda T$  для различных  $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ , учитывая равенство нулю интегралов по треугольникам и равенство нулю функции  $F$  вне замыкания  $\overline{\mathbb{B}}_{\sqrt{15}/5 - R}$ , получаем, что интегралы от  $\Delta F$  по сторонам  $\lambda BC$ , а значит и по всем прямым, их содержащим, равны нулю. Так как  $\min(AB) = 0$ , это означает, что преобразование Радона по всем прямым равно нулю. Отсюда (см., например, лемму 1.8.3 из [7]) следует  $\Delta F = 0$  в  $\mathbb{B}_R$ . Произведение  $\tilde{q} = \Delta q(\Delta)$  также является многочленом от  $\Delta$ . Таким образом, лемма доказана.  $\square$

Приведем также два утверждения, доказательства которых полностью аналогичны леммам 7 и 8 из [18].

**Лемма 10.** Пусть  $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R) = \{0\}$  для некоторого  $R > \sqrt{3}/3$ . Тогда  $\mathcal{R}(\{T, K\}) \leq R$ .

**Лемма 11.** Пусть  $R > \sqrt{3}/3$ , для некоторой функции  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R)$  и для некоторого многочлена  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  выполняется  $q(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_R$ . Тогда  $f = 0$  в  $\mathbb{B}_R$ .

**Доказательство основного результата.** Перейдем к доказательству основного результата.

**Доказательство теоремы 1.** Если  $0 < R \leq r^*(T)$ , то  $\text{Mot}(T, \mathbb{B}_R) = \emptyset$  и тогда выполнение (1) для  $A = T$  при всех  $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$  не накладывает никаких условий на функцию  $f$ . А так как  $\mathcal{R}(K) > r^*(T)$ , то найдётся ненулевая функция  $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R) = \mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R)$ .

Если  $r^*(T) < R < r_*(T)$ , то для некоторого  $r > 0$  выполняются условия  $\mathbb{B}_r \subset \lambda T$  для всех  $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$  и  $\mathbb{B}_r \subset \lambda K$  для всех  $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R)$ .

В этом случае для  $j \in \{1; 2\}$  рассмотрим функции

$$g_j(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho = 0 \text{ или } \rho \geq r; \\ \exp\left(\frac{j}{\rho(\rho-r)}\right), & \text{если } 0 < \rho < r, \end{cases}$$

и величины  $C_j = \int_{\mathbb{B}_r} g_j(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ . Так как функции  $g_j \in C^\infty(0; +\infty)$  и линейно независимы, то их линейная комбинация  $f(\rho) = C_2 g_1(\rho) - C_1 g_2(\rho) \in \mathfrak{F}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \cap \mathfrak{F}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R)$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , и не равна нулю тождественно.

Если  $R > \sqrt{3}/3$ , то, используя леммы 9, 11, 10, получаем оценку  $\mathcal{R}(\{T, K\}) \leq \sqrt{3}/3$ , откуда следует утверждение теоремы.  $\square$

**Выводы.** В работе в явном виде впервые получено точное значение величины  $\mathcal{R}(\{T, K\}) = \sqrt{3}/3$ . Общие соображения давали оценку  $\mathcal{R}(\{T, K\}) \leq \sqrt{6}/4$ . Учитывая приближенные значения  $\sqrt{6}/4 \approx 0,612$  и  $\sqrt{3}/3 \approx 0,577$ , видим, что получено существенное уточнение этой величины.

Решение локального варианта проблемы Помпейю применяется в комплексном анализе, теории аппроксимации, теории отображений, сохраняющих меру [7, 18], при нахождении экстремального радиуса Помпейю для совокупности множеств [1, 13], а также при изучении вопроса равенства нулю функции с нулевыми интегралами по множествам положительной коразмерности [15].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машаров П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2. – С. 77–88.
2. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183–190.
3. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723–2736.
4. Volchkov V. V. New results in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Contemp. Math. – 2005. – V. 382. – P. 417–432.
5. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
6. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
8. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185–194.
9. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – No 278. – P. 69–74.
10. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
11. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
12. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
13. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.
14. Волчков В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52.
15. Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
16. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства круговых секторов / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 166–171.
17. Masharov P. A. Morera type theorem for a family of circular sectors / P. A. Masharov // Contemporary problems of natural sciences. – 2014. – V. 1, No 1. – P. 97–99.
18. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого

- национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.
19. Машаров, П. А. Экстремальный вариант проблемы помпейю для равнобедренного треугольника / П.А. Машаров, И.С. Власенко // Вестник Донецкого государственного университета. Сер. А: Естественные науки. – 2023. – №. 2. – С. 72–82.

*Поступила в редакцию 10.08.2024 г.*

**THE EXTREME VERSION OF POMPEIU'S PROBLEM FOR A FAMILY OF A ISOSCELES TRIANGLE AND E SQUIRE**

*P. A. Masharov, I. S. Vlasenko*

The value of the smallest circle radius in which the given set of sets is the Pompeiu family is found. A set of isosceles triangle and squire is considered. For this family the extremal Pompeiu radius turned out to be less then the minimum of the extremal Pompeiu radii for each of the sets.

**Keywords:** the Pompeii set, the extreme version of the Pompeii problem, the Pompeyu family, the extreme Pompeiu radius for a family.

**Машаров Павел Анатольевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.  
E-mail: pavelmasharov@gmail.com

**Masharov Pavlo Anatoliyovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Donetsk State University, Donetsk, Russia.

**Власенко Илона Сергеевна**

студентка кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, РФ.

**Vlasenko Iona Sergeevna**

Student, Donetsk State University, Donetsk, Russia.

## О СПЕКТРЕ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ В РЕШЕНИИ ДВУХГРУППОВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ПОСТОЯННЫМ ЯДРОМ

© 2024. *В.В. Сушков*

Рассмотрена задача построения собственных значений и собственных функций при решении векторного двухгруппового уравнения переноса с постоянным ядром. Описаны узловые точки исследования: поиск собственных функций непрерывного спектра в множестве обобщенных функций и определение коэффициентов непрерывного спектра посредством аппарата краевых задач комплексного анализа. Выделены непрерывный и дискретный спектр. В случае вырожденной матрицы рассеяния показана сводимость задачи к рассмотрению скалярного случая, определена структура собственных функций в зависимости от свойств матрицы переноса. В невырожденном случае определен набор собственных функций непрерывного спектра, построена структура решения граничной задачи в случае, когда бесконечно удаленная точка является двукратной точкой дискретного спектра, доказательство приведено для частного случая треугольной матрицы рассеяния. Описан алгоритм доказательства теоремы о полноте множества собственных функций и построения решения граничных задач.

**Ключевые слова:** граничные задачи, собственные значения и собственные функции дискретного и непрерывного спектра, обобщенные функции, краевая задача Римана, уравнение переноса, векторное уравнение.

**Введение.** Поиск собственных значений и собственных функций является одним из важнейших инструментов исследования задач кинетической теории газа и плазмы и теории переноса нейтронов как при использовании аналитических, так и численных методах решения. Свойства собственных значений и собственных функций определяют как факт разрешимости задачи в рамках рассматриваемой модели, так и свойства решения. Их построение эффективно в случае доказательства теорем полноты, однако в случае упомянутых классов задач недостаточная мощность множества собственных функций не позволяет применять их к решению конкретных задач. Принципиально проблема была решена К. Кейзом, предложившим искать собственные функции в том числе в виде сингулярных обобщенных собственных функций в работе [1] о скалярном уравнении переноса нейтронов

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu'.$$

Предложенная идея через два года получила свое развитие в области кинетической теории в работе К. Черчиньяни [2] для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} Y(x, \mu) + Y(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, \mu') e^{-\mu'^2} d\mu'.$$

В этом случае общая задача разбивается на две части: 1) определение структуры функций (в том числе обобщенных), решающих задачу на собственные значения, 2) доказательство полноты построенного набора в некотором функциональном пространстве, что даёт впоследствии возможность получения решений конкретных граничных задач, позволяет получать удобные результаты в части разработки новых методов аппроксимации, строить единую теорию получения аналитических решений граничных задач.

При этом доказательство полноты традиционно опирается на исследование краевых задач Римана [3], в силу чего наибольшее развитие получили алгоритмы сведения исходного уравнения к скалярному – именно они преимущественно используются до сих пор: как в теории переноса [4–6], так и в кинетической теории (при построении аналитических решений [7] и в применении приближенных методов [8]). Сложность исследования векторно-матричных моделей обусловлена как более сложной структурой собственных функций, так и необходимостью решения векторно-матричных задач Римана для определения коэффициентов разложения.

И по настоящий момент зачастую исследование технических аспектов (см., например, [9]) векторных задач представляет собой нетривиальную задачу. Только в работах [10–11] Siewert С.Е. и Kelley С.Т., посвященных уравнению БГК для случая одноатомного газа и уравнению переноса, были построены матрица канонических решений соответствующей задачи Римана, при этом важно отметить, что непосредственное её применение для построения аналитического решения конкретных задач удалось позже, когда А.В. Латышев и А.А. Юшканов [12] развили метод фундаментальной матрицы решений векторно-матричной краевой задачи Римана, получив в итоге результаты для матричной задачи в случае уравнения БГК для одноатомного газа. Предложенный ими подход был применен впоследствии при разработке ряда методов (например, в [13]) при построении аналитических решений кинетических уравнений для векторных моделей, однако в теории переноса исследование векторных случаев встречается значительно реже (см., например, [14–15]). В то же время определенная родственность математических моделей в рамках обеих теорий представляет возможность провести исследование набора собственных функций и собственных значений для случая векторного уравнения переноса ранее полученными методами.

#### **Собственные функции векторного уравнения. Вырожденный случай.**

Рассмотрим векторное двухгрупповое односкоростное уравнение теории переноса в плоской геометрии с постоянным ядром:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Sigma \Psi(x, \mu) = \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu') d\mu', \quad (1)$$

где  $x > 0$ ,  $\mu \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ .  $\Psi(x, \mu): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – неизвестная вектор-функция с компонентами  $\psi_1(x, \mu)$ ,  $\psi_2(x, \mu)$ ,  $\Sigma$  и  $C$  – известные вещественные матрицы, причем

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}, \text{ где } \sigma_1 \neq \sigma_2, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

$\Sigma$  называется матрицей переноса, а  $C$  – матрицей рассеяния, причем  $c_{ij} > 0$ , при  $i, j = 1, 2$ . Фактически задача может рассматриваться безотносительно физической составляющей, как задача об исследовании класса векторных интегродифференциальных уравнений, однако будем использовать устоявшуюся терминологию.

Предположим, что матрица  $C$  – вырождена. Тогда она представляется в виде

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ kc_{11} & kc_{12} \end{bmatrix},$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности (очевидно,  $k > 0$ ).

Представим уравнение (1) в виде системы уравнений относительно функций-компонент

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, \mu) + \sigma_1 \psi_1(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (c_{11} \psi_1(x, \mu') + c_{12} \psi_2(x, \mu')) d\mu',$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x, \mu) + \sigma_2 \psi_2(x, \mu) = \frac{k}{2} \int_{-1}^1 (c_{11} \psi_1(x, \mu') + c_{12} \psi_2(x, \mu')) d\mu'.$$

Введя в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$\psi_0(x, \mu) = c_{11} \psi_1(x, \mu) + c_{12} \psi_2(x, \mu),$$

придем к уравнению

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_0(x, \mu) + \sigma_0 \psi_0(x, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \int_{-1}^1 \psi_0(x, \mu') d\mu', \quad (2)$$

где коэффициент

$$\sigma_0 = c_{11} \sigma_1 + c_{12} \sigma_2.$$

Для определения множества собственных функций разделим переменные в уравнении (2):

$$\psi_0(x, \mu) = \varphi(\eta, \mu) e^{-\frac{x}{\eta}},$$

и придем к характеристическому уравнению:

$$(\sigma_0 \eta - \mu) \varphi(\eta, \mu) = \frac{(c_{11} + kc_{12}) \eta}{2} \cdot n(\eta), \quad (3)$$

где  $n(\eta) = \int_{-1}^1 \varphi(\eta, \mu') d\mu'$  – нормировочный интеграл. Непосредственно вычисляя, при  $|\sigma_0 \eta| > 1$  получим

$$\varphi(\eta, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \cdot \frac{\eta}{\sigma_0 \eta - \mu} n(\eta), \quad (4)$$

что с учетом нормировки даёт уравнение

$$\eta \ln \left| \frac{1 + \sigma_0 \eta}{1 - \sigma_0 \eta} \right| = \frac{2}{c_{11} + kc_{12}},$$

определяющее собственные значения характеристического уравнения (3), называемые собственными значениями **дискретного спектра**. Рассмотрим функцию

$$f(\eta) = \eta \ln \left| \frac{1 + \sigma_0 \eta}{1 - \sigma_0 \eta} \right|.$$

Очевидно, что при  $\sigma_0 = 0$  функция  $f(\eta) \equiv 0$ . Далее будем считать, что  $\sigma_0 \neq 0$ .

**Свойство 1°.** Функция  $f(\eta)$  является четной и имеет единственный ноль:  $f(0) = 0$ .

**Свойство 2°.** Функция  $f(\eta)$  непрерывна на всей действительной оси за исключением точек  $\pm(1/\sigma_0)$ , причем:  $f(\eta) \rightarrow +\infty$  при  $\eta \rightarrow \pm(1/\sigma_0)$  в случае  $\sigma_0 > 0$  и :  $f(\eta) \rightarrow -\infty$  при  $\eta \rightarrow \pm(1/\sigma_0)$  в случае  $\sigma_0 < 0$ .

**Свойство 3°.** Функция  $f(\eta)$  в случае  $\sigma_0 > 0$  монотонно возрастает на промежутке  $(-\infty, -1/\sigma_0)$  и монотонно убывает на  $(1/\sigma_0, +\infty)$ , причем  $f(\eta) \rightarrow 2/\sigma_0$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . В случае  $\sigma_0 < 0$  функция  $f(\eta)$  монотонно убывает на промежутке  $(-\infty, -1/\sigma_0)$  и монотонно возрастает на  $(1/\sigma_0, +\infty)$ , причем  $f(\eta) \rightarrow 2/\sigma_0$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ .

Из приведенных свойств функции  $f(\eta)$  и ограничения  $|\sigma_0\eta| > 1$  получим следующее.

**Утверждение 1.** Дискретный спектр характеристического уравнения (3) содержит две точки  $\pm\eta_0$  в случае  $c_{11} + kc_{12} < \sigma_0$  и составляет пустое множество в ином случае.

Функции, определяемые равенством (4) при соответствующих значениях  $\pm\eta_0$ , называют собственными функциями дискретного спектра – обозначим их  $\varphi_{\pm}(\eta_0, \mu)$ :

$$\varphi_{\pm}(\eta_0, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \cdot \frac{\eta_0}{\sigma_0\eta_0 - \mu} n(\eta_0). \quad (5)$$

Предыдущие рассуждения проводились из расчета  $|\sigma_0\eta| > 1$  – в противоположном случае нормировочный интеграл  $n(\eta)$  расходится. **Непрерывный спектр**, как очевидно следует из (3), составляют все точки отрезка  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$ . В этом случае при подстановке функций (4) в нормировочный интеграл  $n(\eta)$  получим, вообще говоря, расходящийся интеграл при всех значениях  $\eta \in [-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$ . Если допустить рассмотрение собственных функций уравнения (3) из класса обобщенных функций [1], то они будут соответствовать собственным значениям **непрерывного спектра**.

Из уравнения (3) с учетом нормировки в этом случае находим:

$$\varphi(\eta, \mu) = \left[ \frac{(c_{11} + kc_{12})\eta}{2} P \frac{1}{\sigma_0\eta - \mu} + \Lambda(\eta)\delta(\sigma_0\eta - \mu) \right] n(\eta), \quad (6)$$

где под  $P \frac{1}{x}$  понимается главное значение интеграла по Коши от  $x^{-1}$ ,  $\delta(x)$  – традиционно, дельта-функция Дирака, а

$$\Lambda(\mu) = 1 - \mu \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} v. p. \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{\sigma_0\eta - \mu}$$

известная вспомогательная функция, называемая в литературе дисперсионной. Интеграл, входящий в ее структуру, также понимается как интеграл в смысле главного значения по Коши.

Для упрощения записи можно принимать, что  $n(\eta) = 1$ . Таким образом, множество собственных функций уравнения (3) содержит континуальное множество функций непрерывного спектра (6) и – в случае, когда  $c_{11} + kc_{12} < \sigma_0$ , – две функции дискретного спектра (5).

Для построенных функций прямой подстановкой несложно получить результат:

**Свойство 4°.** Собственные функции (5) и (6) удовлетворяют соотношению:

$$\int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} \mu \psi(\eta', \mu) \psi(\eta'', \mu) d\mu = 0 \text{ при } \eta' \neq \eta''.$$

Построенное множество собственных функций оказывается достаточно мощным для практического использования, которое базируется на доказательстве теорем полноты в классе функций, требуемых в рамках конкретной задачи – как правило, достаточным считается рассмотрение класса гильбертовых функций. Приведем пример такого результата.

**Теорема 1.** *Функции вида (5) и (6) составляют полную систему собственных функций характеристического уравнения (3) на пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера на отрезке  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$  и убывающих к нулю на бесконечности.*

Для доказательства достаточно показать представимость любой гельдеровой на отрезке  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$  функции  $\phi(\mu)$  в виде

$$\phi(\mu) = \sum a_{\pm} \varphi_{\pm}(x, \mu) + \int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} A(\eta) \varphi(\eta, \mu) d\eta.$$

В силу свойства 4° коэффициенты дискретного спектра  $a_{\pm}$  определяются автоматически:

$$a_{\pm} = \frac{1}{A_{\pm}} \int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} \mu \phi(\mu) \varphi_{\pm}(\eta_0, \mu) d\mu = 0,$$

где  $A_{\pm} = \int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} \mu \varphi_{\pm}^2(\eta_0, \mu) d\mu$ . Воспользовавшись явным видом обобщенной функции  $\varphi(\eta, \mu)$ , приходим к интегральному уравнению относительно неизвестной функции  $A(\mu)$

$$\phi(\mu) - \sum a_{\pm} \varphi_{\pm}(x, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \int_{-\frac{1}{\sigma_0}}^{\frac{1}{\sigma_0}} \frac{\eta}{\sigma_0 \eta - \mu} A(\eta) d\eta + A(\mu) \Lambda(\mu), \text{ где } -\frac{1}{\sigma_2} < \mu < \frac{1}{\sigma_2}.$$

Заметим, что левая часть уравнения

$$\phi_0(\mu) = \phi(\mu) - \sum a_{\pm} \varphi_{\pm}(x, \mu)$$

представляет собой известную функцию. В соответствии с [3] введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$N(z) = v.p. \int_0^{\frac{1}{\sigma_0}} \frac{\eta A(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

(интеграл понимается в смысле главного значения по Коши), и с учетом разрывного характера обеих функций  $-N(\mu)$  и  $\Lambda(\mu)$  – при переходе через отрезок  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$  действительной оси, сведем полученное равенство к краевой задаче Римана:

$$\Lambda^+(\mu)[- \phi_0(\mu) + N^+(\mu)] = \Lambda^-(\mu)[- \phi_0(\mu) + N^-(\mu)], \quad \text{где } -\frac{1}{\sigma_0} < \mu < \frac{1}{\sigma_0}.$$

Требование убывания к нулю функции  $\phi_0$  в окрестности бесконечно удаленной точки позволяет утверждать [3] о существовании решения краевой задачи и, соответственно, о существовании коэффициента непрерывного спектра. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод о справедливости утверждения о полноте построенного набора собственных функций.

Таким образом, получили, что множество собственных вектор-функций  $\Psi_{\eta}$  с компонентами  $\psi_1, \psi_2$  для векторного уравнения (1) в вырожденном случае и их свойства полностью определяются структурой множества собственных функций скалярного характеристического уравнения (3). Компоненты  $\psi_1(x, \mu), \psi_2(x, \mu)$ , зависящие от параметра  $\eta$ , находятся из систем уравнений

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, \mu) + \sigma_1 \psi_1(x, \mu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\eta, \mu') e^{-\frac{x}{\eta}} d\mu', \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x, \mu) + \sigma_2 \psi_2(x, \mu) &= \frac{k}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\eta, \mu') e^{-\frac{x}{\eta}} d\mu', \end{aligned}$$

$$c_{11}\psi_1(x, \mu) + c_{12}\psi_2(x, \mu) = \varphi(\eta, \mu')e^{-\frac{x}{\eta}},$$

с учетом граничных условий рассматриваемой задачи.

**Собственные функции в невырожденном случае.** Проанализируем структуру и свойства множества собственных функций задачи для уравнения (1) в случае невырожденной матрицы рассеяния, то есть при  $\det C \neq 0$ . Пусть далее для определенности в матрице переноса  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ . Будем искать решение уравнения с помощью анзаца Кейза: в виде  $\Psi_\eta(x, \mu) = \Phi(\eta, \mu)e^{-x/\eta}$ , где  $\eta$  – произвольное комплексное число. Тогда уравнение (1) преобразуется к уравнению относительно новой неизвестной вектор-функции  $\Phi(\eta, \mu)$ :

$$(\Sigma\eta - I\mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta Cn(\eta). \tag{7}$$

Традиционно, под  $I$  понимается единичная матрица, а нормировочный вектор представляет собой момент нулевого порядка

$$n(\eta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu') d\mu'. \tag{8}$$

Векторные решения уравнения (8)  $\Phi(\eta, \mu)$  традиционно называются собственными функциями, а соответствующие им значения  $\eta$  – собственными значениями характеристического уравнения (7). При подстановке функции  $\Phi(\eta, \mu)$ , дающей решение (7),

$$\Phi(\eta, \mu) = (\Sigma\eta - I\mu)^{-1} \eta Cn(\eta)$$

в нормирующий вектор (8), получим расходящиеся интегралы. Следовательно, для построения решения необходимо регуляризовать вектор-функцию  $\Phi(\eta, \mu)$ , то есть определить линейный непрерывный функционал  $\Phi_\eta$ , совпадающий с функцией  $\Phi(\eta, \mu)$  всюду в комплексной плоскости за исключением случая  $\mu = \eta$ , при этом функция  $\Phi(\eta, \mu)$  будет пониматься как линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций.

Понимая  $\Phi(\eta, \mu)$  как обобщенную функцию, действующую по правилу

$$(\Phi_\eta, \phi(\mu)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|\eta - \mu| < \varepsilon} \phi(\mu) \Phi(\eta, \mu) d\mu,$$

получим в правой части выражения интеграл в смысле главного значения по Коши. Это определит частное решение задачи регуляризации функции  $\Phi(\eta, \mu)$ , общее же решение будет иметь вид

$$(\Phi_\eta, \phi(\mu)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|\eta - \mu| < \varepsilon} \phi(\mu) \Phi(\eta, \mu) d\mu + (g(\eta) \delta_\eta, \phi(\mu)),$$

где  $\delta_\eta$  – дельта-функция Дирака,  $g(\eta)$  – произвольная гильдерова функция параметра  $\eta$ .

Решая уравнение (7) покомпонентно, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta, \mu) &= (c_{11}n_1(\eta) + c_{12}n_2(\eta)) \mathbf{P} \frac{1}{\sigma_1\eta - \mu} + g_1(\eta) \delta(\sigma_1\eta - \mu) \\ \Phi_2(\eta, \mu) &= (c_{21}n_1(\eta) + c_{22}n_2(\eta)) \mathbf{P} \frac{1}{\sigma_2\eta - \mu} + g_2(\eta) \delta(\sigma_2\eta - \mu), \end{aligned}$$

здесь, традиционно,  $\mathbf{P}x^{-1}$  – главное значение интеграла типа Коши,  $\delta(x)$  – известная дельта-функция Дирака,  $n_1(\eta)$  и  $n_2(\eta)$  – компоненты нормировочного вектора.

Подставляя полученные результаты в условие нормировки (8), получаем соотношение

$$(I + \eta T(\Sigma\eta)C)n(\eta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(\sigma_1\eta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g(\eta).$$

где:

$$T(\Sigma z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T(\sigma_1 z) & 0 \\ 0 & T(\sigma_2 z) \end{bmatrix},$$

причем:

$$T(\sigma z) = v. p. \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu - \sigma z}.$$

Под  $\theta(x)$  традиционно понимается  $\theta$ -функция Хевисайда.

Как и в предыдущем случае, очевидно, что точки отрезка  $[-1/\sigma_2, 1/\sigma_2]$  будут составлять непрерывный спектр уравнения, которому отвечают собственные вектор-функции непрерывного спектра с компонентами  $\Phi_{1,2}(\eta, \mu)$  из пространства обобщенных функций.

Дисперсионной матрицей-функцией будем называть, как обычно,

$$\Lambda(z) = I + z T(\Sigma z)C.$$

Ее определитель  $\lambda(z) = \det \Lambda(z)$  будем называть дисперсионной функцией, а уравнение  $\lambda(z) = 0$  – дисперсионным уравнением.

Пусть  $S(z)$  – некоторая матрица, приводящая матрицу  $\Lambda(z)$  к жордановой нормальной форме. Обозначим

$$\Omega(z) = S^{-1}(z)\Lambda(z)S(z).$$

При этом очевидно, что  $\det \Omega(z) = \lambda(z)$ . Собственными значениями для матрицы-функции  $S(z)$  будут функции

$$\kappa_{1,2}(z) = 1 + \frac{z}{4}(c_{11}T(\sigma_1 z) + c_{22}T(\sigma_2 z)) \pm \frac{z}{4}r(z),$$

где

$$r(z) = \sqrt{(c_{11}T(\sigma_1 z) - c_{22}T(\sigma_2 z))^2 + 4c_{12}c_{21}T(\sigma_1 z)T(\sigma_2 z)}.$$

**Утверждение 2.** Матрица функция  $S(z)$  имеет точки ветвления в комплексной плоскости, причем на действительной оси – только  $z = 0$ , а в остальной части комплексной плоскости – не более чем счетное множество.

Кроме того, в силу своей структуры функция  $S(z)$  будет совершать скачок при переходе через основной разрез.

Исследование дисперсионной функции представляет собой одну из центральных проблем в решении задачи в целом (см., например, [9]). В нашем случае  $\lambda(z)$  также можно представить в явном виде:

$$\lambda(z) = 1 + \frac{z}{2}(c_{11}T(\sigma_1 z) + c_{22}T(\sigma_1 z)) + \frac{z^2}{4}T(\sigma_1 z)T(\sigma_2 z) \det C.$$

Общее число собственных значений дискретного спектра может быть определено с помощью принципа аргумента, при этом решениями дисперсионного уравнения могут быть как конечные значения, так и бесконечно удаленная точка. Проиллюстрируем, каким образом используются собственные функции и собственные значения

характеристического уравнения на примере случая, когда дисперсионная функция имеет двойной нуль на бесконечности, то есть бесконечность является двукратной точкой дискретного спектра.

**Утверждение 3.** Для дисперсионной функции  $\lambda(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки будет справедливо лорановское разложение:

$$\lambda(z) = \lambda_0 + \lambda_{-2}z^{-2} + \lambda_{-4}z^{-4} + \dots, \text{ при } |z| \rightarrow \infty,$$

причем

$$\lambda_0 = 1 - 2 \left( \frac{c_{11}}{\sigma_1} + \frac{c_{22}}{\sigma_2} \right) + \frac{4 \det C}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

В силу ранее сказанного, нас будет интересовать случай, когда

$$1 - 2 \left( \frac{c_{11}}{\sigma_1} + \frac{c_{22}}{\sigma_2} \right) + \frac{4 \det C}{\sigma_1 \sigma_2} = 0.$$

Бесконечно удаленной точке будут соответствовать два решения исходного уравнения (1):

$$\Psi^+(x, \mu) = A, \quad \Psi^-(x, \mu) = (xI - \mu\Sigma^{-1})B,$$

где векторы  $A$  и  $B$  отличаются на постоянный множитель. Очевидно, что  $\Sigma A = CA$ , т.е. вектор  $A$  является собственным вектором для матрицы  $(\Sigma - C)$ , причем соответствующим нулевому собственному значению. Подставляя эти соотношения в уравнение (1), констатируем, что

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\sigma_1 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{21}}{\sigma_2 - c_{22}}.$$

**Полнота множества собственных функций. Случай треугольной матрицы рассеяния.** Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим задачу для уравнения (1) с граничными условиями:

$$\Psi(0, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ при } 0 < \mu < 1 \quad (9)$$

$$\Psi(x, \mu) = \Psi_{as}(x, \mu) = A_1 \Psi^+(x, \mu) + A_2 \Psi^-(x, \mu), \text{ при } -1 < \mu < 0, x \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Задачу (1), (9), (10) решает следующая теорема.

**Теорема 2.** Решение задачи (1), (9), (10) находится в виде:

$$\Psi(x, \mu) = \Psi_{as}(x, \mu) + \int_0^{1/\sigma_2} e^{-\frac{x}{\eta}} \Phi(\eta, \mu) d\eta. \quad (11)$$

*Доказательство.* Положим в формуле (11)  $x = 0$ . Как результат получим:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mu \Sigma \Psi_{as}(0, \mu) + C \int_0^{\frac{1}{\sigma_2}} \frac{\eta}{\eta - \mu} n(\eta) d\eta + 2\mu \Lambda(\mu) n(\mu), \quad \text{где } 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}.$$

Обозначая

$$N(z) = \int_0^{\frac{1}{\sigma_2}} \frac{\eta n(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

сведем полученное равенство к задаче Римана:

$$\Lambda^+(\mu)[C^{-1}\Sigma\Psi_{as}(0, \mu) + N^+(\mu)] = \Lambda^-(\mu)[C^{-1}\Sigma\Psi_{as}(0, \mu) + N^-(\mu)], \text{ где } 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}. \quad (12)$$

В основе решения векторно-матричной задачи (12) лежит задача факторизации матричного коэффициента задачи Римана относительно неизвестной матрицы-функции  $X(z)$  размерности два

$$\Lambda^+(\mu)X^+(\mu) = \Lambda^-(\mu)X^-(\mu), \quad (13)$$

решаемая методами фактор-матрицы [12] или канонической матрицы [13]. Построение матрицы  $X(z)$  практически завершает доказательство теоремы, так как с учетом поведения функций на бесконечности можно будет утверждать, что

$$C^{-1}\Sigma\Psi_{as}(0, z) + N(z) = \Pi \cdot X(z),$$

где  $\Pi$  – постоянный вектор с произвольными коэффициентами  $\Pi_{1,2}$ , что определяет вектор-функцию  $N(z)$  с точностью до двух произвольных коэффициентов  $\Pi_{1,2}$ , а следовательно – задает с такой же степенью произвольности и вектор-функцию  $n(z)$ . Граничное условие (9) позволяет полностью определить коэффициенты  $\Pi_{1,2}$ , а следовательно – и решение задачи (1), (9), (10).

Решение задачи (13) представляет собой принципиальный шаг для обоих рассматриваемых случаев – общего и частного. В общем случае для решения однородной задачи Римана (13) базовый прием заключается в приведении матрицы-функции  $\Lambda(z)$  к диагональному виду. Однако в общем случае нашей задачи, в силу разрывности функции  $S(z)$  при переходе через главный разрез  $0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}$ , метод диагонализации матричного коэффициента  $[\Lambda^+(z)]^{-1}\Lambda^-(z)$  задачи (13) потребует решения дополнительных вспомогательных краевых задач.

Если рассмотреть частный случай, когда матрица рассеяния представляет собой верхнюю диагональную ( $c_{21} = 0$ ), то матричный коэффициент  $G(z) = [\Lambda^+(z)]^{-1}\Lambda^-(z)$  по построению будет представлять собой верхнюю треугольную матрицу – а следовательно, решение задачи (13) может быть найдено также в виде верхней треугольной матрицы

$$X(z) = \begin{bmatrix} X_{11}(z) & X_{12}(z) \\ 0 & X_{22}(z) \end{bmatrix},$$

причем функции  $X_{ij}(z)$  определяются из двух однородных скалярных задач Римана:

$$X_{11}^+(\mu) = G_{11}(\mu)X_{11}^-(\mu), \quad X_{22}^+(\mu) = G_{22}(\mu)X_{22}^-(\mu), \quad 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}, \quad (14)$$

разрешимых на главном разрезе, и одной неоднородной

$$X_{12}^+(\mu) = G_{11}(\mu)X_{12}^-(\mu) + b(\mu), \quad 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}, \quad (15)$$

где функция  $b(\mu) = G_{12}(\mu)X_{22}^-(\mu)$  в контексте (13) является известной. Решения скалярных задач (14)–(15) позволяют построить как частное решение матричной задачи (13), так и общее решение исходной задачи (12), что доказывает теорему в целом.

Аналогичный алгоритм позволяет построить доказательство теоремы о полноте собственных функций характеристического уравнения.

Таким образом, описанные алгоритмы позволяют ставить задачи на собственные значения, определять спектр и строить множества собственных функций для исследования решений векторного уравнения переноса – как в вырожденном, так и в невырожденном случае. Общая аналитическая теория собственных функций для задач такого типа может стать основой математического аппарата более общей теории решения уравнений указанного вида.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Case K.M. Elementary solutions of the transport equation and their applications // Annals of physics (N.Y.). – 1960. – Vol. 9, No. 1. – P. 1-23.
2. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their application to the slip-flow problem // Ann.Phys. (N.Y.). – 1962. – Vol. 20. – P. 219-233.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с
4. Gamzaev Kh. M. The Problem of Identifying the Trajectory of a Mobile Point Source in the Convective Transport Equation / Kh. M. Gamzaev // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2021. – Vol. 14, No. 2. – P. 78-84.
5. Garcia R. D. M., Siewert C. E., Thomas J. R. A Computationally Viable Version of the PN Method for Spheres // Nuclear Science and Engineering. – 2017. – No. 186. – P. 103-119.
6. Селиверстов В. В. Кинетическое уравнение диффузии в теории переноса нейтронов // Атомная энергия. – 2013. – Т. 114, № 6. – С. 308-315.
7. Germider O.V., Popov V.N. On the Calculation of the Poiseuille Number in the Annular Region for Non-isothermal Gas Flow // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. – 2023. – Vol. 16, No. 3. – P. 330-339.
8. Забродина Е.А., Николаева О.В., Фимин Н.Н., Четкин В.М. Гидродинамические течения в нагреваемых трубах с расчетом пограничного слоя по БГК-модели // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 11. – С. 1937-1952.
9. Акимова В.А., Бугримов А.Л., Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение дисперсионного уравнения из второй задачи Стокса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2013. – № 1. – С. 3-20.
10. Siewert C.E., Kelley C.T. An analytical solution to a matrix Riemann-Hilbert problem // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). – 1980. – Vol. 31. – P. 344-351.
11. Siewert C.E., Kelley C.T., Garcia R.D.M. An analytical expression for the H-matrix relevant to Rayleigh scattering // J. Math. Anal. and Appl. – 1981. – Vol. 84, No. 12. – P. 509-518.
12. Латышев А.В. Аналитическое решение эллипсоидально-статистического модельного уравнения Больцмана // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1992. – № 2. – С. 151-164.
13. Сушков В.В. Аналитическое решение векторных краевых задач теории газов // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 3. – С. 32-41.
14. Енгибарян Н. Б. Резольвентное соотношение Соболева для векторных интегральных уравнений переноса в полупространстве // Астрономический журнал. – 2017. – Т. 94, № 7. – С. 631-638.
15. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. – М.: Мир, 1972. – 384 с.

*Поступила в редакцию 28.06.2024 г.*

#### SPECTRUM AND EIGENFUNCTIONS IN SOLVING THE TWO-GROUP CONSTANT-KERNEL TRANSFER EQUATION

*V.V. Sushkov*

The problem of constructing eigenvalues and eigenfunctions when solving vector two-group transfer equation with constant kernel is considered. The nodal points of the study are described: the search for eigenfunctions of the continuous spectrum in a set of distributions and the determination of coefficients of the continuous spectrum through the apparatus of boundary value problems of complex analysis. Continuous and discrete spectrum are highlighted. In the case of a degenerate scattering matrix, the reducibility of the problem to consider the scalar case is shown, the structure of eigenfunctions is determined depending on the properties of the transfer matrix. In the non-degenerate case, a set of eigenfunctions of the continuous spectrum is defined, a

structure for solving the boundary problem is constructed in the case when the infinitely distant point is a double point of the discrete spectrum, the proof is given for the special case of the triangular scattering matrix. Described is an algorithm for proving a theorem on the completeness of a set of eigenfunctions and constructing a solution to boundary value problems.

**Keywords:** boundary value problems, eigenvalues and eigenfunctions of discrete and continuous spectrum, distributions, Riemann boundary value problem, transfer equation, vector equation.

**Сушков Владислав Викторович**

кандидат физико-математических наук;  
ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный  
университет имени Питирима Сорокина»,  
Сыктывкар, РФ.  
E-mail: vvsu@mail.ru

**Sushkov Vladislav Viktorovich**

candidate of physical and mathematical sciences;  
FSBEI HE «Pitirim Sorokin Syktyvkar State  
University»,  
Syktyvkar, Russia

**АНАЛИЗ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫМ РАЗРЕЗОМ НА БАЗЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ**© 2024. *Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев*

Рассмотрено термоупругое состояние изотропных пластин с теплопроницаемым разрезом, на линии которого действуют градиенты средней температуры и температурного момента. Исследована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от длины и параметра теплопроницаемости разреза. Предполагался случай симметричного теплообмена с внешней средой. В качестве разрешающей взята система дифференциальных уравнений обобщённой теории пластин в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации.

**Ключевые слова:** изотропная пластина; теплопроницаемый разрез; комплексная температурная нагрузка; симметричный теплообмен; коэффициенты интенсивности напряжений.

**Введение.** Задачи, связанные с определением напряжённо-деформированного состояния (НДС) тонкостенных элементов конструкций представляют особый интерес и находят практическое применение в современном строительстве и машиностроении. Особое внимание при этом следует уделять зонам концентрации напряжений, к которым относятся дефекты типа трещин. Все эти критические места необходимо учитывать при оценке безопасности всей конструкции. Фундаментальные исследования в области прочности и безопасности конструкций с трещиноподобными дефектами позволили сформировать основные положения классической механики разрушения, где в качестве параметра, описывающего НДС у вершины трещины, выступают коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Они являются сомножителями в слагаемых, описывающих сингулярный характер поведения компонент поля напряжений.

Среди публикаций последних лет в области теоретических исследований КИН следует упомянуть работы [1–4]. В статье И. И. Ануфриева [1] рассматривается НДС системы плоских трещины. В рамках данной работы производится разработка математической модели, описывающей процесс раскрытия трещин для различной геометрии взаимного расположения. Статья А. В. Звягина, Д. Д. Новова [2] посвящена разработке численного метода определения КИН для плоских задач механики разрушения, учитывающего наличие кривизны линии трещины. В работе Б. В. Соболя с соавторами [3] получены значения КИН в окрестности трещин в сечениях с угловыми точками контура. В публикации Р. В. Чернавина с соавторами [4] экспериментально исследуется поле напряжений в вершине усталостной трещины при циклическом нагружении на основе изменения термодинамических параметров системы.

В настоящей статье рассматривается изотропная пластина с теплопроницаемым разрезом на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации, основанной на методе И. Н. Векуа разложения заданных и искомых функций в ряды Ж. Фурье по полиномам А. М. Лежандра от поперечной координаты [5]. Целью проводимого исследования является выявление влияния геометрических и теплофизических

параметров разреза на КИН для поперечного и продольного сдвига при действии комплексной температурной нагрузки, сочетающей поток средней температуры и градиент температурного момента.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщины  $2h$ , содержащую теплопроницаемый разрез  $L$ . На лицевых поверхностях пластины осуществляется конвективный теплообмен по закону И. Ньютона с внешней средой нулевой температуры. Предполагаем, что теплообмен носит симметричный характер, т. е. параметры теплообмена (критерии Ж.-Б. Био) на лицевых поверхностях пластины одинаковы и равны  $Bi$ .

Пусть  $x_1, x_2$  – координаты точки в срединной плоскости пластины, а  $x_3$  – координата в поперечном направлении. Все координаты  $x_i$  являются безразмерными, определёнными с точностью до полутолщины пластины  $h$ .

В рамках обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации имеют место такие представления искомых функций в виде рядов Ж. Фурье по полиномам А. М. Лежандра  $P_k = P_k(x_3)$  [5, 6]:

– температура:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2)P_0(x_3) + T_1(x_1, x_2)P_1(x_3), \quad (1)$$

где  $T_0$  – средняя температура;  $T_1$  – температурный момент;

– компоненты вектора перемещений:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2)P_0(x_3) + \gamma_1(x_1, x_2)P_1(x_3); \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x_1, x_2)P_0(x_3) + \gamma_2(x_1, x_2)P_1(x_3); \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w_0(x_1, x_2)P_0(x_3), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u, v, w_0, \gamma_1, \gamma_2$  – обобщённые перемещения, причём  $u, v$  – перемещения точек срединной поверхности;  $w_0$  – прогиб;  $\gamma_1, \gamma_2$  – углы поворота нормали;

– компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_k(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}N_k(x_1, x_2)P_0(x_3) + \frac{3}{2}M_k(x_1, x_2)P_1(x_3) \quad (k=1, 2); \\ \tau_{12}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}S(x_1, x_2)P_0(x_3) + \frac{3}{2}H(x_1, x_2)P_1(x_3); \\ \tau_{k3}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}Q_{k0}(x_1, x_2)\{P_0(x_3) - P_2(x_3)\} \quad (k=1, 2); \quad \sigma_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $N_1, N_2, S$  – мембранные усилия;  $M_1, M_2, H$  – изгибающие и крутящий моменты;  $Q_{10}, Q_{20}$  – перерезывающие силы.

Компоненты разложений искомых функций в ряды (1)–(3) определяются из системы уравнений обобщённой теории пластин в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации, которая включает в себя [5, 6]:

– приближение первого порядка трёхмерного уравнения теплопроводности, записанное для случая симметричного теплообмена с внешней средой:

$$\Delta T_k - \rho_k^2 T_k = 0 \quad (k=1, 2), \quad (4)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad \rho_0^2 = \frac{3Bi}{Bi+3}; \quad \rho_1^2 = \frac{15(Bi+1)}{Bi+6};$$

– уравнения Д. Дюамеля – Ф. Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \{u_{,1} + \nu v_{,2} - \alpha(1+\nu)T_0\}; \quad N_2 = B_0 \{v_{,2} + \nu u_{,1} - \alpha(1+\nu)T_0\}; \quad S = \frac{1}{1+\nu}(u_{,2} + v_{,1}); \\ M_1 &= D_0 \{\gamma_{1,1} + \nu \gamma_{2,2} - \alpha(1+\nu)T_1\}; \quad M_2 = D_0 \{\gamma_{2,2} + \nu \gamma_{1,1} - \alpha(1+\nu)T_1\}; \\ H &= \frac{1}{3(1+\nu)}(\gamma_{1,2} + \gamma_{2,1}); \quad Q_{k0} = \Lambda_0(\gamma_k + w_{0,k}) \quad (k=1, 2), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\nu$  – коэффициент С. Д. Пуассона;  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}; \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1+\nu)};$$

– уравнения равновесия

$$\begin{aligned} N_{1,1} + S_{,2} &= 0; \quad S_{,1} + N_{2,2} = 0; \quad M_{1,1} + H_{,2} - Q_{10} = 0; \\ H_{,1} + M_{2,2} - Q_{20} &= 0; \quad Q_{10,1} + Q_{20,2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $N_1, N_2, S, Q_{10}, Q_{20}$  определены с точностью до значения  $Eh$  ( $E$  – модуль Т. Юнга), а  $M_1, M_2, H$  – с точностью до  $Eh^2$ .

Компоненты термоупругого состояния в пластине с теплопроницаемым разрезом  $G^*$  представим в виде суммы [7]:

$$G^* = G^o + G, \quad (7)$$

где верхним индексом «о» обозначены компоненты основного термоупругого состояния ( $G^o$ ), т. е. термоупругого состояния в сплошной пластине, определяемые из системы уравнений (4)–(6);  $G$  – компоненты возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием разреза.

Рассмотрим прямолинейный теплопроницаемый разрез длины  $2l$ , расположенный вдоль оси  $x_1$  симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (8)$$

Компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  также определяются из системы дифференциальных уравнений (4)–(6) с граничными условиями, записанными на линии теплопроницаемого разреза (8) в предположении свободной поверхности берегов разреза [7, 8]:

– для задачи теплопроводности (3):

$$\frac{\partial T_k}{\partial n} \Big|_L - \beta_n [T_k] = -\frac{\partial T_k^o}{\partial n} \Big|_L \quad (k=0, 1); \quad (9)$$

– для задачи термоупругости (5), (6):

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^o|_L; & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^o|_L; \\ M_n|_L &= -M_n^o|_L; & H_{nt}|_L &= -H_{nt}^o|_L; & Q_{n0}|_L &= -Q_{n0}^o|_L. \end{aligned} \quad (10)$$

В формулах (9), (10) использованы такие обозначения:  $\vec{n} = (0, 1)$  и  $\vec{t}$  – нормаль и касательная к линии разреза соответственно;  $[G] = G^+ - G^-$  – скачки искомых функций  $G$  при переходе через линию разреза  $L$ , причём  $G^+$  и  $G^-$  – граничные значения функции  $G$  в соответствии с выбранным направлением нормали;  $\beta_n = \lambda^* / \delta^*$  – параметр теплопроницаемости разреза, характеризующий его тепловые свойства в поперечном направлении;  $\lambda^* = \lambda_c / \lambda$  – относительная теплопроводность промежуточного слоя;  $\lambda_c$  – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами трещины;  $\lambda$  – теплопроводность материала пластины;  $\delta^* = \delta / l$  – относительное раскрытие разреза;  $\delta$  – раскрытие трещины;  $N_n$ ,  $S_{nt}$  – нормальное и касательное усилие;  $M_n$ ,  $H_{nt}$  – изгибающий и крутящий момент;  $Q_{n0}$  – перерезывающая сила.

При решении задач (4)–(6) с граничными условиями (9), (10) предполагаем, что линия разреза (8) удалена от внешней границы пластины на значительное расстояние, а компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  на внешнем граничном контуре равны нулю.

**Методика решения.** В статье [9] определено возмущённое температурное поле, обусловленное наличием теплопроницаемого разреза в изотропной пластине, в случае произвольного теплообмена для приближения порядка  $N$  трёхмерного уравнения теплопроводности. Чтобы получить решение задачи теплопроводности (4) с граничными условиями (9), нужно в результатах статьи [9] положить  $N = 1$ ,  $Bi^+ = Bi^- = Bi$ .

Решение задачи термоупругости (5), (6) получено с помощью двумерного интегрального преобразования Ж. Фурье [7], учитывающего разрывный характер искомых функций на линии разреза (8). В результате применения данного преобразования разрешающая система дифференциальных уравнений (5), (6) сведена в пространстве трансформант к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Оригиналы компонент возмущённого термоупругого состояния найдены путём применения к решению СЛАУ в пространстве трансформант обратного двумерного интегрального преобразования Ж. Фурье и методики обращения [7, 10], основанной на использовании интегрального представления специальной  $G$ -функции  $G_{n,v}(z)$  [10]:

$$G_{n,v}(z) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{v-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{v-n+1} J_{v+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho \quad \left(r > 0, \operatorname{Re} z > 0, -1 < \operatorname{Re} v < n + \frac{3}{2}\right), \quad (11)$$

где  $J_v(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $v$ .

В результате получены интегральные представления компонент возмущённого термоупругого состояния, являющиеся коэффициентами разложения компонент тензора напряжений в ряды Ж. Фурье по полиномам А. М. Лежандра (3):

$$P_k^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{m=1}^{\chi} \int_{-1}^1 K_{km}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_m^q(s) ds, \quad (12)$$

где верхний индекс  $q=0$  соответствует компонентам безмоментного термоупругого состояния ( $P_k^0 = N_k$ ,  $P_3^0 = S$ );  $q=1$  – компонентам состояния термоупругого изгиба ( $P_k^1 = M_k$ ,  $P_3^1 = H$ ,  $P_{k+3}^1 = Q_{k0}$ ); при  $q=0$   $\chi=4$ ; при  $q=1$   $\chi=7$  для изгибающих и крутящего момента;  $\chi=5$  для перерезывающих сил. В интегральных представлениях  $\psi_k^q = \psi_k^q(s)$  – функции, аргументом которых является  $s$  – координата точки на линии разреза  $L$ . Причём функции  $\psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0]$ ,  $\psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1]$  находятся как решение задачи теплопроводности (4), (9) в соответствии с результатами, полученными в статье [9]; остальные функции  $\psi_k^q$  являются искомыми функциями задачи термоупругости (5), (6), (10):

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}; \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}; \quad \psi_k^1 = \frac{d[\gamma_k]}{ds}; \quad \psi_{k+3}^1 = [\gamma_k] \quad (k=1, 2); \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds}. \quad (13)$$

Ядра интегральных представлений (12) содержат линейные комбинации специальных  $G$ -функций (11), например:

$$K_{51}^1(x_1 - ls, x_2) = \frac{\Lambda_0}{2} \left\{ G_{0,0}(\sqrt{2,5}r) + \left( 1 - \frac{2x_2^2}{r^2} \right) G_{1,1}(\sqrt{2,5}r) \right\}; \quad r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}.$$

Подставляя соотношения (12) в граничные условия (10) получим две независимые системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) типа А. Л. Коши ( $|\zeta| \leq 1$ ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k^0(s)}{s - \zeta} ds = F_k^0(\zeta) \quad (k=1, 2); \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2^1(s)}{s - \zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_{22}^1(\zeta - s) \psi_2^1(s) ds = F_2^1(\zeta);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k^1(s)}{s - \zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1, 3-1}^1 \int_{-1}^1 E_{km}^1(\zeta - s) \psi_m^1(s) ds = F_k^1(\zeta) \quad (k=1, 3). \quad (15)$$

Система СИУ (14) описывает безмоментное термоупругое состояние, а система СИУ (15) – состояние термоупругого изгиба. Разностные ядра системы СИУ (15) содержат линейные комбинации специальной  $G$ -функции (11) и её первообразной  $IG_{n,v}$ , например:

$$E_{11}^1(\zeta - s) = 1,5\Lambda_0 l^2 (\zeta - s) G_{2,0}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|) + 0,3\sqrt{2,5}\Lambda_0 \operatorname{sign}(\zeta - s) \left\{ 5IG_{0,0}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|) - IG_{2,2}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|) \right\}.$$

Правые части систем СИУ (14), (15)  $F_k^q(\zeta)$  зависят от компонент основного термоупругого состояния и от суммы интегралов от скачков компонент температуры

$[T_m]$  с разностными ядрами  $D_{km}^q$ , представляющими собой линейные комбинации специальных  $G$ -функций, например:

$$F_1^0(\zeta) = -S^0 \Big|_{x_2=0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0,1,-1} \int_{-1}^1 D_{1m}^0(\zeta-s) [T_m] ds.$$

Из условия непрерывности обобщённых перемещений в вершинах разреза (8) следуют ограничения, накладываемые на искомые функции систем СИУ (14), (15):

$$\int_{-1}^1 \psi_k^q(s) ds = 0. \quad (16)$$

Численные решения систем СИУ (14), (15) при ограничениях (16) могут быть найдены методом Х. Мультиппа [11] или методом механических квадратур [12]. В статье Д. М. Ахмедова [13] разработан оптимальный алгоритм для приближённого решения одномерных СИУ с ядром А. Л. Коши. Интегрируя найденные функции  $\psi_k^q$ , получим скачки обобщённых перемещений и обобщённых углов поворота нормали на линии разреза  $L$ . Далее, используя интегральные представления (12) определим внутренние силовые факторы возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием разреза в изотропной пластине.

Сравнивая коэффициенты в ненулевых компонентах тензора напряжений (3) с известными асимптотическими представлениями напряжений при особенности  $r^{-1/2}$  в окрестностях концов разреза [12], найдём выражения КИН для поперечного ( $K_{II}$ ) и продольного ( $K_{III}$ ) сдвига. Ниже приведены максимальные по модулю значения КИН, определённые с учётом свойств полиномов Лежандра:

$$K_{II}^{\max} = 0,25\sqrt{\pi lh} E \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{q=0,1} |\psi_1^q(s)| \sqrt{1-s^2} \right\};$$

$$K_{III}^{\max} = 0,375\sqrt{\pi lh} E \Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}. \quad (17)$$

При этом КИН  $K_{II}$  достигает значения  $K_{II}^{\max}$  на одной из лицевых поверхностей пластины (при  $x_3 = 1$  или  $x_3 = -1$ ), а  $K_{III}$  достигает значения  $K_{III}^{\max}$  в срединной плоскости (при  $x_3 = 0$ ).

**Анализ результатов численных исследований.** Численные исследования проведены для теплопроницаемого разреза (8) длиной  $2l$ , расположенного на оси  $Ox_1$  с центром в начале координат. Они посвящены исследованию эффектов комплексной температурной нагрузки, включающей поток средней температуры и поток температурного момента, по сравнению с однородной температурной нагрузкой, состоящей только из одного температурного потока. Рассматривался случай симметричного теплообмена, когда параметры теплообмена на лицевых поверхностях пластины брались одинаковыми ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ ). Для оценки влияния величины теплообмена расчёты проведены для случаев умеренного теплообмена ( $Bi = 0,1$ ) и интенсивного теплообмена ( $Bi = 1$ ).

Параметр теплопроницаемости разреза ( $\beta_n = l\lambda_n / \lambda$ ) варьировался в широком диапазоне от 0 (теплоизолированный разрез) до 10 с промежуточным значением  $\beta_n = 1$ . Значение коэффициента С. Д. Пуассона принималось равным  $\nu = 0,3$ .

Чтобы оценить составляющие коэффициентов интенсивности, обусловленные возмущённым температурным полем, вызванным наличием разреза, предполагалось, что основное температурное поле в пластине изменяется по линейному закону. Тогда внутренние силовые факторы основного термоупругого состояния не возникают [14].

Основное температурное поле предполагалось таким, что на линии разреза ( $|x_1| \leq l$ ) одновременно действуют потоки средней температуры ( $q_0$ ) и температурного момента ( $q_1$ ) одинаковой интенсивности:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_1; \quad q_0 = q_1 = \text{const} \neq 0.$$

Результаты численных исследований представлены на рис. 1 и рис. 2 в виде графиков зависимостей максимальных относительных значений КИН для поперечного сдвига  $K_{II}^{\max}$  и продольного сдвига  $K_{III}^{\max}$  от полудлины разреза  $l$  при следующих значениях параметра теплопроницаемости разреза  $\beta_n$ : 0 – графики 1; 1 – графики 2; 10 – графики 3. Сплошные линии соответствуют случаю умеренного теплообмена, штриховые линии – интенсивного теплообмена.

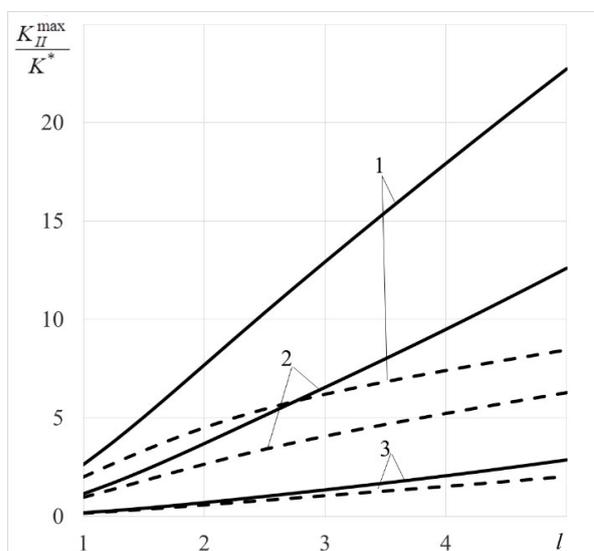


Рис. 1

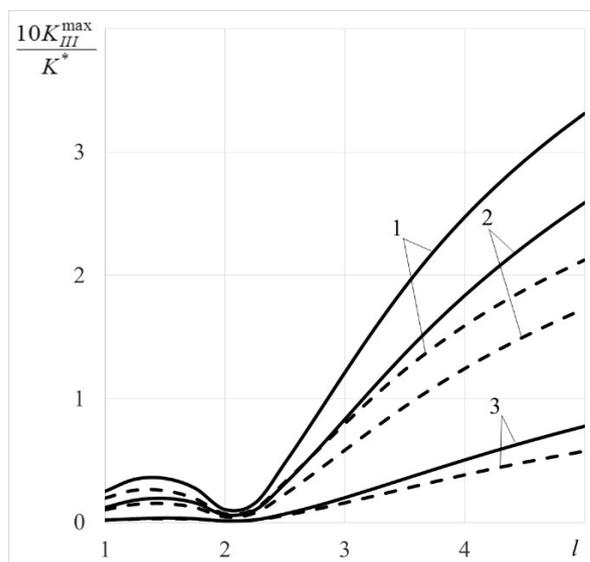


Рис. 2

Значения КИН даны в отношении к величине  $K^* = \alpha q_0 E \sqrt{lh} / 4$ , которая соответствует значению коэффициента интенсивности в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности  $q_0$  перпендикулярно линии разреза [12].

Из графиков на рис. 1, 2 следует, что с увеличением длины разреза значения коэффициентов интенсивности температурных напряжений при комплексной

температурной нагрузке как для поперечного, так и для продольного сдвига увеличиваются.

Графики коэффициентов интенсивности температурных напряжений для продольного сдвига  $K_{III}^{\max}$ , показанные на рис. 2, имеют незначительное снижение своих значений при полудлине  $l = 2$ . Такое поведение коэффициентов интенсивности подобно случаю температурной нагрузки только потоком температурного момента  $q_1$  при симметричном теплообмене с внешней средой [15].

Эффект комплексной температурной нагрузки наглядно проявляется в характере поведения КИН для поперечного сдвига  $K_{II}^{\max}$ . Если в рамках температурной нагрузки действует только  $q_1$ , то при симметричном теплообмене для полудлин разреза  $l > 2,5$   $K_{II}^{\max}$  убывает [15]. В то же время, как следует из рис. 1, при комплексной температурной нагрузке при тех же условиях теплообмена  $K_{II}^{\max}$  увеличивается.

Из графиков также следует вывод, что с увеличением параметра теплопроницаемости разреза  $\beta_n$  максимальные относительные значения температурных КИН при комплексной нагрузке только уменьшаются. Такой характер поведения температурных КИН соответствует общим представлениям механики разрушения. Поскольку увеличение параметра  $\beta_n$  связано с уменьшением раскрытия разреза или увеличением теплопроводности промежуточного слоя, то в результате возмущённое температурное поле уменьшается.

Необходимо также отметить, что температурные КИН для продольного сдвига на порядок меньше температурных КИН для поперечного сдвига. Поэтому основным параметром при обосновании прочности тонкостенных элементов конструкций будет температурный КИН для поперечного сдвига  $K_{II}^{\max}$ .

**Выводы.** При комплексных температурных нагрузках на тонкостенные элементы конструкций определяющим является коэффициент интенсивности температурных напряжений для поперечного сдвига. Учёт теплофизических свойств трещин не приводит к увеличению температурных КИН, поэтому в прочностных расчётах достаточно использовать модель теплоизолированного разреза.

*Исследование проводилось по теме государственного задания (№ государственной регистрации 124012400353-3).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ануфриев И. И. Определение коэффициента интенсивности напряжений первого типа системы трещин / И. И. Ануфриев // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2023. – № 3–2 (78). – С. 104–108.
2. Звягин А. В. Метод разрывных смещений, учитывающий наличие кривизны трещины / А. В. Звягин, Д. Д. Новов // Вестник Московского университета. Серия 1 : Математика. Механика. – 2023. – № 3. – С. 67–71.
3. Соболев Б. В. Исследование концентрации напряжений в особых точках сечений элементов конструкций, подкрепленных покрытиями / Б. В. Соболев, А. Н. Соловьев, Е. В. Рашидова, А. И. Новикова // Инженерный вестник Дона. – 2023. – № 3 (99). – С. 590–611.
4. Чернавин Р. В. Экспериментальное исследование поля напряжений в вершине трещины на основе термодинамических параметров / Р. В. Чернавин, С. С. Жарликова, Л. Ю. Соловьев // Фундаментальные и прикладные вопросы транспорта. – 2023. – № 2 (9). – С. 63–71.
5. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазыко. – Киев : Наукова думка, 1982. – 296 с.

6. Пелех Б. Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. – Киев : Наукова думка, 1980. – 216 с.
7. Шевченко В. П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами : учебное пособие / В. П. Шевченко, А. С. Гольцев. – Киев : УМК ВО, 1988. – 84 с.
8. Кит Г. С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. – Киев : Наукова думка, 1984. – 280 с.
9. Бондаренко Н. С. Исследование температурного поля в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом на базе обобщённой теории / Н. С. Бондаренко // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2014. – № 2. – С. 41–48.
10. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебное пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.
11. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – Москва : Наука, 1973. – 304 с.
12. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 444 с.
13. Akhmedov D. M. Construction of optimal quadrature formulas for the approximate solution a singular integral equation / D. M. Akhmedov // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 2/1 (48). – С. 136–145.
14. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 308 с.
15. Бондаренко Н. С. Исследование влияния длины теплопроницаемого разреза при термоупругом изгибе изотропных пластин / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев // Теоретическая и прикладная механика. – 2022. – № 1 (78). – С. 16–24.

*Поступила в редакцию 28.06.2024 г.*

#### ANALYSIS OF THE THERMOELASTIC STATE OF ISOTROPIC PLATES WITH A HEAT PERMEABLE CUT BASED ON THE GENERALIZED THEORY

*N. S. Bondarenko, A. S. Goltsev*

The thermoelastic state of isotropic plates with a heat-permeable cut, on the line of which the gradients of the mean temperature and the temperature moment act, is considered. The dependence of stress intensity factors on the length and thermal permeability parameter of the cut is investigated. The case of symmetric heat exchange with the external environment was assumed. The system of differential equations of the generalized theory of plates in the  $\{1,0\}$ -approximation version is taken as a resolving one.

**Keywords:** isotropic plate; heat-permeable cut; complex temperature load; symmetrical heat exchange; stress intensity factors.

**Бондаренко Наталья Сергеевна**

кандидат физико-математических наук, доцент;  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: n.bondarenko123@mail.ru

**Bondarenko Natalya Sergeevna**

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences, Docent;  
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

**Гольцев Аркадий Сергеевич**

доктор физико-математических наук, профессор;  
Донецкий государственный университет,  
г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: asgoltsev@mail.ru

**Goltsev Arkady Sergeevich**

Doctor of Phisico-Mathematical Sciences, Professor;  
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

© 2024. С. А. Калоеров, М. А. Полянский, А. В. Сероштанов

Решена задача электромагнитоупругости для пьезополуплоскости с произвольно расположенными внутренними эллиптическими отверстиями и прямолинейными трещинами. При этом функции, голоморфные вне эллипсов (трещин), разлагаются в ряды Лорана по отрицательным степеням соответствующих переменных, а функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, методом интегралов типа Коши выражаются через функции, получаемые от указанных при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе. При таком подходе граничные условия на прямолинейной границе полуплоскости удовлетворяются точно. Что же касается граничных условий на контурах отверстий, для их удовлетворения используется обобщенный метод наименьших квадратов, приводящий задачу к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов Лорана. Как частные случаи получаются решения задач электроупругости, магнитоупругости и теории упругости, а также аналитические решения задач сплошной полуплоскости под действием усилий на границе или сосредоточенных воздействий в отдельных точках. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости отверстиями и трещинами с установлением закономерностей изменения напряженно-деформированного состояния полуплоскости в зависимости от ее материалов, геометрических характеристик отверстий и трещин.

**Ключевые слова:** электромагнитоупругая пластинка, полуплоскость, отверстия, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши, обобщенный метод наименьших квадратов.

**Введение.** Пьезопластики с отверстиями и трещинами широко используются в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники [1–4]. Под действием различных механических сил и электромагнитных полей около таких отверстий и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Наиболее достоверные результаты по определению электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пластин с отверстиями и трещинами получаются при решении соответствующих задач методами, использующими комплексные потенциалы [5]. К настоящему времени с использованием последних функций решены широкие классы задач для конечных и бесконечных пластин с произвольными отверстиями и трещинами [5]. При этом, если пластинка представляется полуплоскостью, то лучшим подходом удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе является использование метода интегралов типа Коши [6–8], что позволяет удовлетворять этим условиям точно. Для удовлетворения же граничным условиям на контурах отверстий и трещин чаще всего использовался дискретный метод наименьших квадратов. Но как показывают последние исследования, для удовлетворения граничным условиям на замкнутых контурах лучше использовать обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [9–11], который обеспечивает такую же высокую точность удовлетворения граничным условиям, как дискретный метод наименьших квадратов, но прост для численной реализации.

В данной работе с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости, метода интегралов типа Коши при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе и ОМНК при удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин дано решение задачи электромагнитоупругости для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС полуплос-

кости в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения и сочетания.

**1. Постановка и решение задачи.** Рассмотрим занимающую нижнюю полуплоскость с эллиптическими отверстиями с контурами  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) и полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  (рис. 1) пьезопластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат  $Oxy$  с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии  $h^+$  от прямолинейной границы  $L^+$  и осью  $Ox$ , параллельной прямолинейной границе. В частном случае эллипсы могут переходить в прямолинейные разрезы-трещины (при  $a_l = 0$  или  $b_l = 0$ ), при наличии криволинейных отверстий их контуры могут аппроксимироваться дугами эллипсов и берегами трещин.

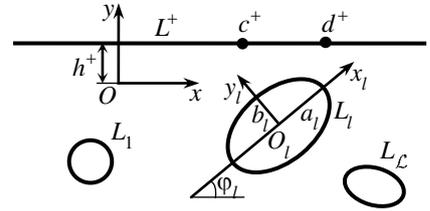


Рис. 1

Будем считать, что контуры отверстий  $L_l$  загружены самоуравновешенными внешними усилиями и электромагнитными индукциями, на бесконечности заданы напряжения  $\sigma_x^\infty$  и проекции векторов индукций  $D_x^\infty$ ,  $B_x^\infty$  (или напряженностей  $E_x^\infty$ ,  $H_x^\infty$ ), остальные напряжения, индукции (напряженности) и угол жесткого поворота полуплоскости, как целой, равны нулю, т. е.  $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_y^\infty = B_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$  (или  $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_y^\infty = H_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$ ). Кроме того, на отрезке  $[c^+, d^+]$  прямолинейной границы  $L^+$  заданы распределенные внешние усилия и компоненты векторов электрической и магнитной индукций, остальная ее часть не загружена и не подкреплена. во внутренних точках полуплоскости  $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$  ( $r = \overline{1, R}$ ) действуют сосредоточенные силы  $P_r^0(X_r^0, Y_r^0)$ , электрические заряды  $Q_{er}^0(Q_{erx}^0, Q_{ery}^0)$  и магнитные диполи  $Q_{mr}^0(Q_{mrx}^0, Q_{mry}^0)$ .

Отнесем эллипсы  $L_l$  к локальным системам координат  $O_l x_l y_l$  с началами в их центрах и направлениями осей  $Ox_l$  вдоль полуосей эллипсов  $a_l$ , так что в системе  $O_l x_l y_l$  параметрическое уравнение эллипса  $L_l$  будет таким:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат  $Oxy$  имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta$  – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до  $2\pi$ ;  $x_{0l}$ ,  $y_{0l}$  – координаты начала локальной системы координат  $O_l x_l y_l$  в основной системе координат  $Oxy$ ;  $\varphi_l$  – угол между направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от оси  $Ox$  против часовой стрелки.

Если задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [5], то она сво-

даться к нахождению из соответствующих граничных условий функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения 8-го порядка

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$  – полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \\ l_{2\nu}(\mu) &= -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \end{aligned} \quad (5)$$

$s_{ki}$  – коэффициенты деформации материала пластинки, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей;  $g_{ki}$  и  $p_{ki}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей электрического и магнитного полей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{ki}$ ,  $\chi_{ki}$  и  $\nu_{ki}$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных значениях напряжений.

Граничные условия на контуре  $L_l$  (механические и электромагнитные) для определения комплексных потенциалов имеют вид [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikl} \Phi_k(t_k) = f_{il}(t), \quad (6)$$

в котором в случае механических граничных условий (при  $i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (1, -\mu_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= \mp \int_0^s (Y_{nl}, X_{nl}) ds + (c_{1l}, c_{2l}), \end{aligned} \quad (7)$$

если на границе заданы усилия  $Y_{nl}$ ,  $X_{nl}$ , и

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (p_k, q_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= (u_l^* + \omega_{3l}y + c_{1l}, v_l^* - \omega_{3l}x + c_{2l}), \end{aligned} \quad (8)$$

когда на границе заданы перемещения  $u_l^*$ ,  $v_l^*$ ; в случае электромагнитных граничных условий (при  $i = 3, 4$ )

$$\begin{aligned} (g_{3kl}, g_{4kl}) &= (-v_k, -\rho_k), \\ (f_{3l}(t), f_{4l}(t)) &= \mp \int_0^s (D_{nl}, B_{nl}) ds + (c_{3l}, c_{4l}), \end{aligned} \quad (9)$$

если на границе заданы вектора индукции поля  $D_{nl}, B_{nl}$ ,

$$\begin{aligned} (g_{3kl}, g_{4kl}) &= (r_k, h_k), \\ (f_{3l}(t), f_{4l}(t)) &= (\varphi_l^*(t) + c_{3l}, \psi_l^*(t) + c_{4l}), \end{aligned} \quad (10)$$

когда на границе заданы потенциалы поля  $\varphi_l^*(t), \psi_l^*(t)$ ;

$$\begin{aligned} p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})v_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\ q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k, \\ r_k &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})v_k - (v_{11}\mu_k - v_{12})\rho_k, \\ h_k &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (v_{11}\mu_k - v_{12})v_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \\ \Delta_{1k} &= \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (12)$$

$c_{il}$  – постоянные, произвольные на одном из контуров отверстий;  $\omega_{3l}$  – угол поворота контура отверстия как целого в случае жесткого его подкрепления.

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  определены в многосвязных нижних полуплоскостях  $S_k$ , ограниченных прямолинейными границами  $L_k^+$  и контурами отверстий  $L_{kl}$ , соответствующих исходным прямолинейной границе  $L^+$  и контурам отверстий  $L_l$ , и имеют вид [5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k), \quad (13)$$

где  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k &= \\ &= (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, 0, D_x^\infty, 0, B_x^\infty), \end{aligned} \quad (14)$$

если на бесконечности заданы векторы индукций поля, или из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k &= \\ &= (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, -E_x^\infty, 0, -H_x^\infty, 0), \end{aligned} \quad (15)$$

когда на бесконечности заданы векторы напряженностей поля;

$$N_k(z_k) = \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0); \quad (16)$$

$A_{kr}^0$  – постоянные, определяемые из решения системы линейных уравнений

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k, p_k, q_k, r_k, h_k) iA_{kr}^0 = \left( \frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0, 0, 0, 0 \right); \quad (17)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с прямолинейными границами  $L_k^+$ , соответствующих прямолинейной границе  $L^+$  при аффинных преобразованиях (3);  $\Phi_{kl}(z_k)$  – функции, голоморфные вне контуров  $L_{kl}$  областей  $S_k$ , соответствующих эллипсам  $L_l$  области  $S$  при аффинных преобразованиях (3). Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ , используя формулы [12]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

После этих конформных отображений функции  $\Phi_{kl}(z_k)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), голоморфные вне отверстий с контурами  $L_{kl}$ , в областях переменных  $\zeta_{kl}$  будут голоморфными вне единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$ , включая бесконечно удаленную точку, и здесь их можно раз-

ложить в ряды Лорана по отрицательным степеням  $\zeta_{kl}$ , т. е.  $\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$ . Оконча-

тельно для комплексных потенциалов (13) имеем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (19)$$

где

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n(z_k)} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

$a_{kln}$  – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах пластинки.

Для прямолинейной границы, на конечном отрезке которой заданы непрерывно распределенные усилия и индукции (для этого случая коэффициенты перед комплексными потенциалами в граничных условиях обозначим индексом нуль вверху, в отличие от пьезоэлектрических коэффициентов деформации  $g_{1k}$ ), в граничных условиях имеем

$$g_{1kl} = g_{1k}^0 = 1, \quad g_{2kl} = g_{2k}^0 = -\mu_k, \quad g_{3kl} = g_{3k}^0 = -\nu_k, \quad g_{4kl} = g_{4k}^0 = -\rho_k, \\ (f_1^+(t), f_2^+(t), f_3^+(t), f_4^+(t)) = \int_0^s (Y_n^+, X_n^+, D_n^+, B_n^+) ds + (c_1^+, c_2^+, c_3^+, c_4^+). \quad (20)$$

Тогда граничные условия (6) на прямолинейной границе  $L^+$  можно записать в виде системы 4 линейных уравнений

$$g_{1k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{1k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{1k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{1k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_1^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{1k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}, \\ g_{2k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{2k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{2k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{2k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_2^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{2k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}, \\ g_{3k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{3k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{3k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{3k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_3^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{3k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}, \\ g_{4k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{4k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{4k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{4k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_4^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{4k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)} \quad (21)$$

с определителем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{1k}^0 & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ g_{2k}^0 & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ g_{3k}^0 & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ g_{4k}^0 & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^4 g_{ik}^0 M_{ik}, \quad (22)$$

в котором  $M_{ik}$  – алгебраические дополнения элементов первого столбца  $g_{ik}^0$ .

Решая систему (21), найдем

$$\Phi_k(t_k) = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_{kk} = \begin{vmatrix} f_1^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{1k+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ f_2^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{2k+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ f_3^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{3k+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ f_4^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{4k+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix}$$

или

$$\Phi_k(t_k) = \frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^4 \left[ f_i^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{ik+q-1}^0 \Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} \right] M_{ik}.$$

Окончательно граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде

$$\Phi_k(t_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} f_i^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1} \Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (23)$$

где

$$\overline{r_{kk+q-1}} = \sum_{i=1}^4 \frac{\overline{g_{ik+q-1}^0}}{\Delta_k} M_{ik}. \quad (24)$$

Для точек прямолинейной границы  $L^+$  имеем

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = h^+, \quad z = x + iy = t + ih^+, \\ z_k &= t_k = x + \mu_k y = t + \mu_k h^+, \\ \overline{t_k} &= t + \overline{\mu_k} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ = t_k + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+, \\ \overline{t_{k+q-1}} &= t + \overline{\mu_{k+q-1}} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ = \\ &= t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \quad (q = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив функции (13) в граничные условия (23) на прямолинейной границе  $L^+$ , получим

$$\begin{aligned} N_k(t_k) + \Phi_{k0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k) &= \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} f_i^+(t) - \\ &\sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \left[ \overline{N_{k+q-1}(t_{k+q-1})} + \Phi_{k+q-1,0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \overline{\Phi_{k+q-1l}(t_{k+q-1})} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь учтено, что на основе систем уравнений (14) и (15)

$$\Gamma_k t_k - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \Gamma_{k+q-1} t_{k+q-1} = 0.$$

На прямолинейной границе для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} = \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} = \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+)},$$

$$\begin{aligned} \overline{N_{k+q-1}(t_{k+q-1})} &= \overline{N_{k+q-1}} \left( t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) = \\ &= N_{k+q-1}^+(t_k) = \sum_{r=1}^R \overline{A_{kr}^0} \ln \left( t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ - \overline{z_{k+q-1r}^0} \right), \\ \overline{\Phi_{k+q-1l}(t_{k+q-1})} &= \overline{\Phi_{k+q-1l}} \left( t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) = \\ &= \Phi_{k+q-1l}^+(t_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{k+q-1ln}}}{\left[ \overline{\zeta_{k+q-1l}^+} \left( t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) \right]^n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Кроме того, при переходе в конформных отображениях (18) к сопряженным величинам и замене граничных значений по формулам (25) для граничных значений переменных находим

$$\overline{z_{k+q-1}} = t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ = \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left( \overline{\zeta_{k+q-1l}^+} + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\overline{\zeta_{k+q-1l}^+}} \right) \quad (q = \overline{1,4}). \quad (28)$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения  $t_k$  переменными  $z_k$  областей  $S_k$ , приходим к конформным отображениям

$$z_k = -(\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ + \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left( \overline{\zeta_{k+q-1l}^+} + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\overline{\zeta_{k+q-1l}^+}} \right) \quad (q = \overline{1,4}), \quad (29)$$

где переменная  $\overline{\zeta}$  для лучшего восприятия заменена на  $\zeta^+$ , что подчеркивает ее происхождение от условий на границе  $L^+$ .

Можно показать, что равенства (29) представляет собой конформные отображения внешности единичных кругов  $|\zeta_{k+q-1l}^+| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{k+q-1l}^+$  верхней (относительно границы  $L_k^+$ ) полуплоскости  $S_k^+$  переменной  $z_k$ . Например, в случае ортотропной полуплоскости, когда комплексные параметры являются чисто мнимыми ( $\mu_k = i\beta_k$ ), это будут эллипсы  $L_{k+q-1l}^+$  симметричные эллипсам  $L_{k+q-1l}$  полуплоскостей  $S_k$ , где заданы исходные комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$ . Следовательно, функции  $\Phi_{k+q-1l}^+(z_k)$  являются функциями, голоморфными вне контуров  $L_{k+q-1l}^+$  верхних полуплоскостей  $S_k^+$  (а следовательно, они голоморфны в нижних полуплоскостях  $S_k$ ) и для них имеют место разложения в ряды Лорана вида

$$\Phi_{k+q-1l}^+(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{k+q-1ln}} \Phi_{k+q-1ln}^+(z_k), \quad (30)$$

где

$$\Phi_{k+q-1ln}^+(z_k) = \frac{1}{\left( \overline{\zeta_{k+q-1l}^+} \right)^n},$$

$\overline{\zeta_{k+q-1l}^+}$  – переменные, определяемые из конформных отображений (29).

Исходя из указанных свойств входящих в условия (26) функций, умножив обе

части этих условий на ядро Коши  $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t - z_k}$  и вычислив интегралы типа Коши от них по бесконечной прямой  $L_k^+$ , получим

$$\Phi_{k0}(z_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^+}^{d^+} \frac{f_i^+(t) dt}{t - z_k} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left( t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1l}} \left( t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right).$$

Подставив это значение функции  $\Phi_{k0}(z_k)$  в (13), для комплексных потенциалов получим

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^+}^{d^+} \frac{f_i^+(t) dt}{t - z_k} + \Gamma_k z_k + N_k(t_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left( z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ \Phi_{kl}(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1l}} \left( z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) \right],$$

а затем на основе разложений (30) будем иметь выражения

$$\Phi_k(z_k) = F^+(z_k) + \Gamma_k z_k + N_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left( z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{kln} \Phi_{kln}(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} a_{k+q-1ln} \Psi_{k+q-1ln}(z_k) \right], \quad (31)$$

в которых

$$F^+(z_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^+}^{d^+} \frac{f_i^+(t) dt}{t - z_k},$$

$$\Phi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \Psi_{k+q-1ln}(z_k) = \frac{1}{\left( \zeta_{k+q-1l}^+ \right)^n}. \quad (32)$$

Функции (31) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе и содержат неизвестные коэффициенты рядов Лорана  $a_{kln}$ . Для определения этих коэффициентов используем граничные условия (6) на контурах отверстий, предварительно продифференцировав их, чтобы исключить входящие в их правые части неизвестные аддитивные постоянные. Имеем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikl} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{il}(t)}{ds}, \quad (33)$$

где

$$\Phi'_k(z_k) = F'^+(z_k) + \Gamma'_k + N'_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N'_{k+q-1}} \left( z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \Psi'_{k+q-1ln}(z_k) \overline{a_{k+q-1ln}} \right]; \quad (34) \\
 N'_k(z_k) &= \sum_{r=1}^R \frac{A_{kr}^0}{z_k - z_{kr}}, \\
 \Phi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\
 \Psi_{k+q-1ln}^+(z_k) &= -\frac{n}{\left(\zeta_{k+q-1l}^+\right)^{n-1} \overline{R_{k+q-1l}} \left(\left(\zeta_{k+q-1l}^+\right)^2 - \overline{m_{k+q-1l}}\right)} \quad (q = \overline{1, 4}). \quad (35)
 \end{aligned}$$

Функции (34) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе  $L^+$ . Граничные же условия на контурах отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) будем использовать для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  ( $k = \overline{1, 4}$ ;  $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ). Этим граничным условиям (33) на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9–11]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  области  $S$  систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}$ ,  $m = \overline{1, M_p}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (34). Тогда для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[ \Phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \Psi'_{k+q-1ln}(t_{kpm}) \overline{a_{k+q-1ln}} \right] = \\
 & = F'^+(t_{kpm}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[ \Gamma_k + N'_k(t_{kpm}) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N'_{k+q-1}}(t_{kpm} + (\mu_{k+q-1} - \mu_k) h^+) \right] \\
 & \quad (i = \overline{1, 4}; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_p}). \quad (36)
 \end{aligned}$$

Систему (36) будем решать с использованием сингулярных разложений [13, 14]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные  $a_{kln}$ , а следовательно и функции  $\Phi_k(z_k)$ , будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (напряжения, компоненты векторов индукций и напряженностей, перемещения и потенциалы поля), а в случае трещин и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). В частности, для основных напряжений и компонент векторов индукций и напряженностей имеют место формулы [5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (37)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (v_k \mu_k, -v_k, r_k, \mu_k r_k) \Phi'_k(z_k); \quad (38)$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\rho_k \mu_k, -\rho_k, h_k, \mu_k h_k) \Phi'_k(z_k). \quad (39)$$

По основным напряжениям и компонентам векторов индукций можно найти также напряжения и компоненты векторов индукции и напряженностей на любых площадках с нормалью  $n$  и касательной  $s$ , используя формулы [5, 15, 16]

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)); \\ D_n &= D_x \cos^2(nx) + D_y \cos^2(ny), \\ B_n &= B_x \cos^2(nx) + B_y \cos^2(ny).\end{aligned}\tag{40}$$

При необходимости можно вычислить и деформации [15, 16]

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \varepsilon_x \cos^2(nx) + \varepsilon_y \cos^2(ny) + \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_x \cos^2(ny) + \varepsilon_y \cos^2(nx) - \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \gamma_{ns} &= 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos(nx) \cos(ny) + \gamma_{xy} (\cos^2(nx) - \sin^2(ny)).\end{aligned}\tag{42}$$

Что же касается КИН, они также находятся по известным функциям с использованием формул [17]

$$\begin{aligned}k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[ \mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_{kl}, \\ k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[ (1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_{kl},\end{aligned}\tag{43}$$

где

$$M_{kl} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}.\tag{44}$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат  $O_l x_l y_l$ , нижний – к его левому концу.

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются из приведенного решения, если в нем принять равными нулю соответственно  $p_{ki}$ ,  $v_{ki}$  (в задаче ЭУ),  $g_{ki}$ ,  $v_{ki}$  (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ki} = \lambda_g g_{ki}, \quad p'_{ki} = \lambda_p p_{ki}, \quad v'_{ki} = \lambda_{gp} v_{ki},\tag{45}$$

где  $\lambda_g$ ,  $\lambda_p$ ,  $\lambda_{gp}$  – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$ , а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими:  $\lambda_g = 1$ ,  $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ЭУ;  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач МУ;  $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$  для задач ТУ.

Приведенное общее решение задачи несколько упрощается для частных случаев. Так, в случае сплошной полуплоскости (отверстия отсутствуют) комплексные потенциалы (31) будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = F^+(z_k) + \Gamma_k z_k + N_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left( z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right). \quad (46)$$

Если в сплошной полуплоскости внешние воздействия приложены лишь на бесконечности (а они могут быть только  $\sigma_x^\infty$ ,  $D_x^\infty$ ,  $B_x^\infty$ ), то

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k,$$

где  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из решения системы (14), (15).

Если в сплошной полуплоскости усилия действуют лишь на отрезке  $[c^+, d^+]$  границы, например, в виде силового давления  $\sigma_y = p$ , то

$$\Phi_k(z_k) = \frac{p}{2\pi i} \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \ln \frac{z_k - d^+}{z_k - c^+}.$$

Если в сплошной полуплоскости действуют сосредоточенные воздействия в точке  $z_0(x_0, y_0)$ , то

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left( z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right),$$

где

$$N_k(z_k) = A_{k1}^0 \ln(z_k - z_{k1}^0).$$

Если имеет место полуплоскость с отверстиями и воздействия приложены лишь на бесконечности, то в (31) нужно принять  $F^+(z_k) = 0$ ,  $N_k(z_k) = 0$ , и комплексные потенциалы примут вид

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Psi'_{k+q-1ln}(z_k)} \overline{a_{k+q-1ln}} \right]. \quad (47)$$

**2. Описание результатов численных исследований для полуплоскости с отверстиями и трещинами.** Проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния пьезополуплоскости из следующих материалов: композит на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  (материал М1) [18, 19]; композит, упругие и электрические постоянные которого соответствуют кадмию селениду  $CdSe$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $BaTiO_3$  (М2) [20]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют  $PZT-4$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $CoFe_2O_4$ –(М3) [20].

В численных исследованиях количество членов в рядах (47) для каждого отверстия  $L_p$  и количество точек  $M_p$  на этом контуре, для которых составлялись уравнения (36), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений на площадках, касательных к контурам, не были менее  $10^{-3}$ ). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 100 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 500 «коллокационных точек».

В табл. 1 для растяжения усилиями  $\sigma_x^\infty = p$  полуплоскости с круговым отверстием радиуса  $a_1$  (рис. 2) с точностью до множителя  $p$  приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения  $c/a_1$ , где  $c$  – длина перемычки между контуром отверстия и прямолинейной границей. При этом характерными были точки  $A(0, -a_1)$ ,  $B(a_1, 0)$ ,  $C(0, a_1)$ ,  $D(0, a_1 + c/2)$ ,  $E(0, a_1 + c)$ ,  $L(a_1, a_1 + c)$ ,  $M(2a_1, a_1 + c)$ . При этом для некоторых точек

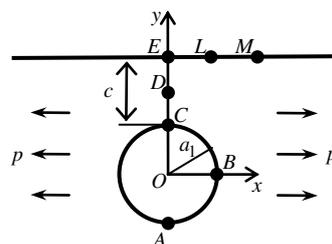


Рис. 2

Таблица 1  
Значения напряжений в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от  $c/a_1$

Материал	Точка	Величина	Задача	$c/a_1$						
				$\infty$	2	1	0,5	0,1	0,01	
М1	A	$\sigma_x$	ЭМУ	3,111	3,223	3,327	3,459	3,76	4,01	
			ТУ	3,019	3,129	3,231	3,358	3,65	3,88	
	B	$\sigma_y$	ЭМУ	-0,957	-1,080	-1,156	-1,162	-0,82	-0,34	
			ТУ	-1,027	-1,162	-1,243	-1,245	-0,87	-0,35	
	C	$\sigma_x$	ЭМУ	3,111	3,369	3,834	4,750	9,44	29,18	
			ТУ	3,019	3,279	3,744	4,654	9,26	28,41	
	D	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,242	1,566	2,101	4,57	14,53	
			ТУ	1,000	1,245	1,570	2,100	4,51	14,17	
	E	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	0,812	0,649	0,490	0,21	0,05	
			ТУ	1,000	0,808	0,646	0,492	0,23	0,07	
	L	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,056	1,475	2,196	2,67	1,14	
	M	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,268	1,513	1,474	0,83	0,24	
	М2	A	$\sigma_x$	ЭМУ	3,943	4,056	4,167	4,320	4,71	5,08
				ТУ	2,778	2,884	2,979	3,094	3,35	3,55
B		$\sigma_y$	ЭМУ	-1,095	-1,318	-1,453	-1,508	-1,13	-0,45	
			ТУ	-1,228	-1,398	-1,491	-1,477	-1,00	-0,39	
C		$\sigma_x$	ЭМУ	3,943	4,221	4,712	5,686	10,88	33,54	
			ТУ	2,778	3,042	3,508	4,397	8,75	26,36	
D		$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,246	1,563	2,099	4,76	16,33	
			ТУ	1,000	1,252	1,579	2,095	4,36	13,19	
E		$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	0,811	0,683	0,560	0,17	-0,27	
			ТУ	1,000	0,801	0,643	0,503	0,28	0,12	
L		$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,111	1,518	2,247	3,15	1,49	
M		$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,258	1,473	1,548	1,03	0,36	
М3		A	$\sigma_x$	ЭМУ	3,199	3,311	3,417	3,549	3,86	4,13
				ТУ	2,377	2,481	2,566	2,663	2,86	3,01
	B	$\sigma_y$	ЭМУ	-0,829	-0,920	-0,974	-0,971	-0,69	-0,30	
			ТУ	-1,205	-1,327	-1,375	-1,321	-0,85	-0,33	
	C	$\sigma_x$	ЭМУ	3,199	3,454	3,909	4,820	9,61	30,09	
			ТУ	2,377	2,640	3,085	3,927	7,96	23,70	
	D	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,233	1,557	2,100	4,62	14,98	
			ТУ	1,000	1,237	1,581	2,093	4,14	11,95	
	E	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	0,837	0,667	0,496	0,23	0,05	
			ТУ	1,000	0,824	0,641	0,486	0,38	0,21	
	L	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,034	1,441	2,165	2,70	1,18	
	M	$\sigma_x$	ЭМУ	1,000	1,256	1,529	1,514	0,87	0,25	

приведены значения напряжений при решении задач ЭМУ и ТУ. На рис. 3 для некоторых значений  $c/a_1$ , в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от оси  $Ox$  против часовой стрелки, для слабо и сильно анизотропных и пьезоактивных материалов М1 и М2 изображены графики распределения по контуру отверстия нормальных напряжений  $\sigma_s/p$  на площадках, перпендикулярных контуру, а на рис. 4 для некоторых значений  $c/a_1$  даны графики распределения  $\sigma_x/p$  вдоль прямолинейной границы, причем сплошные и штриховые линии рисунков относятся к полуплоскости из М1 и М2 соответственно.

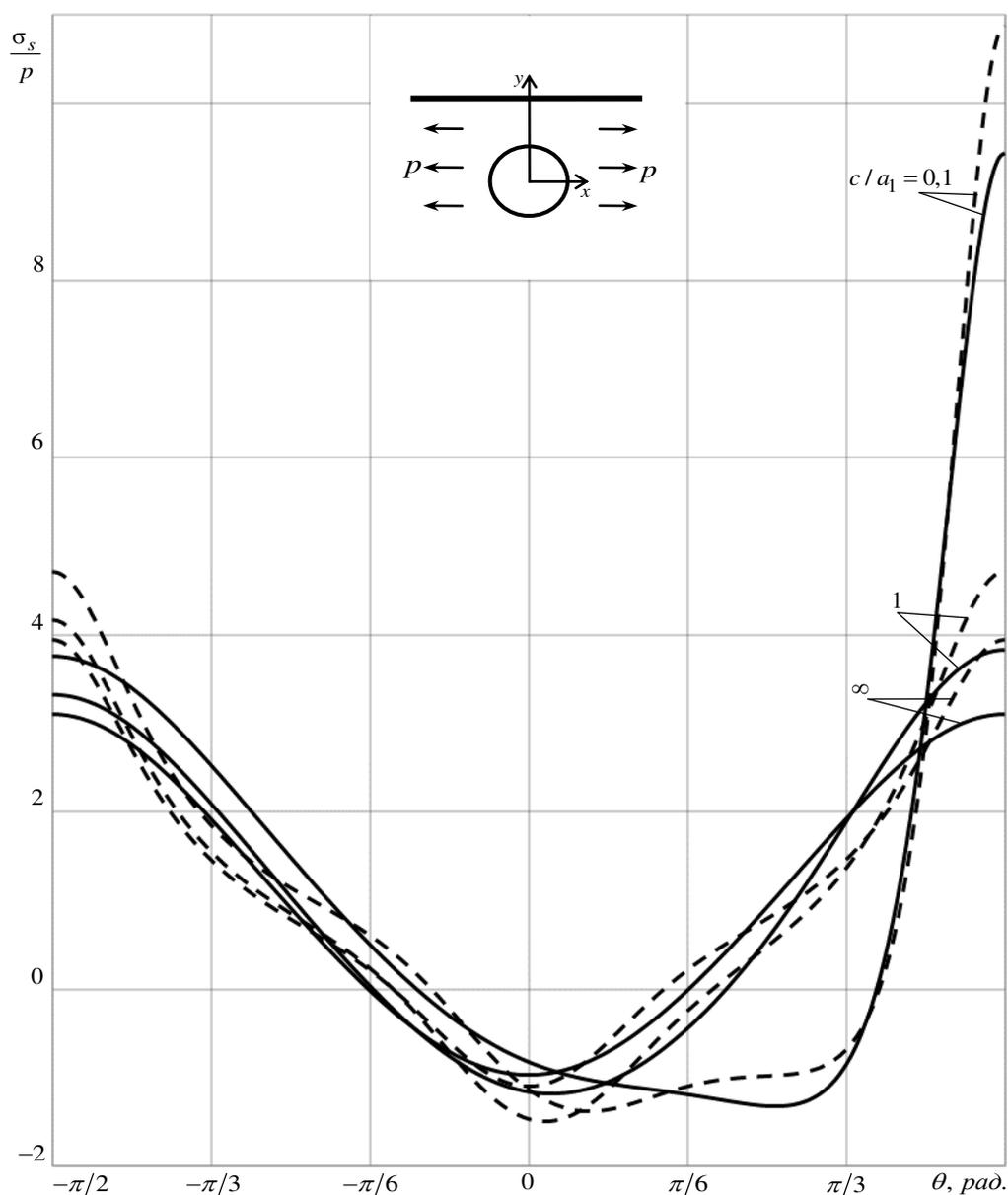


Рис. 3. Графики распределения напряжений  $\sigma_s/p$  около контура кругового отверстия в полуплоскости для некоторых значений  $c/a_1$ . Сплошные линии относятся к материалу М1, штриховые – к материалу М2

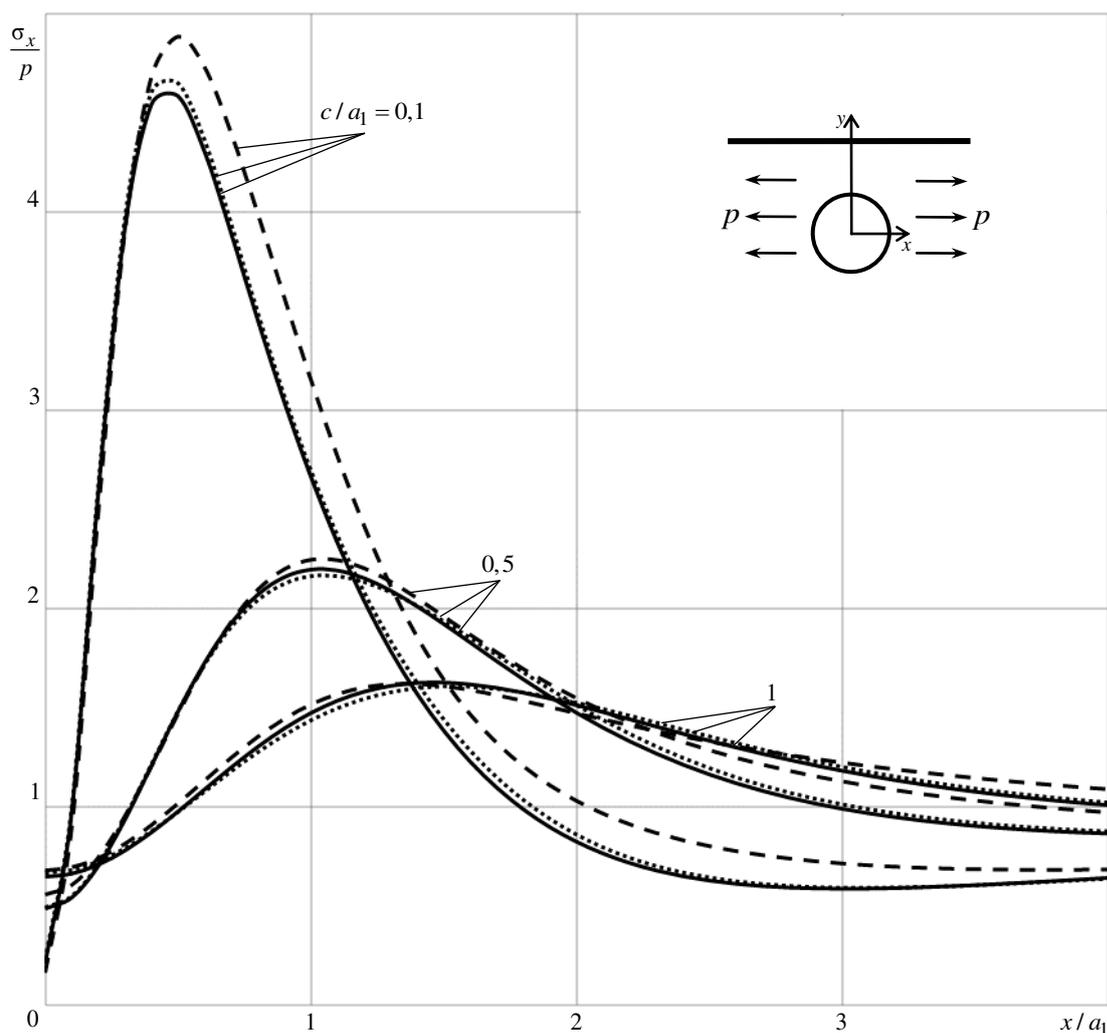


Рис. 4. Графики распределения  $\sigma_x / p$  по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений  $c / a_1$ . Сплошные, штриховые и пунктирные линии относятся к полуплоскости из материалов М1, М2, М3 соответственно.

Как следует из табл. 1, рис. 3, рис. 4, с приближением отверстия к прямолинейной границе полуплоскости происходит резкое увеличение значений напряжений около контура отверстия и в зоне между отверстием и прямолинейной границей, за исключением весьма малой окрестности точки перемычки на прямолинейной границе, где эти напряжения и их изменения невелики. Значения напряжений в указанных точках особенно велики в полуплоскости из материала М2. В точках высокой концентрации напряжений велика и доля пьезосвойств на значения напряжений.

В табл. 2 для растяжения полуплоскости наиболее пьезоактивного материала М2 с вертикальной трещиной длины  $2l_1$  усилиями  $\sigma_x^\infty = p$  (рис. 5) с точностью до множителя  $p$  приведены значения КИН  $k_1$  (в этом случае  $k_2 = 0$ ) для концов трещины А, С и напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения  $c/l_1$ , где  $c$  – длина перемычки между трещиной и границей полуплоскости. При

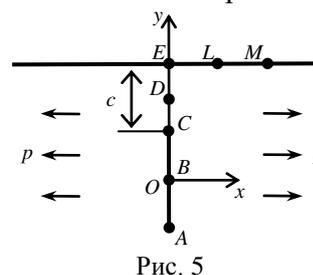


Рис. 5

этом характерными точками были  $D(0, l_1 + c/2)$ ,  $E(0, l_1 + c)$ ,  $L(l_1, l_1 + c)$ ,  $M(2l_1, l_1 + c)$ .

Таблица 2  
Значения КИН и напряжений в некоторых точках полуплоскости из М2 с вертикальной трещиной в зависимости от  $c/l_1$

Точка	Величина	$c/l_1$					
		$\infty$	2	1	0,5	0,1	0,01
A	$k_1^-$	1,000	1,018	1,041	1,075	1,173	1,28
B	$\sigma_y$	-1,095	-1,128	-1,169	-1,224	-1,254	-1,03
C	$k_1^+$	1,000	1,025	1,068	1,158	1,644	3,39
D	$\sigma_x$	1,000	1,199	1,470	2,000	5,495	33,51
E	$\sigma_x$	1,000	1,016	1,040	1,090	1,431	4,34
L	$\sigma_x$	1,000	1,155	1,403	1,668	1,594	1,02
M	$\sigma_x$	1,000	1,144	1,229	1,226	0,922	0,62

Как следует из данных табл. 2, при приближении вертикальной трещины к границе полуплоскости значения напряжений в точках перемычки и КИН для ближайшей к границе полуплоскости резко растут. При этом незначительно растут также КИН для удаленного конца трещины и напряжения в точках вблизи перемычки.

Указанные закономерности изменения КИН и напряжений несколько изменяются в случаях, когда трещина наклонена к границе полуплоскости. В табл. 3 для растяжения полуплоскости с наклоненной под углом  $\varphi_1$  к границе полуплоскости трещиной длины  $2l_1$  усилиями  $\sigma_x^\infty = p$  (рис. 6) с точностью до множителя  $p$  приведены значения КИН ( $k_1$  и  $k_2$ ) для концов A, C трещины и напряжений в тех же точках, что и в табл. 2,

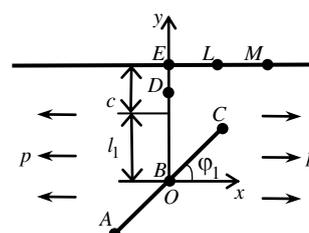


Рис. 6

Таблица 3  
Значения КИН и напряжений  $\sigma_x$  в точках полуплоскости с наклонной трещиной в зависимости от угла наклона  $\varphi_1$  в случае  $c/l_1 = 0,1$

Точка	Величина	$\varphi_1$			
		0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
A	$k_1^-$	0	0,329	0,890	1,173
	$k_2^-$	0	0,424	0,399	0,000
B	$\sigma_y$	0	0,040	-0,397	-1,254
C	$k_1^+$	0	0,229	0,953	1,644
	$k_2^+$	0	0,501	0,612	0,000
D	$\sigma_x$	1	1,387	2,787	5,495
E	$\sigma_x$	1	1,366	2,647	1,431
L	$\sigma_x$	1	1,402	2,000	1,594
M	$\sigma_x$	1	1,160	1,047	0,922

для случая  $c/l_1 = 0,1$ . Как видно, с ростом угла  $\varphi_1$  значения КИН  $k_1$  и напряжений растут, тогда как  $k_2$  и значения  $k_3$  убывают. При  $\varphi_1 = 0$  значения КИН равны нулю, а напряжения такие же, как в сплошной полуплоскости ( $\sigma_x = p$ ,  $\sigma_y = 0$ ). Следовательно, наличие в полуплоскости трещины, параллельной ее прямолинейной границе, не влияет на напряженное состояние полуплоскости.

**Выводы.** Таким образом, с использованием комплексных потенциалов плоской задачи электромагнитоупругости решена задача об ЭМУС пьезополуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами при произвольных их количестве, конфигурации и взаиморасположении. При этом граничные условия на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши удовлетворяются точно, и вся задача сводится к получаемой из граничных условий на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований распределения напряжений в полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, с установлением закономерностей влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, их взаиморасположения, а также упругих и пьезосвойств материалов на значения напряжений и их концентрацию.

*Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).*

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.
2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естественных наук», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
6. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
7. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В. Решение основных задач теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 44–63.
8. Калоеров С.А., Глушанков Е.С., Мироненко А.Б. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37.
9. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
10. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
13. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
14. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
16. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
17. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

18. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
19. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
20. Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

*Поступила в редакцию 20.08.2024 г.*

## **SOLUTION OF THE ELECTROMAGNETOELASTICITY PROBLEM FOR A HALF-PLANE WITH HOLES AND CRACKS**

*S. A. Kaloerov, M. A. Polianskii, A. V. Seroshtanov*

The problem of electromagnetic elasticity for a piezoelectric half-plane with arbitrarily located internal elliptical holes and rectilinear cracks is solved. In this case, functions holomorphic outside the ellipses (cracks) are expanded in Laurent series in negative powers of the corresponding variables, and functions holomorphic in the lower half-planes are expressed by the Cauchy integral method through functions obtained from the specified ones when satisfying the boundary conditions on the rectilinear boundary. With this approach, the boundary conditions on the rectilinear boundary of the half-plane are satisfied exactly. As for the boundary conditions on the contours of the holes, a generalized least squares method is used to satisfy them, reducing the problem to solving an overdetermined system of linear algebraic equations with respect to the coefficients of the Laurent series. Solutions to problems of electroelasticity, magnetoelasticity and elasticity theory are obtained as special cases, as well as analytical solutions to problems of a continuous half-plane under the action of forces on the boundary or concentrated effects at individual points. The results of numerical studies for a half-plane with holes and cracks are described, with the establishment of patterns of change in the stress-strain state of the half-plane depending on its materials, geometric characteristics of holes and cracks.

**Keywords:** electromagnetoelastic plate, half-plane, holes, complex potentials, Cauchy-type integrals, generalized least squares method.

### **Калоеров Стефан Алексеевич**

доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: kaloerov@mail.ru

### **Kaloerov Stefan Alekseevich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Theory Elasticity and Computational Mathematics named after acad. A.S. Kosmodamiansky, Chief researcher, Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

### **Полянский Максим Алексеевич**

аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, стажер-исследователь ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: m4xpolyan@yandex.ru

### **Polianskii Maksim Alekseevich**

Postgraduate student of the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics named after acad. A.S. Kosmodamiansky, Intern researcher, Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

### **Сероштанов Александр Владимирович**

аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, младший научный сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: aleks.serosht@gmail.com

### **Seroshtanov Aleksandr Vladimirovich**

Postgraduate student of the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics named after acad. A.S. Kosmodamiansky, Junior Researcher; Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

## КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ПРОДОЛЬНЫМИ ПОЛОСТЯМИ И ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ

© 2024. С.А. Калоеров, Е.И. Сошина, А.Б. Мироненко

С использованием комплексного потенциала теории кручения анизотропного тела решена задача теории упругости о кручении цилиндра с произвольными полостями и плоскими трещинами. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и удовлетворения граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов исходная задача сведена к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Описаны результаты численных исследований для кругового цилиндра с круговой полостью или плоской трещиной, в том числе выходящими на внешний край цилиндра, кругового цилиндра с центральной круговой полостью и трещиной между контурами, в том числе переходящей в разрез. Исследованы закономерности влияния физико-механических свойств материала цилиндра и геометрических характеристик отверстий и трещин на значения напряжений, их распределение и концентрацию.

**Ключевые слова:** кручение цилиндра; полости и плоские трещины; комплексные потенциалы; обобщенный метод наименьших квадратов; коэффициенты интенсивности напряжений.

**Введение.** В качестве элементов современных конструкций часто используются упругие цилиндрические тела с продольными полостями и трещинами, находящиеся в условиях кручения. Под действием внешних крутящих моментов вблизи отверстий и трещин возникают большие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации соответствующих элементов конструкций. Как показывают исследования, наиболее достоверные результаты по определению напряженно-деформированного состояния анизотропных тел получаются при использовании в решениях задач комплексных потенциалов Лехницкого С.Г. [1]. Для цилиндров с многосвязной областью в поперечном сечении, ограниченной совокупностью гладких замкнутых контуров при решении задач определения комплексных потенциалов использовался [2] метод рядов, а при наличии плоских трещин [3], граничные условия на них точно удовлетворялись решением задач линейного сопряжения Римана-Гильберта с приближенным удовлетворением граничных условий на замкнутых контурах методом рядов. Но метод рядов во всех этих случаях не давал возможности с достаточной степенью точности удовлетворять граничным условиям на замкнутых контурах, кроме частных случаев, когда получалось точное решение задачи. В работе [4] при определении комплексных потенциалов кручения цилиндров с отверстиями и трещинами использовался дискретный метод наименьших квадратов, что обеспечивало более высокую степень точности удовлетворения граничным условиям, как на гладких контурах, так и на берегах трещин. Но как показали последние исследования, наиболее простым и достаточно точным при удовлетворении граничным условиям в случае многосвязных областей с произвольными контурами оказывается обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [5].

В данной работе с использованием комплексного потенциала теории кручения и ОМНК дано решение задачи о кручении цилиндра с произвольными полостями и плоскими трещинами. Проведены численные исследования с анализом получаемых результатов для кругового цилиндра с круговой полостью или плоской трещиной, в том числе выходящими на внешний край (круговой цилиндр с выемом или краевой

трещиной), для кругового кольца с трещиной, в том числе выходящей на края (кольцевой цилиндр с разрезом между контурами).

**Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  цилиндрическое тело из прямолинейно-анизотропного материала с продольными полостями, образующие которых параллельны оси цилиндра, вдоль которой направлена ось  $Oz$  системы координат (рис. 1). Криволинейные поверхности будем аппроксимировать эллиптическими поверхностями или берегами плоских трещин, рассматриваемых как частные случаи эллиптических полостей. Поэтому в общем случае достаточно рассматривать цилиндр с эллиптическими полостями. В поперечном сечении цилиндра будет многосвязная область  $S$ , ограниченная внешним контуром  $L_0$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l, b_l$ .

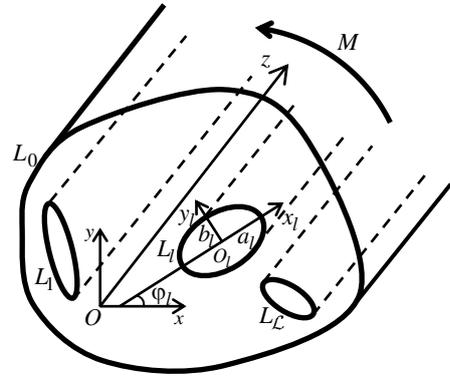


Рис. 1

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах эллипсов  $L_l$  и осями  $O_l x_l$  вдоль полуосей  $a_l$  их параметрические уравнения имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат  $Oxy$  будут такими

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi_l$  – угол между положительными направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от положительного направления  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}, y_{0l}$  – координаты начала локальной системы  $O_l x_l y_l$  в основной системе  $Oxy$ ;  $\theta$  – параметр, изменяющийся от 0 до  $2\pi$ .

Внешняя поверхность цилиндра и поверхности полостей свободны от усилий, один из концов цилиндра жестко закреплен, на другом приложены усилия, приводящие к кручению цилиндра моментом  $M$ .

Если для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии цилиндра использовать комплексный потенциал кручения [1, 3, 4], то оно сводится к нахождению функции  $\Phi_3(z_3)$  обобщенного комплексного переменного

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (3)$$

где  $\mu_3 = \alpha_3 + i \beta_3$  – один из корней характеристического уравнения (вторым корнем будет  $\overline{\mu_3} = \alpha_3 - i \beta_3$ )

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0; \quad (4)$$

$a_{ij}$  – коэффициенты деформации материала цилиндра. При этом на контурах  $L_l$  ( $l = \overline{0, \mathcal{L}}$ ) функция  $\Phi_3(z_3)$  должна удовлетворять граничным условиям

$$2 \operatorname{Re} \Phi_3(t_3) = c_l - \overline{\gamma t_3 t_3}, \quad (5)$$

в которых

$$\gamma = -\frac{a_{55}}{2(a_{44}a_{55} - a_{45}^2)} \vartheta = -\frac{\vartheta}{2a_{55}\beta_3^2} = -\frac{1}{2a_{55}\beta_3^2} \frac{M}{C},$$

$\vartheta = M/C$  – крутка цилиндра;  $C$  – константа, называемая жесткостью цилиндра при кручении и зависящая от геометрических свойств поперечного сечения цилиндра;  $c_l$  – постоянные, одна из которых, например,  $c_0$  произвольна и может быть принята равной нулю.

Функция  $\Phi_3(z_3)$  определена и голоморфна в области  $S_3$ , получаемой из области поперечного сечения  $S$  аффинным преобразованием (3) и ограниченной контурами  $L_{3l}$ , соответствующими контурам  $L_l$  при этих преобразованиях, и в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Phi_{3l}(z_3), \quad (6)$$

в котором  $\Phi_{30}(z_3)$  – функция, голоморфная внутри внешнего контура  $L_{30}$ ;  $\Phi_{3l}(z_3)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) – функции, голоморфные вне контуров отверстий  $L_{3l}$ . Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Учитывая параметрические уравнения (1) эллипсов  $L_l$  и равенства  $\cos \theta = \frac{1}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right)$ ,  $\sin \theta = -\frac{i}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right)$ ,  $\sigma = e^{i\theta}$ , на основе формул (2) и (3) получим связи между граничными значениями  $\sigma$  и  $t_3 = x + \mu_3 y$ . Заменяя эти граничные значения на значения  $\zeta_{3l}$  и  $z_3$  в областях, найдем конформные отображения внешностей единичных кругов  $|\zeta_{3l}| \geq 1$  на внешности эллиптических контуров  $L_{3l}$  в виде [6]

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l} \left( \zeta_{3l} + \frac{m_{3l}}{\zeta_{3l}} \right), \quad (7)$$

где

$$z_{3l} = x_{0l} + \mu_3 y_{0l},$$

$$R_{3l} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{3l} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l)}{2R_{3l}}.$$

Тогда функции  $\Phi_{3l}(z_3)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), голоморфные вне контуров  $L_{3l}$ , включая бесконечно удаленную точку, после конформных отображений (7) будут голоморфными вне единичных кругов  $|\zeta_{3l}| \geq 1$  и их можно разложить в ряды Лорана вида

$$\Phi_{3l}(z_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{3ln}}{\zeta_{3l}^n}. \quad (8)$$

Функция  $\Phi_{30}(z_3)$  голоморфна в конечной односвязной области, ограниченной контуром  $L_{30}$  и ее можно разложить в ряд по полиномам Фабера для этой области

$$\Phi_{30}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{30n} P_{30n}(z_3). \quad (9)$$

При этом, если начало локальной системы координат  $O_0x_0y_0$  выбрано в центре эллипса  $L_{30}$  и  $\varphi_0 = 0$ , то для полиномов Фабера  $P_{30n}(z_3)$  имеют место выражения [7]

$$P_{300} = 1, \quad P_{30n}(z_3) = \beta_{30n} z_3^n + \dots + \beta_{301} z_3 + \beta_{300} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда для функции  $\Phi_{30}(z_3)$  будем иметь

$$\Phi_{30}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \alpha_{30n} \beta_{30p} z_3^p = \sum_{p=0}^{\infty} z_3^p \sum_{n=p}^{\infty} \alpha_{30n} \beta_{30p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{30n} z_3^n. \quad (10)$$

Здесь при перестановке порядка суммирования считалось, что такая перестановка возможна (конечное число членов рядов при численной реализации).

Следовательно, в общем случае комплексный потенциал  $\Phi_3(z_3)$  имеет вид

$$\Phi_3(z_3) = a_{300} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3), \quad (11)$$

где

$$\varphi_{30n}(z_3) = z_3^n, \quad \varphi_{3ln}(z_3) = \frac{1}{\zeta_{3l}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (12)$$

$a_{3ln}$  – неизвестные постоянные. Эти постоянные будем определять из граничных условий на контурах  $L_l$  ( $l = \overline{0, \mathcal{L}}$ ) области  $S$ . В случае многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которая не будет содержать аддитивных постоянных, входящих в обычные граничные условия. Последние условия, полученные из условий (5) дифференцированием по дуге контура, имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \delta_3 \Phi'_3(z_3) = -\gamma (\delta_3 \overline{z_3} + \overline{\delta_3} z_3), \quad (13)$$

в котором  $\delta_3 = dz_3 / ds$ ;

$$\Phi'_3(z_3) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3ln} \delta_3 \varphi'_{3ln}(z_3); \quad (14)$$

$$\varphi'_{30n}(z_3) = n z_3^{n-1}; \quad \varphi'_{3ln}(z_3) = -\frac{n}{R_{3l} \zeta_{3l}^{n-1} (\zeta_{3l}^2 - m_{3l})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (15)$$

Граничным условиям (13) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [5, 8, 9]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$  ( $p = \overline{0, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (14) в граничные условия (13) в точках  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ , для определения неизвестных постоянных  $a_{3ln}$  получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_3 \Phi'_{3ln}(t_{3pm}) a_{3ln} = -\gamma (\overline{\delta_3} t_{3pm} + \delta_3 \overline{t_{3pm}}) \quad (p = \overline{0, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}). \quad (16)$$

Систему (16) будем решать методом сингулярных разложений [10, 11]. После нахождения псевдорешений этой системы функция  $\Phi'_3(z_3)$  будет известной и по ней можно вычислять основные характеристики напряженно-деформируемого состояния цилиндра. В частности, напряжения на основных площадках находятся по формулам

$$\tau_{xz} = 2 \operatorname{Re} \mu_3 (\Phi'_3(z_3) + \gamma \overline{z_3}), \quad \tau_{yz} = -2 \operatorname{Re} (\Phi'_3(z_3) + \gamma \overline{z_3}), \quad (17)$$

а касательные напряжения на произвольной площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$  по формулам

$$\tau_{nz} = \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny, \quad \tau_{sz} = -\tau_{xz} \cos ny + \tau_{yz} \cos nx. \quad (18)$$

При этом, если некоторое эллиптическое отверстие  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез-трещину длины  $2a_l$  (полуось  $b_l = 0$ ), то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности напряжений (КИН)  $k_{3l}$  по формуле [12]

$$k_{3l}^{\pm} = \sqrt{a_l} \operatorname{Re} \left( (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n \frac{a_{3ln}}{R_{3l}} \right), \quad (19)$$

в которой верхний знак относится к правому концу разреза в локальной системе координат  $O_l x_l y_l$ , нижний знак – к левому его концу.

**Точные аналитические решения задачи для частных случаев.** Приведенным решением можно пользоваться для цилиндров с любыми геометрическими характеристиками поперечного сечения, из любых материалов. Но для некоторых частных случаев геометрии и материала цилиндра можно получить точные решения и нет необходимости в реализации приведенного выше общего решения. Это случаи сплошного эллиптического цилиндра и изотропного кольцевого цилиндра с круговыми контурами. Приведем эти точные решения и используем их для сравнения с результатами, получаемыми при использовании приведенного выше общего решения.

*1. Кручение сплошного эллиптического цилиндра.* Если цилиндр не имеет полостей, то комплексный потенциал (11) является функцией, голоморфной в конечной односвязной области, ограниченной контуром  $L_{30}$ , и на основании (10) ее можно представить рядом

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} P_{30n}(z_3), \quad (20)$$

где  $a_{3n}$  – неизвестные коэффициенты;  $P_{30n}(z_3)$  – полиномы Фабера для  $L_{30}$ , которые после конформных отображений (7) для этого эллипса

$$z_3 = R_{30} \left( \zeta_{30} + \frac{m_{30}}{\zeta_{30}} \right), \quad R_{30} = \frac{a_0 - i\mu_3 b_0}{2}, \quad m_{30} = \frac{a_0 + i\mu_3 b_0}{a_0 - i\mu_3 b_0}, \quad (21)$$

ИМЕЮТ ВИД

$$P_{300}(z_3) = 1, \quad P_{30n}(z_3) = \zeta_{30}^n + \frac{m_{30}^n}{\zeta_{30}^n}. \quad (22)$$

Подставив функции (20) в граничные условия (5) с учетом того, что на границе  $\zeta_{30} = \sigma$ ,  $\overline{\zeta_{30}} = 1/\sigma$ , получим

$$\begin{aligned} a_{30} + \overline{a_{30}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{3n} \left( \sigma^n + \frac{m_{30}^n}{\sigma^n} \right) + \overline{a_{30}} \left( \frac{1}{\sigma^n} + \overline{m_{30}^n} \sigma^n \right) \right) = \\ = -\gamma R_{30} \left( \sigma + \frac{m_{30}}{\sigma} \right) \overline{R_{30}} \left( \frac{1}{\sigma} + \overline{m_{30}} \sigma \right) = \\ = -\gamma R_{30} \overline{R_{30}} \left( 1 + m_{30} \overline{m_{30}} + \frac{m_{30}}{\sigma^2} + \overline{m_{30}} \sigma^2 \right). \end{aligned}$$

Сравнив в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях  $\sigma$  справа и слева, найдем

$$\begin{aligned} m_{30}^n a_{3n} + \overline{a_{3n}} &= -\delta_n^2 \gamma R_{30} \overline{R_{30}} m_{30}, \\ a_{3n} + \overline{m_{30}^n} \overline{a_{3n}} &= -\delta_n^2 \gamma R_{30} \overline{R_{30}} \overline{m_{30}}, \end{aligned}$$

где  $\delta_n^2$  – символ Кронекера. Решая эти системы уравнений, получим

$$a_{3n} = 0 \quad (n = 1, 3, 4, \dots); \quad a_{32} = -\frac{\gamma R_{30} \overline{R_{30}} \overline{m_{30}}}{1 + m_{30} \overline{m_{30}}}. \quad (23)$$

Тогда

$$\Phi_3(z_3) = a_{32} \left( \zeta_{30}^2 + \frac{m_{30}^2}{\zeta_{30}^2} \right) = a_{32} \frac{z_3^2}{R_{30}^2}, \quad \Phi_3'(z_3) = -\frac{2\gamma \overline{R_{30}} \overline{m_{30}}}{R_{30} (1 + m_{30} \overline{m_{30}})} z_3. \quad (24)$$

Поставив производную функции (24) в выражения (17), для напряжений получим формулы

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -2 \operatorname{Re} \gamma \mu_3 \left( \frac{2\overline{R_{30}} \overline{m_{30}}}{R_{30} (1 + m_{30} \overline{m_{30}})} z_3 - \overline{z_3} \right), \\ \tau_{yz} &= 2 \operatorname{Re} \gamma \left( \frac{2\overline{R_{30}} \overline{m_{30}}}{R_{30} (1 + m_{30} \overline{m_{30}})} z_3 - \overline{z_3} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

которые после преобразований с учетом (21) переходят в известные формулы

$$\tau_{xz} = -\frac{2a^2\vartheta}{a_{55}a^2 + a_{44}b^2}y, \quad \tau_{yz} = \frac{2b^2\vartheta}{a_{55}a^2 + a_{44}b^2}x, \quad (26)$$

получаемые при решении задачи для цилиндра эллиптического сечения методом Ритца.

2. *Кручение кругового изотропного цилиндра с центральной круговой полостью.* Если цилиндр изотропный, то

$$\mu_3 = i, \quad z_3 = z = x + iy, \\ R_{3l} = (a_l + b_l)/2 = a_l, \quad m_{3l} = (a_l - b_l)/(a_l + b) = 0.$$

Тогда функция  $\Phi_3(z_3) = \Phi(z)$  голоморфна в круговом кольце и может быть представлена рядом Лорана вида

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

где  $a_n$  – неизвестные коэффициенты. Удовлетворением граничным условиям (5) на контурах  $L_l$ , где  $z = a_l\sigma$ ,  $z^n = a_l^n\sigma^n$ ,  $\bar{z}^n = a_l^n\sigma^{-n}$ ,  $z\bar{z} = a_l^2$ , получим

$$a_0 + \bar{a}_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( a_n \sigma^n + \frac{\bar{a}_0}{\sigma^n} \right) = -\gamma a_l^2.$$

Приравнявая в последнем равенстве коэффициенты при степенях  $\sigma$ , получим, что

$$a_0 = -\gamma a_l^2 / 2; \quad a_n = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тогда

$$\tau_{xz} = 4 \operatorname{Re} i \gamma \bar{z} = -\frac{2\vartheta}{a_{55}\beta_3^2}y, \quad \tau_{yz} = -4 \operatorname{Re} \gamma \bar{z} = \frac{2\vartheta}{a_{55}\beta_3^2}x, \quad (27)$$

где  $G = 1/a_{44} = 1/a_{55}$  – модуль сдвига.

**Численные исследования напряженного состояния цилиндра.** На основе приведенного выше решения общей задачи были проведены численные исследования распределения напряжений в ортотропном цилиндре (когда  $a_{45} = 0$ ) для различных значений отношения  $a_{44}/a_{55}$  ( $a_{44} = 1/G_3$ ,  $a_{55} = 1/G_2$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  – модули сдвига, характеризующие скручивание цилиндра относительно соответствующих направлений, случай  $a_{44}/a_{55} = 1$  соответствует изотропному цилиндру). При проведении расчетов количество членов в бесконечных рядах (14) и количество точек  $M_p$  на каждом из контуров  $L_p (p = \overline{0, \mathcal{L}})$ , в которых удовлетворялись граничные условия при составлении уравнений системы (16), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (например, модуль абсолютной погрешности не превышал  $10^{-3}$ ). Для получения таких результатов в описываемых ниже случаях достаточно было оставлять от 10 до 100 членов в каждом из рядов (14) и на каждом из контуров брать от 50 до 1000 равномерно

удаленных по параметру  $\theta$  параметрического задания (1) точек эллипсов. Ниже описаны некоторые из полученных результатов, где значения напряжений и КИН даны с точностью до крутки  $\vartheta = M / C$ .

Прежде всего, исследования были проведены для ортотропного кругового кольцевого цилиндра с внешним контуром  $L_0$  радиуса  $a_0$  ( $b_0 = a_0$ ) и внутренним контуром  $L_1$  радиуса  $a_1$  ( $b_1 = a_1$ ) (рис. 2). Как показали расчеты, в этом случае коэффициенты  $a_{31n}$  связанного с контуром  $L_1$  ряда для любых значений  $a_1$  получаются равными нулю, функция  $\Phi'_3(z_3)$  и напряжения (17) будут линейными функциями от  $z_3$ , как в сплошном круговом цилиндре. В табл. 1 приведены значения напряжений  $\tau_{yz}$  в точках  $(x, 0)$  вдоль положительного направления оси  $Ox$ . В этих точках  $\tau_{xz} = 0$ . В симметричных точках  $(-x, 0)$  против направления оси  $Ox$  напряжения получаются такими же, но с противоположным знаком. При этом значения напряжений совпадают со значениями по точному решению (25). Эти напряжения линейно зависят и от значения  $a_{44}/a_{55}$ .

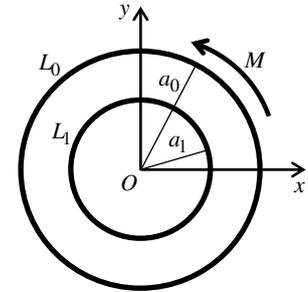


Рис. 2

При этом, как показывают исследования (это следует и из приведенного выше точного решения), для любых радиальных направлений в цилиндре касательные напряжения на площадках, перпендикулярных и касательных радиусу совпадают с указанными в табл. 1:  $\tau_{nz} = \tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{sz} = \tau_{yz}$ .

Таблица 1  
Значения напряжений  $\tau_{yz}$  в точках оси  $Ox$

$\frac{a_{44}}{a_{55}}$	Координаты точек $x$						
	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
0,1	0	0,018	0,055	0,091	0,127	0,164	0,182
1,0	0	0,100	0,300	0,500	0,700	0,900	1,000
10,0	0	0,182	0,545	0,909	1,272	1,636	1,818

Таким образом, напряжения в круговом ортотропном кольцевом цилиндре с центральной круговой полостью не зависят от радиуса полости, линейно зависят от длины радиус-вектора и от значения  $a_{44}/a_{55}$ . Но эти закономерности нарушаются, если сечение отлично от кольцевого. Это видно из описанных ниже данных.

В табл. 2 для кругового цилиндра из различных материалов (для различных значений  $a_{44}/a_{55}$ ) с внешним контуром  $L_0$  радиуса  $a_0$  ( $b_0 = a_0$ ) со сдвигаемой влево круговой полостью с контуром  $L_1$  радиусом  $a_1 = 0,5a_0$  ( $b_1 = a_1$ ) (рис. 3) приведены значения касательных напряжений  $\tau_{sz}$  около контуров на площадках, перпендикулярных к ним, в зависимости от центральных углов  $\theta$  контуров, отсчитываемых от направления оси  $Ox$  против часовой стрелки, и отношения  $c/a_0$ , где  $c = a_0 - a_1 - x_{01}$  – расстояние между контурами кольца (для положительных значений  $c$  – это расстояние по оси  $Ox$  между контурами  $L_1$  и  $L_0$  (рис. 3, а), для отрицательных значений  $c$  – это то же самое расстояние в обратном направлении (рис. 3, б)).

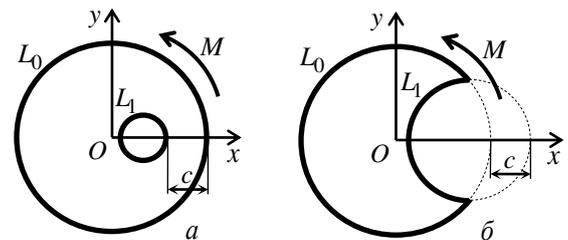


Рис. 3

Таблица 2

Значения напряжений  $\tau_{sz}$  около контуров кругового цилиндра с цилиндрической полостью

$\frac{a_{44}}{a_{55}}$	Кон-тур	$c/a_0$	Центральные углы $\theta$ (рад.)							
			0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$11\pi/12$	$\pi$	
0,1	$L_0$	0,50	0,182	0,182	0,182	0,182	0,182	0,182	0,182	0,182
		0,30	0,190	0,200	0,200	0,200	0,170	0,182	0,182	
		0,10	0,344	0,355	0,321	0,179	0,138	0,182	0,182	
		0,01	2,292	0,732	0,289	0,119	0,122	0,181	0,183	
		0,00	–	0,482	0,242	0,131	0,132	0,181	0,185	
		-0,10	–	–	0,013	0,043	0,123	0,181	0,181	
		-0,30	–	–	0,001	0,058	0,160	0,181	0,181	
	-0,50	–	–	0,003	0,110	0,176	0,182	0,182		
	$L_1$	0,50	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091
		0,30	0,329	0,049	0,022	0,067	0,089	0,048	0,132	
		0,10	0,714	0,494	0,295	0,138	0,074	0,206	0,383	
		0,01	2,644	1,241	0,428	0,105	0,034	0,337	0,586	
		0,00	–	1,005	0,349	0,116	0,049	0,293	0,519	
		-0,10	–	–	–	0,009	0,030	0,485	0,814	
-0,30		–	–	–	–	0,009	0,487	0,826		
-0,50	–	–	–	–	–	0,458	0,790			
1,0	$L_0$	0,50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	
		0,30	1,22	1,20	1,14	1,02	0,95	0,907	0,91	
		0,10	2,130	1,751	1,221	0,832	0,804	0,846	0,848	
		0,01	6,233	1,669	0,647	0,571	0,685	0,802	0,807	
		0,00	–	1,353	0,554	0,566	0,690	0,810	0,816	
		-0,10	–	–	0,080	0,454	0,662	0,807	0,810	
		-0,30	–	–	0,007	0,584	0,775	0,881	0,883	
	-0,50	–	–	0,067	0,750	0,875	0,936	0,937		
	$L_1$	0,50	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	
		0,30	1,091	0,006	0,040	0,213	0,467	0,005	0,021	
		0,10	2,246	2,079	1,691	0,879	0,272	0,565	0,593	
		0,01	6,313	4,028	1,620	0,383	0,138	0,953	0,982	
		0,00	–	4,180	1,325	0,314	0,152	0,957	0,987	
		-0,10	–	–	–	0,056	0,347	1,204	1,238	
-0,30		–	–	–	–	0,111	1,345	1,394		
-0,50	–	–	–	–	–	1,431	1,500			
10,0	$L_0$	0,50	1,818	1,818	1,818	1,818	1,818	1,818	1,818	
		0,30	2,26	2,16	1,89	1,80	1,80	1,56	1,52	
		0,10	3,396	2,630	1,568	1,718	1,765	1,300	1,245	
		0,01	6,953	1,957	0,761	1,653	1,762	1,145	1,083	
		0,00	–	1,678	0,664	1,650	1,764	1,146	1,084	
		-0,10	–	–	0,258	1,640	1,735	1,160	1,098	
		-0,30	–	–	0,040	1,702	1,761	1,347	1,292	
	-0,50	–	–	0,916	1,754	1,787	1,521	1,476		
	$L_1$	0,50	0,909	0,909	0,909	0,909	0,909	0,909	0,909	
		0,30	1,749	0,174	0,131	0,118	0,570	0,174	0,186	
		0,10	3,245	3,067	2,680	1,992	0,965	0,576	0,544	
		0,01	6,944	4,881	2,206	0,725	3,039	0,982	0,937	
		0,00	–	5,095	1,922	0,524	3,210	1,005	0,959	
		-0,10	–	–	–	0,109	3,467	1,216	1,162	
-0,30		–	–	–	–	1,375	1,439	1,381		
-0,50	–	–	–	–	–	1,652	1,594			

Как и следовало ожидать, при  $c/a_0 = 0,5$  (предыдущий случай кольцевого цилиндра) имеют место описанные выше закономерности: независимость напряжений от угла  $\theta$ , линейная зависимость напряжений от длины радиус-вектора в точку, линейная зависимость напряжений от  $a_{44}/a_{55}$ . Но, как видно из табл. 2, все эти закономерности нарушаются для неколевого цилиндра. При этом с приближением внутренней полости к внешней поверхности цилиндра (с уменьшением  $c/a_0$ ) значения напряжений в зоне между контурами возрастают, незначительно изменяясь в других зонах; этот рост особенно велик для  $a_{44}/a_{55} > 1$ ; при выходе полости на внешнюю поверхность цилиндра значения напряжений в зоне их высокой концентрации резко падают, опять незначительно изменяясь в остальных зонах; при дальнейшем продвижении внутренней полости вправо (уменьшении размера выема с уменьшением отрицательных значений  $c/a_0$ ) значения напряжений незначительно увеличиваются.

В табл. 3 для кругового цилиндра радиуса  $a_0$  с трещиной вдоль оси  $Ox$  длины  $2a_1 = a_0$  ( $b_1 = 0$ ) (рис. 4) в зависимости от  $c/a_0$ , где  $c$  – такой же параметр, как в табл. 2, приведены значения напряжений  $\tau_{sz}$  около внешнего контура  $L_0$  на площадках, перпендикулярных контуру (в зависимости от центрального угла  $\theta$  контура, отсчитываемого от направления оси  $Ox$  против часовой стрелки) и КИН для концов трещины ( $k_{31}^-$  для левого конца,  $k_{31}^+$  для правого конца). Случаи отрицательных значений  $c/a_0$  соответствуют цилиндру с краевой трещиной длины  $2a_1 + c$  (при отрицательных  $c$ ) и приводимые значения  $k_{31}^-$  вычислены по формуле (19) для трещины полудлины  $a_1$ .

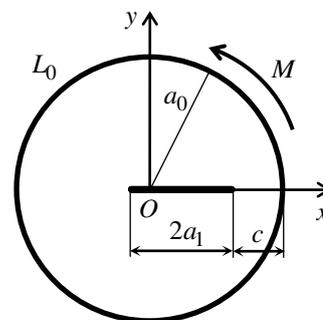


Рис.4

На рис. 5 изображены графики распределения указанных напряжений  $\tau_{sz}$  при  $c/a_0 = 0,1$ .

Из данных табл. 3, рис. 5 и других полученных результатов следует, что в отличие от кругового концентрического цилиндра (когда наличие внутренней полости не изменяло напряженного состояния в цилиндре) в случае кругового цилиндра с трещиной, наличие даже центральной трещины небольшой длины приводит к нарушению равномерного распределения напряжений  $\tau_{sz}$  около внешнего контура  $L_0$ ; со сдвигом трещины к внешнему краю значения напряжений в зоне между ближайшим концом трещины и внешним контуром резко растут, незначительно изменяясь в других зонах около внешнего контура; при этом растут и КИН для вершин трещины, особенно для ближайшего к внешнему контуру конца ( $k_{31}^+$ ); с выходом трещины на внешний край значения напряжений в указанной зоне высоких концентраций резко уменьшаются; с уменьшением длины краевой трещины значения напряжений в цилиндре уменьшаются; с уменьшением длины краевой трещины значения КИН для ее конца уменьшается. На значения напряжений и КИН значительно влияет степень анизотропии, но нарушается прямолинейная зависимость от  $a_{44}/a_{44}$  и напряжений, и КИН.

Таблица 3

Значения напряжений  $\tau_{sz}$  около контура  $L_0$  и КИН для концов трещины

$\frac{a_{44}}{a_{55}}$	$c/a_0$	Углы $\theta$ (рад.) для точек							КИН	
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$11\pi/12$	$\pi$	$k_{31}^-$	$k_{31}^+$
		Напряжения								
0,1	0,50	0,183	0,183	0,184	0,186	0,174	0,183	0,183	-0,034	0,034
	0,30	0,195	0,197	0,205	0,189	0,170	0,181	0,181	0,001	0,072
	0,10	0,339	0,331	0,262	0,172	0,158	0,181	0,181	0,039	0,127
	0,01	2,009	0,313	0,209	0,155	0,154	0,181	0,189	0,062	0,246
	0,00	–	0,021	0,021	0,163	0,174	0,181	0,181	0,021	–
	-0,10	–	0,076	0,090	0,097	0,138	0,181	0,181	0,134	–
	-0,30	–	0,077	0,090	0,103	0,165	0,181	0,181	0,133	–
	-0,50	–	0,077	0,091	0,133	0,177	0,181	0,181	0,131	–
	1,0	0,50	1,021	1,015	1,004	0,990	0,987	1,015	1,021	-0,178
0,30		1,183	1,113	1,002	0,985	0,973	0,964	0,964	-0,014	0,349
0,10		2,064	1,152	0,975	0,936	0,934	0,936	0,937	0,165	0,597
0,01		4,596	0,776	0,826	0,953	0,986	1,011	1,017	0,140	0,599
0,00		–	0,778	0,889	0,993	1,040	1,077	1,078	0,020	–
-0,10		–	0,424	0,602	0,769	0,832	0,884	0,887	0,501	–
-0,30		–	0,486	0,658	0,816	0,882	0,929	0,930	0,531	–
-0,50		–	0,540	0,737	0,888	0,936	0,965	0,966	0,522	–
10,0		0,50	1,853	1,808	1,812	1,816	1,820	1,808	1,853	-0,322
	0,30	2,136	1,800	1,796	1,811	1,830	1,776	1,732	-0,030	0,625
	0,10	3,090	1,676	1,707	1,774	1,898	1,783	1,722	0,231	0,943
	0,01	3,836	1,509	1,603	1,718	1,848	2,148	2,188	0,364	1,722
	0,00	–	1,497	1,599	1,715	1,821	2,213	2,271	0,123	–
	-0,10	–	1,411	1,612	1,750	1,929	1,714	1,621	0,694	–
	-0,30	–	1,525	1,737	1,804	1,812	1,674	1,607	0,906	–
	-0,50	–	1,621	1,770	1,809	1,813	1,738	1,705	0,906	–

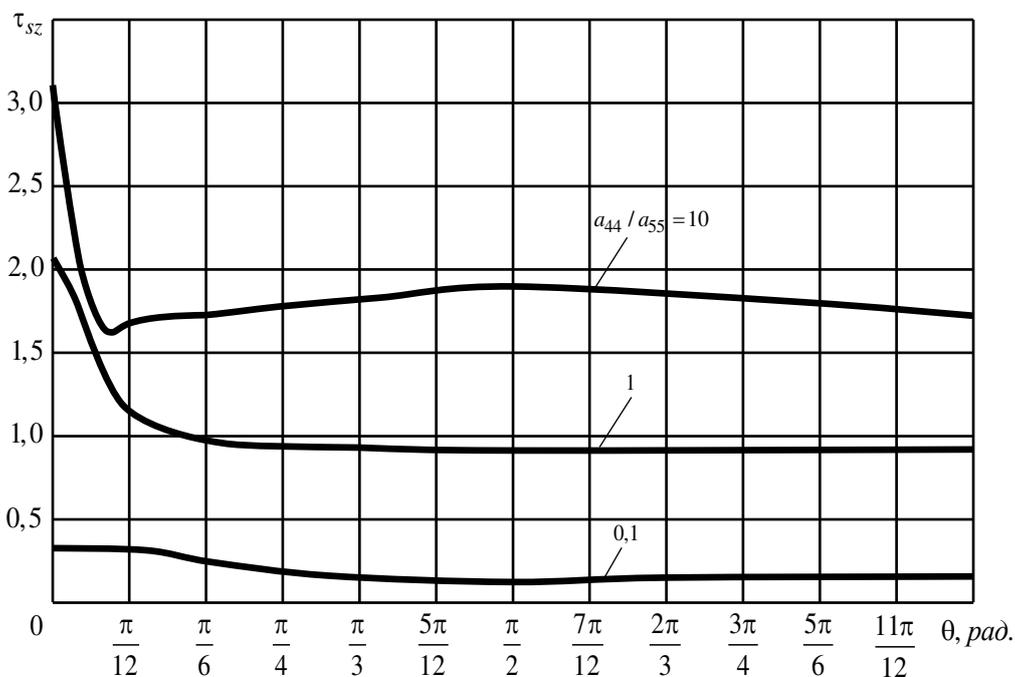


Рис. 5. Графики распределения  $\tau_{sz}$  около контура  $L_0$  в круговом цилиндре с трещиной

Заметим, что для цилиндра с внутренней плоской трещиной получаемые результаты для неблизких расстояний от трещины до контура) хорошо согласуются с известными [3], полученными решением задачи линейного сопряжения для берегов разреза и удовлетворением граничным условиям на замкнутом внешнем контуре методом рядов.

Большой интерес представляют случаи, когда в цилиндре имеются и полости с гладкими поверхностями, и плоские трещины. В табл. 4 для кольцевого цилиндра с внешним контуром  $L_0$  радиуса  $a_0$  ( $b_0 = a_0$ ), внутренним концентрическим контуром  $L_1$  радиуса  $a_1 = 0,5a_0$  ( $b_1 = a_1$ ) и центральной трещиной

длины  $2a_2$  (рис. 6) между контурами в зависимости от  $a_2/a_0$  приведены значения касательных напряжений  $\tau_{sz}$  в точках контуров, соответствующих центральным углам  $\theta$  контуров, отсчитываемым от направления оси  $Ox$  против часовой, и КИН  $k_{32}$  для концов трещины. При этом из того, что  $a_1 + 2c + 2a_2 = a_0$  и  $a_1 = 0,5a_0$ , следуют равенства

$$\frac{c}{a_2} = 0,25 \frac{a_0}{a_2} - 1 \text{ и } \frac{c}{a_0} = 0,25 - \frac{a_2}{a_0}.$$

На рис. 7 для цилиндра из различных материалов при  $a_2/a_0 = 0,22$  (или  $c/a_2 = 0,136$ ) изображены графики распределения напряжений  $\tau_{sz}$  около контуров  $L_0$  (сплошные линии) и  $L_1$  (штриховые линии). Заметим, что при  $a_2/a_0 > 0,25$  (в данном случае при  $a_2/a_0 = 0,50$ ) имеет место цилиндр с разрезом между контурами  $L_0$  и  $L_1$ .

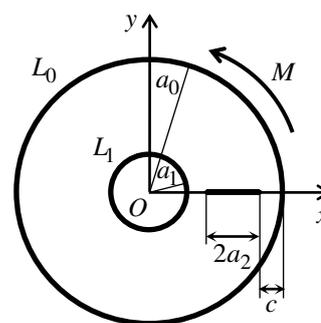


Рис. 6

Таблица 4  
Значения напряжений  $\tau_{sz}$  около контуров кольцевого цилиндра с центральной трещиной в перемычке

$\frac{a_{44}}{a_{55}}$	$\frac{a_2}{a_0}$	Кон- тур	$\theta$ (рад.)							КИН		
			0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$11\pi/12$	$\pi$	$k_{32}^-$	$k_{32}^+$	
0,1	0,01	$L_0$	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181	0,181	0,013	0,013	
		$L_1$	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091			
	0,10	$L_0$	0,201	0,202	0,192	0,179	0,181	0,181	0,181	0,043	0,049	
		$L_1$	0,135	0,109	0,093	0,090	0,090	0,088	0,087			
0,20	0,20	$L_0$	0,419	0,294	0,196	0,172	0,176	0,181	0,181	0,082	0,101	
		$L_1$	0,454	0,194	0,099	0,085	0,085	0,075	0,067			
	0,22	$L_0$	0,664	0,305	0,193	0,170	0,174	0,181	0,182	0,106	0,128	
		$L_1$	0,733	0,222	0,097	0,082	0,083	0,068	0,057			
0,50	0,50	$L_0$		0,077	0,089	0,074	0,049	0,165	0,168			
		$L_1$		0,186	0,129	0,063	0,051	0,322	0,528			
	1,0	0,01	$L_0$	1,001	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,073	0,074
			$L_1$	0,501	0,500	0,500	0,499	0,499	0,499	0,499		
0,10	0,10	$L_0$	1,156	1,010	0,989	0,992	0,992	0,992	0,992	0,235	0,267	
		$L_1$	0,672	0,556	0,498	0,485	0,484	0,484	0,484			
	0,20	$L_0$	2,271	0,945	0,924	0,965	0,968	0,970	0,973	0,424	0,516	
		$L_1$	1,855	0,630	0,440	0,424	0,428	0,435	0,436			

Продолжение табл. 4

	0,22	$L_0$	2,910	0,856	0,870	0,953	0,972	0,992	0,997	0,470	0,570
		$L_1$	2,516	0,504	0,348	0,393	0,426	0,470	0,475		
	0,50	$L_0$		0,363	0,431	0,456	0,458	0,459	0,459		
		$L_1$		0,410	0,528	0,576	0,581	0,582	0,582		
10,0	0,01	$L_0$	1,820	1,818	1,818	1,818	1,818	1,818	1,818	0,131	0,133
		$L_1$	0,911	0,909	0,909	0,909	0,909	0,909	0,909		
	0,10	$L_0$	2,039	1,794	1,796	1,810	1,832	1,814	1,814	0,424	0,480
		$L_1$	1,171	0,881	0,883	0,892	0,870	0,902	0,904		
	0,20	$L_0$	2,434	1,478	1,633	1,765	1,872	2,104	2,143	0,435	0,579
		$L_1$	1,571	0,350	0,409	0,468	1,001	1,255	1,258		
	0,22	$L_0$	3,031	1,352	1,621	1,743	1,872	2,192	2,249	0,436	0,600
		$L_1$	2,113	0,240	0,323	0,232	1,021	1,365	1,369		
	0,50	$L_0$		0,527	0,811	1,562	1,725	0,602	0,549		
		$L_1$		0,487	0,611	1,473	5,123	0,491	0,463		

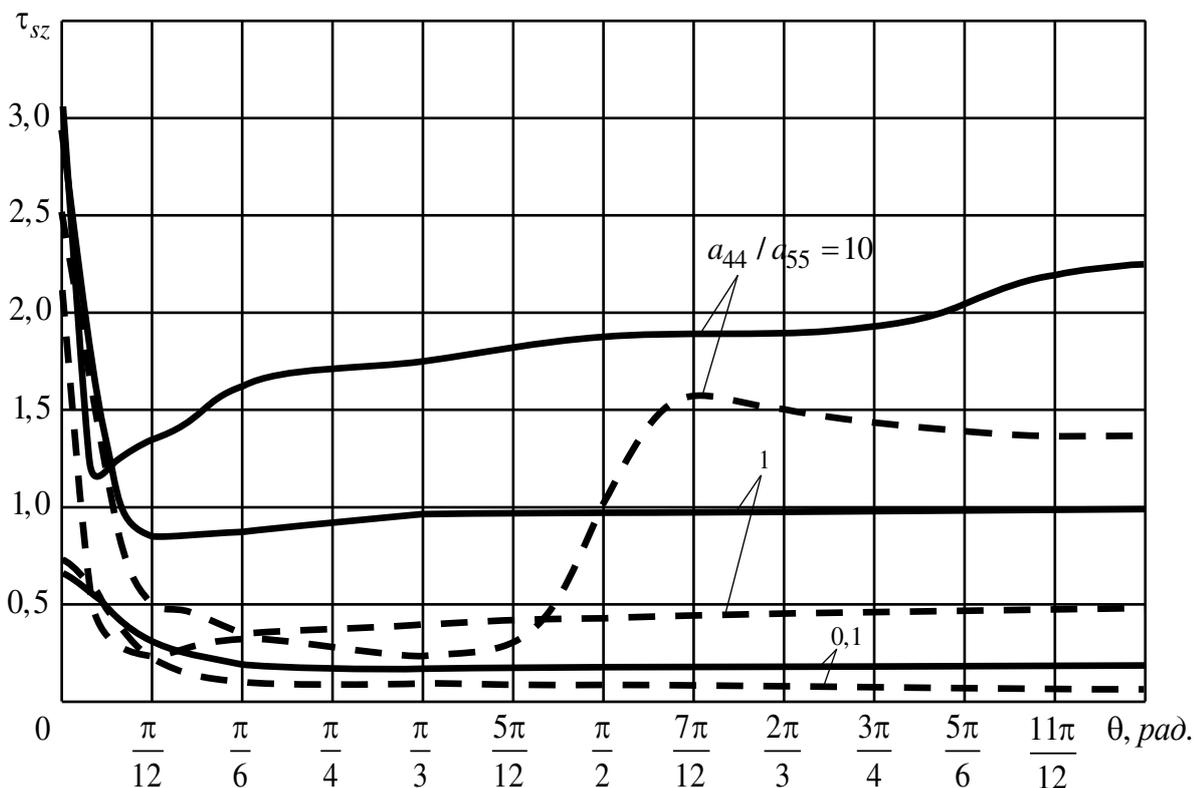


Рис. 7. Графики распределения  $\tau_{sz}$  около контуров  $L_0$  (сплошные линии) и  $L_1$  (штриховые линии) кольцевого цилиндра с трещиной между контурами для  $a_2 / a_0 = 0,22$  и различных материалов

Из данных табл. 4 и рис. 7 видно, что с увеличением длины трещины между контурами концентрического цилиндра значения напряжений в зоне перемычки с трещиной резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах. При этом растут и КИН для концов трещины. При малых длинах трещины ее наличие не нарушает

равномерного распределения напряжений около контуров кольца, и напряжения оказываются такими же, как в сплошном цилиндре или в цилиндре с центральной круговой полостью (ср. данные табл. 4 при  $a_2 / a_0 = 0,01$  с соответствующими данными табл. 1, 2). При выходе трещины на контуры кольца (случай концентрического кругового цилиндра с разрезом между контурами, что в табл. 4 представлены вариантом  $a_2 / a_0 = 0,50$ ) значения напряжений в зонах высокой их концентрации резко уменьшаются.

**Заключение.** Таким образом, с использованием комплексного потенциала кручения решена задача теории упругости о кручении цилиндра с произвольными полостями и плоскими трещинами. При этом комплексный потенциал представлен совокупностями рядов Лорана и рядов по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определение которых из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярных разложений. Проведены численные исследования для кругового цилиндра с круговой полостью или плоской трещиной, кругового цилиндра с центральной круговой полостью и трещиной. Рассмотрены случаи, когда трещины выходят на другие поверхности цилиндра (краевая трещина или разрез между контурами). Описаны закономерности изменения напряженного состояния цилиндра в зависимости от геометрических характеристик и материала цилиндра.

*Работа выполнена по теме государственного задания (номер государственной регистрации 124012400354-0).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Космодамианский А.С. Кручение эллиптического стержня с двумя круговыми полостями // Инженерный сборник. – 1961. – Т. 21. – С. 26–29.
3. Калоеров С.А., Бродская Г.Я. Кручение многосвязных тел с трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1987. – Вып. 18. – С.34–38.
4. Горянская Е.С., Калоеров С.А. Кручение анизотропных стержней с полостями и плоскими трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 36–43.
5. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
6. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
7. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Киев-Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
8. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
10. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
11. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
12. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

*Поступила в редакцию 02.09.2024 г.*

**TORSION OF AN ANISOTROPIC CYLINDER WITH  
LONGITUDINAL CAVITIES AND PLANAR CRACKS**

*S.A. Kaloerov, E.I. Soshyna, A.B. Mironenko*

The elasticity theory problem of torsion of a cylinder with arbitrary cavities and planar cracks is solved using the complex potential of the torsion theory of anisotropic body. That said, the original problem is reduced to a redefined system of linear algebraic equations by means of conformal mappings, decompositions of holomorphic functions into Laurent series and Faber polynomials and satisfaction of boundary conditions by the generalized least squares method. This redefined system is solved by the singular value decomposition method. Numerical results are described for a circular cylinder with a circular cavity or a planar crack, including those extending to the outer edge of the cylinder, a circular cylinder with a central circular cavity and a crack between the contours, including those passing into a cut. The regularities of influence of physical and mechanical properties of the cylinder material and geometrical characteristics of holes and cracks on the stress values, their distribution and concentration were investigated.

**Keywords:** torsion of a cylinder; cavities and planar cracks; complex potentials; generalized least squares method; stress intensity factors.

**Калоеров Стефан Алексеевич**

доктор физико-математических наук, профессор;  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный  
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: kaloerov@mail.ru

**Kaloerov Stefan Alekseevich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor;  
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

**Сошина Евгения Игоревна**

Старший преподаватель;  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный  
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: ye.soshyna.tuvm@yandex.ru

**Evgeniya Igorevna Soshyna**

Senior Lecturer;  
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

**Мироненко Андрей Борисович**

Кандидат физико-математических наук, доцент;  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный  
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.  
E-mail: andreyandrey80@mail.ru

**Mironenko Andrey Borisovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent;  
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

*Научное издание*

**Вестник Донецкого национального университета.  
Серия А: Естественные науки**

**2024. – № 2**

Технические редакторы: *М. В. Фоменко, П. А. Машаров*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

---

Адрес редакции:

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,  
ул. Университетская, 24,  
283001, г. Донецк

Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92

E-mail: [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)

URL: <http://donnu.ru//vestnikA>

---