ISSN 2415-7058 (Print)
ISSN 2415-7066 (Online)

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Основан в 1997 году

Серия А
Естественные науки

3/ 2025

Адрес редакции: ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, РФ, 283001
Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92. **E-mail:** vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** http://donnu.ru/vestnikA

С 09.04.2024 г. научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» (далее — Журнал) включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (**Перечень ВАК РФ**) (категория **К2** с 30.05.2025 г.) по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

физико-математические науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин, 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела;

химические науки: 1.4.3. Органическая химия, 1.4.4. Физическая химия;

биологические науки: 1.5.2. Биофизика, 1.5.5. Физиология человека и животных, 1.5.15. Экология, 1.5.19. Почвоведение.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных ВИНИТИ РАН (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

Издается по решению Ученого совета ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Протокол № 10 от 03.09.2025 г.

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. **Естественные науки** **№ 3** Донецк **2025**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Механика

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A. **Natural Sciences** **No 3** Donetsk **2025**

CONTENTS

УДК 517.987 DOI: 10.5281/zenodo.17052511 EDN: AIJENV

ГОМЕОМОРФИЗМЫ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ С УСЛОВИЕМ СОХРАНЕНИЯ МЕРЫ

© 2025. *В. В. Волчков, И. С. Пилипенко*

В работе установлены условия на открытое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, при которых гомеоморфизм $F : X \to \mathbb{R}^2$, сохраняющий меру любого замкнутого единичного квадрата и замкнутого единичного полукруга из X, будет сохранять меру любого измеримого по Лебегу подмножества X. Также показано, что установленные условия существенно ослабить нельзя.

Ключевые слова: гомеоморфизм, мера Лебега, множество Помпейю, сохранение меры.

Введение. Пусть X – непустое открытое подмножеств вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$. Будем говорить, что гомеоморфизм $F : X \to \mathbb{R}^n$ сохраняет меру, если для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset X$ его n–мерная лебегова мера $m_n(A)$ совпадает с $m_n(F(A))$, где

$$F(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : F^{-1}(x) \in A\}.$$

Обозначим через $MP(X)$ множество всех гомеоморфизмов $F : X \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих меру. Отображения со свойством сохранения меры играют важную роль в теории информации, эргодической теории и других областях (см., например, [1, гл. 5, §7]).

В монографии [1, гл. 5, §7] поставлена следующая проблема 1.

Проблема 1. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая совокупность измеримых подмножеств X. Пусть также гомеоморфизм $F : X \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$m_n(A) = m_n(F(A)) \text{ для любого } A \in \mathcal{A}. \quad (1)$$

При каких условиях на $\mathcal{A}$ можно утверждать, что $F \in MP(X)$?

Например, если $\mathcal{A}$ состоит из всех подмножеств X нулевой меры, то этого утверждать нельзя (условие (1) выполняется для любого C^1– диффеоморфизма $F : X \to \mathbb{R}^n$). В этом случае (1) является известным N-условием Лузина, введённым в 1915 г.

Далее будем обозначать через $HN(X)$ множество всех гомеоморфизмов $F : X \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих N–условию. Очевидно, $MP(X) \subset HN(X)$.

В [1, гл. 5, §7] получены некоторые результаты положительного и отрицательного характера, связанные с проблемой 1. В частности, показано, что если $F \in HN(X)$, то из (1) следует, что $F \in MP(X)$ в случае, когда $\mathcal{A} = \{g(A)\}$, где A– фиксированное множество Помпейю (см. [1, гл. 4, §1, п. 2]) в X, а g– любая изометрия пространства $\mathbb{R}^n$, для которой $g(A) \subset X$. Отметим, что полного описания множеств Помпейю до сих пор не получено. Подробные обзоры по этому вопросу содержатся в [1–3].

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6)

Можно показать, что даже в случае $X = \mathbb{R}^n$ выполнение условия (1) на всех шарах фиксированного радиуса не гарантирует принадлежности F к $MP(X)$. Некоторые результаты о гомеоморфизмах с N–условием сохраняющих меру шаров из заданного семейства получены в [1], [4].

В данной работе рассматривается случай , когда $n = 2$, а $\mathcal{A}$ состоит из всех замкнутых единичных квадратов и всех замкнутых единичных полукругов, лежащих в области $X \subset \mathbb{R}^2$. Показано, что при некоторых условиях на X (см. теорему ниже теорему 1) из выполнения равенства (1) следует, что $F \in MP(X)$. Кроме того, показано, что указанные условия на X нельзя существенно ослабить (см. теорему 2).

Формулировка основных результатов. Перейдём к формулировкам основных результатов работы. Нам потребуются следующие определение.

Определение 1. Пусть $r_1, r_2 > 0$. Открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть (r_1, r_2)-областью, если выполняются следующие условия:

1. G содержит замкнутый шар радиуса r_1;
2. G является объединением замкнутых шаров радиуса r_2;
3. центры двух любых замкнутых шаров радиуса r_2, содержащихся в G, можно соединить ломаной так, что всякий замкнутый шар радиуса r_2 с центром на этой ломаной содержится в G.

Всюду в дальнейшем рассматриваем случай $n = 2$.

Теорема 1. *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^2$ является (r_1, r_2)-областью при $r_1 = \frac{\sqrt{65}}{8}, r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть также $F \in HN(X)$ и условие (1) выполнено для всех замкнутых единичных квадратов и всех замкнутых единичных полукругов, лежащих в X. Тогда $F \in MP(X)$.*

Очевидно, что утверждение теоремы 1 не может выполняться без каких-либо условий на открытое множество X, поскольку оно должно содержать хотя бы один замкнутый единичный квадрат или полукруг. Поэтому возникает вопрос о том, насколько можно ослабить условия на X из определения 1, содержащиеся в условии теоремы 1. Отметим, что величину $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ уменьшить нельзя, т.к. это радиус круга, описанного вокруг единичного квадрата. Следующий результат показывает, что условие 3 о связности множества центров шаров из определения 1 в общем случае убрать нельзя.

Теорема 2. *Пусть $r_1 > 0, r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда существует область $X \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *X содержит замкнутый круг радиуса r_1;*
2. *X является объединением замкнутых кругов радиуса r_2;*
3. *для области X утверждение теоремы 1 не выполняются даже для C^∞-диффеоморфизмов F.*

Доказательства основных результатов. Обозначим через $\mathcal{K}(G)$ множество функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(G)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам, лежащим в области $G \subset \mathbb{R}^2$ (если G не содержит таких квадратов, то полагаем $\mathcal{K}(G) = L_{\mathrm{loc}}(G)$). Далее нам потребуются следующее вспомогательное утверждение о свойствах $\mathcal{K}(G)$, которое уже использовалось в предыдущих работах.

Лемма 1. *Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^2$ является (r_1, r_2)-областью при $r_1 = \frac{\sqrt{65}}{8}$, $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Путь также $f \in \mathcal{K}(G)$ и интеграл от f по любому замкнутому единичному полукругу, содержащемуся в G, равен нулю. Тогда $f = 0$ в G.*

Доказательство леммы 1 содержится в [5].

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$– области в $\mathbb{R}^n$ и отображение $f : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ является гомеоморфизмом. Тогда для почти всех (по мере Лебега) $x \in \mathcal{U}_1$ существует объёмная производная

$$\mu'_f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{m_n(f(B_r(x)))}{m_n(B_r(x))},$$

где $B_r(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. Если f удовлетворяет N-условию, то множество $f(A)$ измеримо по Лебегу для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathcal{U}_1$. Более того, имеет место равенство

$$m_n(f(A)) = \int_A \mu'_f(x)dx \qquad (2)$$

(см. [1, гл. 1, §1.2]).

Пусть теперь $F \in HN(X)$ и X удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда из условий (1) и (2) следует, что

$$\int_A \mu'_F(x)dx = \int_A dx \qquad (3)$$

для всех замкнутых единичных квадратов $A \subset X$ и всех замкнутых единичных полукругов $A \subset X$. Следовательно, функция $\mu'_F(x) - 1$ удовлетворяет условиям леммы 1. Это означает, что

$$\mu'_F(x) = 1 \text{ для почти всех } x \in X,$$

то есть, равенство (3) выполняется для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset X$. Таким образом, $F \in MP(X)$ и теорема 1 полностью доказана.

□

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим область $X \subset \mathbb{R}^2$, которая является объединением полуплоскости

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$$

и круга

$$\left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x_2^2 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \delta\right)^2\right\},$$

где $\delta > 0$. Очевидно, для любого $r_1 > 0$ область X содержит замкнутый круг радиуса r_1 и является объединением замкнутых кругов радиуса r_2. Выберем теперь $\delta > 0$ и $r > 0$ настолько малыми, чтобы выполнялись следующие условия:

1. круг $B : \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x_2^2 < r^2\right\}$ не пересекается ни с одним из замкнутых единичных полукругов, содержащихся в X;

2. любой замкнутый единичный квадрат $K \subset X$ либо содержит B, либо $K \cap B = \varnothing$.

Из указанных условий следует, что всякая функция $f \in C^{\infty}(X)$, равная нулю вне B и удовлетворяющая условию

$$\int_B f(x)dx = 0,$$

имеет нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам и всем замкнутым единичным полукругам, лежащих в X. Пусть f – ненулевая функция и $M > 0$ такое, что

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| < M \text{ для всех } x \in B. \tag{4}$$

Как известно (см. [5]), функция $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ также имеет нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам и всем замкнутым единичным полукругам, лежащих в X. Рассмотрим отображение $F : X \to \mathbb{R}^2$, определённое следующим образом:

$$F(x) = \Big(F_1(x), F_2(x)\Big), \text{ где } F_1(x) = x_1 \text{ и } F_2 = x_2 + \frac{f(x)}{M}.$$

Из условия (4) следует, что функция

$$u(t) = t + \frac{1}{M} f(x_1, t),\ t \in (-\infty, +\infty)$$

строго возрастает при любом фиксированном $x_1 \in \mathbb{R}$. Отсюда и из определения F получаем, что отображение $F : X \to \mathbb{R}^2$ является C^{∞}-диффеоморфизмом и

$$\mu'_F(x) = 1 + \frac{1}{M}\frac{\partial f}{\partial x_2} > 0.$$

С учётом сказанного выше, это означает, что выполнено условие 3. Кроме того, поскольку $f = 0$ вне B, функция $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ не равна нулю тождественно в X. Поэтому существует измеримое по Лебегу множество $E \subset X$, такое что

$$\int_E \mu'_F(x)dx \neq \int_E dx.$$

В силу (2), это означает, что

$$m_n(F(E)) \neq m_n(E),$$

то есть, утверждение теоремы 1 не выполняется для C^{∞}-диффеоморфизма $F : X \to \mathbb{R}^2$. Это завершает доказательство теоремы 2.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
2. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
3. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser, Basel, 2013. – 592 p.
4. Очаковская О. А. Теоремы о двух радиусах для гомеоморфизмов, сохраняющих меру / О. А. Очаковская // ДАН. – 2006. – Т. 408, №4. – С. 1-3.

5. Волчков В. В. Аппроксимация функций в Lp линейными комбинациями индикаторов / В. В. Волчков, И. С. Пилипенко // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2024. – № 2. – С. 3–8.

Поступила в редакцию 04.08.2025 г.

HOMEOMORPHISMS OF FLAT AREAS WITH CONSERVATION CONDITION MEASURES

V. V. Volchkov, I. S. Pilipenko

The paper establishes conditions for the open set $X \subset \mathbb{R}^2$ under which the homeomorphism $F : X \to \mathbb{R}^2$, which preserves the measure of any closed unit square and any closed unit semidisk of X, preserves the measure of any Lebesgue measurable subset of X. It is also shown that the established conditions cannot be significantly weakened.

Keywords: homeomorphism, the Lebesgue measure, Pompeiu set, saving the measure.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ;
ФГБНУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, РФ.
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Volchkov Valeriy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences,
Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia;
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Russia.

Пилипенко Ирина Сергеевна
студентка кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ
E-mail: irinasergeevnapilipenko@yandex.ru

Pilipenko Irina Sergeevna
Student, Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.988.28 DOI: 10.5281/zenodo.17052517 EDN: KXSQYZ

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПОЛНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2025. *В. В. Волчков, К. В. Сероштанова*

В работе получено условие, при котором выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом. Это условие связано с равенством нулю криволинейных интегралов по границам квадратов, конгруэнтных данному.

***Ключевые слова*:** полный дифференциал, свойство Помпейю, множество Помпейю, класс квазианалитических функций, теорема Мореры.

Введение. Из курса математического анализа известно, что у дифференцируемой функции двух переменных $U(x, y)$ есть два частных дифференциала:

$$dU_x(x, y) = U'_x(x, y)dx; \qquad dU_y(x, y) = U'_y(x, y)dy.$$

Полным дифференциалом называется сумма частных дифференциалов:

$$dU(x, y) = dU_x(x, y) + dU_y(x, y) = U'_x(x, y)dx + U'_y(x, y)dy.$$

Нахождение полного дифференциала позволяет оценить, насколько изменится значение функции при изменении всех переменных, от которых она зависит. Кроме того, по заданному полному дифференциалу некоторой функции $U(x, y)$ можно найти саму функцию. Важно отметить, что из существования частных производных первого порядка, вообще говоря, не следует существование полного дифференциала (т. е. дифференцируемость функции нескольких переменных). Однако если предположить, что эти частные производные не только существуют, но и непрерывны в окрестности заданной точки, то функция в этой точке дифференцируема. В то же время даже из дифференцируемости всюду функции нескольких переменных, вообще говоря, не следует непрерывность ее первых частных производных [1].

Пусть в некоторой односвязной области заданы две непрерывно дифференцируемые функции $P(x.y)$ и $Q(x, y)$. При изучении дифференциальных уравнений вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

возникает вопрос о том, когда выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Он тесно связан с вопросом об условиях независимости криволинейного интеграла от выбора пути интегрирования. Ответы на указанные вопросы можно резюмировать в виде следующей теоремы, рассматриваемой в курсе математического анализа [2].

Исследование проводилось по темам государственных заданий № 1023020800027-5-1.1.1 и № 124012400352-6.

Теорема 1. *Пусть функции P и Q непрерывно дифференцируемы в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1)$\int_\gamma Pdx + Qdy = 0$ для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$;

2) для любых точек $A, B \in D$ интеграл $\int_{\gamma_{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от кусочно-гладкой кривой $\gamma_{AB} \subset D$, соединяющей точки A и B;

3) выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой дифференцируемой в области D функции U;

4) в области D выполнено условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

В доказательстве теоремы 1 используют широкий произвол в выборе контуров γ. Вместе с тем в ряде случаев это требование на γ можно значительно ослабить. В работе [3] было доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции P и Q непрерывно дифференцируемы в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, являющейся объединением открытых кругов, радиус каждого из которых больше $\sqrt{5}/2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1)$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = 0$ для любого единичного квадрата $K \subset D$;

2) выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой дифференцируемой в области D функции U.

Особенность этого результата состоит в том, что контуры, по которым ведется интегрирование, конгруэнтны границе единичного квадрата. Отметим также, что при подходящем размере области D вместо квадратов в теореме 2 можно брать и различные другие множества. Указанные явления тесно связаны с некоторыми экстремальными задачами о множествах Помпейю (см. [4]).

В данной работе мы рассмотрим случай, когда функции принадлежат классу квазианалитических функций и интегрирование ведется не по всем контурам, а по границам квадарата фиксированного размера.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Пусть G – открытое множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для последовательности $\mu = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел обозначим через $C^\mu(G)$ множество функций $f \in C^\infty(G)$, таких что для любого компакта $E \subset G$ существует постоянная $c_E > 0$, зависящая от E и f, такая что

$$\max_{z\in E} |(\partial^\alpha f)(z)| \le c_E^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}$$

для всех операторов частного дифференцирования ∂^α порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \ge 0$. Пусть также B_R – открытый круг радиуса R.

В работе [5] было получено утверждение, которое связано с проблемой Помпейю. Сформулируем его.

Теорема 3. *Пусть $f \in C^\mu(B_R), R > \frac{\sqrt{2}}{2}$ и имеет нулевые интегралы по всем замкнутым единичным квадратам, лежащим в круге B_R. Тогда, если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q\ge j} M_q^{1/q}} = +\infty, \tag{1}$$

то $f \equiv 0$ в B_R.

Согласно известной теореме Данжуа-Карлемана условие (1) означает, что f принадлежит квазианалитическому классу функций.

Основной результат. Сформулируем и докажем основной результат.

Далее предполагается, что последовательность $\mu = \{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям

$$M_q^{1/q} \leq M_{q+1}^{1/(q+1)} \leq C M_q^{1/q}, \quad q = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

для некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от q.

Теорема 4. *Пусть функции $P, Q \in C^{\mu}(G)$, где $G \in \mathbb{R}^2$ – односвязная область, которая является объединением открытых кругов с радиусами, большими чем $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, $d > 0$ – фиксированное. Пусть также выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} = +\infty. \tag{3}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\int_{\partial K} Pdx + Qdy = 0$ для любого замкнутого квадрата $K \subset G$ со стороной длины d;

2) выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой дифференцируемой в области D функции U.

Отметим, что утверждение теоремы 4 станет неверным, если условие (3) не выполняется. Условие для множества G в теореме 4, связанное с величиной $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, также убрать нельзя (в противном случае множество G может не содержать ни одного замкнутого квадрата со стороной длины d).

Доказательство. Условие 1 очевидным образом следует из условия 2 (см. теорему 1). Докажем, что условие 2 следует из 1. В силу условия теоремы область G можно представить в виде

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} B_{R_\alpha}(\xi_\alpha), \qquad \xi_\alpha \in \mathbb{R}^2, \quad R_\alpha > \frac{d\sqrt{2}}{2},$$

где A — некоторое множество индексов, $B_{R_\alpha}(\xi_\alpha) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_\alpha| < R_\alpha\}$. При этом

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = 0$$

для любого единичного квадрата $K \subset B_{R_\alpha}(\xi_\alpha)$, $\alpha \in A$. Тогда по формуле Грина имеем

$$\int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial K} Pdx + Qdy = 0$$

Из (2) и [6, предложение 8.4.1] следует, что C^{μ} является кольцом, замкнутым относительно дифференцирования. Отсюда и из теоремы 3 видно, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в G. Теперь, используя теорему 1, получаем требуемое утверждение. □

Ранее авторами было получено следствие из теоремы 4 (см. [7]).

Теорема 5. *Пусть $d > 0$ фиксировано и множество $G \subset \mathbb{C}$ является объединением открытых кругов с радиусами, большими чем $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. Пусть также функция $f \in C^{\mu}(G)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0$$

для любого замкнутого квадрата $K \subset G$ со стороной длины d. Тогда, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q\geq j} M_q^{1/q}} = +\infty, \tag{4}$$

то f голоморфна в G.

Данное утверждение является аналогом теоремы Мореры, в которой из условия нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции, добавив при этом условие квазианалитичности. Другие уточнения теоремы Мореры и вопросы связанные с интегральными условиями голоморфности см. в работах [4, 8, 9].

Данные результаты могут быть полезны при дальнейших исследованиях, связанных с проблемами типа Помпейю на ограниченных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II / В.А. Зорич. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
2. Волчков В. В. О некоторых свойствах функций, характеризуемых нулевыми интегралами / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, Н.П. Волчкова // Матем. обр. – Вып. 42. – 2021. – С. 38–48.
3. Волчков В.В. О некоторых свойствах функций, характеризуемых нулевыми интегралами. Окончание / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, Н.П. Волчкова // Матем. обр. – Вып. 1. – 2022. – С.38–47.
4. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations / V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – P. 454.
5. Волчков В.В. Квазианалитичность и локальное свойство Помпейю / В.В. Волчков, К.В. Тимофеева // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – Донецк, 2023. – № 2. – С. 21-27.
6. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т.1 Теория распределений и анализ Фурье. Пер. с англ. / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
7. Тимофеева К.В. Аналог теоремы Мореры для квазианалитических функций // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2024» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова. [Электронный ресурс] – М.: МОО СИПНН Н.Д. Кондратьева, 2024. – С. 1–2.
8. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
9. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser, Basel, 2013. – 592 p.

Поступила в редакцию 21.07.2025 г.

SHARPENING OF THE THEOREM ON THE COMPLETE DIFFERENTIAL FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

V. V. Volchkov, K. V. Seroshtanova

In the work, a condition is obtained under which the expression $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ is a complete differential. This condition is related to the equality of zero of curvilinear integrals along the boundaries of squares congruent to the given one.

Keywords: complete differential, Pompeiu's property, Pompeiu's set, a class of quasi-analytic functions, Morera's theorem.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ;
ФГБНУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, РФ.
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Volchkov Valeriy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences,
Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia;
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Russia.

Серoштанова Карина Витальевна
аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.
E-mail: ktimofeeva75@gmail.com

Seroshtanova Karina Vitalievna
Donetsk State University, Donetsk, Russia.

УДК 517.444 DOI: 10.5281/zenodo.17052529 EDN: WZCGYO

ПРОБЛЕМЫ ИНЪЕКТИВНОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

© 2025. *В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, А. О. Мисакордзиян*

В работе получены условия, при которых функция с нулевыми интегралами по заданному семейству шаров равна нулю.

***Ключевые слова*:** сферические средние, проблемы инъективности, функции Бесселя.

§ 1. Введение. Основным объектом изучения в интегральной геометрии являются преобразования, ставящие в соответствие функциям из заданного класса $\mathcal{F}$ на многообразии X их интегралы по подмногообразиям в X из заданного множества Υ. Для всякого такого преобразования I возникают следующие задачи.

1. Выяснить, является ли I инъективным, и если не является, то найти его ядро.

2. Если I инъективно, то найти обратное к I преобразование на его области определения.

Задача 1 впервые была рассмотрена Г. Минковским в 1904 г. [1] для следующего случая: $X = \mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$, $\mathcal{F} = C(\mathbb{S}^2)$, Υ – семейство всех замкнутых геодезических (больших окружностей) на $\mathbb{S}^2$, а

$$(If)(\gamma) = \int_{\gamma} f(\xi)dl(\xi), \quad \gamma \in \Upsilon, \tag{1}$$

где dl – элемент длины дуги. Г. Минковский установил, что ядро преобразования (1) совпадает с классом нечетных непрерывных функций на $\mathbb{S}^2$, и применил этот результат для решения некоторых проблем в теории выпуклых тел (см., например, [2], [3, ч. 3, § 17]).

В дальнейшем задачи 1, 2 для различных случаев исследовались многими авторами (см. [4–8] и библиографию к этим работам). Наиболее изученными примерами преобразований I являются преобразование Радона (см. [4–6]) и преобразование Помпейю (см. [6–8]).

В современных исследованиях особое внимание уделяется различным обобщениям интегрально-геометрических преобразований, в которых рассматривается интегрирование функций с некоторым весом (см. [8–11]). Аналоги сформулированных выше задач для таких преобразований имеют важное значение для многочисленных приложений в ряде вопросов анализа (см. [6–8]). Как правило, при их исследовании возникают дополнительные трудности, преодоление которых требует новых идей и методов. Например, при изучении преобразования Радона с весом потребовалось, в отличие от классической ситуации, привлечение техники микролокального анализа (см. [9, 10]).

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6).

Начиная с середины 60-х годов прошлого века во многих работах изучался вопрос о точных условиях, при выполнении которых функция из ядра преобразования I обязана быть нулевой (см. [4–8]). В частности, для преобразования Минковского была получена следующая теорема единственности (см. [5, гл. 3, теорема 1.25], [12, 13]):

Теорема A. *Пусть* $\delta < \frac{\pi}{2}$ *и*

$$K_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{S}^2 : \delta < d(o,\xi) < \pi - \delta\right\},$$

где $d(\cdot,\cdot)$ *– внутренняя метрика на* $\mathbb{S}^2$, $o = (0,0,1)$. *Пусть также* f *– непрерывная четная функция на* K_δ, *удовлетворяющая следующим условиям*:

(i) f *имеет нулевые интегралы по всем замкнутым геодезическим, лежащим в* K_δ;

(ii) $f \in C^\infty$ *в некоторой окрестности экватора* $E_0 = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : d(o,\xi) = \frac{\pi}{2}\}$, *и все производные от* f *равны нулю на* E_0.

Тогда $f = 0$.

Отметим, что при $\delta < 0$ множество K_δ совпадает с $\mathbb{S}^2$ и теорема A вытекает из результата Г. Минковского. В этом случае требование, налагаемое на функцию f из п. (ii), является лишним. Если $0 \le \delta < \frac{\pi}{2}$, то условие (ii) в теореме A не может быть опущено (см. замечание после теоремы 1.25 в [5, гл. 3]. Вопрос об описании функций $f \in C(K_\delta)$, удовлетворяющих условию (i), рассматривался в [14]. В этой работе получено решение этой задачи и некоторых её обобщений, связанных с рассмотрением преобразования Минковского с весом специального вида. В качестве следствий в [14] получены некоторые теоремы единственности, которые носят окончательный характер.

Пусть f – локально суммируемая функция на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (обозначение $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$), E – заданное множество положительных чисел. Предположим, что при всех $r \in E$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{|y|\le r} f(x+y)dy = 0, \tag{2}$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для каких E отсюда следует, что f – нулевая функция? Известная теорема Л. Зальцмана о двух радиусах утверждает, что $f = 0$, если E состоит из двух положительных чисел r_1 и r_2, для которых число r_1/r_2 не является отношением корней функции Бесселя $J_{n/2}$ (см. [15]). Примеры показывают (см. [15]), что указанное условие для r_1/r_2 является необходимым.

Получение локального аналога теоремы Зальцмана, например, когда f задана в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $R > \max(r_1, r_2)$ и равенство (2) выполнено при всех $x \in B_{R-r}$, является существенно более трудной проблемой. Возникающее при этом нарушение групповой структуры сдвигов, действующей на пространстве решений (2), создаёт серьёзные препятствия для применения методов анализа Фурье, использованных в [15]. Первые результаты в этом направлении содержатся в работах Д. Смита, К.А. Беренстейна, Р. Гэя, А. Ижера (см. [16–18]). Принципиально новый метод, основанный на явном решении уравнения (2) в специальных функциях, был предложен в [19], где получен окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах. Для его формулировки введем следующие обозначения: $\Lambda_n = \{\nu_1, \nu_2, \ldots\}$ – последовательность всех положительных корней функции $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания; E_n – множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$;

$$A_n = \left\{t > 0 : \forall N > 0\ \exists \alpha, \beta \in \Lambda_n : \left|t - \frac{\alpha}{\beta}\right| < (1+\beta)^{-N}\right\}.$$

Структура множества A_n подробно изучена в [19, § 8]. Отметим, что A_n имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$ и пересечение A_n с любым интервалом $(a, b) \subset (0, +\infty)$ имеет мощность континуума. В работе [19] доказана

Теорема B. *Пусть* $E = \{r_1, r_2\}$, $R > \max(r_1, r_2)$, $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ *и*

$$\int_{|y| \le r} f(x + y)dy = 0 \quad \textit{при всех } r \in E, x \in B_{R-r}. \tag{3}$$

Тогда выполнены следующие утверждения:

1) *если* $r_1 + r_2 < R$ *и* $r_1/r_2 \notin E_n$, *то* $f = 0$;

2) *если* $r_1 + r_2 = R$, $r_1/r_2 \notin E_n$ *и* $f \in C^\infty(B_R)$, *то* $f = 0$;

3) *если* $n = 1$, $r_1 + r_2 = R$ *и* $r_1/r_2 \notin E_1$, *то* $f = 0$;

4) *если* $r_1 + r_2 = R$ *и* $r_1/r_2 \in A_n \backslash E_n$, *то* $f = 0$;

5) *если* $n \geq 2$, $r_1 + r_2 = R$ *и* $r_1/r_2 \notin A_n$, *то для любого* $m \in N$ *существует ненулевая* $f \in C^m(B_R)$ *с условием* (3);

6) *если* $r_1 + r_2 > R$, *то существует ненулевая* $f \in C^\infty(B_R)$ *с условием* (3);

7) *если* $r_1/r_2 \in E_n$, *то существует ненулевая вещественно аналитическая на* $\mathbb{R}^n$ *функция* f, *для которой равенство* (3) *выполнено при всех* $x \in \mathbb{R}^n$.

Отметим, что утверждения 1), 2) и 7) теоремы B содержатся и в предшествующих работах [15–18]. При $R > r_1 + r_2 + \min(r_1, r_2)$ первое утверждение доказано Д. Смитом [16]. Различные доказательства утверждений 1), 2) были даны К.А. Беренстейном, Р. Гэем и А. Ижером (см. [17, 18]). Утверждение 6) при дополнительном ограничении $r_1/r_2 \notin A_n$ получено в [17].

Утверждения 5), 2) и 7) теоремы B позволяют сделать вывод о характере максимальной гладкости ненулевых функций, удовлетворяющих (3) при соответствующих r_1, r_2. В частности, наибольшая степень гладкости (вещественная аналитичность) у таких функций достигается в случае $r_1/r_2 \in E_n$. При условиях утверждения 5) допустима любая конечная гладкость и этот результат является неулучшаемым (см. утверждение 2)). В остальных случаях, т.е. при $r_1/r_2 \notin E_n$ и $r_1 + r_2 > R$, вопрос о точной характеристике максимальной гладкости $f \neq 0$, удовлетворяющей (3), оставался открытым, пока в [6] не было получено решение этой задачи в терминах теории квазианалитических классов функций.

Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n-мерных мультииндексов, т.е. всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными целыми координатами. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с длиной $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ обозначим $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}/(\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n})$ – операторы частного дифференцирования порядка $|\alpha|$. Пусть также $\overline{G}$ – замыкание области $G \subset \mathbb{R}^n$.

В [6] получена следующая

Теорема C. *Пусть* $E = \{r_1, r_2\}$, $R > r_2 > r_1$, $r_1 + r_2 > R$, $f \in C^\infty(B_R)$ *и выполнено условие* (3). *Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) *если* $r_1/r_2 \notin E_n$ *и существует последовательность положительных чисел* $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ *такая, что*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} = \infty \tag{4}$$

и для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\sup_{x \in B_{r_1}} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|}, \tag{5}$$

то $f = 0$;

2) *для любой последовательности положительных чисел* $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ *такой, что*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} < \infty,$$

существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$, *удовлетворяющая* (3), *у которой*

$$\sup_{x \in B_R} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|}$$

при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Согласно теореме Карлемана условия (4), (5) означают, что f принадлежит квазианалитическому классу функций в шаре $\overline{B}_{r_1}$. В частности, при $r_1/r_2 \in E_n$ первое утверждение теоремы C неверно (см. утверждение 7) теоремы B). Отметим также, что в неравенстве (5) нельзя заменить B_{r_1} открытым шаром меньшего радиуса с центром в нуле. Таким образом, точной характеристикой максимально допустимой гладкости $f \neq 0$, удовлетворяющей (3) при $r_1/r_2 \notin E_n$, $r_1 + r_2 > R$, является отсутствие квазианалитичности в $\overline{B}_{r_1}$.

По поводу других результатов, связанных с теоремой о двух радиусах, см. [6–8, 20–28] и библиографию к этим работам.

Для всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$ и почти всех (по мере Лебега) $r \in (0, +\infty)$ определено преобразование Радона на сферах

$$\mathcal{R}f(x,r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + r\sigma) d\sigma,$$

где $d\sigma$ – элемент поверхности сферы $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Ядром преобразования $\mathcal{R}$ (на классе $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$) относительно множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множество функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, у которых $\mathcal{R}f(x,r) = 0$ для всех $x \in A$ и почти всех $r \in (0, +\infty)$. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством инъективности* преобразования $\mathcal{R}$, если ядро $\mathcal{R}$ относительно A содержит только нулевую функцию. Аналогично определяются ядро и множества инъективности преобразования $\mathcal{R}$ на других классах локально суммируемых функций.

Для данного $A \subset \mathbb{R}^n$ возникает следующая

Проблема. *Выяснить, является ли* A *множеством инъективности и если не является, то описать ядро преобразования* $\mathcal{R}$ *относительно* A.

Известно, что всякое множество A, плотное в некотором шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, является множеством инъективности (см. [29, с. 103], а также [30, теорема 5]). В случае, когда A нигде не плотно в $\mathbb{R}^n$, поставленные вопросы являются, как правило, чрезвычайно трудными и почти не исследованы. Немногочисленные результаты в этом направлении имеются лишь для гораздо более узких, чем $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, классов функций (см. [31] и библиографию к этой работе). Единственный из известных до настоящего времени точных результатов получен при $n = 2$ М.Л. Аграновским и Е.Т. Квинто: множество $A \subset \mathbb{R}^2$ является множеством инъективности преобразования $\mathcal{R}$ на классе финитных функций тогда и только тогда, когда любой сдвиг A не содержится в объединении множества нулей однородного гармонического многочлена и конечного числа точек в $\mathbb{R}^2$ (см. [31]). Доказательство этого утверждения основано на применении микролокального анализа и существенно использует компактность носителей рассматриваемых функций. Некоторые более частные результаты для классов $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2n/(n-1)$, получены М.Л. Аграновским, К.А. Беренстейном и П.А. Кучментом [32].

Позже была разработана другая методика, использующая разложение по специальным функциям и позволяющая решать многие задачи, связанные с шаровыми и сферическими средними (см. [19, 23–28] и библиографию к этим работам). В работе [26] на основе техники, предложенной в [19, 23–28] получено решение сформулированной выше проблемы для сферически симметричных (т.е. инвариантных относительно вращений) множеств A. Методика доказательства дает и другие точные результаты, связанные с преобразованием Радона на сферах.

Как и выше, обозначим E_{n+2k-2} $(k \in \mathbb{Z}_+)$ – множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta > 0$ и

$$J_{\frac{n}{2}+k-1}(\alpha) = J_{\frac{n}{2}+k-1}(\beta) = 0.$$

Пусть также

$$U_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_{n+2k-2}.$$

Теорема D. *Пусть $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$, $r_1, r_2 \in (0, R)$ фиксированы и*

$$\mathcal{R}f(r_k x, r) = 0$$

для любого $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ и почти всех $r \in (0, R - r_k)$, $k = 1, 2$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) *если $r_1 + r_2 \le R$ и $r_1/r_2 \notin U_n$, то $f = 0$;*

2) *если $r_1 + r_2 > R$ или $r_1/r_2 \in U_n$, то существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющая* (6).

Теоремы B, C, D интересно сравнить с различными вариантами известных теорем о двух радиусах, полученных Ж. Дельсартом, Л. Зальцманом и другими авторами (см. [15–18]). По поводу других результатов, связанных с классическим преобразованием Радона и его обобщениями, см. [4, 10, 12] и библиографию к этим работам.

§ 2. Формулировка основного результата

Пусть $R > 0$ и $r_1, r_2 \in (0, R)$ фиксированы. Обозначим через $\mathcal{B}(R, r_1, r_2)$ семейство всех шаров, содержащихся в B_R и принадлежащих одному из следующих множеств:

1) множество всех замкнутых шаров радиуса r_1;

2) множество всех замкнутых шаров с центрами на сфере радиуса r_2 с центром в нуле.

Пусть W_n – множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta > 0$, $J_{\frac{n}{2}}(\alpha) = 0$ и $J_{\frac{n}{2}+k-1}(\beta) = 0$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ и*

$$\int_B f(x)dx = 0 \tag{7}$$

для любого $B \in \mathcal{B}(R, r_1, r_2)$. *Пусть также* $r_1 + r_2 < R$ *и* $r_1/r_2 \notin W_n$. *Тогда* $f = 0$.

Отметим, что условие (7) означает, что f удовлетворяет (2) при $r = r_1$, $x \in B_{R-r_1}$ и удовлетворяет (6) при $k = 2$.

В § 3 данной работы содержатся требуемые обозначения и доказательства вспомогательных утверждений. Доказательство теоремы 1 приводится в § 4.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Далее все функции, определенные и непрерывные в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, а также допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

Пусть ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ (для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$). Следуя [33, гл. 4, § 2], обозначим $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}, k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq l \leq a_k$, ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{H}_k$ сферических гармоник степени k, рассматриваемом как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \tag{8}$$

где

$$f_{kl}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma,$$

$$F_{kl}(x) = f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $SO(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $SO(n)$ на пространство $\mathscr{H}_k$ (см. [34, гл. 9, § 2, п. 7]), $\{t_{ls}^k\}$, $1 \leq l, s \leq a_k$, – матрица представления $T^k(\tau)$, т.е.

$$(T^k(\tau) Y_l^{(k)})(\sigma) = Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{s=1}^{a_k} t_{ls}^k(\tau) Y_s^{(k)}(\sigma),$$

для любых $\tau \in SO(n)$, $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$. При $n = 2$ удобно использовать следующий базис в $\mathscr{H}_k$ ($k \geq 1$):

$$Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad Y_2^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k,$$

(в этом случае $a_k = 2$ при $k \geq 1$). Если τ – вращение на угол θ в $\mathbb{R}^2$, то для этого базиса

$$t_{11}^k(\tau) = e^{-ik\theta}, \quad t_{22}^k(\tau) = e^{ik\theta}, \quad t_{12}^k(\tau) = t_{21}^k(\tau) = 0.$$

При этом для членов ряда (8) имеем равенство

$$F_{kl}(x) = \int_{SO(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{ll}^k(\tau)} d\tau. \tag{9}$$

Если $n \geq 3$, из неприводимости представлений $T^k(\tau)$ (см. [34, гл. 9, § 2, п. 10] следует, что при всех $1 \leq l$, $s \leq a_k$

$$f_{kl}(\rho) Y_s^{(k)}(\sigma) = a_k \int_{SO(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{ls}^k(\tau)} d\tau \tag{10}$$

(см. [24, формула (6)]). Аналогичные обозначения и конструкции используются и для $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$.

Обозначим через χ_r индикатор шара B_r в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{\nu_{q,k}\}_{q=1}^{\infty}$ – последовательность всех положительных корней функции $J_{\frac{n}{2}+k-1}$, занумерованных в порядке возрастания. Нетрудно видеть (см., например, [19, формула (11)], что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \nu_{q,k}^{-\alpha} < \infty \tag{11}$$

для любых $\alpha > 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, имеет место неравенство

$$J^2_{\frac{n}{2}+k}(\nu_{q,k}) > c\nu_{q,k}^{-1} \tag{12}$$

где c больше нуля и не зависит от q (см. [19, формулы (10), (11)]).

Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$, положим

$$\Phi_{kl}(x) = J_{\frac{n}{2}+k-1}(\rho)\rho^{1-\frac{n}{2}} Y_l^{(k)}(\sigma).$$

Далее нам потребуются некоторые простые утверждения о свойствах функций Φ_{kl}.

Лемма 1. *При любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$, $\lambda > 0$ имеют место следующие утверждения*:

1) $\Delta(\Phi_{kl}(\lambda x)) + \lambda^2 \Phi_{kl}(\lambda x) = 0$;

2) *при любом $r > 0$*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi_{kl}(\lambda(x + r\sigma))d\sigma = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\lambda r)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)\Phi_{kl}(\lambda x); \tag{13}$$

3) *для любой функции $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{kl}(\lambda x) g(x) dx = O(\lambda^{-m})$$

при $\lambda \to +\infty$ и любом $m > 0$;

4) *функция Φ_{kl} и ее частные производные любого порядка ограничены в $\mathbb{R}^n$ и $\Phi_{kl}(x) = O(|x|^{(1-n)/2})$ при $|x| \to \infty$.*

Доказательство. Первое утверждение легко получить из равенства

$$\Phi_{kl}(x) = \frac{i^k}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{ix\eta} Y_l^{(k)}(\eta) d\eta \tag{14}$$

(см. [4, введение, лемма 3.6]). Утверждение 2) является следствием теоремы о среднем значении для решений уравнения Гельмгольца (см. [35, гл. 4, § 3, формула (39)]). Третье утверждение вытекает из (14) и быстрого убывания на бесконечности преобразования Фурье функции g. Утверждение 4) следует из (14) и известной оценки для функций Бесселя (см., например, [19, формула (10)]).

При $R > 1$ обозначим $\Psi(B_R)$ множество функций $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, у которых $\mathcal{R}f(x, r) = 0$ для всех $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ и почти всех $r \in (0, R-1)$. Пусть также $\Psi^m(B_R) = \Psi \cap C^m(B_R)$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Нетрудно видеть, что $f \in \Psi(B_R)$ тогда и только тогда, когда для любого

$r \in (0, R-1)$ свертка $f * \chi_r$ равна нулю на $\mathbb{S}^{n-1}$. Аппроксимируя χ_r гладкими радиальными (т.е. зависящими только от $|\cdot|$) функциями, получаем, что условие $f \in \Psi(B_R)$ эквивалентно тому, что для любой радиальной функции $g \in \mathcal{D}(B_{R-1})$ свертка $f * g$ равна нулю на $\mathbb{S}^{n-1}$. В частности, если $f \in \Psi(B_R)$ и функция $g \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < R-1$, радиальна, то $f * g \in \Psi^m(B_{R-\varepsilon})$ при любом $m \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 2. *Пусть $f \in \Psi^m(B_R)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(x) = 0$ *при любом* $x \in \mathbb{S}^{n-1}$;

2) $f_{kl}(\rho)Y_s^{(k)}(\sigma) \in \Psi^m(B_R)$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le l, s \le a_k$ (*аналогичное утверждение верно и для* $f \in \Psi(B_R)$).

Доказательство. Из непрерывности f вытекает равенство

$$\mathcal{R}f(x,r) = r^{n-1}f(x)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma + o(r^{n-1})$$

при $r \to 0$. Отсюда и из определения $\Psi(B_R)$ имеем утверждение 1). Утверждение 2) следует из равенств (9), (10) и определения классов $\Psi^m(B_R)$ и $\Psi(B_R)$.

Лемма 3. *Пусть $R > 1$, $m \ge n+1$ и $f \in C^m(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \Psi(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le l \le a_k$ имело место равенство*

$$\rho^{\frac{n}{2}-1}f_{kl}(\rho) = \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{q,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1}(\nu_{q,k}\rho), \tag{20}$$

где

$$\lambda_{q,k,l} = \frac{2}{J^2_{\frac{n}{2}+k}(\nu_{q,k})}\int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}} f_{kl}(\rho) J_{\frac{n}{2}+k-1}(\nu_{q,k}\rho)\,d\rho, \tag{21}$$

$\lambda_{q,k,l} = O(\nu_{q,k}^{-m+1/2})$ *при $q \to \infty$ и ряд* (20) *сходится равномерно на B_R.*

Доказательство достаточности. Из условия и утверждения 4) леммы 1 следует, что при всех $1 \le l \le a_k$ ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \nu_{q,k}^{-1+\frac{n}{2}} \lambda_{q,k,l}\Phi_{kl}(\nu_{q,k}x)$$

сходится равномерно в B_R к функции F_{kl} (см. (11), (12)). Поскольку $\Phi_{kl}(\nu_{q,k}x) \in \Psi(B_R)$ (см. (13)), имеем $F_{kl} \in \Psi(B_R)$. Отсюда следует (см. [19, доказательство леммы 3]), что $f \in \Psi(B_R)$.

Для доказательства необходимости достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 10 в работе [19].

§ 4. Доказательство основного результата

Перейдём к доказательству теоремы 1. Пусть сначала $f \in C^\infty(B_R)$ и выполнено условие (7). Поскольку множество шаров $\mathcal{B}(R, r_1, r_2)$ инвариантно относительно вращений, вместе с функцией f условиям теоремы удовлетворяют и все функции вида $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le l \le a_k$ (см. доказательство второго утверждения леммы 2). Докажем, что $f_{kl}(\rho) = 0$ при всех $\rho < R$.

Из леммы 3 следует, что F_{kl} представима в виде ряда

$$F_{kl}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \nu_{q,k}^{\frac{n}{2}-1}\lambda_{q,k,l}\Phi_{kl}\left(\frac{\nu_{q,k}}{r_2}x\right),$$

сходящегося равномерно в B_R. Более того, из (11), (12) и утверждения 4) леммы 1 следует, что этот ряд сходится в $C^\infty(B_R)$. Используя второе утверждение леммы 1, находим

$$(F_{kl} * \chi_{r_1})(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{q,k,l} C_q J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{\nu_{q,k}}{r_2} r_1 \right) \Phi_{kl} \left(\frac{\nu_{q,k}}{r_2} x \right),$$

где $x \in B_{R-r_1}$, $C_q = C(q,k,l,n) \neq 0$. Поскольку $r_2 < R - r_1$ и $r_1/r_2 \notin W_n$, отсюда следует, что $\lambda_{q,k,l} = 0$ при всех q,k,l (см. лемму 6 в [26]). Итак, $F_{kl} = 0$ и тогда $f = 0$. Таким образом, теорема 1 доказана в случае $f \in C^\infty(B_R)$. Общий случай получается отсюда стандартным методом сглаживания (см. рассуждения перед формулировкой леммы 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минковский Г. О телах постоянной ширины / Г. Минковский // Матем. сб. – 1905. – Т. 25, № 3. – С. 505–508.
2. Паламодов В. П. Интегральная геометрия и компьютерная томография / В. П. Паламодов. – М.: Изд-во МК НМУ, 1997. – 68 с.
3. Кириллов А. А. Элементы теории представлений / А. А. Кириллов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 343 с.; англ. пер.: Kirillov A. A. Elements of the theory of representations. – Berlin–New York: Springer-Verlag, 1976. – xii+315 pp.
4. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. – М., 1987. – 736 с.; пер. с англ.: Helgason S. Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. – Orlando, FL: Academic Press, Inc., 1984. – xxii+654 pp.
5. Helgason S. Integral geometry and Radon transforms / S. Helgason. – New York: Springer, 2011. – xiv+301 pp.
6. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – xii+454 pp.
7. Volchkov V.V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer-Verlag, 2009. – xii+671 pp.
8. Volchkov V.V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Basel: Birkhauser/Springer, 2013. – xx+592 pp.
9. Quinto E. T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds / E. T. Quinto // Israel J. Math. – 1993. – V. 84, № 3. – P. 353–363.
10. Quinto E. T. Radon transforms on curves in the plane / E. T. Quinto // Tomography, impedance imaging, and integral geometry. Lectures in Appl. Math. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. – V. 30. – P. 231–244.
11. Zhou Y. Two radius support theorem for the sphere transform / Y. Zhou // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 254, № 1. – P. 120–137.
12. Quinto E. T. The invertibility of rotation invariant Radon transforms / E. T. Quinto // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 91, № 2. – P. 510–522; Erratum // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 94, № 2. – P. 602–603.
13. Kurusa A. Support theorems for the totally geodesic Radon transform on constant curvature spaces / A. Kurusa // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 122, № 2. – P. 429–435.
14. Волчков В.В. Описание ядра обобщённого преобразования Минковского на сфере / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, И.М. Савостьянова // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79, № 1. – С. 43–62.
15. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem / L. Zalcman // Arch. Rational Mech. Anal. – 1972. – V. 47. – P. 237–254.
16. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J. D. Smith // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416.
17. Berenstein C.A. A local version of the two-circles theorem / C.A. Berenstein, R. Gay // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
18. Berenstein C.A. Inversion of the local Pompeiu transform / C.A. Berenstein, R. Gay, A. Yger // J. Analyse Math. – 1990. – V. 54. – P. 259–287.
19. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах / В. В. Волчков // Матем. сб. – 1995. – Т. 186, № 6. – С. 15–34.
20. Berenstein C.A. Pompeiu's problem on symmetric spaces / C.A. Berenstein, L. Zalcman // Comm. Math. Helv. – 1980. – V. 55, No 4. – P. 553–621.
21. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques reel et complexe: cas de deux boules / M. El Harchaoui // J. Anal. Math. – 1995. – V. 67. – P. 1–37.

22. Cohen J.M. The 2-circle and 2-disk problems on trees / J.M. Cohen, M.A. Picardello // Israel J. Math. – 1988. – V. 64. – P. 73–86.
23. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций / В. В. Волчков // Матем. сб. – 1997. – Т. 188, № 9. – С. 13–30.
24. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца / В. В. Волчков // Матем. сб. – 1993. – Т. 184, № 7. – С. 71–78.
25. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций / В. В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58, № 1. – С. 182–194.
26. Волчков В. В. О множествах инъективности преобразования Радона на сферах / В. В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63, № 3. – С. 63–76.
27. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и её обобщениях / В. В. Волчков // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, № 2. – С. 30–36.
28. Волчков В. В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны / В. В. Волчков // Докл. РАН. – 1996. – Т. 347, № 3. – С. 300–302.
29. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – М.: ИЛ, 1958. – 158 с.
30. Волчков В. В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов / В. В. Волчков // Сиб. матем. ж. – 1994. – Т. 35, № 4. – С. 737–745.
31. Agranovsky M.L. Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions / M. L. Agranovsky, E. T. Quinto // J. Functional Anal. – 1996. – V. 139, No 2. – P. 383–414.
32. Agranovsky M.L. Approximation by spherical waves in L^p-spaces / M.L. Agranovsky, C.A. Berenstein, P.A. Kuchment // J. Geometric Analysis. – 1996. – V. 6, No 3. – P. 365–383.
33. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 336 с.; пер. с англ.: Stein E. M., Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1971. – xx+297 pp.
34. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. – 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 576 с.; англ. пер.: Vilenkin N. Ja. Special functions and the theory of group representations. – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1968. – x+613 pp.
35. Курант П. Уравнения с частными производными / П. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

Поступила в редакцию 11.08.2025 г.

PROBLEMS OF INJECTIVITY FOR INTEGRAL TRANSFORMS RELATED TO BALL AVERAGES

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, A. O. Misakordziyan

The paper presents conditions under which a function with zero integrals over a given family of balls is equal to zero.

Keywords: spherical means, injectivity problems, Bessel functions.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Volchkov Valery Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia

Волчков Виталий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
E-mail: volna936@gmail.com

Volchkov Vitaliy Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia

Мисакордзиян Арман Ованесович
аспирант,
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
E-mail: kuganov.00@gmail.com

Misakordziyan Arman Ovanesovich
graduate student of Physico-Mathematical Sciences
Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 517.5+519.213 DOI: 10.5281/zenodo.17052536 EDN: QRXYRL

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ ЯДЕР 1-СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2025. *В. П. Заставный*

В работе получена новая рекуррентная формула для ядер, образующих класс положительно определенных функций, зависящих от l_1-нормы. Доказано, что эти ядра продолжаются с положительной полуоси на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа 1.

***Ключевые слова*:** положительно определенная функция, функция Бесселя.

§ 1. Формулировка основного результата. История вопроса. Объектом исследования данной работы является последовательность функций $\omega_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, которые впервые появились в 1983 в работе Cambanis, Keener, Simons [1] в связи с описанием множества 1-симметричных многомерных характеристических функций. Эти функции при $t \ge 0$ определяются следующим образом: $\omega_n(0) = 1$, $\omega_1(t) = \cos t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, j_{-\frac{1}{2}}(t)$ и

$$\omega_n(t) = \frac{2^{n/2}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_1^{+\infty} j_{\frac{n}{2}-1}(tu)u^{-n+1}(u^2-1)^{(n-3)/2}\,du,\ n \ge 2. \tag{1}$$

В частности

$$\omega_2(t) = \frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty} j_0(tu)\,\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \frac{2}{\pi}\int_t^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{si}\,t,$$

$$\omega_3(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_1^{+\infty} j_{\frac{1}{2}}(tu)u^{-2}\,du = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(tu)}{tu^3}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t} + \cos t - t\int_t^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du\right).$$

Здесь

$$j_\lambda(x) := \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\lambda+1)}\cdot\frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!}\ ,\ x \in \mathbb{C}\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}\,, \tag{2}$$

а J_λ – функция Бесселя первого рода (см. [2, § 3.1]).

В [3, Теорема 4.2] с помощью операторов дробного дифференцирования и интегрирования получена формула $\omega_{n+1}(t) = \delta_n W_2^{n/2,1/2} I_2^{(n-2)/2,1/2}\omega_n(t)$, $n \ge 2$.

В следующей теореме получена ещё одна рекуррентная формула для ядер ω_n.

Теорема 1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\gamma_n\omega_n(t) = t\,\omega_{n+1}(t) + n\int_t^{+\infty}\omega_{n+1}(u)\,du,\ t \ge 0;\quad \gamma_n = \frac{2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{3}$$

$$\omega_{n+1}(t) = -\gamma_n\, t^{n-1}\int_t^{+\infty}\frac{\omega_n'(u)}{u^n}\,du = n\gamma_n\int_1^{+\infty}\frac{\omega_n(t)-\omega_n(ts)}{t}\,\frac{ds}{s^{n+1}}\,, t > 0. \tag{4}$$

Кроме того, $\gamma_n\omega_n'(0) = 1 - n$.

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, называется положительно определённой на $\mathbb{R}^n$ ($f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$), если при любом $m \in \mathbb{N}$, для любых точек $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathbb{R}^n$ и для любой системы комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{m} c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0\,.$$

Символом $\Phi(l_p^n)$, $0 < p \leq \infty$, обозначим класс всех непрерывных функций $f :\ [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ таких, что функция $f(\|x\|_p) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, где

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 0 < p < \infty,\ \|x\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n} |x_k|,\ p = \infty.$$

Функции из класса $\Phi(l_p^n)$, равные в нуле 1, совпадают со множеством p-симметричных n-мерных характеристических функций. При $n = 1$ классы $\Phi(l_p^1)$ совпадают. При $2 < p \leq \infty$, $n \geq 3$, классы $\Phi(l_p^n)$ состоят только из неотрицательных констант (см. [4, 5], а при $p = \infty$ см. также [6]). В остальных случаях полное описание классов $\Phi(l_p^n)$, $n \in \mathbb{N}$, известно только при $p = 2$ (см. [7]) и $p = 1$ (см. [1, 8]), а также при $p = \infty$, $n = 2$, т.к. $\Phi(l_\infty^2) = \Phi(l_1^2)$ ([9], см. также [10, Лемма 2]).

Символом P_+ будем обозначать множество всех конечных неотрицательных борелевских мер на $[0, +\infty)$.

Теорема A ((Шёнберг (1938) [7, Теорема 1]))**.** *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\Phi_n := \Phi\left(l_2^n\right) = \left\{f(t) = \int_0^{+\infty} j_{\frac{n}{2}-1}(ts)\, d\mu(s),\ \mu \in P_+\right\}.$$

Аналог теоремы Шенберга для класса $\Phi(l_1^n)$ получен в 1983 в работе Cambanis, Keener, Simons [1] и независимо в 1997 в работе Berens, Xu [8]:

Теорема B ((Cambanis, Keener, Simons [1]))**.** *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\Phi\left(l_1^n\right) = \left\{f(t) = \int_0^{+\infty} \omega_n(ts)\, d\mu(s),\ \mu \in P_+\right\}. \tag{5}$$

Из теорем A и B следует, что $\omega_n \in \Phi(l_1^n) \subset \Phi_n$, $n \in \mathbb{N}$.

В работе [8] представление (5) получено с ядром $m_n(t)$, для которого имеет место рекуррентная формула (см. [8, Лемма 4.2])

$$\begin{gathered} m_{n+2}(t) = t^n \int_t^{+\infty} \left(\int_0^u \tau^n\, m_n(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau}\right) \frac{du}{u^{2n+1}}\,,\ n \in \mathbb{N}, \\ m_1(t) = \frac{1}{2\pi}\, \cos t,\ m_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$m_{n+2}(t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^n} \left(\int_0^1 s^n\, m_n(tys)\, \frac{ds}{s}\right) \frac{dy}{y},\ t \geq 0,\ m_{n+2}(0) = \frac{m_n(0)}{n^2},\ n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Учитывая равенства $m_1(0) = 1/(2\pi)$ и $m_2(0) = 1/4$, не сложно показать, что

$$m_n(0) = \frac{1}{2^n \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что (см. [8, Лемма 4.4]) для $n \in \mathbb{N}$ имеет место асиптотика

$$2\pi m_n(t) = \frac{\cos t}{t^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{\sin t}{t^n} + O(t^{-1-n}) = O(t^{1-n}),\ t \to +\infty. \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует, что

$$t\, m'_{n+2}(t) = n\, m_{n+2}(t) - \frac{1}{t^n}\int_0^t \tau^{n-1}\, m_n(\tau)\, d\tau = O(t^{-n}),\ t \to +\infty,\ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

§ 2. Доказательство равенства $m_n(t) = m_n(0)\,\omega_n(t)$. В работе [11, § 2] отмечено, что $m_n(t) = m_n(0)\,\omega_n(t)$. Приведем непосредственное доказательство этого равенства.

В 1998 Гнайтинг [12, Теорема 2.1] установил замечательную связь между ядрами для классов $\Phi(l_1^n)$ и Φ_{2n-1} (этот результат другим методом был получен в [11]):

$$\begin{aligned} &\omega_n(t) = c_n I^{n-1} j_{n-\frac{3}{2}}(t),\ c_n = \frac{2^{n-\frac{3}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}},\ n \in \mathbb{N},\\ &\omega_n^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} c_n j_{n-\frac{3}{2}}(t),\ \text{ где } If(t) := \int_t^{+\infty} f(u)\,du,\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая равенство $j'_\nu(t) = -tj_{\nu+1}(t)$, из (10) для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $t \geq 0$ получаем следующие два равенства

$$\begin{aligned} &\omega_n^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} c_n j'_{n-\frac{3}{2}}(t) = (-1)^n c_n t j_{n-\frac{1}{2}}(t),\\ &t\omega_{n+1}^{(n)}(t) = (-1)^n c_{n+1} t j_{n-\frac{1}{2}}(t) = \gamma_n \omega_n^{(n)}(t),\ \gamma_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \geq 0$ для производной n-го порядка выполняется равенство

$$\begin{aligned} &\left(n^2\omega_n(t) - n^2\omega_{n+2}(t) + t\omega'_{n+2}(t) + t^2\omega''_{n+2}(t)\right)^{(n)} =\\ &n^2\omega_n^{(n)}(t) + (2n+1)t\omega_{n+2}^{(n+1)}(t) + t^2\omega_{n+2}^{(n+2)}(t) =\\ &(-1)^n c_n n^2 t j_{n-\frac{1}{2}}(t) + (2n+1)(-1)^{n+1} c_{n+2} t j_{n+\frac{1}{2}}(t) + t^2(-1)^n c_{n+2} t j_{n+\frac{3}{2}}(t). \end{aligned}$$

Учитывая равенства $c_{n+2} = n^2 c_n$ и $j_{\nu-1}(t) + t^2 j_{\nu+1}(t) = 2\nu j_\nu(t)$, получаем тождество

$$\left(n^2\omega_n(t) - n^2\omega_{n+2}(t) + t\omega'_{n+2}(t) + t^2\omega''_{n+2}(t)\right)^{(n)} = 0,\ n \in \mathbb{N}, t \geq 0. \tag{12}$$

Докажем, что из (12) следует равенство

$$n^2\omega_n(t) - n^2\omega_{n+2}(t) + t\omega'_{n+2}(t) + t^2\omega''_{n+2}(t) = 0,\ n \in \mathbb{N},\ t \geq 0. \tag{13}$$

Для этого нам понадобятся грубые асимптотики для функции ω_n и её производных.

Для функций Бесселя при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ известна следующая асимптотика [2, § 7.21] :

$$J_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos\left(x - \frac{(2\lambda+1)\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ ,\ x \to +\infty\,.$$

Из асимптотики для J_λ на вещественной оси следует, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ существует константа $c_\lambda > 0$ такая, что

$$|j_\lambda(x)| \leq \frac{c_\lambda}{(1+|x|)^{\operatorname{Re}\lambda + \frac{1}{2}}},\ x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Из неравенства (14) и равенства (1) сразу получается следующее неравенство

$$|\omega_n(t)| \le \frac{c_{\frac{n}{2}-1}}{j_{\frac{n}{2}-1}(0)} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}},\ t \ge 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Используя равенство $j'_\nu(x) = -xj_{\nu+1}(x)$, получаем при $n \ge 2$ и $t > 0$ равенство

$$\omega'_n(t) = -\frac{2^{n/2}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_1^{+\infty} tj_{\frac{n}{2}}(tu)u^{-n+3}(u^2-1)^{(n-3)/2}\,du = O\left(\frac{1}{t^{\frac{n-1}{2}}}\right),\ t \to +\infty.$$

Аналогично при $n \ge 4$ и $t > 0$ получаем равенство и асимптотику при $t \to +\infty$

$$\frac{t\omega''_n(t) - \omega'_n(t)}{t^2} = \frac{2^{n/2}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_1^{+\infty} tj_{\frac{n}{2}+1}(tu)u^{-n+5}(u^2-1)^{(n-3)/2}\,du = O\left(\frac{1}{t^{\frac{n+1}{2}}}\right).$$

Таким образом

$$t^2\omega''_n(t) + t\omega'_n(t) = O\left(\frac{1}{t^{\frac{n-5}{2}}}\right),\ t \to +\infty,\ n \ge 4. \tag{15}$$

При $n = 1$ равенство (13) проверяется непосредственно. Если $n \ge 2$, то из (15) следует, что левая часть в (13) есть $O(\sqrt{t})$ при $t \to +\infty$. С другой стороны, из (12) следует, что левая часть в (13) является многочленом степени не выше $n-1$. Поэтому этот многочлен есть константа, которая равна нулю, так как левая часть в (13) при $t = 0$ обращается в ноль. Равенство (13) доказано.

Из (13) следует, что $n^2t^{n-1}\omega_n(t) = \left(nt^n\omega_{n+2}(t) - t^{n+1}\omega'_{n+2}(t)\right)'$, $n \in \mathbb{N}$, $t \ge 0$. Поэтому

$$n^2\int_0^u \tau^{n-1}\omega_n(\tau)\,d\tau = nu^n\omega_{n+2}(u) - u^{n+1}\omega'_{n+2}(u) = -u^{2n+1}\left(u^{-n}\omega_{n+2}(u)\right)',\ n \in \mathbb{N},\ u > 0.$$

Из последнего равенства получается рекуррентная формула для ω_n

$$\omega_{n+2}(t) = n^2t^n \int_t^{+\infty} \left(\int_0^u \tau^n\,\omega_n(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{du}{u^{2n+1}},\ n \in \mathbb{N},\ t > 0. \tag{16}$$

Тогда для функций $\widetilde{m}_n(t) := m_n(0)\omega_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, последнее равенство перепишется следующим образом

$$\widetilde{m}_{n+2}(t) = t^n \int_t^{+\infty} \left(\int_0^u \tau^n\,\widetilde{m}_n(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{du}{u^{2n+1}},\ n \in \mathbb{N},\ t > 0. \tag{17}$$

Здесь мы учли равенство $n^2m_{n+2}(0) = m_n(0)$. Равенство $\widetilde{m}_n(t) = m_n(t)$ при $n = 1$ и $n = 2$ проверяется непосредственно, а при $n \ge 3$ вытекает из (17) и (6). Таким образом, равенство $m_n(t) = m_n(0)\,\omega_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, доказано. Отсюда следует, что для ядер ω_n справедливы аналогичные асимптотики (8), (9).

§ 3. Доказательство теоремы 1. Из равенства (11) и формулы

$$(t\omega_{n+1}(t))^{(n)} = t\omega_{n+1}^{(n)}(t) + n\omega_{n+1}^{(n-1)}(t)$$

следует тождество $\left((t\omega_{n+1}(t))' - n\omega_{n+1}(t) - \gamma_n\omega'_n(t)\right)^{(n-1)} = 0$, которое эквивалентно равенству

$$\left(t\omega'_{n+1}(t) + (1-n)\omega_{n+1}(t) - \gamma_n\omega'_n(t)\right)^{(n-1)} = 0\,. \tag{18}$$

Докажем, что из (18) следует равенство

$$t\omega'_{n+1}(t) + (1-n)\omega_{n+1}(t) - \gamma_n\omega'_n(t) = 0,\ n \in \mathbb{N},\ t \ge 0. \tag{19}$$

При $n = 1$ и $n = 2$ равенство (19) проверяется непосредственно. Если $n \ge 3$, то учитывая равенство $m_n(t) = m_n(0)\,\omega_n(t)$ и асимптотики (8) и (9), при $t \to +\infty$ имеем: $\omega_{n+1}(t) = O(t^{-n})$, $t\omega'_{n+1}(t) = O(t^{1-n})$ и $\omega'_n(t) = O(t^{1-n})$. Таким образом левая часть в (19) стремится к нулю при $t \to +\infty$. С другой стороны, из (18) следует, что левая часть в (19) является алгебраическим многочленом степени не выше $n-2$, который стремится к нулю при $t \to +\infty$ и, значит этот многочлен тождественно равен нулю. Равенство (19) доказано.

Из (19) следует, что при $b > t \ge 0$ выполняется равенство

$$\gamma_n\omega_n(t) = t\,\omega_{n+1}(t) + n\int_t^b \omega_{n+1}(u)\,du + \gamma_n\omega_n(b) - b\,\omega_{n+1}(b). \tag{20}$$

Учитывая равенства $\gamma_n = m_n(0)/m_{n+1}(0)$ и $m_n(t) = m_n(0)\omega_n(t)$ и асимптотику (8), получаем, что $\gamma_n\omega_n(b) - b\,\omega_{n+1}(b) = O(b^{-n}) \to 0$ при $b \to +\infty$. Переходя в (20) к пределу при $b \to +\infty$, получаем (3).

Из (19) следует, что при $t > 0$ выполняется равенство $\big(t^{1-n}\omega_{n+1}(t)\big)' = \gamma_n t^{-n}\omega'_n(t)$. Поэтому при $b > t > 0$ имеем:

$$t^{1-n}\omega_{n+1}(t) - b^{1-n}\omega_{n+1}(b) = -\gamma_n\int_t^b u^{-n}\omega'_n(u)\,du\,.$$

Переходя к пределу при $b \to +\infty$ и учитывая, что $b^{1-n}\omega_{n+1}(b) = O(b^{1-2n}) \to 0$ при $b \to +\infty$, получаем первое равенство в (4). Второе равенство очевидно. Равенство $\gamma_n\omega'_n(0) = 1-n$ при $n = 1$ проверяется непосредственно, а при $n \ge 2$ следует из равенства (4) с помощью предельного перехода при $t \to +0$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Продолжение ω_n до целой функции экспоненциального типа. Из представления (2) следует, что j_λ является четной целой функцией. Известно [13, Lec. 1], что порядок $\rho > 0$ и тип σ целой функции f можно определить по формулам

$$\rho = \limsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\frac{1}{|a_n|}}\ \ ,\ \ \sigma = \frac{1}{\rho\, e}\limsup_{n\to\infty} n\sqrt[n]{|a_n|^\rho}\ ,\ \ \text{где}\ \ a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ ,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{21}$$

Если $\rho = 1$ и $0 < \sigma < +\infty$, то f является целой функцией экспоненциального типа σ.

Предложение 1. *Фкнкция j_λ является целой функцией экспоненциального типа 1 при любом $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Найдём порядок ρ и тип σ целой функции j_λ, используя равенства (21). В нашем случае $a_{2k+1} = 0$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^\lambda\, 4^k\,\Gamma(k+\lambda+1)\,\Gamma(k+1)},\ \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Воспользуемся следующей формулой Стирлинга. Если $s = \tau + it = |s|e^{i\varphi}$, где $\tau, t \in \mathbb{R}$ и $\varphi = \varphi(s) = \arg s \in (-\pi, \pi)$, то [14, §1.5.1]

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}s^{s+\frac12}e^{-s}e^{R(s)}\quad,\quad |R(s)| \le \frac{1}{12|s|\cos^2\frac{\varphi}{2}}\ ,\\
&|s^{s+\frac12}| = |s|^{\tau+\frac12}e^{-\varphi(s)t} = |s|^{\tau+\frac12}e^{-|\varphi(s)|\,|t|}\ ,\\
&|\Gamma(s+1)| = \sqrt{2\pi}|s|^{\tau+\frac12}e^{-\tau}e^{-|\varphi(s)|\,|t|}\,|e^{R(s)}|\ .
\end{aligned}\right\}$$

Если дополнительно $\operatorname{Re} s = \tau > 0$, то $|\varphi(s)| = \operatorname{arctg} \frac{|t|}{\tau}$, и, значит,

$$|\Gamma(s+1)| = \sqrt{2\pi}|s|^{\tau+\frac{1}{2}}e^{-\tau}e^{-|t|\operatorname{arctg}\frac{|t|}{\tau}}\left|e^{R(s)}\right|, \ |R(s)| \le \frac{1}{6|s|}, \tag{22}$$

Пусть $\lambda = u + it$, $u, t \in \mathbb{R}$. Тогда в нашем случае $s = k + \lambda$, $\tau = k + u$. При достаточно больших $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство $\tau > 0$. Поэтому можно воспользоваться (22). Тогда

$$\ln \frac{1}{|a_{2k}|} = k \ln k \left(1 + \frac{\ln|k+\lambda|}{\ln k} + o(1)\right) \sim 2k \ln k, \ k \to +\infty.$$

Следовательно $\rho = 1$. Используя ещё раз (22), получаем

$$\frac{e}{2k \sqrt[2k]{|a_{2k}|}} = \alpha_k \cdot \frac{|k+\lambda|^{\frac{k+u}{2k}}}{k^{\frac{1}{2}}} \sim \alpha_k, \ k \to +\infty,$$

где $\alpha_k \to 1$ при $k \to +\infty$. Следовательно $\sigma = 1$. Таким образом функция j_λ имеет порядок $\rho = 1$ и тип $\sigma = 1$. Предложение 1 доказано. □

Следствие 1. *При любом $n \in \mathbb{N}$ функция ω_n продолжается с полуоси $[0, +\infty)$ в комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа* 1.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \ge 2$. При $t \ge 0$ справедлива формулы Тейлора:

$$\omega_n(t) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\omega_n^{(k)}(0)}{k!}\, t^k + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^t \omega_n^{(n-1)}(u)(t-u)^{n-2}\, du.$$

Применяя формулу Гнайтинга (10), получаем:

$$\omega_n(t) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\omega_n^{(k)}(0)}{k!}\, t^k + \frac{(-1)^{n-1}c_n}{(n-2)!}\int_0^t j_{n-\frac{3}{2}}(u)(t-u)^{n-2}\, du, \ t \ge 0.$$

В этом равенстве все слагаемые являются целыми функциями. Следовательно, функция ω_n продолжается в комплексную плоскость до целой функции. Хорошо известно, что при дифференцировании порядок и тип целой функции не меняются. Поэтому порядок и тип целой функции ω_n совпадает с порядком и типом её производной $\omega_n^{(n-1)}$, которая с точностью до множителя $(-1)^{n-1}c_n \ne 0$ совпадает с целой функцией $j_{n-\frac{3}{2}}$, имеющей порядок и тип равные 1. Следствие доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cambanis S. On α-symmetric multivariate distributions / S. Cambanis, R. Keener, G. Simons // J. Multivariate Analysis. – 1983. – Vol. 13. – P. 213–233.
2. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: ИЛ, 1949. – 800 с.
3. Wolfgang zu Castell. Recurrence relations for radial positive definite functions // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 271. – P. 108–123
4. Заставный В.П. Положительно определенные функции, зависящие от нормы / В.П. Заставный // Доклады РАН. – 1992. – Т. 325, № 5. – С. 901–903.
5. Zastavnyi V. P. Positive definite functions depending on the norm / V. P. Zastavnyi // Russian J. Math. Physics. – 1993. – Vol. 1, № 4. – P. 511–522.
6. Misiewicz J. Positive definite functions on l_∞ / J. Misiewicz // Statist. Probab. Lett. – 1989. – Vol. 8. – P. 255–260.

7. Schoenberg I.J. Metric spaces and completely monotone functions / I.J. Schoenberg // Ann. Math. – 1938. – V. 39, No 4. – P. 811–841.
8. Berens H. l_1-summability of multiple Fourier integrals and positivity / H. Berens, Y. Xu // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1997. – Vol. 122. – P. 149–172.
9. Курицын Ю. Г. Об α-симметричных распределениях / Ю. Г. Курицын, А. В. Шестаков // Теория вероятн. и ее примен. – 1984. – Т. 29, № 4. – С. 769–771
10. Zastavnyi V. P. On positive definiteness of some functions / V. P. Zastavnyi // Journal of Multivariate Analysis. – 2000. – Vol. 73. – С. 55–81.
11. Wolfgang zu Castell. On a Theorem of T. Gneiting on α-Symmetric Multivariate Characteristic Functions // Journal of Multivariate Analysis. – 2000. – V. 75. – P. 269–278.
12. Gneiting T. On α-symmetric multivariate characteristic functions / T. Gneiting // Multivariate Analysis – 1998. – Vol. 64. – P. 131–147.
13. Lectures on Entire Functions / Levin B.Ya., in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko. – Transl. Math. Monographs. – Vol. 150. – Amer. Math. Soc. – 1996. – 248 p.
14. Риекстыньш Э.Я. Оценки остатков в асимптотических разложениях / Э.Я. Риекстыньш. – Рига: Зинатне, 1986. – 359 с.

Поступила в редакцию 19.08.2025 г.

A RECURRENCE FORMULA FOR THE PRIMITIVE KERNELS OF 1-SYMMETRIC MULTIVARIATE CHARACTERISTIC FUNCTIONS

V. P. Zastavnyi

In this paper, a new recurrence formula is obtained for kernels that form a class of positive definite functions depending on the l_1-norm. It is proved that these kernels can be extended from the positive semi-axis to the complex plane to an entire function of exponential type 1.

Keywords: positive definite function, Bessel function.

Заставный Виктор Петрович
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.
E-mail: zastavn@rambler.ru

Zastavnyi Viktor Petrovych
Doctor of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk State University,
Donetsk, Russia.

УДК 517.946 DOI: 10.5281/zenodo.17052540 EDN: LNDBSM

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОСРЕДСТВОМ ОЦЕНОК В ШКАЛЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

© 2025. *Д. В. Лиманский*

Получено необходимое условие l-квазиэллиптичности системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ минимальных дифференциальных операторов с постоянными l-квазиоднородными главными частями $\{P_j^l(D)\}_1^N$ посредством априорных оценок типа слабой коэрцитивности в шкале анизотропных пространств Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$.

***Ключевые слова*:** априорная оценка, дифференциальный оператор, слабая коэрцитивность, пространство Соболева, разложение единицы.

§ 1. Введение.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $l := (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$, $p \in [1,\infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x,D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1,\dots,N\}, \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Здесь и в дальнейшем используются обозначения: $x := (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$, $\xi := (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$; $D := (D_1,\dots,D_n)$, $D_k := -i(\partial/\partial x^k)$, $k \in \{1,\dots,n\}$; $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$, $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$.

Пусть также

$$P_j^l(x,D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha \qquad \text{и} \qquad P_j^l(x,\xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\,\xi^\alpha$$

— соответственно главная часть и главный символ оператора $P_j(x,D)$, $j \in \{1,\dots,N\}$.

Напомним следующие определения.

Определение 1. [1–3] Система дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) называется *l-квазиэллиптической*, если

$$(P_1^l(x,\xi),\dots,P_N^l(x,\xi)) \neq 0, \qquad (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

В частности, в изотропном случае, т. е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ называется *эллиптической порядка* l.

Определение 2. [1,3] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) называют *коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

в которой положительные константы C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

Хорошо известно [1, 2, 4], что критерием коэрцитивности системы операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) в анизотропных пространствах Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$ при $p \in (1,\infty)$ и некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω является ее l-квазиэллиптичность. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка (2) для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ утрачивает силу, т. е. l-квазиэллиптическая система (1) является коэрцитивной в $W^l_{1,0}(\Omega)$ и $W^l_{\infty,0}(\Omega)$ в исключительных случаях (см. [3, 5, 6]). Тем не менее для нее справедлива более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3}$$

при $p \in (1,\infty)$ вытекающая из доказанной в [1] (см. также [2]) оценки (2), а при $p = \infty$ доказанная в [6].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [3] определение.

Определение 3. [3] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) называют *слабо коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для справедлива априорная оценка (3), в которой положительные константы C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

В случае изотропного пространства Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, т. е. при $l_1 = \cdots = l_n = l$, неравенство $|\alpha : l| < 1$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая $N = 1$ и $p = \infty$ де Лю и Миркил [7] показали, что при $n \geqslant 3$ оператор $P(D) := P_1(D)$ с постоянными коэффициентами эллиптичен в точности тогда, когда он слабо коэрцитивен в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

В «анизотропном» случае в связи с критерием де Лю и Миркила ставится вопрос о возможности охарактеризовать l-квазиэллиптические системы при помощи априорных оценок вида (3) в $W^l_{p,0}(\Omega)$ при всех $p \in [1,\infty]$. В работе автора [8] рассматривался случай одного оператора $P(D_1, D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух переменных с l-квазиоднородной главной частью, $l = (l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$, для которого был доказан аналог теоремы де Лю и Миркила в случае, когда l_1 не делится на l_2. Далее, в работах [9, 10] результаты де Лю и Миркила были распространены на случай системы операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ при некоторых дополнительных ограничениях на компоненты вектора $l = (l_1, \ldots, l_n)$ и операторы $P_j(D)$.

Введем следующее определение.

Определение 4. [11] Систему операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) будем называть *ε-слабо коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon) > 0$ такая, что справедлива априорная оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C(\varepsilon)\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Следующий результат из работы автора [12] дает достаточное условие l-квазиэллиптичности системы операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ с постоянными главными частями в терминах оценки (4) при каждом фиксированном $p \in [1,\infty]$.

Теорема 1. [12] *Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ — система операторов вида* (1)*, главные части которых имеют постоянные коэффициенты, т. е. $P_j^l(x,D) = P_j^l(D)$, и $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha : l| < 1$, $j \in \{1, \ldots, N\}$.*

Если система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ является ε-слабо коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$ при некотором фиксированном $p \in [1,\infty]$, то она l-квазиэллиптична.

Отметим, что аналог теоремы 1 для «изотропного» случая (при $l_1 = \dots = l_n = l$) был доказан в [3].

Следующая теорема — основной результат работы — представляет собой результат, обратный результату теоремы 1 в случае, когда коэффициенты главных частей $P_j^l(x,D)$ операторов $P_j(x,D)$ постоянны, а младшие коэффициенты непрерывны.

Теорема 2. *Пусть $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$, $p \in [1,\infty]$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ — l-квазиэллиптическая система операторов вида (1), для которой $a_{j\alpha}(\cdot) \equiv a_{j\alpha} \equiv \mathrm{const}$ при $|\alpha : l| = 1$ и $a_{j\alpha}(\cdot) \in C(\Omega)$ при $|\alpha : l| < 1,\ j \in \{1,\dots,N\}$.*

Тогда для любой ограниченной подобласти Ω' области Ω такой, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, система операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ является ε-слабо коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega')$ при каждом фиксированном $p \in [1,\infty]$.

М.М. Маламудом в [6] (см. также [1,3]) при более общих предположениях на коэффициенты операторов теорема 2 была доказана в случае $p \in (1,\infty]$. Там же показано, что в случае операторов с постоянными коэффициентами этот результат остается верным и при $p = 1$. Поэтому теорема 2 содержательна лишь при $p = 1$, и в ее доказательстве во всех оценках достаточно записывать только L^1-норму.

§ 2. Обозначения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, и $\mathbb{R}$ — множества соответственно натуральных, целых и вещественных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D := (D_1,\dots,D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$. Кроме того, пусть $|x| := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ для $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Далее, для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ положим $\alpha! := \alpha_1!\dots\alpha_n!$. Для дифференциального оператора $P(x,D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_\alpha(x) D^\alpha$ обозначим через $P(x,\xi) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ его символ, через $P^l(x,\xi) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ — его главный l-квазиоднородный символ. Для мультииндекса $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ обозначим через $P^{(\beta)}(x,D)$ оператор с символом $D_\xi^\beta P(x,\xi)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ через $\overline{\Omega}$ будем обозначать замыкание области Ω в обычной топологии, а через $B(x^0,r)$ — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x^0, т. е. $B(x^0,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$.

Через $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ обозначим пространство функций, локально ограниченных почти всюду в области Ω. Носитель функции $f(\cdot)$, т. е. замыкание множества $\{x : f(x) \neq 0\}$ в обычной топологии, будем обозначать через $\operatorname{supp} f$. Наконец, замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций в норме $\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$ будет обозначаться через $W^l_{p,0}(\Omega)$.

§ 3. Разложение единицы.

Рассмотрим *конечное* открытое покрытие $\{G_k\}_1^M$ некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$:

$$G \subset \bigcup_{k=1}^M G_k.$$

Согласно [1, гл. II, §8.2], для «достаточно хороших» множеств G_k (по крайней мере в случае, когда G_k — шары) существует *разложение единицы* в области G, подчиненное покрытию $\{G_k\}_1^M$, т. е. система функций $\{\varphi_k(\cdot)\}_1^M \in C_0^\infty(G)$, удовлетворяющая условиям:

(i) $0 \le \varphi_k(x) \le 1$ при $x \in G$ и $k \in \{1, \ldots, M\}$;

(ii) $\operatorname{supp} \varphi_k \subset G_k \cap G$ при $k \in \{1, \ldots, M\}$;

(iii) $\sum_{k=1}^M \varphi_k(x) = 1$ при $x \in G$;

(iv) $|D^\alpha \varphi_k(x)| \le C_\alpha < \infty$ при $x \in G$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

§ 4. Доказательство основной теоремы 2.

(i) Зафиксируем $x_0 \in \Omega$ и произвольное $\varepsilon' \in (0,1)$. Запишем операторы (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} P_j(x, D) &= P_j(x^0, D) + [P_j(x, D) - P_j(x^0, D)] = \\ &= P_j(x^0, D) + \sum_{|\alpha:l|<1} [a_{j\alpha}(x) - a_{j\alpha}(x^0)]\, D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \end{aligned} \tag{5}$$

так как по условию $a_{j\alpha}(x) \equiv a_{j\alpha}(x^0)$ при $|\alpha : l| = 1$, $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Далее, коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ непрерывны в Ω при $|\alpha : l| < 1$. Тогда найдется окрестность $B_0 := B_{r_0}(x^0) \subset \Omega$ такая, что

$$|a_{j\alpha}(x) - a_{j\alpha}(x^0)| \le \varepsilon' \quad \text{для всех} \quad x \in B_0, \quad j \in \{1, \ldots, N\}, \quad |\alpha : l| < 1. \tag{6}$$

Поэтому из (5) и (6) получаем оценку:

$$\|P_j(x, D)f - P_j(x^0, D)f\|_{L^1(B_0)} \le \varepsilon' \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(B_0)}, \qquad f \in C_0^\infty(B_0). \tag{7}$$

С другой стороны, в силу известного результата (см. примечание после теоремы 2), система $\{P_j(x^0, D)\}_1^N$ операторов с постоянными коэффициентами ε-слабо коэрцитивна в $W_{1,0}^l(\Omega)$ и, следовательно, в $W_{1,0}^l(B_0)$. Отсюда

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(B_0)} \le \varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x^0, D)f\|_{L^1(B_0)} + C(\varepsilon')\|f\|_{L^1(B_0)}, \qquad f \in C_0^\infty(B_0) \tag{8}$$

при некотором $C(\varepsilon') > 0$. Так как из неравенства треугольника

$$\varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^1(B_0)} \ge \varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x^0, D)f\|_{L^1(B_0)} - \varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f - P_j(x^0, D)f\|_{L^1(B_0)},$$

с учетом (7) и (8) отсюда находим, что

$$\varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^1(B_0)} + C(\varepsilon')\|f\|_{L^1(B_0)} \ge (1 - \varepsilon'^2) \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(B_0)}, \qquad f \in C_0^\infty(B_0).$$

После деления обеих частей последнего неравенства на $1 - \varepsilon'^2 > 0$ и переобозначений $\varepsilon := \dfrac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'^2} > 0$ и $C(\varepsilon) := \dfrac{C(\varepsilon')}{1 - \varepsilon'^2} > 0$ получим оценку

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(B_0)} \le \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^1(B_0)} + C(\varepsilon)\|f\|_{L^1(B_0)}, \qquad f \in C_0^\infty(B_0), \tag{9}$$

означающую ε-слабую коэрцитивность системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ в $W^l_{1,0}(B_0)$.

(ii) Отметим сначала, что рассуждения п. (i) справедливы в окрестности любой (заранее фиксированной) точки в области Ω, т. е. для каждого $x_k \in \Omega$ найдется шар $B_k \subset \Omega$ некоторого радиуса с центром в точке x_k такой, что оценка (9) справедлива в норме $L^1(B_k)$. Таким образом, имеем (несчетное) покрытие области Ω всеми шарами $\{B_k\}$, которое также является открытым покрытием и ее подобласти Ω'. Так как $\overline{\Omega'}$ — компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Пусть, для определенности,

$$\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \bigcup_{k=1}^{M} B_k \subset \Omega.$$

Рассмотрим разложение единицы $\{\varphi_k(\cdot)\}_1^M$ в области Ω', подчиненное покрытию $\{B_k\}_1^M$ (см. п. 3). Пусть здесь и в дальнейшем $f(\cdot)$ — произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega')$. Тогда справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=1}^{M} f(x)\varphi_k(x), \quad \text{где} \quad \operatorname{supp}(f\varphi_k) \subset B_k \cap \Omega', \quad k \in \{1,\ldots,M\},$$

из которого вытекает, что

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(\Omega')} = \sum_{|\alpha:l|<1} \left\| D^\alpha \sum_{k=1}^{M} f\varphi_k \right\|_{L^1(\Omega')} \le \sum_{k=1}^{M} \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha(f\varphi_k)\|_{L^1(B_k)}. \tag{10}$$

Согласно доказанной в п. (i) ε-слабой коэрцитивности системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ в $W^l_{1,0}(B_k)$ при всех $k \in \{1,\ldots,M\}$ (см. оценку (9)), для каждого достаточно малого $\varepsilon' > 0$ и каждого указанного k имеем оценку:

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha(f\varphi_k)\|_{L^1(B_k)} \le \varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)(f\varphi_k)\|_{L^1(B_k)} + C(\varepsilon')\|f\varphi_k\|_{L^1(B_k)} \tag{11}$$

с некоторым $C(\varepsilon') > 0$.

Оценим нормы в правой части (11). Так как $|\varphi_k(x)| \le 1$ при всех $x \in \Omega'$, то

$$\|f\varphi_k\|_{L^1(B_k)} \le \|f\|_{L^1(B_k)} \le \|f\|_{L^1(\Omega')}, \qquad k \in \{1,\ldots,M\}. \tag{12}$$

Далее, применяя известную формулу Лейбница [4] к каждому дифференциальному оператору $P_j(x,D)$, при всех $j \in \{1,\ldots,N\}$ и $k \in \{1,\ldots,M\}$ получаем:

$$P_j(x,D)(f\varphi_k) = \sum_{\beta} P_j^{(\beta)}(x,D)f \cdot \frac{D^\beta \varphi_k}{\beta!} = P_j(x,D)f \cdot \varphi_k + \sum_{\beta\ne 0} P_j^{(\beta)}(x,D)f \cdot \frac{D^\beta \varphi_k}{\beta!}. \tag{13}$$

Заметим, что при $\beta \ne 0$ оператор $P_j^{(\beta)}(x,D)$ содержит лишь «l-младшие» дифференциальные мономы вида D^α, $|\alpha : l| < 1$. Коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ операторов $P_j(x,D)$ при $|\alpha : l| < 1$ непрерывны и, следовательно, ограничены в Ω'. Кроме того, производные функций $\varphi_k(\cdot)$ также ограничены (см. п. 3). Отсюда, принимая во внимание (13), для всех $j \in \{1,\ldots,N\}$ и $k \in \{1,\ldots,M\}$ имеем оценку:

$$\|P_j(x,D)(f\varphi_k)\|_{L^1(B_k)} \le \|P_j(x,D)f\|_{L^1(\Omega')} + C \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(\Omega')}. \tag{14}$$

Суммируя теперь (10), (11), (12) и (14), получаем:

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(\Omega')} \leq \varepsilon' \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)(f\varphi_k)\|_{L^1(B_k)} + MC(\varepsilon')\|f\|_{L^1(\Omega')} \leq$$

$$\leq \varepsilon' M \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_{L^1(\Omega')} + \varepsilon' CMN \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(\Omega')} + MC(\varepsilon')\|f\|_{L^1(\Omega')} \qquad (15)$$

для всех $f \in C_0^\infty(\Omega')$. Из (15) вытекает оценка

$$(1-\varepsilon' CMN) \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^1(\Omega')} \leq \varepsilon' M \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_{L^1(\Omega')} + MC(\varepsilon')\|f\|_{L^1(\Omega')}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega'),$$

из которой после деления на $1 - \varepsilon' CMN > 0$ и переобозначений

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon' M}{1 - \varepsilon' CMN} > 0 \qquad \text{и} \qquad C(\varepsilon) := \frac{MC(\varepsilon')}{1 - \varepsilon' CMN} > 0$$

получаем, что система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ является ε-слабо коэрцитивной в $W_{1,0}^l(\Omega')$.

Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 480 с.
2. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. - 2008. - Т. 199, № 11. - С. 75-112.
4. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
5. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm / D. Ornstein // Arch. Rational Mech. Anal. - 1962. - V. 11, № 1. - P. 40-49.
6. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М.М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т.56. – С. 206–261.
7. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. - 1964. - V. 8, № 1. - P. 112-124.
8. Лиманский Д. В. О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. - 2016. - Т. 30. - С. 109-119.
9. Лиманский Д. В. Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. - 2019. - № 2. - С. 68-76.
10. Лиманский Д. В. Априорные оценки для слабо коэрцитивной системы минимальных дифференциальных полиномов в анизотропном пространстве Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. - 2019. - Т. 33. - С. 61-70.
11. Лиманский Д. В. Об условиях подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Современная математика. Фундаментальные направления. - 2024. - Т. 170, № 1. - С. 121-149.
12. Лиманский Д. В. Об априорных оценках для системы минимальных дифференциальных операторов в шкале анизотропных пространств Соболева / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. - 2023. - № 2. - С. 66-71.

Поступила в редакцию 24.08.2025 г.

ON CHARACTERIZATION OF A QUASI-ELLIPTIC SYSTEM OF MINIMAL DIFFERENTIAL OPERATORS VIA ESTIMATES IN THE SCALE OF ANISOTROPIC SOBOLEV SPACES

D. V. Limanskii

We obtain a necessary condition for an l-quasi-ellipticity of a system $\{P_j(x, D)\}_1^N$ of minimal differential operators with constant l-quasi-homogeneous principal parts $\{P_j^l(D)\}_1^N$ via a priori estimates of weak coercivity type in the scale of anisotropic Sobolev spaces $W_{p,0}^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$.

Keywords: a priori estimate, differential operator, weak coercivity, Sobolev space, partition of unity.

Лиманский Дмитрий Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ
E-mail: d.limanskiy.dongu@mail.ru

Limanskii Dmitrii Vladimirovich
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk State University,
Donetsk, Russia

УДК 517.988.28 DOI: 10.5281/zenodo.17052542 EDN: MNMGVY

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО РАВНОБЕДРЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ТРЕУГОЛЬНИКАМ

© 2025. *П. А. Машаров*

Получено значение наименьшего радиуса шара, в котором из равенства нулю интегралов следует равенство нулю функции. Рассматриваются поверхностные интегралы по равнобедренным прямоугольным треугольникам в многомерном пространстве.

***Ключевые слова*:** проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю, свойства функции с нулевыми интегралами по равнобедренным прямоугольным треугольникам, локальный вариант проблемы Помпейю.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если из того, что локально суммируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ выполняются равенства

$$\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

следует, что она равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A. В данной постановке сформулированная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получены в XX веке (см. обзор литературы в [1]).

Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [2], описывающую довольно широкий набор множеств Помпейю.

Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\overline{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно–аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n,\, \mathbf{M}(n),\, dx)$ на тройку $(X,\, \mathcal{Z},\, d\mu)$, где X — многообразие, $\mathcal{Z}$ — группа Ли, действующая транзитивно на X, $d\mu$ — инвариантная относительно $\mathcal{Z}$ мера на X [3,4].

Другие обобщения возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, инвариантным только относительно вращений. Одно из таких обобщение известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}^n_R \subset \mathbb{R}^n$, и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}^n_R)$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{B}^n_R$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}^n_R$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (по сравнению с размерами множества A) выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)$ [5–7].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf\bigl\{R > 0\colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}^n_R)\bigr\},$$

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю для множества A.

В [7] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренстейном и Р. Гэем [5, 6], а также В. В. Волчковым [7, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [7–15].

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество A имеет такую же размерность, что и пространство. Пусть теперь размерность множества A равна $m \leqslant n$, интеграл в (1) понимается как m-кратный. Чтобы выделить такие интегралы, вместо dx будем писать $d\mu_m$. В определении множества Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ для множества положительной коразмерности (если $m < n$) условие локальной суммируемости функции f заменим на непрерывность. Это обусловлено тем, что даже равная нулю почти всюду (по n-мерной мере Лебега μ_n) функция может иметь не все равные нулю интегралы, поскольку если множество A имеет размерность $m < n$, то $\mu_n(A) = 0$. Будем рассматривать совокупность $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)$ всех m-мерных множеств Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ и величину

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0\colon A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Аналогично проблеме 1, в [16] поставлена следующая

Проблема 2. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^m$ найти значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$.

Локальный вариант проблемы Помпейю для множеств положительной коразмерности напоминает теорему Мореры, в которой из нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции. В [17] рассмотрена проблема Помпейю для шаров и сфер положительной коразмерности. Достаточно полный список множеств A, для которых известно точное значение или оценки величины $\mathcal{R}_{m,n}(A)$, можно найти в в [13, 15, 18].

В данной работе проблема 2 изучаются для $T = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon 0 \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{2}/2, |x_2| \leqslant x_1, x_k = 0, k \in \{3, \dots, n\}\Big\}$ — плоского равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 1. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 3$ имеет место равенство $\mathcal{R}_{2,n}(T)\sqrt{2-\sqrt{2}}$.*

Заметим, что $\mathcal{R}_{2,2}(T) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ (П. А. Машаров, 2021, [15]).

Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее рассматриваем действительное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 3$ со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $\mathbf{M}(n)$ — группу движений $\mathbb{R}^n$. Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим $\mathrm{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим множества $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$, $\mathbb{S}_R^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = R\}$ — соответственно шар и сфера радиуса R в $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{B}_{r,R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r < |x| < R\}$ — шаровой слой, если $r \geqslant 0$, или шар в $\mathbb{R}^n$, если $r < 0$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ под ∂A будем понимать множество граничных точек A, а под $\overline{A} = A \cup \partial A$ — замыкание A.

Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B комплекснозначных функций. Так как интегрирование часто будет вестись по множествам вида λA, где множество A рассматривается m-мерным, то здесь и далее под dx в случаях $m \leqslant n$ понимается m-мерная мера Лебега μ_m. Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества B под $C^k(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в B, $C(B)$ — класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(B)$.

Под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство (1) выполняется для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(A, B)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A, B)$, то есть таких, что для любых $x, y \in B$ из $|x| = |y|$ следует $f(x) = f(y)$.

Как обычно, частная производная функции $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по переменной x_j обозначается $\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Заметим, что из линейности пространств гладких и интегрируемых функций следует линейность пространств $\mathfrak{P}^k(A, B)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Для произвольного непустого $B \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t \in \mathbb{R}^n$ положим $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| < \varepsilon, y \in B\}$, $B + t = \{x + t \in \mathbb{R}^n \colon x \in B\}$.

Доказательства следующих двух утверждения можно найти в [18].

Лемма 1. *Пусть A — компакт, B — область в $\mathbb{R}^n$, числа $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы, функция $\varphi_\varepsilon \in C^k(B_\varepsilon)$ имеет носитель $\mathrm{supp}\, \varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon^n$, а функция $f \in \mathfrak{P}(A, B_\varepsilon)$. Тогда свёртка $f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{P}^k(A, B)$.*

Лемма 2. *Пусть A — компакт с внутренними точками в $\mathbb{R}^m$ $(m \leqslant n)$, для произвольного фиксированного значения $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ дифференциальный оператор $\mathfrak{d} = \partial/\partial x_j$. Пусть также для некоторого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\mathrm{Mot}(A, B) \neq \varnothing$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$. Тогда $\mathfrak{d} f \in \mathfrak{P}^\infty(A, B)$.*

Для произвольного непустого компакта или ограниченной области $A \subset \mathbb{R}^n$ через $r^*(A)$ обозначим радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего $\overline{A}$. Таким образом, $r^*(A) = \inf\{R > 0 \colon \exists \lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A}, \mathbb{B}_R^n)\}$. Отметим, что из определений $r^*(A)$ и $\mathrm{Mot}(A, B)$ следует, что для произвольного компакта A множество $\mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R^n) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $R > r^*(A)$, а для открытого ограниченного множества — когда $R \geqslant r^*(A)$.

Для рассматриваемого в настоящей работе множества T значение $r^*(T)$ равно радиусу описанной окружности, $r^*(T) = \sqrt{2}/2$. Отсюда следует тривиальная оценка снизу экстремального радиуса Помпейю: $\mathcal{R}_{2,n}(T) \geqslant \sqrt{2}/2$ для любого $n \geqslant 2$. С другой стороны, учитывая $\mathcal{R}_{2,2}(T) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, вполне естественно считать, что $\mathcal{R}_{2,n}(T) \leqslant \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ для всех $n \geqslant 2$.

Координаты точки в $\mathbb{R}^n$, начиная с некоторой, если они равны нулю, будем обозначать символом $\vec{0}$. Обозначим начало координат $O(\vec{0})$, вершины треугольника T: $\zeta_0 = (\vec{0})$, $\zeta_1 = \big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \vec{0}\big)$, $\zeta_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \vec{0})$, стороны, соединяющие вершины ζ_j и ζ_k — ζ_{jk}, где $j, k \in \{0, 1, 2\}$, $j < k$. Если $\mathfrak{E}$ — элемент треугольника T (вершина, точка, сторона), то, когда будет рассматриваться треугольник λT $(\lambda \in \mathbf{M}(n))$, его соответствующий элемент будем обозначать $\lambda \mathfrak{E}$. Например, сторона треугольника ζ_{12} трансформируется в $\lambda \zeta_{12}$.

Рассмотрим дифференциальные операторы $\mathfrak{d}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\mathfrak{d}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\mathfrak{d}_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3$. Замети, что для этих операторов выполняются равенства: $df(t, -t, \vec{0}) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\big)\, dt = \mathfrak{d}_1 f\, dt$, $df(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dt = \mathfrak{d}_2 f\, dt$, $df(t, t, \vec{0}) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\big)\, dt = \mathfrak{d}_3 f\, dt$.

Лемма 3. *Пусть функция* $f \in C^3(T_\varepsilon)$. *Тогда имеют место равенства*

$$\int_T \left(\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f\right)(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (\Delta f)(\sqrt{2}/2, t, \vec{0})\, dt - \mathfrak{d}_3 f(\zeta_2) - \\ - \mathfrak{d}_1 f(\zeta_1) + 2\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0); \tag{2}$$

$$-\int_T \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1^2 f(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \mathfrak{d}_3 f(\zeta_2) + \mathfrak{d}_1 f(\zeta_1) - 2\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0) - \\ - 2\int_0^{\sqrt{2}/2} (\Delta f)(t, t, \vec{0})\, dt. \tag{3}$$

$$\int_T \mathfrak{d} f\, d\mu_2 = 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_0) - (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_1) + (\mathfrak{d}_1 f)(\zeta_2). \tag{4}$$

Доказательство. Переход от кратного интеграла по T к повторному можно осуществить двумя способами:

$$\int_T f(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx_1 \int_{-x_1}^{x_1} f(x_1, x_2, \vec{0})\, dx_2 = \\ = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dx_2 \int_{|x_2|}^{\sqrt{2}/2} f(x_1, x_2, \vec{0})\, dx_1.$$

Рассмотрим $\int_T \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dx_2 \int_{|x_2|}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \vec{0})\, dx_1 - - \int_0^{\sqrt{2}/2} dx_1 \int_{-x_1}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \vec{0})\, dx_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \Big(f(\sqrt{2}/2, x_2, \vec{0}) - f(|x_2|, x_2, \vec{0}) \Big)\, dx_2 - - \int_0^{\sqrt{2}/2} \big(f(x_1, x_1, \vec{0}) - f(x_1, -x_1, \vec{0}) \big)\, dx_1$. Сделаем замены $t = \pm x_2$ в интеграле $-\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} f(|x_2|, x_2, \vec{0})\, dx_2 = -\int_{-\sqrt{2}/2}^{0} f(-x_2, x_2, \vec{0})\, dx_2 - \int_0^{\sqrt{2}/2} f(x_2, x_2, \vec{0})\, dx_2 = = \int_{\sqrt{2}/2}^{0} f(t, -t, \vec{0})\, dt - \int_0^{\sqrt{2}/2} f(t, t, \vec{0})\, dt$, а в остальных переменную интегрирования заменим на t. Тогда

$$\int_T \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} f(\sqrt{2}/2, t, \vec{0})\, dt - 2\int_0^{\sqrt{2}/2} f(t, t, \vec{0})\, dt. \tag{5}$$

Учитывая теперь формулу вычисления интеграла от полного дифференциала, получаем

$$\int_T \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 f(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (\mathfrak{d}_3 f)\big(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}\big)\, dt - 2f(\zeta_2) + 2f(\zeta_0). \tag{6}$$

Так как $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt{2}/2, t, \vec{0})\, dt = f(\zeta_2) - f(\zeta_1)$, то (6) можно записать в виде

$$\int_T \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 f(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}\big)\, dt - f(\zeta_2) - f(\zeta_1) + 2f(\zeta_0).$$

Отсюда $\int_T \big(\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f\big)(x_1, x_2, \vec{0})\, d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\sqrt{2}/2, t, \vec{0})\, dt - \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1)\big) + +2\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0)$. Прибавляя к этому $0 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\sqrt{2}/2, t, \vec{0})\, dt - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_1)$, получаем (2).

Аналогичным образом из (5) получаем

$$\int_T \mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_1 f(x_1,x_2,\vec{0})\,d\mu_2 = f(\zeta_2) - f(\zeta_1) - 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(t,t,\vec{0})\,dt \tag{7}$$

и

$$\int_T \mathfrak{d}_2^2\mathfrak{d}_1 f(x_1,x_2,\vec{0})\,d\mu_2 = \mathfrak{d}_2 f(\zeta_2) - \mathfrak{d}_2 f(\zeta_1) - 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(t,t,\vec{0})\,dt. \tag{8}$$

Так как $\int_0^{\sqrt{2}/2} \mathfrak{d}_3 f(t,t,\vec{0})\,dt = f(\zeta_2) - f(\zeta_0)$, то с учётом (7) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t,t,\vec{0})\,dt = f(\zeta_2) - f(\zeta_0) - \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(t,t,\vec{0})\,dt$; $-2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t,t,\vec{0})\,dt = -2f(\zeta_2) + 2f(\zeta_0) + f(\zeta_2) - f(\zeta_1) - \int_T \mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_1 f(x_1,x_2,\vec{0})\,d\mu_2$; $-\int_T \mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\vec{0})\,d\mu_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_2) - 2\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1) - 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(t,t,\vec{0})\,dt$. Складывая полученное равенство с (8), получаем (3).

Для доказательства (4) подставим в (6) $\mathfrak{d}_2 f$ вместо f и поменяем местами дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Получим $\int_T \mathfrak{d} f(x_1,x_2,\vec{0})\,d\mu_2 = (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_2) - (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_1) - 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_2) + 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_0) = 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_0) - (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_1) + (\mathfrak{d}_1 f)(\zeta_2)$. □

Для $R > \frac{\sqrt{2}}{2}$ будем рассматривать различные положения треугольника λT внутри шара $\mathbb{B}_R^3$. Обозначим $\rho_0, \rho_1, \rho_{01}, \rho_{12}, \rho_{012}$ — соответственно расстояния от начала координат до вершины $\lambda\zeta_0$, $\lambda\zeta_1$, до стороны $\lambda\zeta_{01}$, $\lambda\zeta_{12}$, до плоскости треугольника λT. Для каждого $j \in \{0,1,01,12,012\}$ положим $\min_j = \inf\{\rho_j \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R^3)\}$ и $\max_j = \sup\{\rho_j \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}_R^3)\}$, для $0 < a < b$ шаровой слой в $\mathbb{R}^3$ обозначим $\mathbb{B}(a;b) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon a < |x| < b\}$.

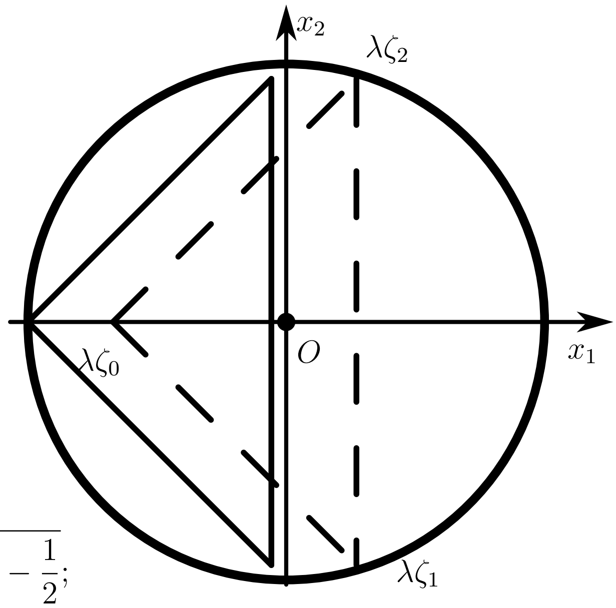


Рис. 1: Положение λT

Лемма 4. *Пусть* $R \in \left(\sqrt{2}/2;1\right)$. *Тогда имеют место равенства*

$$\begin{gathered}\max\nolimits_0 = \max\nolimits_1 = R, \quad \min\nolimits_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}};\\ \min\nolimits_1 = \sqrt{2} - R, \quad \min\nolimits_{02} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2R^2-1};\\ \max\nolimits_{02} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}, \quad \max\nolimits_{12} = \max\nolimits_{012} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}, \quad \min\nolimits_{12} = \min\nolimits_{012} = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство. Для удобства будем рассматривать движения $\lambda \in \mathrm{Mot}(T,\overline{\mathbb{B}_R^2})$, а для изучения ρ_{012} — движения $\lambda \in \mathrm{Mot}(T,\overline{\mathbb{B}_R^3})$.

Рассмотрев λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-R$ (на рис. 1 треугольник изображен сплошной линией), получаем $\max_0 = R$. Выполнив λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $\sqrt{R^2-1/2}$ (на рис. 1 треугольник изображен пунктирной линией), находим значения $\min_0$, $\max_1$, $\min_{02}$ и $\max_{12}$.

Рассмотрев λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-\sqrt{2}/2$ и вдоль оси Ox_2 на $(R-\sqrt{2}/2)$ (на рис. 2 треугольник изображен сплошной линией), получаем $\min_1 = \sqrt{2} - R$, $\min_{12} = 0$. Рассмотрев λ — такой сдвиг, при котором вершины $\lambda\zeta_0$ и $\lambda\zeta_2$ окажутся на окружности $\partial\mathbb{B}_R^2$ (на рис. 2 треугольник изображен пунктирной линией), получаем $\max_{02} = \sqrt{R^2-1/4}$.

Рассмотрев теперь в $\mathbb{R}^3$ λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-\sqrt{2}/2$ и вдоль оси Ox_3 на $\sqrt{R^2-1/2}$, находим значение $\max_{012}$. Очевидно, что $\min_{012}=0$. $\square$

Решим несколько неравенств с найденными выражениями. Рассмотрим $\min_0 < \max_{01}$. Имеем $\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{R^2-\frac{1}{2}} < \sqrt{R^2-\frac{1}{4}}$. Учитывая неотрицательность обеих частей неравенства, получаем $\frac{1}{2}-\sqrt{2R^2-1}+R^2-\frac{1}{2} < R^2-\frac{1}{4}$; $\sqrt{2R^2-1} > 1/4$; $2R^2-1>1/16$; $|R|>\sqrt{34}/8$.

Теперь рассмотрим $\min_{02} < \max_{12}$. Имеем $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-1} < \sqrt{R^2-\frac{1}{2}}$; $1-2\sqrt{2R^2-1}+2R^2-1 < 4R^2-2$; $1-R^2<\sqrt{2R^2-1}$; $1-2R^2+R^4 < 2R^2-1$; $R^4-4R^2+2<0$; $R^4-4R^2+4<2$; $-\sqrt{2}<R^2-2<\sqrt{2}$; $\sqrt{2-\sqrt{2}}<|R|<\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Так как $\sqrt{34}/8 < \sqrt{2-\sqrt{2}}$, то из приведенных рассуждений получаем

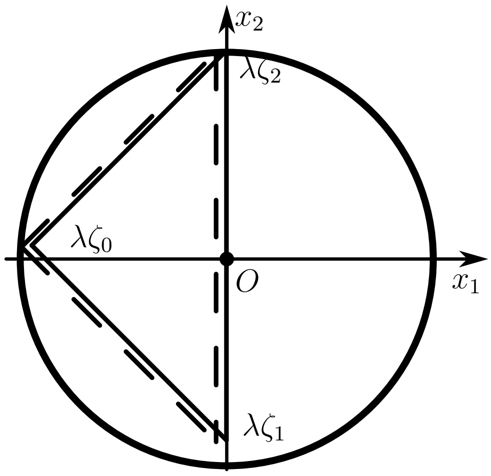


Рис. 2: Положение λT

Замечание 1. Для $R\in\left(\sqrt{2}/2;1\right)$ в обозначениях (9) решением системы неравенств $\min_0<\max_{01}$; $\min_{02}<\max_{12}$ является $\sqrt{2-\sqrt{2}}<R<1$.

Для доказательства основного результата воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в [7]. Перед его формулировкой введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k\subset\mathbb{R}^n$, где $v_i\neq v_j$ для $1\leqslant i,j\leqslant k$, $i\neq j$, числа $\varepsilon>0$ положим $\Omega_{\nu,\varepsilon}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\colon |v_\nu|-\varepsilon<|x|<|v_\nu|+\varepsilon\right\}$, $\nu=1,\dots,k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в $\mathcal{U}$ распределений. $\vec{\partial}=\left(\partial/\partial x_1,\dots,\partial/\partial x_n\right)$.

Утверждение 1 (Теорема 3.2 из [7, Глава 4]). *Пусть $F_\nu\in\mathfrak{H}_0\left(\Omega_{\nu,\varepsilon}\right)$ для $\nu=1,\dots,k$ и существуют многочлены $P_\nu\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ такие, что для любого $x\in\mathbb{B}^n_\varepsilon$ выполняется $\sum_{\nu=1}^k\left(P_\nu(\vec{\partial})F_\nu\right)(x+v_\nu)=0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P\colon\mathbb{R}^1\to\mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta)F_\nu=0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$.*

Лемма 5. *Пусть $R>\sqrt{2}/2$ и $f\in\mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}^3_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f=0$ в $\mathbb{B}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{R^2-\frac{1}{2}};R\right)$.*

Доказательство. Применим Утверждение 1 к $f\in\mathfrak{P}_0^\infty(T,\mathbb{B}^3_R)\subset\mathfrak{H}_0\left(\Omega_{\nu,\varepsilon}\right)$ для набора точек $v_\nu=\zeta_j$ ($j\in\{0,1,2\}$) — вершин треугольника T. Учитывая равенство (4), левая часть которого в данном случае по лемме 2 обратится в нуль, приходим к тому, что существует нетривиальный многочлен $q\colon\mathbb{R}^1\to\mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f=0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$. Так как функция f общая для всех точек v_ν, то $\Omega_{\nu,\varepsilon}$ представляет из себя множество точек из $\mathbb{B}^3_R$, в которые можно попасть вершинами треугольника λT, $\lambda\in\mathrm{Mot}(T,\mathbb{B}^3_R)$. Таким образом, $\Omega_{\nu,\varepsilon}=\mathbb{B}(\min_0;\max_0)$, что, с учётом леммы 4, завершает доказательство. $\square$

Для формулировки следующего утверждения рассмотрим преобразование Радона. Пусть $n\geqslant 2$; $\xi(\omega,d)$ — гиперплоскость с расстоянием d до начала координат, нормалью которой является вектор $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$. Преобразование Радона вводится для $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\mathbf{R}f(\omega,d)=\int_{\xi(\omega,d)}f(x)\,dx,$$

где в данном случае dx — $(n-1)$-мерная мера.

Утверждение 2 (Следствие 8.4 из [7, Глава 1]). *Пусть $r \geqslant 0$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет $\mathbf{R}f(\omega, d) = 0$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ и почти всех $d \in (r, +\infty)$. Если существует множество $\Omega \subset (r, +\infty)$ положительной меры такое, что $f(x) = 0$ в $\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \in \Omega\}$, тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}(r; +\infty)$.*

Лемма 6. *Пусть $R > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен q из леммы 5, для которого выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\min_0; \max_0)$, и функции $F = q(\Delta)f$, $\tilde{F} = \Delta F$. По лемме 2, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Применив лемму 2 к функции F, получаем (3), что означает выполнение равенств $\int_{\lambda\zeta_{02}} \tilde{F}(x)\, ds = 0$, где ds — элемент длины отрезка ζ_{02}, $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$.

Иными словами, интегралы от $\tilde{F}$ по всем отрезкам, расстояние от которых до начала координат лежит в пределах от $\min_{02}$ до $\max_{02}$, равны нулю. Доопределив $\tilde{F}$ нулем вне $\mathbb{B}_R^3$, имеем нулевые интегралы от $\tilde{F}$ по всем прямым, расстояние от которых до начала координат больше $\min_{02}$. Значит интегралы по всем плоскостям, расстояние до которых от начала координат больше $\min_{02}$, равны нулю, что по утверждению 2 означает $\tilde{F} = 0$ в $\mathbb{B}(\min_{02}, R)$.

Аналогичными рассуждениями, учитывая выполнение $\min_{02} < \max_{12}$ и равенство нулю интегралов от функции $\tilde{F}$ по всем прямым, расстояние от которых до начала координат больше $\min_{12}$, а значит и по всем плоскостям, получаем $\tilde{F} = 0$ в $\mathbb{B}(\min_{12}, R)$, то есть в $\mathbb{B}_R^3$. $\square$

Приведём одно довольно общее утверждение, доказательство которого можно найти в [7], предварительно пояснив смысл входящих в него обозначений.

Пусть $\mathcal{U}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Под $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ понимается класс функций из $C^\infty(\mathcal{U})$ с компактным носителем в $\mathcal{U}$; $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ — пространство распределений на $\mathcal{U}$; $SO(n)$ — группа евклидовых вращений пространства $\mathbb{R}^n$; для распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ и $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ распределение $\lambda\varphi$ определяется на $\mathcal{D}'(\lambda^{-1}\mathcal{U})$ формулой $\langle \lambda\varphi, f(x) \rangle = \langle \varphi, f(\lambda^{-1}x) \rangle$, где $f \in \mathcal{D}(\lambda^{-1}\mathcal{U})$, $\langle \varphi, f \rangle$ обозначает значение φ на элементе f; $\mathcal{D}'_\varphi(\mathcal{U}) = \big\{ f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})\colon f * \varphi = 0$ в области определения$\big\}$; $C_\varphi^m(\mathcal{U}) = \big(\mathcal{D}'_\varphi \cap C^m\big)(\mathcal{U})$, где $m \in \mathbb{Z}_+$ или $m = \infty$; $A_\varphi^m(\mathcal{U}) = \bigcap_{\tau \in SO(n)} C_{\tau\varphi}^m(\mathcal{U})$.

Утверждение 3 (Предложение 5.9 из [7, Глава 1]). *Пусть $\mathcal{U} = \mathbb{B}_R^n$ и $A_\varphi^\infty(\mathcal{U}) \neq \{0\}$. Тогда $A_\varphi^\infty(\mathcal{U})$ содержит радиальную функцию, отличную от нуля.*

Взяв $\varphi = \chi_T$ — индикатор множества T, получаем

Следствие 1. *Пусть для некоторого $R > 0$ выполняется $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$. Тогда $\mathfrak{P}^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$.*

Методом, аналогичным изложенному при доказательстве Леммы 7 из [15], получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $R > \sqrt{2}/2$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$ и для некоторого многочлена $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$.*

Приведём ещё одно утверждение, которое потребуется для доказательства основного утверждения.

Утверждение 4 (Следствие 8.2 из [7, Глава 1]). *Пусть чётная функция $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Тогда существует $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, что $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^1$.*

Построение решения задачи.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай $R \in \left(\sqrt{2}/2; \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$. Исходя из леммы 4 и замечания 1, для указанного R выполняется неравенство $\max_{12} < \min_{02}$. Для $j \in \{1; 2\}$ рассмотрим функции

$$g(d) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant |d| \leqslant \max_{12}; \\ e^{j/\left((|d|-\max_{12})(|d|-\min_{02})\right)}, & \max_{12} < |d| < \min_{02}; \\ 0, & |d| \geqslant \min_{02}. \end{cases}$$

Эти функции удовлетворяют условиям утверждения 4, поэтому существуют такие $f_j \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^2)$, что $\mathbf{R}f_j(\omega, d) = g_j(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^1$, $d \in \mathbb{R}^1$. Это означает, что интегралы от f_j по всем прямым, расстояние от которых до начала координат меньше $\max_{12}$ или больше $\min_{02}$ равны нулю. Так как f_j линейно независимы, то найдутся ненулевые C_j такие, что радиальная $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$ имеет нулевой интеграл по $\mathbb{B}_R^2$.

Исходя из Утверждения 2, $f(\rho) = 0$, если $\rho \geqslant \min_{02}$, причём не верно, что $f = 0$ п.в.

По определению величин $\max_{012} = \max_{12}$ и $\min_{02}$, для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R^n)$ плоскость α треугольника λT удалена от начала координат не дальше, чем на $\max_{12}$. Пусть круг $\mathbb{B}' = \alpha \cap \mathbb{B}_{\min_{02}}^n$, ζ_4 — его центр. Так как f — радиальна и $\int_{\mathbb{B}_{\min_{02}}^2} f\,dx = 0$, то $\int_{\mathbb{B}'} f\,dx = 0$. Пусть $\lambda' T$ — треугольник, симметричный λT относительно ζ_4. Тогда возможны два случая. В первом пересечение $\lambda T \cap \lambda' T$ состоит из прямых, расстояние от которых до начала координат не превосходит $\max_{12}$, интегралы по которым от f равны нулю. В этом случае $\mathbb{B}' \subset \lambda T \cup \lambda' T$. А так как интегралы от f по этим треугольникам равны в силу симметрии, то интеграл от f по λT равен нулю. Во втором случае разность $\mathbb{B}' \setminus (\lambda T \cup \lambda' T)$ состоит из прямых, расстояние от которых до начала координат не превосходит $\max_{12}$, интегралы по которым от f равны нулю. Аналогично предыдущему случаю, интеграл от f по λT равен нулю. Построенный пример функции доказывает, что $\mathcal{R}_{2,n}(T) \geqslant \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Пусть теперь $R > \sqrt{2-\sqrt{2}}$, радиальная $f\colon \mathbb{B}_R^3 \to \mathbb{C}$, $f \in C(\mathbb{B}_R^3)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$. Для $r \in \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}; R\right)$ рассмотрим $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)\colon \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{B}_{R-r}^3$. Тогда по лемме 1 функция $\tilde{f} = \varphi * f \in C^\infty(\mathbb{B}_r^3)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_r^3)$, то есть $\tilde{f} \in \mathfrak{P}_0^\infty\left(T, \mathbb{B}_r^3\right)$. По лемме 6 существует ненулевой многочлен $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}_r^3$. Отсюда по лемме 7 $\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}_r^3$, что означает $\mathfrak{P}_0^\infty\left(T, \mathbb{B}_r^3\right) = \{0\}$. Применив следствие 1, получаем $\mathfrak{P}^\infty\left(T, \mathbb{B}_r^3\right) = \{0\}$. Устремив $r \to R - 0$, приходим к $f = 0$ в $\mathbb{B}_R^3$, что означает $\mathcal{R}_{2,3}(T) \leqslant \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Рассмотрим произвольной точку $y \in \mathbb{B}_R^n$, где размерность $n \geqslant 4$ и $R > \sqrt{2-\sqrt{2}}$. Сечение $\mathbb{B}_R^n$ трёхмерной гиперплоскостью, проходящей через y и начало координат O, является, если там ввести свою систему координат, шаром $\mathbb{B}_R^3$. Если некоторая функция имеет нулевые интегралы по треугольникам в $\mathbb{B}_R^n$, то и в полученном $\mathbb{B}_R^3$, откуда, учитывая непрерывность f, из доказанного выше следует, что $f \equiv 0$ в $\mathbb{B}_R^3$, значит и в точке y, откуда $\mathcal{R}_{2,n}(T) \leqslant \sqrt{2-\sqrt{2}}$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машаров П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2. – С. 77–88.
2. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183-190.

3. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SV(1,1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourirer (Grenoble). – 1992. – V. 42. – P. 671–694.
4. Agranovsky M. L. Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – V. 19. – P. 1522–1525.
5. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
6. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
8. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185-194.
9. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
10. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
11. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser., 2013. – 592 p.
12. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12, № 1. – С. 51–79.
13. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.
14. Волчков В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52.
15. Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
16. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
17. Chang D. C. The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group / D. C. Chang, W. Eby // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2008. – V. 12. – P. 2619–2640.
18. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для куба в многомерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 92–103.

Поступила в редакцию 14.05.2025 г.

ON FUNCTIONS WITH ZERO SURFACE INTEGRALS OVER ISOSCELES RIGHT-ANGLED TRIANGLES

P. A. Masharov

The value of the smallest radius of the ball is obtained, in which the equality of integrals to zero implies vanishing of the function. Surface integrals over an isosceles right-angled triangles in a multidimensional space are considered.

Keywords: the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius, the properties of functions with vanishing integrals by isosceles right-angled triangles, the local Pompeiu problem.

Машаров Павел Анатольевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.
E-mail: pavelmasharov@gmail.com

Masharov Pavlo Anatoliyovych
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk State University, Donetsk, Russia.

УДК 517.988.28 DOI: 10.5281/zenodo.17052583 EDN: KCJMZC

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ТУПОУГОЛЬНОГО РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

© 2025. *П. А. Машаров, И. С. Власенко*

В явном виде найдено значение наименьшего радиуса круга, в котором данное множество является множеством Помпейю. В качестве множества рассмотрен равобедренный треугольник с углом $2\pi/3$.

Ключевые слова: множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, локальный вариант проблемы Помпейю, свойство Помпейю для равнобедренного тупоугольного треугольника.

Введение. В работе рассматриваются вещественное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, группа $\mathbf{M}(n)$ движений $\mathbb{R}^n$. Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ и открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ часть этой группы $\mathrm{Mot}(K, D) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) \colon \lambda K \subset D\}$, $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R.

Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda K} f(x)dx = 0 \tag{1}$$

при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ равна нулю почти всюду. Классическая проблема Поймпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств K. Данная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $K \in \mathcal{P} \in (\mathbb{R}^n)$ получены в прошлом веке (см. обзор литературы в [1]).

Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [2], описывающую довольно широкий набор множеств Помпейю.

Пусть K — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\overline{K} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница K является вещественно–аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Из этого результата следует, что многие множества K с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Примерами множеств $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ с вещественно-аналитической границей для любого $n \geqslant 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [3].

Интересное обобщение проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю. Одному из таких вариантов посвящена данная работа.

Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R^n$, и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}_R^n)$. Если из этого следует, что $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{B}_R^n$, будем говорить, что K является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}_R^n$ и обозначать $K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Если $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (относительно размеров множества K) выполняется $K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ [4–6].

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(K) = \inf\{R > 0\colon K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)\},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю для множества K.

В [6] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $K \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(K)$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(K)$, получены К. А. Беренстейном и Р. Гэем [4, 5], а также В. В. Волчковым [6, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [6–14].

В данной работе Проблема 1 рассмотрена для равнобедренного треугольника с углом между боковыми сторонами $2\pi/3$. Для равнобедренного треугольника с углом между боковыми сторонами $\pi/3$ аналогичный результат содержится в [15].

Рассмотрим равнобедренный треугольник $T = \triangle KNM$ в $\mathbb{R}^2$ с боковыми сторонами $KN = KM = 1$ и углом между ними $\angle NKM = 2\pi/3$. Всюду далее $\beta = \pi/3$. Таким образом, (см. рис. 1),

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leqslant x \leqslant \cos\beta, -x \operatorname{tg}\beta \leqslant y \leqslant x \operatorname{tg}\beta\}.$$

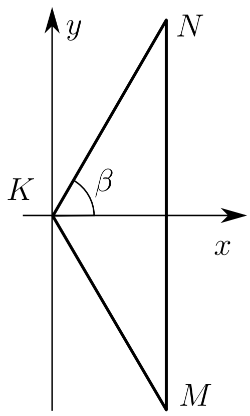


Рис. 1: Треугольник T

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}(T) = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}.$$

Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n = 2$, круг в нём будем обозначать $\mathbb{B}_R = \mathbb{B}_R^2$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим $\mathbb{B}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^2\colon r < |x| < R\}$ — кольцо при $r \geqslant 0$, или круг $\mathbb{B}_R$, если $r < 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества $D \subset \mathbb{R}^2$ под $C^k(D)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в D, $C(D)$ — класс непрерывных на D функций, $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(D)$.

Под $\mathfrak{P}(K, D)$ будем понимать класс локально суммируемых в D функций, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{K}, D)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(K, D) = \mathfrak{P}(K, D) \cap C^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(K, D) = \mathfrak{P}(K, D) \cap C^\infty(D)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^n)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(K, \mathbb{B}_R^n)$, то есть таких, что для всех $x, y \in \mathbb{B}_R^2$, для которых $|x| = |y|$, выполняется $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частных производных функции $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ по переменным x и y будем использовать выражения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для множества T найдем значение величины $r^*(K) = \inf\{r > 0\colon \mathrm{Mot}(K, \mathbb{B}_r) \neq \varnothing\}$. Заметим, что указанная величина играет важную роль в локальном варианте проблемы Помпейю, поскольку для широкого класса множеств, включающего треугольники, имеет место оценка $\mathcal{R}(K) \leqslant 2r^*(K)$ [6].

На рис. 2 изображен замкнутый круг минимального радиуса, содержащий $\triangle KNM$. Радиус этого круга $r^*(T)$ является половина основания рассматриваемого треугольника. Пусть O — центр окружности. Поскольку $KN = KM = 1$, $\angle OKN = \pi/3$, то $r^*(T) = ON = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

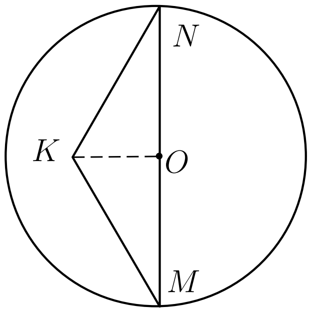


Рис. 2: Минимальный круг, содержащий T

Методами, которые далее будут использованы для доказательства основного результата, несложно установить, что $T \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$, если $R > 1$.

Таким образом, в дальнейших геометрических конструкциях будет рассматривать

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < R < 1. \tag{2}$$

Рассмотрим дифференциальные операторы $\nu_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{tg}\beta\frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{tg}\beta\frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_4 = \operatorname{tg}\beta\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_5 = \operatorname{tg}\beta\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_6 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nu_7 = \nu_1\nu_2\nu_3$, $\nu_8 = \nu_1\nu_3\nu_6$, $\nu_9 = \nu_1\nu_2\nu_4$. Заметим, что вершины треугольника T (см. рис. 1) имеют координаты $K(0,0)$, $M(\cos\beta, -\sin\beta)$, $N(\cos\beta, \sin\beta)$, а для дифференциальных операторов выполняются равенства: $df(t, -t\operatorname{tg}\beta) = (\frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{tg}\beta\frac{\partial f}{\partial y})\,dt = \nu_1 f\,dt$, $df(\cos\beta, t) = \frac{\partial f}{\partial y}\,dt = \nu_2 f\,dt$, $df(t, t\operatorname{tg}\beta) = (\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\beta\frac{\partial f}{\partial y})\,dt = \nu_3 f\,dt$.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^3(T)$. Тогда имеют место равенства*

$$\int_T \nu_8 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \Delta f(\cos\beta, t)\,dt + 2\operatorname{tg}\beta\nu_6 f(K) - \nu_5 f(N) - \nu_4 f(M); \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\int_T \nu_9 f(x,y)\,dx\,dy = 2\operatorname{tg}\beta\nu_6 f(K) - \nu_5 f(N) - \nu_4 f(M) + \\ + 2\operatorname{tg}\beta\int_0^{\cos\beta} \Delta f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt.\end{gathered} \tag{4}$$

$$\int_T \nu_7 f(x,y)\,dx\,dy = 2\operatorname{tg}\beta(\nu_2 f)(K) - (\nu_3 f)(M) + (\nu_1 f)(N). \tag{5}$$

Доказательство. Сведем двойной интеграл по T к повторному и расставим пределы интегрирования в обоих порядках:

$$\begin{aligned}\int_T f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\cos\beta} dx \int_{-x\operatorname{tg}\beta}^{x\operatorname{tg}\beta} f(x,y)\,dy = \\ &= \int_{-\sin\beta}^{0} dy \int_{-y\operatorname{ctg}\beta}^{\cos\beta} f(x,y)\,dx + \int_0^{\sin\beta} dy \int_{y\operatorname{ctg}\beta}^{\cos\beta} f(x,y)\,dx.\end{aligned}$$

Применив оператор ν_1 к функции f, получим

$$\begin{aligned}\int_T \nu_1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \big(f(\cos\beta, y) - f(|y|\operatorname{ctg}\beta, y)\big)\,dy - \\ - \operatorname{tg}\beta\int_0^{\cos\beta} \big(f(x, x\operatorname{tg}\beta) - f(x, -\operatorname{tg}\beta)\big)\,dx.\end{aligned}$$

Один из интегралов разобьем по свойству аддитивности и выполним в нём замены $t = \mp y \operatorname{ctg}\beta$. Таким образом придем к равенству $-\int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} f(|y|\operatorname{ctg}\beta, y)\,dy = \operatorname{tg}\beta \int_{\cos\beta}^{0} f(t, -t\operatorname{tg}\beta)\,dt - \operatorname{tg}\beta \int_{0}^{\cos\beta} f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt$.

В остальных случаях переменную интегрирования заменим на t. Значит

$$\int_T \nu_1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} f(\cos\beta, t)\,dt - 2\operatorname{tg}\beta \int_0^{\cos\beta} f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt. \tag{6}$$

Учитывая теперь формулу вычисления интеграла от полного дифференциала, получаем

$$\int_T \nu_1\nu_3 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \nu_3 f(\cos\beta, t)\,dt - 2\operatorname{tg}\beta f(N) + 2\operatorname{tg}\beta f(K). \tag{7}$$

Так как $\int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \nu_2 f(\cos\beta, t)\,dt = f(N) - f(M)$, то (7) можно переписать в виде

$$\int_T \nu_1\nu_3 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \nu_6 f(\cos\beta, t)\,dt - \operatorname{tg}\beta f(N) - \operatorname{tg}\beta f(M) + 2\operatorname{tg}\beta f(K).$$

Отсюда

$$\int_T \nu_1\nu_3\nu_6 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \nu_6^2 f(\cos\beta, t)\,dt - \\ - \operatorname{tg}\beta\Big(\nu_6 f(N) + \nu_6 f(M)\Big) + 2\operatorname{tg}\beta \nu_6 f(K).$$

Прибавляя к этому

$$0 = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \nu_2^2 f(\cos\beta, t)\,dt - \nu_2 f(N) + \nu_2 f(M),$$

получаем

$$\int_T \nu_1\nu_3\nu_6 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sin\beta}^{\sin\beta} \Delta f(\cos\beta, t)\,dt - \operatorname{tg}\beta\big(\nu_6 f(N) + \nu_6 f(M)\big) + \\ + 2\operatorname{tg}\beta \nu_6 f(K) - \nu_2 f(N) + \nu_2 f(M),$$

что означает (3).

Подставим в (7) $\nu_2 f$ вместо f и поменяем местами дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Получим

$$\int_T \nu_7 f(x,y)\,dx\,dy = \nu_3 f(N) - \nu_3 f(M) - 2\operatorname{tg}\beta \nu_2 f(N) + 2\operatorname{tg}\beta \nu_2 f(K),$$

что, с учетом $\nu_3 - 2\operatorname{tg}\beta\nu_2 = \nu_1$, дает (5).

Заменив теперь в (6) f на $\nu_2 f$, получим

$$\int_T \nu_1\nu_2 f(x,y)\,dx\,dy = f(N) - f(M) - 2\operatorname{tg}\beta \int_0^{\cos\beta} \nu_2 f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt. \tag{8}$$

Из $\int_0^{\cos\beta} \nu_3 f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt = f(N) - f(K)$ с учетом определения ν_3 получаем $\operatorname{tg}\beta \int_0^{\cos\beta} \nu_2 f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt = f(N) - f(K) - \int_0^{\cos\beta} \nu_6 f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt$. Значит (8) можно записать в виде

$$\int_T \nu_1\nu_2 f(x,y)\,dx\,dy = 2f(K) - f(N) - f(M) + 2\int_0^{\cos\beta} \nu_6 f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt. \tag{9}$$

Получим теперь два равенства из (8) следующим образом: заменой f на $\nu_2 f$ и заменой f на $\nu_6 f$ с домножением на $\operatorname{tg}\beta$. После этого из полученного второго вычтем первое равенство. Получим

$$\int_T \nu_1\nu_2\Big(\operatorname{tg}\beta\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\Big) f(x,y)\,dx\,dy = 2\operatorname{tg}\beta\frac{\partial f}{\partial x}(K) - \Big(\operatorname{tg}\beta\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)(N) -$$
$$- \Big(\operatorname{tg}\beta\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)(M) + 2\operatorname{tg}\beta\int_0^{\cos\beta} \Delta f(t, t\operatorname{tg}\beta)\,dt,$$

что означает (4) $\square$

Доказательство следующей леммы можно найти в [1].

Лемма 2. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{d}$ — один из дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, и для некоторого открытого множества D, для которого $\operatorname{Mot}(K, D) \neq \varnothing$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(K, D)$. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(K, D)$.*

Учитывая, что все ν_j ($j = \overline{1,9}$) являются линейными комбинациями операторов дифференцирования по x и y или произведениями других из них, получаем

Следствие 1. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^2$, и для некоторого открытого множества D, для которого $\operatorname{Mot}(K, D) \neq \varnothing$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(K, D)$. Тогда для любого $j = \overline{1,9}$ имеет место $\nu_j f \in \mathfrak{P}^\infty(K, D)$.*

Пусть $\rho(e) = \rho(O, \lambda e) = \inf\{\|\vec{OX}\| : X \in e\}$ — расстояние от центра круга, точки $O(0,0)$ до элемента λe треугольника λT (вершины или стороны) при фиксированном $\lambda \in \operatorname{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$:

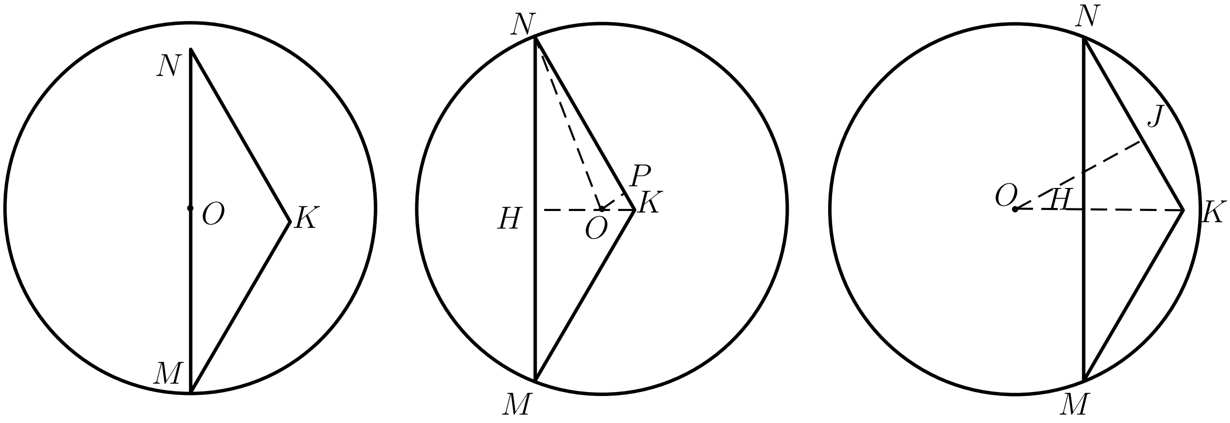
$$\begin{aligned} \max(M) &= \sup\{\rho(M)\}, & \max(MN) &= \sup\{\rho(MN)\},\\ \min(M) &= \inf\{\rho(M)\}, & \min(MN) &= \inf\{\rho(MN)\},\\ \max(K) &= \sup\{\rho(K)\}, & \max(NK) &= \sup\{\rho(NK)\},\\ \min(K) &= \inf\{\rho(K)\}, & \min(NK) &= \inf\{\rho(NK)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим крайние расположения λT в $\mathbb{B}_R$ при условии (2). Для треугольника T имеют место равенства $\angle NKM = 2\beta$, $NM = 2\sin\beta$, $KH = \cos\beta$, где KH — высота, проведённая к основанию MN.

Из рис. 3,*а* видим, что $\max(M) = R$, $\min(N) = NM - OM = 2\sin\beta - R$, $\min(MN) = 0$.

Рассмотрим рис. 3,*б*. $\triangle ONH$ — прямоугольный, поскольку $OH \perp MN$. По теореме Пифагора $\max(MN) = OH = \sqrt{ON^2 - HN^2} = \sqrt{R^2 - \sin^2\beta}$. При этом $OK = \min(K) = KH - OH = \cos\beta - \sqrt{R^2 - \sin^2\beta}$. Перпендикуляр OP, проведённый к стороне KN, является минимумом до боковой стороны T. Из прямоугольного $\triangle OPK$ получим $\min(NK) = OP = OK \cdot \sin\beta = (\cos\beta - \sqrt{R^2 - \sin^2\beta}) \cdot \sin\beta$.

Рассмотрим рис. 3,*в*. Заметим, что OK — максимальное расстояние до вершины K, тогда $\max(K) = OK = OH + HK = \max(MN) + HK = \sqrt{R^2 - \sin^2\beta} + \cos\beta$.



а *б* *в*

Рис. 3: Расположения λT в $\mathbb{B}_R$

Из прямоугольного $\triangle OJK$ максимальное расстояние до боковой стороны $\max(NK) = OJ = OK \cdot \sin\beta = (\sqrt{R^2 - \sin^2\beta} + \cos\beta)\sin\beta$.

Собрав вместе результаты геометрических рассуждений, получаем

Лемма 3. *При условии* (2) *имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \max(M) &= R, & \max(MN) &= \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}}, \\ \min(M) &= \sqrt{3} - R, & \min(MN) &= 0, \\ \max(K) &= \frac{1}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}}, & \max(NK) &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{3R^2}{4} - \frac{9}{16}}, \\ \min(K) &= \frac{1}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}}, & \min(NK) &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{3R^2}{4} - \frac{9}{16}}. \end{aligned}$$

Лемма 4. *Пусть R удовлетворяет* (2). *Тогда если $R > \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, то выполняется каждое из неравенств:* $\min(K) < \max(NK)$, $\min(NK) < \max(MN)$. *Если* $R < \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, *то* $\min(NK) > \max(MN)$.

Доказательство. Для решения уравнения $\min(NK) = \max(MN)$ сделаем замену $t = \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}}$. Получим $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}t = t$, откуда $t = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+2)}$. Выполнив обратную замену, приходим к $R^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4(\sqrt{3}+2)^2} = \frac{3}{4}\cdot(7 - 4\sqrt{3})$. Отсюда $R^2 = 6 - 3\sqrt{3}$. С учётом (2), получаем $R = \frac{1}{2}\sqrt{24 - 12\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{18} - \sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

Путём непосредственных вычислений и применения метода интервалов, приходим к утверждению леммы. □

Перед формулировкой необходимого в дальнейшем утверждения, доказательство которого можно найти в [6], введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu,\varepsilon} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\big\}$, $\nu = 1, \dots, k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в $\mathcal{U}$ распределений, $\vec{\partial} = \big(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\big)$.

Утверждение 1. *(Теорема 3.2 из [6]) Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0\big(\Omega_{\nu,\varepsilon}\big)$ для $\nu = 1, \ldots, k$ и существуют многочлены $P_\nu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}^n_\varepsilon$ выполняется $\sum_{\nu=1}^{k}\big(P_\nu(\vec{\partial})F_\nu\big)(x+v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta)F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$.*

Лемма 5. *Пусть выполняется (2), и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q_0(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}\,(\min(K), \max(K)) \cup \mathbb{B}\,(\min(M), \max(M))$.*

Доказательство. Применяя утверждение 1 к функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \subset \mathfrak{H}_0\big(\Omega_{\nu,\varepsilon}\big)$ для вершин K, N, M треугольника T, учитывая (5) из леммы 1 (по следствию 1 его левая часть в данном случае обращается в нуль), приходим к существованию нетривиального многочлена $q_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которого $q_0(\Delta)f = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$. Последнее множество представляет из себя набор точек из $\mathbb{B}_R$, в которых могут оказаться вершины λM, λN и λK при $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$. Учитывая симметрию T и используя обозначения (10), приходим к утверждению леммы. $\square$

Лемма 6. *Пусть выполняется (2), и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q_1(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}\,(\min(K), \max(M))$.*

Доказательство. Рассмотрим ненулевой многочлен $q_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ из леммы 5, то есть такой, что $q_0(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}\,(\min(K), \max(K)) \cup \mathbb{B}\,(\min(M), \max(M))$. И пусть R таково, что $\max(K) < \min(M)$. Так как оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, применяя лемму 2 и линейность интеграла, имеем $q_0(\Delta)f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$.

Пусть $q_1(\Delta) = \Delta q_0(\Delta)$, $g = q_1(\Delta)f$, $a = \min(K)$, $b = \max(K)$, $c = \min(M)$. Подставим в (4) $q_0(\Delta)f$ вместо f. Из свойств $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$, учитывая, что вершины треугольника находятся в $\mathbb{B}(a, b) \cup \mathbb{B}(c, R)$, где $q_0(\Delta)f = 0$, получаем, что интегралы от g по отрезкам $\lambda(KN)$ при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{T}, \mathbb{B}_R)$ равны нулю. То есть существуют $a_1, a_2 \in (a, b)$ такие, что $\int_0^{\sqrt{c^2-x^2}} g(\sqrt{x^2+y^2})\,dy = 0$ при всех $x \in (a_1, a_2)$.

Сделав в интеграле замену $t = \sqrt{x^2+y^2}$, получим $0 = \int_x^c \frac{t\cdot g(t)\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}$. Подставим вместо $t(t^2-x^2)^{-1/2}$ его разложение в ряд Лорана $1 + \sum_{j=1}^{\infty}\big(\frac{x}{t}\big)^{2j}/(j!2^j)$. Учитывая равномерную сходимость ряда внутри $|t| > x$ и поменяв интегрирование и суммирование местами, получим $0 = \sum_{j=0}^{\infty}\big(\int_x^c \frac{g(t)\,dt}{t^{2j}}\big)\frac{x^{2j}}{j!2^j}$ внутри $|t| > x$. По теореме единственности разложения в ряд Лорана получаем $\int_x^c \frac{g(t)\,dt}{t^{2j}} = 0$ для всех $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Так как $g = 0$ в $\mathbb{B}(a, b)$, то имеем $\int_a^c \frac{g(t)\,dt}{t^{2j}} = 0$.

Сделаем в полученном интеграле замену $z = 1/t^2$. Получим $\int_{1/c^2}^{1/a^2} z^{j-1} g(\frac{1}{\sqrt{z}})/\sqrt{z}\,dz = 0$. Так как система многочленов $\{1, z, z^2, \ldots\}$ замкнута в пространстве $C(1/c^2, 1/a^2)$, то $g(1/\sqrt{z})/\sqrt{z} = 0$ в $(1/c^2, 1/a^2)$, откуда получаем $g = 0$ в (a, c). Учитывая равенство нулю функции g в (c, R), получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 7. *Пусть $R > \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q_2(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен q_1 из леммы 6 и функцию $F = q_1(\Delta)f$. По следствию 1, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, получаем $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. При этом $F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(K), R)$. Доопределим F нулём вне $\mathbb{B}_R$.

Заменив в (4) f на F, а T на λT для различных $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$, учитывая равенство нулю интегралов по треугольникам и равенство нулю функции F вне замыкания $\overline{\mathbb{B}}(\min(K))$, получаем, что интегралы от ΔF по сторонам $\lambda(KN)$, а значит и по всем прямым, их содержащим, равны нулю. То есть преобразование Радона по всем прямым, расстояние до которых от начала координат больше $\min(KN)$, равно нулю. Отсюда (см., например, лемму 1.8.3 из [6]) следует $\Delta F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(KN), R)$. Аналогичными рассуждениями на основе формулы (3) и с учётом леммы 4, получаем $\Delta^2 F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(MN), R)$. По лемме 3, $\min(MN) = 0$. Произведение $\Delta^2 q(\Delta)$ также является многочленом от Δ. Таким образом, утверждение леммы получено. $\square$

Приведем также два утверждения, доказательства которых полностью аналогичны леммам 7 и 8 из [16].

Лемма 8. *Пусть* $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) = \{0\}$ *для некоторого* $R > \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$. *Тогда* $\mathcal{R}(T) \leqslant R$.

Лемма 9. *Пусть* $R > \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, *для некоторой функции* $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$ *и для некоторого многочлена* $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *выполняется* $q(\Delta)f = 0$ *в* $\mathbb{B}_R$. *Тогда* $f = 0$ *в* $\mathbb{B}_R$.

Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 1. Если $0 < R \leqslant r^*(T)$, то $\mathrm{Mot}(T, B_R) = \varnothing$ и тогда выполнение (1) для $K = T$ при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(T, B_R)$ не накладывает никаких условий на функцию f, значит найдётся ненулевая функция f с необходимым условием.

Пусть $\frac{\sqrt{3}}{2} < R < \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$. В этом случае по лемме 4 выполняется нервенство $a = \max(MN) < b = \min(NK)$.

Для $j \in \{1, 2\}$ рассмотрим функции

$$g_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant d \leqslant a \text{ или } d \geqslant b; \\ \exp\left(\frac{j}{(d-a)(d-b)}\right), & \text{если } a < d < b. \end{cases}$$

Тогда существуют такие радиальные функции $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что их преобразования Радона по прямым $\mathbf{R}f_j(\omega, d)$ совпадают с $g_j(d)$ для всех $|\omega| = 1$ и $d \geqslant 0$ (см., например, [6, Глава 1]). Эти функции линейно независимы, поэтому существует такой ненулевой набор чисел $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, что линейная комбинация $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ радиальная, не равна нулю тождественно и обладает следующими свойствами. Она имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние до начала координат от которых лежит в пределах от 0 до a, интеграл равный нулю по любому сегменту $\mathbf{S}$ круга радиуса b с расстоянием до хорды равном a (см. рис. 4), равна нулю во внешности $\mathbb{B}_b$. Круг $\mathbb{B}_b$ состоит из двух сегментов $\mathbf{S}$ и пучка отрезков указанных прямых, значит по свойству аддитивности функция f имеет нулевой интеграл по $\mathbb{B}_b$. Кроме того, функция f вне этого круга равна нулю.

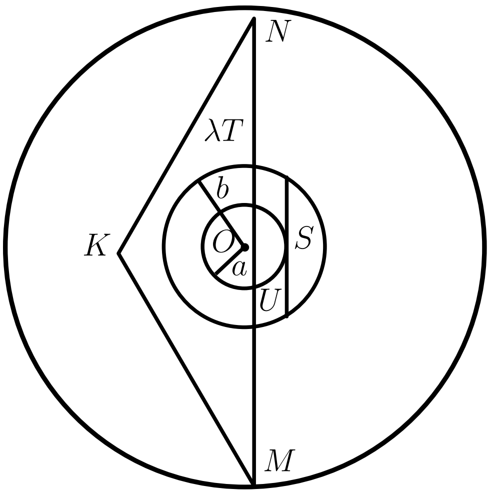


Рис. 4: Расположения λT в $\mathbb{B}_R$

Рассмотрим произвольный $\lambda T \subset \mathbb{B}_R$ (см. рис. 4). Круг $\mathbb{B}_b$ можно представить в виде объединения множеств, не имеющих общих внутренних точек: сегмента $\lambda T \cap \mathbb{B}_b$, сегмента $\mathbf{S}$, хорда которого параллельна MN, кругового слоя U, состоящего из отрезков прямых $l \parallel MN$, расстояние от которых до начала координат не превышает b. По свойству аддитивности интеграла $\int_{\lambda T} f\,dx = \int_{\lambda T \setminus \mathbb{B}_b} f\,dx + \int_{\lambda T \cap \mathbb{B}_b} f\,dx$. Так как $f = 0$ вне $\mathbb{B}_b$, то первое слагаемое равно нулю.

По доказанному ранее, $0 = \int_{\mathbb{B}_b} f\,dx = \int_{\lambda T\cap\mathbb{B}_b} f\,dx + \int_U f\,dx + \int_S f\,dx = \int_{\lambda T\cap\mathbb{B}_b} f\,dx$. Отсюда $\int_{\lambda T} f\,dx = \int_{\lambda T\cap\mathbb{B}_b} f\,dx = 0$.

Построенная ненулевая функция с нулевыми интегралами по $\lambda T \subset \mathbb{B}_R$ доказывает оценку $\mathcal{R}(T) \geqslant \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

Если $R > \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, то, используя леммы 7, 8, 9, получаем оценку $\mathcal{R}(T) \leqslant \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Выводы. В работе в явном виде получено точное значение величины $\mathcal{R}(T) = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \approx 0{,}896575$, где T — равнобедренный треугольник с боковыми сторонами равными 1 и углом между ними равным $2\pi/3$. Известная ранее общая оценка сверху давала $\mathcal{R}(T) \leqslant \sqrt{3} \approx 1{,}732051$. Тривиальная оценка снизу $\mathcal{R}(T) \geqslant \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866025$.

Решение локального варианта проблемы Помпейю применяется в комплексном анализе, теории аппроксимации, теории отображений, сохраняющих меру [6, 16], при нахождении экстремального радиуса Помпейю для совокупности множеств [1, 12, 17], а также при изучении вопроса равенства нулю функции с нулевыми интегралами по множествам положительной коразмерности [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машаров П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2. – С. 77–88.
2. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183-190.
3. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723-–2736.
4. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
5. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
6. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
7. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185-194.
8. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – No 278. – P. 69–74.
9. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
10. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser., 2013. – 592 p.
11. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12, № 1. – С. 51–79.
12. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.
13. Волчков В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52.
14. Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
15. Машаров, П. А. Экстремальный вариант проблемы Помпейю для равнобедренного треугольника / П. А. Машаров, И. С. Власенко // Вестник Донецкого государственного университета. Сер. А: Естественные науки. – 2023. – №. 2. – С. 72–82.
16. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.

17. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства круговых секторов / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 166–171.

Поступила в редакцию 21.08.2025 г.

AN EXTREME VERSION OF THE POMPEIU PROBLEM FOR AN OBTUSE ISOSCELES TRIANGLE

P. A. Masharov, I. S. Vlasenko

The value of the smallest circle radius in which the given set is a Pompeiu set is found explicitly. The isosceles triangle with an angle $2\pi/3$ is considered.

Keywords: the Pompeiu set, the extreme version of the Pompeiu problem, the local variant of Pompeiu problem, the Pompeiu property for an isosceles obtuse triangle.

Машаров Павел Анатольевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.
E-mail: pavelmasharov@gmail.com

Masharov Pavlo Anatoliyovych
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk State University, Donetsk, Russia.

Власенко Илона Сергеевна
магистрант, Донецкий государственный университет, г. Донецк, РФ

Vlasenko Ilona Sergeevna
Graduate student, Donetsk State University, Donetsk, Russia

УДК 539.3 DOI: 10.5281/zenodo.17052556 EDN: MPSVJK

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА В СПЛОШНОЙ ПЛАСТИНКЕ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА

© 2025. ***Е. С. Глушанков***

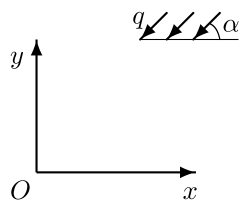
Предоставлено решение задачи определения термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной сплошной пластинки из пьезоматериала под действием линейного потока тепла, в котором учитывается фактор порождения потенциального электромагнитного поля вследствие пироэлектрического и пиромагнитного эффектов. Выражения для компонентов электромагнитного поля получены как в виде функций двух действительных переменных, так и функций комплексной переменной.

Ключевые слова: линейный поток тепла, термоэлектромагнитоупругое состояние, потенциальное электромагнитное поле, пироэлектрический и пиромагнитный эффекты.

Введение. В современной науке и технике широко используются конструкции, где в качестве элементов присутствуют тонкие пластинки из пьезоматериалов. Под действии тепловых, механических и электромагнитных полей в этих пластинках могут возникать значительные концентрации напряжений, а также индукций и напряженностей электромагнитного поля. Данные факторы необходимо учитывать при проектировании конструкций. К настоящему времени решено большое количество задач определения термоэлектромагнитоупругого состояния пластинок при действии указанных факторов [1–6], в т.ч. различных температурных воздействий [7–10].

В работах [7,8] впервые затронут вопрос потенциальности электрического и магнитного полей, порождаемых при действии линейного потока тепла. В работе [11] установлено условие, при котором линейный поток тепла порождает электромагнитное поле с нулевой индукцией. Условие накладывается на угол действия потока тепла в зависимости от свойств материала пластинки. При этом, в работе [12] авторы указывают на порождение потенциального электрического поля с ненулевой индукцией при произвольном угле действия потока тепла, а в работе [13] указывают на связь направления действия тепла с направлением поляризации материала пластинки, впрочем, не приводя выражений для компонентов электрического поля.

В данной работе получены выражения для основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния, возникающего в бесконечной сплошной пластинке при действии линейного потока тепла с произвольным углом направления. Решение поставленной задачи построено с предположением, что в отсутствие внешних электромагнитных воздействий в пластинке может возникать потенциальное электромагнитное поле с ненулевой электрической и магнитной индукцией вследствие пироэлектрического и пиромагнитного эффектов, проявляющихся при температурном градиенте.



Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную сплошную пластинку, изготовленную из пьезоматериала, отнесенную к декартовой системе координат Oxy (рисунок). В пластинке на бес-

Исследования проводились в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124012400354-0)

конечности действует линейный поток тепла плотности q под углом α. Механические и электромагнитные воздействия на бесконечности отсутствуют.

Решение задачи определения термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки сводится к последовательному решению двух задач: сперва – задачи теплопроводности, затем – задачи термоэлектромагнитоупругости.

Решение задачи теплопроводности сводится к определению основных характеристик температурного поля (температуры T, плотности потока тепла q_x, q_y) через интегрирование уравнения теплопроводности

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

в котором k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки. После определения температуры T становится возможным определять плотности потока тепла q_x, q_y в направлениях осей координат по формулам

$$q_x = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad q_y = -\left(k_{12}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{2}$$

а также плотности потока тепла q_n по направлению n по формуле

$$q_n = -\left((k_{11}\cos(nx) + k_{12}\cos(ny))\frac{\partial T}{\partial x} + (k_{12}\cos(nx) + k_{22}\cos(ny))\frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{3}$$

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости сводится к определению основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}, деформаций ε_x, ε_y, γ_{xy}, индукций электрического поля D_x, D_y, напряженностей электрического поля E_x, E_y, индукций магнитного поля B_x, B_y, напряженностей магнитного поля H_x, H_y, перемещений u, v, потенциала электрического поля φ, потенциала магнитного поля ψ) через интегрирование системы уравнений, состоящей из:

– уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \tag{4}$$

– уравнений вынужденной электромагнитостатики

$$\begin{gathered}\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,\\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0;\end{gathered} \tag{5}$$

– уравнений электромагнитоупругого состояния

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y + \alpha_1 T,\\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y + \alpha_2 T,\\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y + \alpha_6 T,\\ E_y &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + \nu_{11}B_x + \nu_{12}B_y + t_1 T,\\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + \nu_{12}B_x + \nu_{22}B_y + t_2 T,\\ H_y &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + \nu_{11}D_x + \nu_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y + m_1 T,\\ H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + \nu_{12}D_x + \nu_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y + m_2 T;\end{aligned} \tag{6}$$

– соотношений Коши для малых деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \tag{7}$$

– соотношений потенциальности электромагнитного поля

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{8}$$

Здесь s_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала пластинки; β_{ij}, ν_{ij} и χ_{ij} – коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемостей материала пластинки; α_i – коэффициенты линейного теплового расширения материала пластинки; t_i и m_i – пироэлектрические и пиромагнитные модули материала пластинки.

Кроме того, должно выполняться условие совместности Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{9}$$

Решение задачи. Решением уравнения теплопроводности (1) при заданных условиях на бесконечности является функция [11]

$$T^* = q\left(t_x x + t_y y\right), \tag{10}$$

где

$$t_x = \frac{k_{22}\cos\alpha - k_{12}\sin\alpha}{\kappa^2}, \quad t_y = \frac{k_{11}\sin\alpha - k_{12}\cos\alpha}{\kappa^2}, \quad \kappa^2 = k_{11}k_{22} - k_{12}^2.$$

А для потоков тепла справедливы формулы

$$q_x^* = -q\cos\alpha, \quad q_y^* = -q\sin\alpha. \tag{11}$$

Здесь и далее знак «*» в верхнем индексе относится к компонентам решения поставленной задачи для бесконечной пластинки.

Как видно из (10), изотермы в рассматриваемой пластинке являются прямыми линиями, определяемыми уравнениями вида $t_x x + t_y y = \mathrm{const}$. Поскольку рассматриваемая пластинка является бесконечной, то термоэлектромагнитоупругое состояние в пластинке можно считать периодическим, при котором значения напряжений, деформаций, индукций и напряженностей электромагнитного поля, входящих в уравнения состояния (6) наравне с температурой, должны быть одинаковыми вдоль изотерм.

В то же время, из теории термоупругости известно [14], что под действием линейного потока тепла напряжения в сплошной пластинке (неподкрепленной, конечной или бесконечной) не возникают:

$$\sigma_x^* = 0, \quad \sigma_y^* = 0, \quad \tau_{xy}^* = 0.$$

Однако будем полагать, что при действии линейного потока тепла вследствие возникающего градиента температур в силу пироэлектрического и пиромагнитного эффектов индуцируется электромагнитное поле с описанным выше характером периодичности. При этом, как и температура T^*, деформации и компоненты электромагнитного поля также должны быть линейными функциями координат. Тогда получим:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x^* = q s_x \left(t_x x + t_y y \right), \quad \varepsilon_x^* = q s_x \left(t_x x + t_y y \right), \quad \gamma_{xy}^* = q s_{xy} \left(t_x x + t_y y \right), \\
D_x^* = q d_x \left(t_x x + t_y y \right), \quad D_y^* = q d_y \left(t_x x + t_y y \right), \\
E_x^* = q e_x \left(t_x x + t_y y \right), \quad E_y^* = q e_y \left(t_x x + t_y y \right), \\
B_x^* = q b_x \left(t_x x + t_y y \right), \quad B_y^* = q b_y \left(t_x x + t_y y \right), \\
H_x^* = q h_x \left(t_x x + t_y y \right), \quad H_y^* = q h_y \left(t_x x + t_y y \right),
\end{gathered} \tag{12}$$

где s_x, s_y, s_{xy}, d_x, d_y, e_x, e_y, b_x, b_y, h_x, h_y – неизвестные постоянные.

При этом, условие Сен-Венана (9) удовлетворяется тождественно. А после подстановки соотношений (12) в уравнения (6) получим

$$\begin{gathered}
s_x = g_{11} d_x + g_{21} d_y + p_{11} b_x + p_{21} b_y + \alpha_1, \\
s_y = g_{12} d_x + g_{22} d_y + p_{12} b_x + p_{22} b_y + \alpha_2, \\
s_{xy} = g_{16} d_x + g_{26} d_y + p_{16} b_x + p_{26} b_y + \alpha_6, \\
e_x = \beta_{11} d_x + \beta_{12} d_y + \nu_{11} b_x + \nu_{12} b_y + t_1, \\
e_y = \beta_{12} d_x + \beta_{22} d_y + \nu_{12} b_x + \nu_{22} b_y + t_2, \\
h_x = \nu_{11} d_x + \nu_{12} d_y + \chi_{11} b_x + \chi_{12} b_y + m_1, \\
h_y = \nu_{12} d_x + \nu_{22} d_y + \chi_{12} b_x + \chi_{22} b_y + m_2,
\end{gathered}$$

а также

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x^* = q \left(g_{11} d_x + g_{21} d_y + p_{11} b_x + p_{21} b_y + \alpha_1 \right) \left(t_x x + t_y y \right), \\
\varepsilon_y^* = q \left(g_{12} d_x + g_{22} d_y + p_{12} b_x + p_{22} b_y + \alpha_2 \right) \left(t_x x + t_y y \right), \\
\gamma_{xy}^* = q \left(g_{16} d_x + g_{26} d_y + p_{16} b_x + p_{26} b_y + \alpha_6 \right) \left(t_x x + t_y y \right), \\
E_x^* = q \left(\beta_{11} d_x + \beta_{12} d_y + \nu_{11} b_x + \nu_{12} b_y + t_1 \right) \left(t_x x + t_y y \right), \\
E_y^* = q \left(\beta_{12} d_x + \beta_{22} d_y + \nu_{12} b_x + \nu_{22} b_y + t_2 \right) \left(t_x x + t_y y \right), \\
H_x^* = q \left(\nu_{11} d_x + \nu_{12} d_y + \chi_{11} b_x + \chi_{12} b_y + m_1 \right) \left(t_x x + t_y y \right), \\
H_y^* = q \left(\nu_{12} d_x + \nu_{22} d_y + \chi_{12} b_x + \chi_{22} b_y + m_2 \right) \left(t_x x + t_y y \right),
\end{gathered} \tag{13}$$

Тогда после подстановки 4го, 5го, 7го, 8го соотношений (12) и 4го-7го соотношений (13) в уравнения вынужденной электромагнитостатики (5) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных d_x, d_y, b_x, b_y:

$$\begin{gathered}
d_x t_x + d_y t_y = 0, \\
\left(\beta_{12} t_x - \beta_{11} t_y \right) d_x + \left(\beta_{22} t_x - \beta_{12} t_y \right) d_y + \left(\nu_{12} t_x - \nu_{11} t_y \right) b_x + \\
+ \left(\nu_{22} t_x - \nu_{12} t_y \right) b_y = t_1 t_y - t_2 t_x, \\
b_x t_x + b_y t_y = 0, \\
\left(\nu_{12} t_x - \nu_{11} t_y \right) d_x + \left(\nu_{22} t_x - \nu_{12} t_y \right) d_y + \left(\chi_{12} t_x - \chi_{11} t_y \right) b_x + \\
+ \left(\chi_{22} t_x - \chi_{12} t_y \right) b_y = m_1 t_y - m_2 t_x.
\end{gathered} \tag{14}$$

После решения этой системы постоянные d_x, d_y, b_x, b_y, а следовательно, и s_x, s_y, s_{xy}, e_x, e_y, h_x, h_y становятся известными, и становится возможным определять значения деформаций, индукций и напряженностей электромагнитного поля в любой точке бесконечной сплошной пластинки по формулам (12).

Определим теперь перемещения u^*, v^* в точках пластинки, следуя подходу, описанному, например, в [11]. Так, после подстановки 1го и 2го соотношений (12) в 1е и 2е соотношения Коши (7) и соответствующего интегрирования получим

$$
\begin{aligned}
u^* &= q\left(\frac{s_x t_x}{2}x^2 + s_x t_y xy\right) + f(y),\\
v^* &= q\left(s_y t_x xy + \frac{s_y t_y}{2}y^2\right) + g(x),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где $f(y)$, $g(x)$ – неизвестные функции, подлежащие определению. Подставляя эти выражения вместе с 3м выражением (12) в 3е соотношение Коши (7), получим

$$
q\left(s_x t_y x + s_y t_x y\right) + f'(y) + g'(x) = q s_{xy}\left(t_x x + t_y y\right)
$$

или

$$
q\left(s_x t_y - s_{xy} t_x\right)x + g'(x) = -q\left(s_y t_x - s_{xy} t_y\right)y - f'(y) = \omega_3,
$$

где ω_3 – угол поворота пластинки как целого. Отсюда получаем

$$
f'(y) = -q\left(s_y t_x - s_{xy} t_y\right)y - \omega_3, \quad g'(x) = -q\left(s_x t_y - s_{xy} t_x\right)x + \omega_3.
$$

Интегрируя эти соотношения и подставляя в (15), получим

$$
\begin{aligned}
u^* &= q\left(\frac{s_x t_x}{2}x^2 + s_x t_y xy + \frac{s_{xy} t_x - s_y t_x}{2}y^2\right) - \omega_3 y + u_0,\\
v^* &= q\left(\frac{s_{xy} t_x - s_x t_y}{2}x^2 + s_y t_x xy + \frac{s_y t_y}{2}y^2\right) + \omega_3 x + v_0,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – перемещения пластинки как целого, не порождающие напряженного состояния.

Определим теперь потенциалы электромагнитного поля u^*, v^* в точках пластинки. Так, после подстановки 6го, 7го, 10го, 11го соотношений (12) в соотношения (8), соответствующего интегрирования и приравнивания получим

$$
\begin{aligned}
\varphi^* &= -q\left(\frac{e_x t_x}{2}x^2 + e_x t_y xy\right) + f_1(y) = -q\left(e_y t_x xy + \frac{e_y t_y}{2}y^2\right) + f_2(x),\\
\psi^* &= -q\left(\frac{h_x t_x}{2}x^2 + h_x t_y xy\right) + g_1(y) = -q\left(h_y t_x xy + \frac{h_y t_y}{2}y^2\right) + g_2(x),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $f_1(y)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(x)$ – неизвестные функции, подлежащие определению. Отсюда следует

$$
\begin{aligned}
f_1(y) &= -q\frac{e_y t_y}{2}y^2 + \varphi_0, \quad f_2(x) = -q\frac{e_x t_x}{2}x^2 + \varphi_0,\\
g_1(y) &= -q\frac{h_y t_y}{2}y^2 + \psi_0, \quad g_2(x) = -q\frac{h_x t_x}{2}x^2 + \psi_0,
\end{aligned}
$$

где φ_0, ψ_0 – начальные значения потенциалов электромагнитного поля. При этом, ввиду (14) справедливы равенства

$$
e_x t_y = e_y t_x, \quad m_x t_y = m_y t_x. \tag{18}
$$

Тогда для потенциалов электромагнитного поля получим выражения

$$\begin{aligned} \varphi^* &= -q\left(\frac{e_x t_x}{2}x^2 + e_x t_y xy + \frac{e_y t_y}{2}y^2\right) + \varphi_0, \\ \psi^* &= -q\left(\frac{h_x t_x}{2}x^2 + h_x t_y xy + \frac{h_y t_y}{2}y^2\right) + \psi_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Если выполняется приведенное в работе [11] условие

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{t_y}{t_x},$$

то система уравнений (14) является однородной, следовательно,

$$d_x = d_y = b_x = b_y = 0,$$

индукции порождаемого электромагнитного поля будут равны нулю, т.е.

$$D_x^* = D_y^* = 0, \quad B_x^* = B_y^* = 0,$$

деформации и напряженности электромагнитного поля определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= q\alpha_1 (t_x x + t_y y) = \alpha_1 T^*, \\ \varepsilon_y &= q\alpha_2 (t_x x + t_y y) = \alpha_2 T^*, \\ \gamma_{xy} &= q\alpha_6 (t_x x + t_y y) = \alpha_6 T^*, \\ E_x^* &= qt_1 (t_x x + t_y y) = t_1 T^*, \\ E_y^* &= qt_2 (t_x x + t_y y) = t_2 T^*, \\ H_x^* &= qm_1 (t_x x + t_y y) = m_1 T^*, \\ H_y^* &= qm_2 (t_x x + t_y y) = m_2 T^*, \end{aligned}$$

а перемещения и потенциалы электромагнитного поля –

$$\begin{aligned} u^* &= q\left(\frac{\alpha_1 t_x}{2}x^2 + \alpha_1 t_y xy + \frac{\alpha_6 t_x - \alpha_2 t_x}{2}y^2\right) - \omega_3 y + u_0, \\ v^* &= q\left(\frac{\alpha_6 t_x - \alpha_1 t_y}{2}x^2 + \alpha_2 t_x xy + \frac{\alpha_2 t_y}{2}y^2\right) + \omega_3 x + v_0, \\ \varphi^* &= -q\left(\frac{t_1 t_x}{2}x^2 + t_1 t_y xy + \frac{t_2 t_y}{2}y^2\right) + \varphi_0, \\ \psi^* &= -q\left(\frac{m_1 t_x}{2}x^2 + m_1 t_y xy + \frac{m_2 t_y}{2}y^2\right) + \psi_0, \end{aligned}$$

что совпадает с результатами в работе [11].

Можно сделать вывод, что если направление действия потока тепла совпадает с направлением поляризации материала пластинки (вариант 1), то в пластинке не возникают индукции электромагнитного поля. В противном варианте (вариант 2), электромагнитное поле характеризуется ненулевыми значениями индукции, являющимися линейными функциями координат, а точнее, линейными функциями температуры. При этом, формулы для варианта 1 могут быть получены к частный случай формул для варианта 2.

Использование построенного решения в задаче о действии линейного потока тепла в многосвязной пластинке. Полученные выражения (12), (16), (19) можно использовать для решения задачи определения термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечных многосвязных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями методом суперпозиции. Тогда значения основных характеристик температурного поля и термоэлектромагнитоупругого состояния в точках пластинки могут быть вычислены по формулам

$$T = T^* + 2\operatorname{Re} F_5(z_5); \tag{20}$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) + 2\operatorname{Re} i\kappa(\mu_5, -1)F_5'(z_5); \tag{21}$$

$$(\sigma_x,\, \sigma_y,\, \tau_{xy}) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k^2,\, 1,\, -\mu_k)\Phi_k'(z_k); \tag{22}$$

$$(D_x,\, D_y,\, B_x,\, B_y) = (D_x^*,\, D_y^*,\, B_x^*,\, B_y^*) + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k\nu_k,\, -\nu_k,\, \mu_k\rho_k,\, -\rho_k)\Phi_k'(z_k); \tag{23}$$

$$(E_x,\, E_y,\, H_x,\, H_y) = (E_x^*,\, E_y^*,\, H_x^*,\, H_y^*) - 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(r_k^0,\, \mu_k r_k^0,\, h_k^0,\, \mu_k h_k^0)\Phi_k'(z_k); \tag{24}$$

$$(u,\, v,\, \varphi,\, \psi) = (u^*,\, v^*,\, \varphi^*,\, \psi^*) + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(p_k,\, q_k,\, r_k^0,\, h_k^0)\Phi_k(z_k). \tag{25}$$

Здесь $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ – комплексные потенциалы теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости, определяемые позднее из граничных условий соответствующих задач на контурах пластинки [9, 10];

$$z_k = x + \mu_k y \quad (k = \overline{1,\, 5}); \tag{26}$$

μ_5 – корень характеристического уравнения задачи теплопроводности

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \tag{27}$$

μ_k $(k = \overline{1,\, 4})$ — корни характеристического уравнения задачи термоэлектромагнитоупругости

$$l_8(\mu) = 0; \tag{28}$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\,\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1,4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1,4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{l_8(\mu_5)};$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\,\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\,\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - \left(g_{21} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k - \left(p_{21} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\,\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\,\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\,\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\,\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5},$$

δ_{ij} – дельта-символ Кронекера;

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5)\,dz_5;$$

Решение задачи для бесконечной сплошной пластинки с помощью функций комплексной переменной. Поставленную задачу для бесконечной пластинки можно решить также с использованием функций комплексной переменной. Тогда полученные комплексные потенциалы $F_5^*(z_5)$, $\Phi_k^*(z_k)$ могут быть встроены как слагаемые в «обычные» комплексные потенциалы $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$, а для определения значений основных характеристик температурного поля и термоэлектромагнитоупругого состояния могут быть использованы формулы (20)–(25) без слагаемых с верхним индексом «*».

Функцию $F_5^*(z_5)$ будем определять из соотношения

$$2\,\mathrm{Re}\,F_5^*(z_5) = T^*.$$

Следовательно, имеет смысл искать функцию $F_5^*(z_5)$ в виде линейной функции:

$$F_5^*(z_5) = \gamma_5 z_5.$$

Тогда получим

$$2\operatorname{Re}\gamma_5 z_5 = \gamma_5 z_5 + \overline{\gamma}_5 \overline{z}_5 = q\left(t_x x + t_y y\right).$$

Поскольку $z_5 = x + \mu_5 y$, $\overline{z}_5 = x + \overline{\mu}_5 y$, то имеем

$$\left(\gamma_5 + \overline{\gamma}_5\right) x + \left(\mu_5\gamma_5 + \overline{\mu}_5\overline{\gamma}_5\right) y = q\left(t_x x + t_y y\right).$$

Отсюда получаем

$$\gamma_5 = \frac{\overline{\mu}_5 t_x - t_y}{\overline{\mu}_5 - \mu_5}.$$

Определим теперь функции $\Phi_k^*(z_k)$. Так,

$$\Phi_5^*(z_5) = r_5 \int F_5^*(z) 5 dz_5 = \frac{r_5\gamma_5}{2} z^2 = \Lambda_5 z_5^2,$$

где $\Lambda_5 = r_5\gamma_5/2$. Тогда функции $\Phi_k^*(z_k)$ ($k = \overline{1,\, 4}$) будем искать в виде

$$\Phi_5^*(z_5) = \Lambda_k z_k^2,$$

а для производных этих функций будут справедливы выражения

$$\Phi_5^{*\prime}(z_5) = 2\Lambda_k z_k.$$

Определять постоянные Λ_k будем на основе формул (22)–(24):

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k^2,\, 1,\, -\mu_k)\cdot 2\Lambda_k z_k = (0,\, 0,\, 0),$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k\nu_k,\, -\nu_k,\, \mu_k\rho_k,\, -\rho_k)\cdot 2\Lambda_k z_k = (D_x^*,\, D_y^*,\, B_x^*,\, B_y^*),$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(r_k^0,\, \mu_k r_k^0,\, h_k^0,\, \mu_k h_k^0)\cdot 2\Lambda_k z_k = -(E_x^*,\, E_y^*,\, H_x^*,\, H_y^*),$$

или

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k^2,\, 1,\, -\mu_k)\cdot 2\Lambda_k(x + \mu_k y) = (0,\, 0,\, 0), \tag{29}$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k\nu_k,\, -\nu_k,\, \mu_k\rho_k,\, -\rho_k)\cdot 2\Lambda_k(x + \mu_k y) = q(d_x,\, d_y,\, b_x,\, b_y)\left(t_x x + t_y y\right), \tag{30}$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(r_k^0,\, \mu_k r_k^0,\, h_k^0,\, \mu_k h_k^0)\cdot 2\Lambda_k(x + \mu_k y) = -q(e_x,\, e_y,\, h_x,\, h_y)\left(t_x x + t_y y\right). \tag{31}$$

Приравнивая коэффициенты при x и y, из формул (29) получаем

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k^2,\, 1,\, \mu_k,\, \mu_k^3)\cdot 2\Lambda_k = (0,\, 0,\, 0,\, 0), \tag{32}$$

а из формул (30) и (31), с учетом уравнений (14) и (18), –

$$
\begin{gathered}
2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\mu_k\nu_k,\ -\nu_k,\ \mu_k^2\nu_k,\ \mu_k\rho_k,\ -\rho_k,\ \mu_k^2\rho_k)\cdot 2\Lambda_k = \\
= q(d_x t_x,\ d_y t_x,\ d_x t_y,\ b_x t_x,\ b_y t_x,\ b_x t_y);
\end{gathered}
\tag{33}
$$

$$
\begin{gathered}
2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(r_k^0,\ \mu_k r_k^0,\ \mu_k^2 r_k^0,\ h_k^0,\ \mu_k h_k^0,\ \mu_k^2 h_k^0)\cdot 2\Lambda_k = \\
= -q(e_x t_x,\ e_y t_x,\ e_y t_y,\ h_x t_x,\ h_y t_x,\ h_y t_y).
\end{gathered}
\tag{34}
$$

Нетрудно показать, что если принять во внимание 2е и 5е уравнения (33) и 1е и 4е уравнения (34), то с учетом (32) остальные уравнения (33) и (34) удовлетворяются тождественно. Таким образом, для определения постоянных Λ_k получаем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
4\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(1,\ \mu_k,\ \mu_k^2,\ \mu_k^3,\ \nu_k,\ \rho_k,\ r_k^0,\ h_k^0)\,\Lambda_k = \\
= -q(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ d_y t_x, b_y t_x, e_x t_x, h_x t_x) - \\
-4\,\mathrm{Re}\,(1,\ \mu_5,\ \mu_5^2,\ \mu_5^3,\ \nu_5,\ \rho_5,\ r_5^0,\ h_5^0)\,\Lambda_5.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

После решения этой системы постоянные Λ_k, а следовательно, и функции $\Phi_k^*(z_k)$ становятся известными, и тогда можно определять значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния в любой точке бесконечной сплошной пластинки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
4. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
5. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
6. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко.– Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
7. Калоеров С.А. Термоэлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 11. – С. 116-126.
8. Калоеров С.А. Термоэлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133.
9. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45., № 4. – С. 81–91.
10. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
11. Калоеров С.А. Потенциальные электромагнитные поля в пьезопластинах при механических, электромагнитных и тепловых воздействиях / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 19–34.
12. Pasternak I. A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities / I. Pasternak, R. Pasternak, H. Sulym // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – Vol. 37. – P. 419–433.

13. Pasternak I. Temperature field and heat flux that do not induce stress and electric displacement in a free thermoelectroelastic anisotropic solid / I. Pasternak, R. Pasternak, H. Sulym // Mech. Res. Commun. – 2014. – Vol. 57. – P. 40–43.
14. Мелан Э. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.

Поступила в редакцию 25.08.2025 г.

A NEW SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE LINEAR HEAT FLUX ACTION IN THE CONTINUOUS PIEZOELECTRIC PLATE

E. S. Glushankov

A solution is presented for the problem of determination of thermo-electro-magneto-elastic state of infinite continuous plate under linear heat flux action, with taking into account of the factor of generation of conservative electromagnetic field, owing to pyroelectric and pyromagnetic effects. The expressions for the components of electromagnetic field are obtained as the functions of two real variables and the functions of complex variable.

Keywords: linear heat flux, thermo-electro-magneto-elastic state, conservative electromagnetic field, pyroelectric and pyromagnetic effects.

Глушанков Евгений Сергеевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теории упругости и вычислительной математики имени академика А.С. Космодамианского,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.
E-mail: evgenij.glushankov@gmail.com

Glushankov Evgenij Sergeevich
Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk State University, Donetsk, Russia.

УДК 517.933 DOI: 10.5281/zenodo.17052569 EDN: MSBLFL

НОВОЕ РЕШЕНИЕ И ФОРМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПО ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ

© 2025. *М. Е. Лесина, Н. А. Прокопенко*

Для системы трех тел, состоящей из двух гироскопов Лагранжа, расположенных на платформе, получена новая форма дифференциальных уравнений движения и новое решение задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения движения, тела вращения, инвариантное соотношение.

Введение. В аналитической динамике созданы эффективные методы рационального формирования математических моделей движения связанных тел (таковыми и являются гиросистемы), построения решений систем уравнений, служащих этими моделями. Визуализации получаемых результатов средствами компьютерной графики, доставляющей в наглядной форме полную информацию обо всех особенностях движения тел. Математическая модель гиросистемы представляет интерес, являясь естественной, имеющей реальный физический смысл обобщением классических задач о движении тяжелого твердого тела и о движении гиростата. Ряд новых решений получены в работах [1 – 5].

Постановка задачи. Рассматриваемый объект – это два тела, являющиеся по динамическим характеристикам телами вращения, располагающиеся на платформе с учетом динамических характеристик последней.

Уравнения движения такой системы трех тел и два случая их интегрируемости получены в [1]. Приведем здесь уравнения движения и интегралы этой задачи.

Исходные соотношения.

$$\dot G_1 + \omega_2 G_3 - \omega_3 G_2 = 0, \tag{1}$$

$$\dot G_2 + \omega_3 G_1 - \omega_1 G_3 = 0, \tag{2}$$

$$\dot G_3 + \omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 = 0, \tag{3}$$

где

$$G_1 = (J_* - 2N\cos 2\theta)\omega_1 - H_3\omega_2\cos\theta - H_2\omega_3\sin\theta + H_1\dot\theta + \lambda_1, \tag{4}$$

$$G_2 = -H_3\omega_1\cos\theta + (J + (J_* + 2N)\sin^2\theta)\omega_2 - H_1\omega_3\sin\theta\cos\theta - H_2\dot\theta\cos\theta + \lambda_2\cos\theta, \tag{5}$$

$$G_3 = -H_2\omega_1\sin\theta + (J + (J_* - 2N)\cos^2\theta)\omega_3 - H_1\omega_2\sin\theta\cos\theta - H_3\dot\theta\sin\theta + \lambda_3\sin\theta, \tag{6}$$

в которых

$$J = B_0 + B_1\cos^2\delta_1 + B_2\cos^2\delta_2 + m_0c_0^2 + m_1c_1^2 + m_2c_2^2, \tag{7}$$

$$N = \frac{m_1 m_2}{m} h_1 h_2, \tag{8}$$

$$J_* = B_1\sin^2\delta_1 + B_2\sin^2\delta_2 + \left(1 - \frac{m_1}{m}\right)m_1h_1^2 + \left(1 - \frac{m_2}{m}\right)m_2h_2^2, \tag{9}$$

$$H_1 = -B_1\sin^2\delta_1 + B_2\sin^2\delta_2 - \left(1 - \frac{m_1}{m}\right)m_1h_1^2 + \left(1 - \frac{m_2}{m}\right)m_2h_2^2, \tag{10}$$

$$H_2 = -B_1 \sin\delta_1 \cos\delta_1 + B_2 \sin\delta_2 \cos\delta_2 - m_1 h_1 c_1 + m_2 h_2 c_2, \tag{11}$$

$$H_3 = -B_1 \sin\delta_1 \cos\delta_1 + B_2 \sin\delta_2 \cos\delta_2 + m_1 h_1 c_1 + m_2 h_2 c_2, \tag{12}$$

$$\lambda_1 = A_0 n + A_1 n_1 \cos\delta_1 + A_2 n_2 \cos\delta_2, \tag{13}$$

$$\lambda_2 = A_1 n_1 \sin\delta_1 + A_2 n_2 \sin\delta_2, \qquad \lambda_3 = -A_1 n_1 \sin\delta_1 + A_2 n_2 \sin\delta_2. \tag{14}$$

Система (1)-(3) имеет два интеграла

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{15}$$

$$2T + 2\Pi(\theta) = 2h, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} 2T = (J_* - 2N\cos 2\theta)\omega_1^2 + (J + (J_* + 2N)\sin^2\theta)\omega_2^2 + (J + (J_* - 2N)\cos^2\theta)\omega_3^2 - \\ -2H_1\omega_2\omega_3 \sin\theta\cos\theta - 2H_2\omega_1\omega_3\sin\theta - 2H_3\omega_2\omega_2\omega_1\cos\theta + \\ +2(H_1\omega_1 - H_2\omega_2\cos\theta - H_3\omega_3\sin\theta)\dot\theta + A_0 n^2 + A_1 n_1^2 + A_2 n_2^2, \end{gathered} \tag{17}$$

g, h – постоянные интегрирования.

В соотношениях (7) - (17) параметры имеют такой механический смысл:

A_0, B_0 – осевой и экваториальный главные центральные моменты инерции тела S_0 (платформы).

A_i, B_i – соответствующие величины для тела S_i $(i = 1, 2)$.

Внешние силы уравновешены, поэтому центр масс системы полагаем неподвижным.

Основная часть. Зададим инвариантное соотношение в виде

$$G_1 = 0. \tag{18}$$

Из (15) следует

$$G_2 = g\cos\alpha, \qquad G_3 = g\sin\alpha. \tag{19}$$

Подставив (18), (19) в (1), находим

$$g(\omega_3\cos\alpha - \omega_2\sin\alpha) = 0. \tag{20}$$

Вариант $g = 0$ изучен в [1], поэтому из (20) получаем

$$\omega_2 = \sigma\cos\alpha, \qquad \omega_3 = \sigma\sin\alpha. \tag{21}$$

Внесем (18), (19), (21) в (2), (3) и определим

$$\omega_1 = -\alpha. \tag{22}$$

Итак, (18), (19), (21), (22) удовлетворяют уравнениям (1), (2), (3) и интегралу (15). Подставим (18), (19), (21), (22) в (4) - (6) получим линейную систему для определения $\dot\alpha$, σ, $\dot\theta$.

$$-(J_* - 2N\cos 2\theta)\dot\alpha - (H_3\cos\theta\cos\alpha + H_2\sin\theta\sin\alpha)\sigma + H_1\dot\theta = -\lambda_1, \tag{23}$$

$$\begin{gathered} H_3\cos\theta\dot\alpha - \Big\{\big[J + (J_* - 2N)\sin^2\theta\big]\cos\alpha - H_1\sin\theta\cos\theta\sin\alpha\Big\}\sigma - H_2\cos\theta\cdot\dot\theta = \\ = g\cos\alpha - \lambda_2\cos\theta, \end{gathered} \tag{24}$$

$$H_2\sin\theta\dot\alpha - \Big\{\big[J + (J_* - 2N)\cos^2\theta\big]\cos\alpha - H_1\sin\theta\cos\theta\cos\alpha\Big\}\sigma - H_3\sin\theta\cdot\dot\theta =$$

$$= g\sin\alpha - \lambda_3 \sin\theta, \tag{25}$$

из которой находим

$$\dot{\alpha}\Delta = -H_1 A_{11} + H_2 A_{21}\cos\theta + H_3 A_{31}\sin\theta, \tag{26}$$

$$\dot{\theta}\Delta = -(J_* - 2N\cos 2\theta)A_{11} + H_3 A_{21}\cos\theta + H_2 A_{31}\sin\theta, \tag{27}$$

$$\sigma\Delta = g\sin\theta\cos\alpha\big[(J_*-2N\cos 2\theta)H_3 - H_1H_2\big] + g\cos\theta\sin\alpha\big[-(J_*-2N\cos 2\theta)H_2 + H_1H_3\big] +$$
$$+\sin\theta\cos\theta\left\{\left(H_2^2 - H_3^2\right)\lambda_1 - \left[\big(J_* - 2N\cos 2\theta\big)H_3 - H_1H_2\right]\lambda_2 +\right.$$
$$\left.+\left[\big(J_* - 2N\cos 2\theta\big)H_2 - H_1H_3\right]\lambda_3\right\}, \tag{28}$$

$$\Delta = \cos\alpha\left\{H_3\left(H_2^2 - H_3^2\right)\sin\theta\cos^2\theta + \left[J + \big(J_* + 2N\big)\sin^2\theta\right]\cdot\left[\big(J_* - 2N\cos 2\theta\big)H_3 - \right.\right.$$
$$\left.\left. -H_1H_2\right]\sin\theta - -H_1\sin\theta\cos^2\theta\big[(J_* - 2N\cos 2\theta)H_2 - H_1H_3\big]\right\} +$$
$$+\sin\alpha\left\{H_2\left(H_2^2 - H_3^2\right)\sin^2\theta\cos\theta + +\left[J + \big(J_* - 2N\big)\cos^2\theta\right]\cdot\left[\big(J_* - 2N\cos 2\theta\big)H_2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. -H_1H_3\right]\cos\theta - H_1\sin^2\theta\cos\theta\big[(J_* - 2N\cos 2\theta)H_3 - H_1H_2\big]\right\}. \tag{29}$$

Разделив (26) на (27), получим уравнение, связывающее переменные α и θ.

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{-H_1A_{11} + H_2A_{21}\cos\theta + H_3A_{31}\sin\theta}{-(J_* - 2N\cos 2\theta)A_{11} + H_3A_{21}\cos\theta + H_2A_{31}\sin\theta} \tag{30}$$

где

$$A_{11}(\theta) = (g\sin\alpha - \lambda_3\sin\theta)\left\{\left[J + \big(J_* + 2N\big)\sin^2\theta\right]\cos\alpha - H_1\sin\theta\sin\alpha\right\} -$$
$$-(g\cos\alpha - \lambda_2\cos\theta)\left\{\left[J + \big(J_* - 2N\big)\cos^2\theta\right]\sin\alpha - H_1\sin\theta\cos\theta\cos\alpha\right\}, \tag{31}$$

$$A_{21}(\theta) = (g\sin\alpha - \lambda_3\sin\theta)(H_2\sin\theta\sin\alpha + H_3\cos\theta\cos\alpha) -$$
$$-\lambda_1\left\{\left[J + \big(J_* + 2N\big)\cos^2\theta\right]\sin\alpha - H_1\sin\theta\cos\theta\cos\alpha\right\}, \tag{32}$$

$$A_{31}(\theta) = -(g\cos\alpha - \lambda_2\cos\theta)(H_2\sin\theta\sin\alpha + H_3\cos\theta\cos\alpha) +$$
$$+\lambda_1\left\{\left[J + \big(J_* + 2N\big)\sin^2\theta\right]\cos\alpha - H_1\sin\theta\cos\theta\sin\alpha\right\}. \tag{33}$$

Выделим частный случай:

$$N = 0, \quad H_2 = H_3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \tag{34}$$

Для этого в (8), (11) и (12) достаточно потребовать

$$h_1 = 0. \tag{35}$$

А в (13) и (14) достаточно потребовать

$$n = n_1 = n_2 = 0. \tag{36}$$

При ограничениях (34) уравнение (30) и соотношения (31) – (33) примут вид

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{-H_1 A_{11}(\theta) + H_2(A_{21}(\theta)\cos\theta + A_{31}(\theta)\sin\theta)}{-J_* A_{11}(\theta) + H_2(A_{21}(\theta)\cos\theta + A_{31}(\theta)\sin\theta)}, \tag{37}$$

где

$$A_{11}(\theta) = \frac{1}{2} g\Big[\big(J_* H_1 + H_2^2\big)\cos 2\theta \sin 2\alpha - \big(H_1^2 + H_2^2\big)\sin 2\theta \cos 2\alpha\Big], \tag{38}$$

$$A_{21}(\theta)\cos\theta + A_{31}(\theta)\sin\theta = \frac{1}{2} g H_2(\cos 2\theta \sin 2\alpha - \sin 2\theta \cos 2\alpha). \tag{39}$$

Теперь (37) примет вид

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{-(H_1^2 + H_2^2)\operatorname{ctg} 2\alpha + (J_* H_1 + H_2^2)\operatorname{ctg} 2\theta}{(J_*^2 + H_2^2)\operatorname{ctg} 2\theta - (J_* H_1 + H_2^2)\operatorname{ctg} 2\alpha}. \tag{40}$$

Заменой

$$\nu = \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad z = \operatorname{ctg} 2\theta. \tag{41}$$

преобразуем (40) к такому виду

$$\frac{d\nu}{dz} = \frac{1+\nu^2}{1+z^2} \cdot \frac{-(H_1^2 + H_2^2)\nu + (J_* H_1 + H_2^2) z}{(J_*^2 + H_2^2) z - (J_* H_1 + H_2^2)\nu}. \tag{42}$$

Это уравнение Абеля второго рода, которое, как известно, относится к неинтегрируемым типам. Добавим к ограничениям (34) еще одно:

$$J_* H_1 + H_2^2 = 0. \tag{43}$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{H_1^2 + H_2^2}{J_*^2 + H_2^2}. \tag{44}$$

Теперь из условия (43) имеем

$$H_2 = k J_*, \tag{45}$$

$$H_1 = -k^2 J_*. \tag{46}$$

Условие (44) примет вид

$$k = \frac{H_2}{J_*}. \tag{47}$$

Обратившись к соотношениям (9) - (11) при ограничении (43) и условии (47) можем выразить параметры $m_2 c_2 h_2$ и $\left(1 - \frac{m_2}{m}\right) m_2 h_2^2$ следующим образом:

$$m_2 c_2 h_2 = k J_* + B_1 \sin\delta_1 \cos\delta_1 - B_2 \sin\delta_2 \cos\delta_2,$$

$$2(1 - \frac{m_2}{m}) m_2 h_2^2 = (1 - k^2) J_* - 2 B_2 \sin^2\delta_2,$$

$$J_* = B_1 \sin^2\delta_1 + B_2 \sin^2\delta_2 + (1 - \frac{m_1}{m}) m_1 h_1^2 > 0.$$

При этом уравнение (40) существенно упрощается:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -k^2 \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\operatorname{ctg} 2\theta}, \tag{48}$$

решение которого таково:

$$\cos 2\alpha = \frac{c}{\cos^{k^2} 2\theta}. \tag{49}$$

При ограничениях (35), (43) из (26) – (29) находим

$$\dot{\alpha}\Delta = -k^2(1+k^2)J_*^2 \cdot \frac{g}{2} \cdot \sin 2\theta \cos 2\alpha, \tag{50}$$

$$\dot{\theta}\Delta = (1+k^2)J_*^2 \cdot \frac{g}{2} \cdot \cos 2\theta \sin 2\alpha, \tag{51}$$

$$\sigma\Delta = k(1+k^2)J_*^2 \cdot g \cdot \sin(\theta-\alpha), \tag{52}$$

$$\Delta = k(1+k^2)J_*^3 \cdot \big[(b+1)\sin(\theta-\alpha) - \frac{1}{2}(1+k^2)\sin 2\theta \cos(\theta+\alpha)\big]. \tag{53}$$

Переменные ω_1, ω_2, ω_3 теперь находим из (21), (22).

$$\omega_1\Delta = k^2(1+k^2)J_*^2 \cdot \frac{g}{2} \cdot \sin 2\theta \cos 2\alpha, \tag{54}$$

$$\omega_2\Delta = k(1+k^2)J_*^2 \cdot g \cdot \sin(\theta-\alpha)\cos\alpha, \tag{55}$$

$$\omega_3\Delta = k(1+k^2)J_*^2 \cdot g \cdot \sin(\theta-\alpha)\sin\alpha. \tag{56}$$

Подставив сюда (49) и (53), получим $\omega_1(\theta)$, $\omega_2(\theta)$, $\omega_3(\theta)$.

В интеграл энергии (17) внесем ограничении (34), (43) и получим

$$2T = g\sigma + J_*\dot{\theta}\big[\dot{\theta} + k^2\dot{\alpha} - \alpha k\cos(\theta-\alpha)\big] = 2h - 2\Pi(\theta). \tag{57}$$

После подстановки (50) – (52) получим

$$(2h - 2\Pi(\theta))\Delta^2(\theta) = \frac{g^2}{4}(1+k^2)^2 J_*^5\big\{\cos 2\theta \sin 2\theta(\cos 2\theta \sin 2\alpha - k^2 \sin 2\theta \cos 2\alpha)(1+k^2) +$$

$$+k^2\big[2(b+1)(1-\cos 2(\theta-\alpha)) - k^2(1+k^2)\sin 2\theta(\sin 2\theta - \sin 2\alpha)\big]\big\}. \tag{58}$$

Явный вид $\Pi(\theta)$ получим после подстановки в (58) соотношений (49) и (53). Ввиду громоздкости приводить его не будем.

Зависимость θ от времени находим из (51) с учетом соотношения (53)

$$\frac{g}{J_*}(t-t_0) = k\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(b+1)\sin(\theta-\alpha(\theta-\alpha(\theta))) - (1+k^2)\sin\theta\cos\theta\cos(\theta+\alpha(\theta))}{\cos 2\theta \sin 2\alpha(\theta)}d\theta, \tag{59}$$

где $\alpha(\theta)$ определено в (49).

Новая форма уравнений движения.

Представим соотношения (4) – (6) в виде

$$(J_* - 2N\cos 2\theta)\omega_1 - H_3\omega_2\cos\theta - H_2\omega_3\sin\theta = G_1 - H_1\dot{\theta} - \lambda_1,$$

$$-H_3\omega_1\cos\theta + (J + (J_* + 2N)\sin^2\theta)\omega_2 - H_1\omega_3\sin\theta\cos\theta = G_2 - (H_2\dot{\theta} - \lambda_2)\cos\theta, \tag{60}$$

$$-H_2\omega_1 \sin\theta - H_1\omega_2 \sin\theta\cos\theta + (J + (J_* - 2N)\cos^2\theta)\omega_3 = G_3 - (H_3\dot{\theta} - \lambda_3)\sin\theta,$$

Из линейной относительно ω_1, ω_2, ω_3 системы находим

$$\omega_j(G_1, G_2, G_3, \theta, \dot{\theta})D(\theta) = B_{j1}(G_1 - \lambda_1 - H_1\dot{\theta}) + B_{j2}(G_2 - \lambda_2\cos\theta + H_2\dot{\theta}\cos\theta)+$$
$$+B_{j3}(G_3 - \lambda_3\sin\theta + H_3\dot{\theta}\sin\theta), \qquad (61)$$

где

$$B_{11}(\theta) = \big[J + (J_* + 2N)\sin^2\theta\big]\big[J + (J_* - 2N)\cos^2\theta\big] - H_1^2\sin^2\theta\cos^2\theta,$$
$$B_{12}(\theta) = B_{21}(\theta) = \big\{\big[J + (J_* - 2N)\cos^2\theta\big]H_3 + H_1H_2\sin^2\theta\big\}\cos\theta,$$
$$B_{13}(\theta) = B_{31}(\theta) = \big\{\big[J + (J_* + 2N)\sin^2\theta\big]H_2 + H_1H_3\cos^2\theta\big\}\sin\theta,$$
$$B_{22}(\theta) = \big[J_* - 2N\cos 2\theta\big]\big[J + (J_* - 2N)\cos^2\theta\big] - H_2^2\sin^2\theta,$$
$$B_{23}(\theta) = B_{32}(\theta) = \big[\big(J_* - 2N\cos 2\theta\big)H_1 + H_2H_3\big]\sin\theta\cos\theta,$$
$$B_{33}(\theta) = \big[J_* - 2N\cos 2\theta\big]\big[J + (J_* + 2N)\sin^2\theta\big] - H_3^2\cos^2\theta, \qquad (62)$$
$$D(\theta) = 2N\big(J_*^2 - H_1^2 - 4N^2\big)\cos^3 2\theta + \big[16JH^2 - J_*\big(J_*^2 - H_1^2 - 4N^2\big) + 2H_1H_2H_3 -$$
$$-(J_* + 2N)H_2^2 - \big(J_* - 2N\big)H_3^2\big]\cos^2 2\theta + \big[-8JJ_*N - 2N\big[(2J + J_*)^2 - H_1^2 - 4N^2\big] -$$
$$-2\big(J + J_* + 2N\big)H_2^2 + 2\big(J + J_* - 2N\big)H_3^2\big]\cos 2\theta + J_*\big[(2J + J_*)^2 - H_1^2 - 4N^2\big] -$$
$$-2H_1H_2H_3 - 2\big(J + J_* + 2N\big)H_2^2 - \big(2J + J_* - 2N\big)H_3^2. \qquad (63)$$

Подставив $\omega_j(G_1, G_2, G_3, \theta, \dot{\theta})$ в интеграл энергии, получим уравнение

$$F_1(G_1, G_2, G_3, \theta) + F_2(\theta)\dot{\theta}^2 = \big[2h_* - 2\Pi(\theta)\big]D(\theta),$$

из которого определим $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\big[2h_* - 2\Pi(\theta)\big]D(\theta) - F_1(G_1, G_2, G_3, \theta)}{F_2(\theta)\dot{\theta}^2} = F^2(G_1, G_2, G_3, \theta), \qquad (64)$$

где

$$F_1(G_1, G_2, G_3, \theta) = B_{11}(G_1 - \lambda_1)^2 + B_{22}(G_2 - \lambda_2\cos\theta)^2 + B_{33}(G_3 - \lambda_3\sin\theta)^2 +$$

$$+2B_{12}(G_1 - \lambda_1)(G_2 - \lambda_2\cos\theta) + 2B_{13}(G_1 - \lambda_1)(G_3 - \lambda_3\sin\theta)+$$
$$+2B_{23}(G_2 - \lambda_2\cos\theta)(G_3 - \lambda_3\sin\theta), \qquad (65)$$
$$F_2(\theta) = -B_{11}H_1^2 + B_{22}H_2^2\cos^2\theta - B_{33}H_3^2\sin^2\theta + (J_* + 2N\cos 2\theta)D(\theta)+$$
$$+2B_{12}H_1H_2\cos\theta + 2B_{13}H_1H_3\sin\theta + 2B_{23}H_2H_3\sin\theta\cos\theta. \qquad (66)$$

Пусть z – комплексная переменная, изображаемая либо точкой $z = x + iy$ на комплексной плоскости (дополненной бесконечно удаленной точкой), либо точкой трехмерной сферы $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1$.

Будем обозначать эту сферу S_0 и называть ее римановой сферой. Соответствие между точками комплексной плоскости и точками римановой сферы определяется равенствами

$$x = \frac{g_1}{1+g_3}, \quad y = \frac{g_2}{1+g_3}, \quad z = x + iy,$$

$$g_1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad g_2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad g_3 = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}. \tag{67}$$

Отображение S_0 на z – плоскость является конформным и известно под названием стереографической проекции. Очевидно, что

$$G_j = g g_j. \tag{68}$$

Внесем соотношение (67) в уравнения (1) – (3), получим систему

$$2\dot{x} = 2xy\widetilde{\omega_1} - (1+x^2-y^2)\widetilde{\omega_2} + 2y\widetilde{\omega_3},$$

$$2\dot{y} = (1-x^2+y^2)\widetilde{\omega_1} - 2xy\widetilde{\omega_2} + 2x\widetilde{\omega_3}, \tag{69}$$

$$\widetilde{\omega_j}(x,y,\theta)D(\theta) = B_{j1}\Lambda_1(x,y,\theta) + B_{j2}\Lambda_2(x,y,\theta) + B_{j3}\Lambda_3(x,y,\theta), \tag{70}$$

$$\Lambda_1(x,y,\theta) = \frac{2gx}{1+x^2+y^2} - \lambda_1 - \widetilde{F}H_1,$$

$$\Lambda_2(x,y,\theta) = \frac{2gy}{1+x^2+y^2} - \lambda_2\cos\theta + \widetilde{F}H_2\cos\theta, \tag{71}$$

$$\Lambda_3(x,y,\theta) = g\frac{1-x^2-y^2y}{1+x^2+y^2} - \lambda_3\sin\theta + \widetilde{F}H_2\sin\theta,$$

$$\widetilde{F}^2 = \widetilde{F}^2(x,y,\theta) = \frac{\left[2h_* - 2\Pi(\theta)\right]D(\theta) - \widetilde{F_1}(x,y,\theta)}{F_2(\theta)}. \tag{72}$$

$$\widetilde{F}^1(x,y,\theta) = B_{11}(\theta)\left(\frac{2gx}{1+x^2+y^2} - \lambda_1\right)^2 + B_{22}(\theta)\left(\frac{2gy}{1+x^2+y^2} - \lambda_2\cos\theta\right)^2 +$$
$$+B_{33}(\theta)\left(g\frac{1-x^2-y^2y}{1+x^2+y^2} - \lambda_3\sin\theta\right)^2 + 2B_{12}(\theta)\left(\frac{2gx}{1+x^2+y^2} - \lambda_1\right)\left(\frac{2gy}{1+x^2+y^2} - \lambda_2\cos\theta\right) +$$
$$+2B_{13}(\theta)\left(\frac{2gx}{1+x^2+y^2} - \lambda_1\right)\left(g\frac{1-x^2-y^2y}{1+x^2+y^2} - \lambda_3\sin\theta\right) +$$
$$+2B_{23}(\theta)\left(\frac{2gy}{1+x^2+y^2} - \lambda_2\cos\theta\right)\left(g\frac{1-x^2-y^2y}{1+x^2+y^2} - \lambda_3\sin\theta\right). \tag{73}$$

В уравнениях (69) перейдем от дифференцирования по t к дифференцированию по θ, учитывая (72),

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2\widetilde{F}(x,y,\theta)}\Big[2xy\widetilde{\omega_1}(x,y,\theta) - (1+x^2-y^2)\widetilde{\omega_2}(x,y,\theta) + 2y\widetilde{\omega_3}(x,y,\theta)\Big],$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2\widetilde{F}(x,y,\theta)}\Big[(1-x^2+y^2)\widetilde{\omega_1}(x,y,\theta) - 2xy\widetilde{\omega_2}(x,y,\theta) + 2x\widetilde{\omega_3}(x,y,\theta)\Big]. \tag{74}$$

Здесь $\widetilde{\omega}_j(x, y, \theta)$, $\widetilde{F}$ определены соотношениями (70) – (73), (66), (63).

С помощью замены (67) трех уравнений (1) – (3), допускающая интегралы (15) – (17), сведена к системе двух дифференциальных уравнений (74), каждое из которых имеет первый порядок.

Результаты. Уравнения (74) представляют новую форму уравнений движения системы трех тел.

Таким образом, найдено новое точное решение задачи о движении трех тел, определяемое соотношениями (54) – (56), (59), при этом потенциальная энергия упругого элемента определена (58).

Заключение. Полученные результаты задачи о движении по инерции системы трех тел допускают развитие дальнейших исследований в следующих направлениях: установление условий существования движений стационарных, прецессионных, асимптотических к равномерным и маятниковых, исследование устойчивости движений рассматриваемых систем тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел / М.Е. Лесина. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
2. Лесина М.Е. Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром / М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева // Механика твердого тела. – 2006. – Вып.36. – С. 41–50.
3. Лесина М.Е. Редукция системы двух уравнений с переменными коэффициентами к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и построение нового решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа / М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева // Сб. научн. трудов НГУ. – 2007. – Вып.29. – С.120–129.
4. Лесина М. Е. Новое точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа / М. Е. Лесина, Я. В. Зиновьева // Механика твердого тела. – 2017. – Вып.47. – С. 55–65.
5. Лесина М. Е. Нормальная форма уравнений движения двух гироскопов Лагранжа для одного случая движений системы / М. Е. Лесина, Я. В. Зиновьева // Сборник научно-методических работ. – Вып.11. – Донецк: ДонНТУ, 2019.– С. 83–85.

Поступила в редакцию 01.07.2025 г.

NEW SOLUTION AND FORM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS MOTION BY INERTIA OF A SYSTEM OF THREE BODIES

M. E. Lesina, N. A. Prokopenko

For a three-body system consisting of two Lagrangian gyroscopes located on a platform, a new form of the differential equations of motion and a new solution of the problem have been obtained.

Keywords: differential equations of motion, rotating bodies, and an invariant relation.

Лесина Мария Ефимовна
доктор физико-математических наук,
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, РФ
E-mail: m.e.lesina@mail.ru

Lesina Maria Efimovna
Doctor of Physics and Mathematics,
Donetsk National Technical University,
Donetsk, RF

Прокопенко Наталья Анатольевна
кандидат педагогических наук, доцент,
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, РФ
E-mail: pronatan@rambler.ru

Prokopenko Natalia Anatolyevna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Donetsk National Technical University,
Donetsk, RF

УДК 517.933 DOI: 10.5281/zenodo.17052577 EDN: NAKVML

НОВОЕ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

© 2025. *Н. А. Прокопенко*

На инвариантном соотношении, характеризуемом нулевым значением второй компоненты момента количества движения системы двух гироскопов Лагранжа, построено новое частное решение задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения движения, тела вращения, инвариантное соотношение, частное решение.

Введение. Если момент количества движения системы тел, сохраняющий направление в пространстве, отличен от нуля, то его можно использовать для построения неподвижных годографов. Существует решение, характеризуемое нулевым значением момента количества движения системы. Для этого решения введен опорный базис на траектории центра сферического шарнира. Найдены кривизна и кручение траектории, скорость каждого из тел относительно опорного базиса. Впервые построены годографы тел в опорном базисе. Записаны уравнения подвижных годографов тел. В пятой главе монографии [1] дана постановка задачи о движении по инерции двух динамически осесимметричных тел, сочлененных упругим сферическим шарниром. Там же приведены кинематические и динамические характеристики системы тел и шесть форм уравнений движения. Ряд новых решений получены в работах [1 – 6].

Постановка задачи. Для задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, получено несколько форм уравнений движения [1]. Приведем одну из них:

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 &= \omega_3 G_2 - \omega_2 G_3, \\ \dot{G}_2 &= \omega_1 G_3 - \omega_3 G_1, \\ \dot{G}_3 &= \omega_2 G_1 - \omega_1 G_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{g} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3$ – момент количества движения системы тел S и S_0, $\omega = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ – угловая скорость полуподвижного базиса, связанного с S.

$$G_1 = (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1, \tag{2}$$

$$G_2 = (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \tag{3}$$

$$G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n + n_0\cos\theta, \tag{4}$$

$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \Omega_3\mathbf{e}_3^0$ – угловая скорость полуподвижного базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$($O$ – точка пересечения $O\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{e}_3^0$ – осей динамической симметрии тел S и S_0): $\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta$, $\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta$.

Величины Ω_i и ω_i связаны соотношениями

$$\Omega_1 = \omega_1 + \dot{\theta}, \tag{5}$$

$$\Omega_2 = \omega_2\cos\theta + \omega_3\sin\theta, \quad \Omega_3 = -\omega_2\sin\theta + \omega_3\cos\theta. \tag{6}$$

Угловые скорости тел таковы:

$$\omega^* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + (\omega_3 + \dot{\varphi})\mathbf{e}_3,$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + (\Omega_3 + \dot{\Phi})\mathbf{e}_3^0,$$

$\dot{\Phi}$, $\dot{\varphi}$ – скорости собственных вращений тел вокруг их осей динамической симметрии $O\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{e}_3^0$.

Неизменный в S базис $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ связан с $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ соотношениями $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi$, $\mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi$, $\mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3$ и для компонент ω_1^*, ω_2^* угловой скорости $\omega^* = \omega_1^* \mathbf{e}_1 + \omega_2^* \mathbf{e}_2 + \omega_3^* \mathbf{e}_3$, получаем значения

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \quad \omega_2^* = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi. \tag{7}$$

Неизменный в S_0 базис $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ связан с $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ соотношениями $\mathbf{e}_1^{0*} = \mathbf{e}_1 \cos\Phi + \mathbf{e}_2^0 \sin\Phi$, $\mathbf{e}_2^{0*} = -\mathbf{e}_1 \sin\Phi + \mathbf{e}_2^0 \cos\Phi$, $\mathbf{e}_3^{0*} = \mathbf{e}_3^0$ и для компонент Ω_1^*, Ω_2^* угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}^* = \Omega_1^* \mathbf{e}_1^{0*} + \Omega_2^* \mathbf{e}_2^{0*} + \Omega_3^* \mathbf{e}_3^{0*}$, получаем значения

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi. \tag{8}$$

$$\omega_3^* = \omega_3 + \dot{\varphi}, \quad \Omega_3^* = \Omega_3 + \dot{\Phi}.$$

В этой задаче в [1] получены четыре интеграла:
два циклических

$$\omega_3 + \dot{\varphi} = \frac{n}{J}, \quad \Omega_3 + \dot{\Phi} = \frac{n_0}{J_0}, \tag{9}$$

интеграл, выражающий постоянство модуля момента количества движения системы,

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{10}$$

и интеграл сохранения энергии системы

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1 \cos\theta + \Omega_2\omega_2) + 2\Pi(\theta) = 2h. \tag{11}$$

Здесь J, J_0 - осевые моменты инерции гироскопов S и S_0;
$A = B + \frac{mm_0}{m+m_0} l^2$, $A_0 = B_0 + \frac{mm_0}{m+m_0} l_0^2$, B, B_0 – экваториальные моменты инерции, $N = \frac{mm_0}{m+m_0} l l_0$; m, m_0 – массы тел; l, l_0 – расстояния от центра сферического шарнира O до центров масс C, C_0 тел; n, n_0, g, h - постоянные интегралов; $\Pi(\theta)$ – потенциальная энергия упругого элемента.

Основная часть. Зададим инвариантное соотношение в виде

$$G_2 = 0. \tag{12}$$

Тогда из (10) следует

$$G_1 = g\cos\alpha, G_3 = g\sin\alpha. \tag{13}$$

Подставив эти соотношения в (1), находим

$$\dot{\alpha} = -\omega_2, \tag{14}$$

$$g(\omega_1 \sin\alpha - \omega_3 \cos\alpha) = 0, \tag{15}$$

Вариант $g = 0$ изучен в [1]. Полагая $g \neq 0$, из (15) получаем

$$\omega_1 = \sigma\cos\alpha, \quad \omega_3 = \sigma\sin\alpha. \tag{16}$$

Учитывая (14), (16), запишем компоненты (5), (6) так

$$\Omega_1 = \sigma\cos\alpha + \dot{\theta}, \tag{17}$$

$$\Omega_2 = -\dot{\alpha}\cos\theta + \sigma\sin\alpha\sin\theta, \quad \Omega_3 = \dot{\alpha}\sin\theta + \sigma\sin\alpha\cos\theta. \tag{18}$$

Внесем (12), (13) в (3), (4) и получим систему уравнений

$$(A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 = n_0\sin\theta, \quad (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta = g\sin\alpha - n - n_0\cos\theta,$$

из которой определим

$$\omega_2 = \frac{-(A_0\cos\theta - N)(g\sin\alpha - n) + (A_0 - N\cos\theta)n_0}{(AA_0 - N^2)\sin\theta}, \tag{19}$$

$$\Omega_2 = \frac{(A - N\cos\theta)(g\sin\alpha - n) - (A_0 - N\cos\theta)n_0}{(AA_0 - N^2)\sin\theta}, \tag{20}$$

Подставив (19), (20) в (18), находим

$$\sigma = \frac{(A_0\cos^2\theta - 2N\cos\theta)(g\sin\alpha - n) + \big[N\cos^2\theta - (A + A_0)\cos\theta + N\big]n_0}{(AA_0 - N^2)\sin^2\theta\sin\theta}, \tag{21}$$

$$\Omega_3 = \frac{-\big[N\cos^2\theta - (A + A_0)\cos\theta + N\big](g\sin\alpha - n) - \big(A_0\cos^2\theta - 2N\cos\theta + A_0\big)n_0}{(AA_0 - N^2)\sin^2\theta}. \tag{22}$$

Отметим, что $AA_0 - N^2 > 0$. Внесем (13), (16), (17), (21) в (2) и получим

$$\dot{\theta} = \frac{P_3(\cos\theta)g\sin\alpha + Q_3(\cos\theta)\cos\alpha}{(A_0 - N\cos\theta)(AA_0 - N^2)\sin^2\theta\sin\alpha}, \tag{23}$$

а из (14), (19)

$$\dot{\alpha} = \frac{(A_0\cos\theta - N)(g\sin\alpha - n) - (A_0 - N\cos\theta)n_0}{(AA_0 - N^2)\sin\theta}. \tag{24}$$

В уравнении (24) перейдем от дифференцирования по t к дифференцированию по θ с помощью (23)

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\big[(A_0\cos\theta - N)(g\sin\alpha - n) - (A_0 - N\cos\theta)n_0\big](A_0 - N\cos\theta)\sin\alpha}{P_3(\cos\theta)g\sin\alpha + Q_3(\cos\theta)\cos\alpha}. \tag{25}$$

Заменой

$$z = \sin\alpha, \quad u = \cos\theta, \tag{26}$$

преобразуем уравнение (25) к виду

$$\frac{dz}{du} = -\frac{(A_0 - Nu)z\big[(A_0u - N)(gz - n) - (A_0 - Nu)n_0\big]}{P_3(u)z + Q_3(u)}, \tag{27}$$

где

$$P_3(u) = 2A_0Nu^3 - \left(A_0^2 + 2AA_0 + 3N^2\right)u^2 + 2(A_0 + 2A)Nu - \left(A^2 + N^2\right), \tag{28}$$

$$Q_3(u) = (A + A_0 - 2Nu)\left\{\left(A_0u^2 - 2Nu + A\right)n + \left[-Nu^2 + (A + A_0)u - N\right]n_0\right\}. \tag{29}$$

Отметим, что (27) – это уравнение Абеля второго рода. Выделим частный случай нулевых значений циклических интегралов (9):

$$n = n_0 = 0, \tag{30}$$

тогда из (29) следует, что

$$Q_3(u) = 0.$$

И уравнение (27) существенно упрощается

$$\frac{dz}{du} = \frac{z(A_0 - Nu)(A_0u - N)}{P_3(u)}. \tag{31}$$

Дополнительное ограничение

$$A_0 = A. \tag{32}$$

Тогда формула (28) примет вид

$$P_3(u) = 2A_0Nu^3 - 3\left(A_0^2 + N^2\right)u^2 + 6A_0Nu - \left(A_0^2 + N^2\right) = A_0^2P_*(u). \tag{33}$$

Введем безразмерный параметр

$$a = \frac{N}{A_0}, \tag{34}$$

подставим в (33), получим

$$P_*(u) = 2au^3 - 3(1 + a^2)u^2 + 6au - (1 + a^2). \tag{35}$$

Уравнение $P_*(u) = 0$ имеет один действительный корень

$$u = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2a}\left[(a-1)\sqrt[3]{(a^2-1)(a+1)} + (a+1)\sqrt[3]{(a^2-1)(a-1)}\right].$$

Внесем (33) – (35) в (31), определим

$$z(u) = c\left|2au^3 - 3\left(1 + a^2\right)u^2 + 6au - \left(1 + a^2\right)\right|^{\frac{1}{6}}. \tag{36}$$

После определения $z(u)$ можно найти компоненты угловых скоростей ω_i, Ω_i $(i = 1, 2, 3)$ в полуподвижных базисах. Для этого подставим (30), (32), (21) в (16), (19), (20), (22) и получим

$$\omega_1(u) = \frac{g}{A_0}\frac{\left(u^2 - 2au + 1\right)\sqrt{1 - z^2(u)}}{\left(1 - a^2\right)\left(1 - u^2\right)}, \tag{37}$$

$$\Omega_1(u) = \frac{g}{A_0}\frac{\left[au^3 - \left(2 + a^2\right)u^2 - 3au - a^2\right]\sqrt{1 - z^2(u)}}{\left(1 - a^2\right)(1 - au)\left(1 - u^2\right)}, \tag{38}$$

$$\omega_2(u) = -\frac{g}{A_0}\frac{(u-a)z(u)}{\left(1-a^2\right)\sqrt{1-u^2}}, \tag{39}$$

$$\Omega_2(u) = \frac{g}{A_0}\frac{(1-au)z(u)}{\left(1-a^2\right)\sqrt{1-u^2}}, \tag{40}$$

$$\omega_3(u) = \frac{g}{A_0}\frac{\left(u^2-2au+1\right)z(u)}{\left(1-a^2\right)\left(1-u^2\right)}, \tag{41}$$

$$\Omega_3(u) = \frac{g}{A_0}\frac{\left(-au^2+2u-a\right)z(u)}{\left(1-a^2\right)\left(1-u^2\right)}. \tag{42}$$

Потенциальную энергию упругого элемента находим из интеграла (11) после подстановки в него (32), (37) – (40):

$$2h - 2\Pi(u) = \frac{g^2}{A_0}\left\{\frac{u^2-2au+1}{\left(1-a^2\right)\left(1-u^2\right)} + \frac{1-z^2(u)}{1-au}\left[2(1-au)\frac{u^2-2au+1}{\left(1-a^2\right)\left(1-u^2\right)-1}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\left(1-a^2u^2\right)\frac{u^2-2au+1}{\left(1-a^2\right)\left(1-u^2\right)-1}\right]\right\}. \tag{43}$$

Отметим, что величину $\frac{g}{A_0}$ можно назначить единицей угловой скорости, $\frac{g_2}{A_0}$ – единицей энергии, $\frac{A_0}{g}$ – единицей времени.

Соотношениями (36) – (42) определены компоненты угловых скоростей $\omega_i(u)$, $\Omega_i(u)$ $(i = 1, 2, 3)$ в полуподвижных базисах и потенциальная энергия (43) упругого элемента.

Для построения решения необходимо найти компоненты $\omega_i^*(u)$, $\Omega_i^*(u)$ $(i = 1, 2, 3)$ в неизменно связанных с телами базисах (7) – (9). При ограничении (30) интегралы (9) запишем в виде

$$\dot\varphi = -\omega_3(u), \quad \dot\Phi = -\Omega_3(u). \tag{44}$$

Так как $\omega_3(u)$, $\Omega_3(u)$ уже определены соотношениями (41), (42), необходимо в уравнениях (44) перейти от дифференцирования по t к дифференцированию по u. Для этого внесем (30), (32), (26) в (23)

$$\dot u = \frac{g}{A_0}\frac{-P_2(u)\sqrt{1-z^2(u)}}{\left(1-a^2\right)(1-au)\sqrt{1-u^2}}. \tag{45}$$

А затем из (44) получим

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{u_0}^{u}\frac{\left(u^2-2au+1\right)z(u)(1-au)du}{P_*(u)\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-z^2(u)\right)}}, \tag{46}$$

$$\Phi - \Phi_0 = \int_{u_0}^{u}\frac{\left(au^2+2u-a\right)z(u)(1-au)du}{P_*(u)\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-z^2(u)\right)}}. \tag{47}$$

Искомые величины $\omega_i^*(u)$, $\Omega_i^*(u)$ $(i = 1, 2)$ определим из (7), (8), подставив в них (35) – (40), (46), (47).

Зависимость между переменными u и t находим из (45):

$$\frac{g}{A_0}(t-t_0) = -\frac{1-a^2}{2a}\int_{u_0}^{u}\frac{(1-au)\sqrt{1-u^2}du}{P_*(u)\sqrt{1-z^2(u)}}. \tag{48}$$

В интегралах (46) – (48) $z(u)$ определено соотношением (36). Отметим, что эти интегралы относятся к «неберущимся».

Результаты. Таким образом соотношениями (37) – (40), (46), (47), (30) определены искомые компоненты угловых скоростей тел S, S_0 в неизменно связанных с ними базисах, потенциальная энергия упругого элемента имеет вид (43).

Заключение. Полученные результаты задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа допускают развитие дальнейших исследований в следующих направлениях: установление условий существования движений стационарных, прецессионных, асимптотических к равномерным и маятниковых, визуализация движения тел средствами компьютерной графики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лесина М.Е. Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел / М.Е. Лесина – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
2. Лесина М.Е. Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром / М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева // Механика твердого тела. – 2006. – Вып.36. – С. 41–50.
3. Лесина М.Е. Редукция системы двух уравнений с переменными коэффициентами к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и построение нового решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа / М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева // Сб. научн. трудов НГУ. – 2007. – Вып.29. – С.120-129.
4. Лесина М.Е. Новое точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа / М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева // Механика твердого тела. – 2017. – Вып.47. – С. 55–65.
5. Лесина М.Е. Нормальная форма уравнений движения двух гироскопов Лагранжа для одного случая движений системы / М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева // Сборник научно-методических работ. – Вып.11. – Донецк: ДонНТУ, 2019. – С. 83–85.
6. Лесина М.Е. Частное решение задачи о движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа / М.Е. Лесина // Сборник научно-методических работ. – Вып.12. – Донецк: ДонНТУ, 2021. – С. 20.

Поступила в редакцию 01.07.2025 г.

A NEW PARTICULAR SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION OF TWO LAGRANGE GYROSCOPES

N. A. Prokopenko

A new particular solution of the problem is constructed on the invariant relation characterized by the zero value of the second component of the angular momentum of the two Lagrange gyroscopes.

Keywords: differential equations of motion, rotating bodies, and an invariant relation, a private solution.

Прокопенко Наталья Анатольевна
кандидат педагогических наук, доцент
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, РФ
E-mail: pronatan@rambler.ru

Prokopenko Natalia Anatolyevna
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Donetsk National Technical University,
Donetsk, RF

Научное издание

Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки

2025. – № 3

Технические редакторы: *М. В. Фоменко, П. А. Машаров*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ФГБОУ ВО «Донецкоий государственный университет»,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк
Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: http://donnu.ru//vestnikA

Подписано к изданию 05.09.2025 г.

Издательство ФГБОУ ВО «Донецкоий государственный университет»,
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24,
Тел: +7 (856) 302-92-27.