

ISSN 2415-7058 (Print)
ISSN 2415-7066 (Online)

Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ
*Основан
в 1997 году*

Серия А:
**Естественные
науки**

3/2026

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального
университета. Серия А: Естественные науки»**

Главный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. *С.В. Беспалова*.

Зам. главного редактора – д-р биол. наук, проф. *О.С. Горецкий*.

Ответственный секретарь – канд. физ.-мат. наук *М.В. Фоменко*.

Члены редколлегии: д-р биол. наук, проф. *В.Г. Артюхов*; канд. хим. наук, доц. *О.В. Баранова*; канд. хим. наук, доц. *С.Г. Бахтин*; д-р хим. наук, доц. *Н.И. Белая*; канд. хим. наук, доц. *А.В. Белый*; д-р философии, проф. *С.В. Белый*; д-р пед. наук, доц. *Т.В. Вардун*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Вал.В. Волчков*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Вит.В. Волчков*; д-р биол. наук, проф. *А.З. Глухов*; д-р физ.-мат. наук, проф. *А.С. Гольцев*; д-р биол. наук, доц. *С.Н. Горбов*; д-р хим. наук, проф. *А.В. Гулевская*; д-р биол. наук, доц. *Т.В. Денисова*; д-р хим. наук, проф. *В.Д. Дяченко*; д-р физ.-мат. наук, доц. *В.П. Заставный*; д-р физ.-мат. наук, доц. *А.В. Зыза*; д-р геогр. наук, проф. *К.Ш. Казеев*; д-р биол. наук, проф. *В.Н. Калаев*; канд. биол. наук, доц. *Е.А. Калаева*; д-р физ.-мат. наук, проф. *С.А. Калоеров*; д-р биол. наук, с.н.с. *О.Е. Клименко*; д-р с-х наук, проф. *С.И. Колесников*; д-р физ.-мат. наук, доц. *Б.И. Коносеви*; канд. биол. наук *В.О. Корниенко*; д-р хим. наук, проф. *Т.П. Кустова*; д-р биол. наук, доц. *Е.В. Лопатина*; д-р физ.-мат. наук, доц. *А.В. Мазнев*; д-р хим. наук, проф. *В.М. Михальчук*; д-р физ.-мат. наук, доц. *И.А. Моисеенко*; д-р биол. наук, проф. *И.В. Мухина*; д-р физ.-мат. наук, доц. *Р.Н. НескорODEV*; д-р биол. наук, проф. *В.Б. Павленко*; д-р биол. наук, доц. *С.В. Погодина*; канд. биол. наук, доц. *А.И. Сафонов*; д-р биол. наук, проф. *В.И. Соболев*; д-р биол. наук, доц. *В.В. Труш*; д-р хим. наук *Т.Г. Тюрина*; д-р биол. наук, доц. *М.Г. Холявка*; д-р хим. наук, доц. *И.Н. Щербakov*.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University.
Series A: Natural Sciences”**

The Editor-in-Chief – Dr. of phys. and math., prof. *S.V. Bespalova*.

The Deputy of the Editor-in-Chief – Dr. of biol., prof. *O.S. Goretskii*.

Executive Secretary – Cand. of phys. and math. *M.V. Fomenko*.

The Members of the Editorial Board: Dr. of biol., prof. *V.G. Artyuhov*; Cand. of chem., docent *O.V. Baranova*; Cand. of chem., docent *S.G. Bahtin*; Dr. of chem., docent *N.I. Belaya*; Cand. of chem., docent *A.V. Belyj*; Dr. of philosophy, prof. *S.V. Belyi*; Dr. of Ped. docent *T.V. Varduni*; Dr. of phys. and math., prof. *Val.V. Volchkov*; Dr. of phys. and math., prof. *Vit.V. Volchkov*; Dr. of biol., prof. *A.Z. Glukhov*; Dr. of phys. and math., prof. *A.S. Goltsev*; Dr. of biol., docent *S.N. Gorbov*; Dr. of chem., prof. *A.V. Gulevskaya*; Dr. of biol., docent *T.V. Denisova*; Dr. of chem., prof. *V.D. Dyachenko*; Dr. of phys. and math., docent *V.P. Zastavnyi*; Dr. of phys. and math., docent *A.V. Zyza*; Dr. of geogr. prof. *K.Sh. Kazeev*; Dr. of biol., prof. *V.N. Kalaev*; Cand. of biol., docent *E.A. Kalaeva*; Dr. of phys. and math., prof. *S.A. Kaloerov*; Dr. of biol., s.r. *O.E. Klimenko*; Dr. of Agric. prof. *S.I. Kolesnikov*; Dr. of phys. and math., docent *B.I. Konosevich*; Cand. of biol. *V.O. Kornienko*; Dr. of chem., prof. *T.P. Kustova*; Dr. of biol., docent *E.V. Lopatina*; Dr. of phys. and math., docent *A.V. Mazniev*; Dr. of chem., prof. *V.M. Mikhal'chuk*; Dr. of phys. and math., docent *I.A. Moiseyenko*; Dr. of biol., prof. *I.V. Muhina*; Dr. of phys. and math., docent *R.N. Neskorodev*; Dr. of biol., prof. *V.B. Pavlenko*; Dr. of biol., docent *S.V. Pogodina*; Cand. of biol., docent *A.I. Safonov*; Dr. of biol., prof. *V.I. Sobolev*; Dr. of biol., docent *V.V. Trush*; Dr. of chem. *T.G. Tyurina*, Dr. of biol., docent *M.G. Holyavka*, Dr. of chem., docent *I.N. Shcherbakov*.

Адрес редакции: ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, РФ.

Тел: +7 (856) 302-09-92. **E-mail:** vestnikdonnu_a@mail.ru

URL: <http://donnu.ru/vestnikA>, <http://dongu-vestnik01.ru>

С 09.04.2024 г. научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» (далее – Журнал) включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (**Перечень ВАК РФ**) (категория **K2** с 30.05.2025 г.) по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

физико-математические науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин, 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела;

химические науки: 1.4.3. Органическая химия, 1.4.4. Физическая химия;

биологические науки: 1.5.2. Биофизика, 1.5.5. Физиология человека и животных, 1.5.15. Экология, 1.5.19. Почвоведение.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 230-11/2025 от 17.11.2025 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А: Естественные науки

№ 3

Донецк 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Будыка В. С., Покровский И. Л. О максимальных индексах дефекта матричных операторов Шредингера с точечными взаимодействиями	5
Волчков В. В., Власенко И. С. Аналоги теоремы единственности Йона для функций из ядра преобразования Помпейю	14
Волчков В. В., Волчков Вит. В., Сероштанова К. В. Некоторые проблемы интегральной геометрии, связанные с преобразованием Помпейю	24
Заставный В. П., Манов А. Д. Дополнение к теореме о неотрицательных почти периодических функциях	35
Манов А. Д. О неотрицательных обобщённых многочленах по функциям Бесселя	43
Машаров П. А. О функциях с нулевыми интегралами по дугам окружностей	50

Механика

Бондаренко Н. С. Построение фундаментальных матриц моментов и перерезывающих сил для случая изгиба ортотропной пластины на базе $\{1,0\}$ -аппроксимации при отсутствии «гипотетического» модуля сдвига	58
Глухов А. А. Численно-аналитическое исследование модели распространения локализованных электроупругих волн сдвига вдоль плоскости контакта функционально-градиентных пьезокерамических полупространств	71
Толстых В. К., Дмитрук Ю. В. Расчёт волнового течения воды в гидропушке	77

Химические науки

Покинтелица Е. А. Влияние предварительного перегрева на кристаллизацию расплавов кумарина и нафталина	88
Фролова С. А. Кинетика кристаллизации сплавов системы In-Bi в квазиравновесных и неравновесных условиях	95

Биологические науки

Болдырева М. А., Куликов А. М. Разработка прогностической модели успешности биопрограммирования с обратной связью на ранних этапах тренинга на основе нейрофизиологических показателей	103
--	-----

<i>Кулагина В. И., Грачев А. Н., Шагидуллин Р. Р., Сунгатуллина Л. М., Гордеева К. А., Забелкин С. А., Рязанов С. С., Хайруллина А. М.</i> Изменения биохимических и агрохимических свойств почвы и роста овса при совместном внесении биоугля и сидерата	113
<i>Обыденных Е. В., Мячина О. В., Пашков А. Н., Парфенова Н. В., Чепрасова А. А.</i> Влияние светотемновых режимов на адаптационные процессы: физиолого-экологический анализ с оценкой уровня свободно циркулирующей ДНК в слюне	125
<i>Савотченко А. В., Чуян Е. Н.</i> Изменения синаптической пластичности в модельных условиях дисфункции гематоэнцефалического барьера	133
<i>Скорлупкин Д. А., Голубева Е. К., Николаева Т. М.</i> Факторный анализ вариабельности сердечного ритма в зависимости от пола у лиц молодого возраста	142
<i>Труш В. В., Соколов В. И.</i> Субхроническое введение L-карнитина улучшает функциональное состояние скелетной мышцы быстрого типа в экспериментах на крысах	151
<i>Улесикова И. В., Воронов В. В., Гринчук С. С., Щукина Н. А., Кунавин М. А., Мулик А. Б.</i> Сравнение показателей вариационной кардиоинтервалометрии у жителей северных и южных территорий Европейской части России	165
<i>Уранова В. В., Ломтева Н. А., Кондратенко Е. И.</i> Изучение дозозависимой анксиолитической активности экстракта шлемника байкальского, культивируемого на территории Астраханской области	173

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A: Natural Sciences

No 3

Donetsk 2026

CONTENTS

Mathematics

<i>Budyka V. S., Pokrovskii I. L.</i> On the maximal deficiency indices of matrix Schrödinger operators with point interactions	5
<i>Volchkov V. V., Vlasenko I. S.</i> Analogues of Jon's uniqueness theorem for functions from the Pompeiu transform kernel	14
<i>Volchkov V. V., Volchkov Vit. V., Seroshtanova K. V.</i> Some problems in integral geometry related to the Pompeiu transformation	24
<i>Zastavnyi V. P., Manov A. D.</i> Supplement to the theorem on non-negative almost periodic functions	35
<i>Manov A. D.</i> On nonnegative generalized polynomials in Bessel functions	43
<i>Masharov P. A.</i> On functions with zero integrals over arcs of circles	50

Mechanics

<i>Bondarenko N. S.</i> Construction of the fundamental matrices of moments and shear forces for the case of bending of an orthotropic plate based on {1,0}-approximation in the absence of a «hypothetical» shear modulus	58
<i>Glukhov A. A.</i> Numerical-analytical study of a model for the propagation of localized electro-elastic shear waves along the contact plane of functional-gradient piezo-ceramic half-spaces	71
<i>Tolstykh V. K., Dmitruk Yu. V.</i> Calculation of wave water flow in a hydrocannon	77

Chemical sciences

<i>Pokintelitsa E. A.</i> Effect of preheating on the crystallization of coumarine and naphthalene melts	88
<i>Frolova S. A.</i> Kinetics of crystallization of In-Bi system alloys under quasi-equilibrium and nonequilibrium conditions	95

Biological sciences

<i>Boldyreva M. A., Kulikov A. M.</i> Development of a predictive model for the success of bio-feedback training in the early stages of training based on neurophysiological indicators	103
---	-----

<i>Kulagina V. I., Grachev A. N., Shagidullin R. R., Sungatullina L. M., Gordeeva K. A., Zabelkin S. A., Ryazanov S. S., Khairullina A. M.</i> Changes in soil biochemical and agrochemical properties and oat growth under co-application of biochar and green manure	113
<i>Obydennykh E. V., Myachina O. V., Pashkov A. N., Parfenova N. V., Cheprasova A. A.</i> Effect of light-dark regimes on adaptation: physiological and ecological analysis with cDNA level assessment in saliva	125
<i>Savotchenko A. V., Chuyan E. N.</i> Alterations of synaptic plasticity under model conditions of blood-brain barrier dysfunction	133
<i>Skorlupkin D. A., Golubeva E. K., Nikolaeva T. M.</i> Factor analysis of heart rate variability depending on sex in young adults	142
<i>Trush V. V., Sobolev V. I.</i> Subchronic administration of L-carnitine improves the functional state of fast-twitch skeletal muscle in rat experiments	151
<i>Ulesikova I. V., Voronov V. V., Grinchuk S. S., Tshukina N. A., Kunavin M. A., Mulik A. B.</i> Comparison of variational cardiointervalometry in residents of the northern and southern territories the European part of Russia	165
<i>Uranova V. V., Lomteva N. A., Kondratenko E. I.</i> Study of the dose-dependent anxiolytic activity of an extract of baikal skullcap (<i>Scutellaria baicalensis</i> Georgi) cultivated in the Astrakhan Region	173

О МАКСИМАЛЬНЫХ ИНДЕКСАХ ДЕФЕКТА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

© 2026. В. С. Будыка, И. Л. Покровский

В статье получены новые условия максимальности индексов дефекта матричных операторов Шредингера с δ' -взаимодействиями. Также найдены новые условия максимальности индексов дефекта некоторого класса блочных якобиевых операторов.

Ключевые слова: оператор Шредингера, точечные взаимодействия, индексы дефекта, блочная якобиева матрица.

Введение. Операторы Шредингера с точечными взаимодействиями, задаваемые формальным дифференциальным выражением

$$l_{X,\beta} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes \mathbb{I}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta'(x - x_n), \quad (1)$$

играют большую роль в спектральной теории и математической физике. Здесь $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I} = (0, b)$, $b \leq \infty$ строго возрастающая последовательность с $x_0 := 0$, $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow b$, и $\{\beta_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$, $\beta_n = \beta_n^*$.

Скалярные операторы, задаваемые выражением (1), впервые возникли в квантовой механике как описывающие точно решаемые модели (см. [8]). Их спектральные свойства достаточно хорошо изучены (см., например, монографии [1], [8], обзор [7] и литературу в них).

Одним из основных объектов настоящей работы является матричный оператор Шредингера $\mathbf{H}_{X,\beta}$, ассоциированный с выражением (1). Его строгое определение дается в рамках теории расширений. Для этого сначала вводится предминимальный оператор $\mathbf{H}_{X,\beta}^0$:

$$\mathbf{H}_{X,\beta}^0 := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes \mathbb{I}_m, \quad (2)$$

$$\text{dom}(\mathbf{H}_{X,\beta}^0) = \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f'(0+) = 0, \quad f'(x_n+) = f'(x_n-) \\ f(x_n+) - f(x_n-) = \beta_n f'(x_n) \end{array}, \quad x_n \in X \right\}.$$

Минимальный симметрический оператор $\mathbf{H}_{X,\beta}$ определяется как замыкание оператора $\mathbf{H}_{X,\beta}^0$ в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$.

В работах А. Костенко и М. Маламуда [6], [13] (см. также [7]), в скалярном случае оператор $\mathbf{H}_{X,\beta}$ трактуется в рамках теории расширений, как расширение минимального симметрического оператора $\mathbf{H}_X = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{H}_n$, где

$$\mathbf{H}_n f := -f'', \quad \text{dom}(\mathbf{H}_n) = W_0^{2,2}[x_{n-1}, x_n].$$

В их работах для сопряженного (максимального) оператора $\mathbf{H}_{X,\beta}^*$ построена граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ (см. определение 1), для которой расширение $\mathbf{H}_{X,\beta}$ задается равенством

$$\text{dom}(\mathbf{H}_{X,\beta}) = \ker(\Gamma_1 - \mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})\Gamma_0),$$

в котором $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$ – граничный оператор (см. определения в аппендиксе, ф-ла (22)), порождаемый скалярной якобиевой матрицей вида (16) при $m = 1$ (см. ниже). Используя общую теорию граничных троек (см. [4, 5] и аппендикс), в [6], [13] (см. также [7]) найдена связь между оператором Шредингера $\mathbf{H}_{X,\beta}$ с δ' -взаимодействиями, ассоциированным в $L^2(\mathcal{I})$ с выражением (1), с одной стороны и якобиевой матрицей $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$ с другой. В частности, в [6] доказано равенство $n_{\pm}(\mathbf{H}_{X,\beta}) = n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H}))$, ведущее к оценке $n_{\pm}(\mathbf{H}_{X,\beta}) \leq 1$.

Соответствующая связь спектральных свойств дифференциальных операторов и якобиевых матриц использовалась для исследования спектральных характеристик операторов Шредингера с δ -взаимодействиями в работах [10, 12, 14, 18], и операторов Дирака с δ - и δ' -взаимодействиями в [2, 3, 11].

В [12] при $m \geq 1$ получено условие для максимальности индексов дефекта операторов Шредингера с δ -взаимодействиями на конечном интервале без использования связи с якобиевыми матрицами. Кроме того, отправляясь от этого результата доказана максимальность индексов дефекта якобиевой матрицы, связанной с операторами Шредингера с δ -взаимодействиями.

В настоящей работе при $m \geq 1$ получено условие для максимальности индексов дефекта операторов $\mathbf{H}_{X,\beta}$ на конечном интервале без использования связи с якобиевыми матрицами, а также доказана максимальность индексов дефекта якобиевой матрицы $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$.

Также в этой статье мы продолжаем исследования индексов дефекта некоторого класса блочных якобиевых матриц $\mathbf{J}$ с $m \times m$ -матричными элементами вида

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathcal{B}_0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathcal{B}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathcal{B}_{n-1} & \mathcal{A}_n & \mathcal{B}_n & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, (\in \mathbb{C}^{m \times m})$, $n \in \mathbb{N}_0$ самосопряженные матрицы, $\mathcal{B}_n$ – обратимы, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{O}_m$ — нулевой оператор. Следуя М.Г. Крейну (см. [17]), матрицу $\mathbf{J}$ также называют якобиевой матрицей с матричными элементами.

Пусть $l_0^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$ – подмножество финитных последовательностей в $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^m)$. Отображение $l_0^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m) \ni f \rightarrow \mathbf{J}f$ определяет линейный симметрический, но незамкнутый оператор $\mathbf{J}^0$ в $l_0^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$. Его замыкание определяет минимальный (замкнутый) симметрический оператор $\mathbf{J}_{\min}$ в $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$. В дальнейшем мы отождествляем минимальный оператор $\mathbf{J}_{\min}$ с матрицей $\mathbf{J}$. Положим также $\mathbf{J}_{\max} = \mathbf{J}^*$. Хотя оператор $\mathbf{J}$ симметрический, $\mathbf{J} \subset \mathbf{J}^*$, он не обязательно самосопряжен. Его индексы дефекта

$$n_{\pm}(\mathbf{J}) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(\mathbf{J}) := \dim \ker(\mathbf{J}^* \mp iI)$$

удовлетворяют оценкам $0 \leq n_{\pm}(\mathbf{J}) \leq m$ (см. [9, 17]). Более того, для каждой пары чисел $\{n_+, n_-\} \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ с $0 \leq n_{\pm} \leq m - 1$ найдется матрица $\mathbf{J}$ с $n_{\pm}(\mathbf{J}) = n_{\pm}$. При этом, $n_-(\mathbf{J}) = m$ и $n_+(\mathbf{J}) = m$ лишь одновременно.

Проблема нахождения индексов дефекта, в частности, условий самосопряженности, блочных якобиевых матриц является первой основной задачей, естественно возникающей в спектральной теории якобиевых матриц. Эта проблема привлекала значительное

внимание на протяжении многих лет (см., например, [2, 3, 6, 7, 9–18] и литературу в них). Отметим, что статье [2] найдены новые условия самосопряженности и дискретности спектра блочных якобиевых матриц общего вида.

В работе [10] получены новые условия самосопряженности, максимальности индексов дефекта и дискретности спектра некоторого класса блочных якобиевых матриц $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ (см. (16)).

В данной работе мы продолжаем исследования из [2, 10, 12] для изучения индексов дефекта блочных якобиевых матриц из класса $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{H}, m)$ (см. (16)).

О максимальнойности индексов дефекта оператора $\mathbf{H}_{X,\beta}$. Пусть $X = \{x_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{I} = (0, b)$, $b \leq \infty$ и $x_{n+1} > x_n$, $x_0 = 0$, $x_n \rightarrow b$, $n \in \mathbb{N}_0$. Пусть также $d_n := x_n - x_{n-1} > 0$ и $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m \times m}$, $\beta_n = \beta_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{H}_{X,\beta}$ – реализация оператора Шредингера в $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^m)$. Тогда оператор $\mathbf{H}_{X,\beta}^* := (\mathbf{H}_{X,\beta})^*$ сопряженный к симметрическому оператору $\mathbf{H}_{X,\beta}$ имеет вид

$$\mathbf{H}_{X,\beta}^* = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes \mathbb{I}_m \upharpoonright \text{dom}(\mathbf{H}_{X,\beta}^*) \quad (4)$$

$$\text{dom}(\mathbf{H}_{X,\beta}^*) = \left\{ f \in W^{2,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f'(0+) = 0, \quad f'(x_n+) = f'(x_n-) \\ f(x_n+) - f(x_n-) = \beta_n f'(x_n) \end{array} \right\}.$$

В этом разделе при условии, что $|\mathcal{I}| < \infty$, для матричных операторов Шредингера $\mathbf{H}_{X,\beta}$ получим условие максимальнойности индексов дефекта $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\beta}) = m$ без использования якобиевых матриц, связанных с ними.

Теорема 2. Пусть $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m \times m}$ – последовательность самосопряженных $m \times m$ -матриц, $\beta_n = \beta_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим также, что выполнено следующее условие:

$$\sum_{n=2}^\infty d_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{m \times m}})^2 < +\infty. \quad (5)$$

Тогда $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\beta}) = m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что при условии (5) уравнение $(\mathbf{H}_{X,\beta}^* \pm i)F = 0$ имеет нетривиальное матричное $L^2(\mathcal{I}, \mathbb{C}^{m \times m})$ -решение полного ранга, т.е. $\text{rank } F(x) = m$.

Ограничимся случаем $(\mathbf{H}_{X,\beta}^* + i)F = 0$, который эквивалентен системе

$$-\frac{d^2}{dx^2} F = -iF. \quad (6)$$

Здесь

$$F = \begin{pmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m} \text{ и } F^j = \begin{pmatrix} f_1^j & \dots & f_m^j \end{pmatrix}^\top, \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

Уравнение (6) имеет следующие кусочно-гладкие $m \times m$ -матричные решения

$$F = \bigoplus_{n=1}^\infty F_n,$$

где

$$F = \bigoplus_{n=1}^\infty F_n, \quad F_n(x) = \mathcal{U}_n e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n-x)} + \mathcal{V}_n e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n-x)}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad (7)$$

$$F' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F'_n, \quad F'_n(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \mathcal{U}_n e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n-x)} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \mathcal{V}_n e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n-x)}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \quad (8)$$

с $\{\mathcal{U}_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$, $\{\mathcal{V}_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$.

Согласно описанию $\text{dom}(\mathbf{H}_{X,\beta}^*)$ (см. Теорема 1) каждая компонента F^j матрицы F , $j \in \{1, \dots, m\}$, должна удовлетворять граничным условиям (4). Сначала находим рекуррентные соотношения для матричных последовательностей $\{\mathcal{U}_n\}_1^{\infty}$, $\{\mathcal{V}_n\}_1^{\infty}$, которые обеспечивают выполнение этих условий.

Условие $F'_n(x_0+) = \mathbb{O}_m$ дает $\frac{1+i}{\sqrt{2}} \mathcal{U}_1 e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_1} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \mathcal{V}_1 e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_1} = \mathbb{O}_m$. Далее условие

$$F'_n(x_n+) = F'_n(x_n-), \quad n \in \mathbb{N},$$

согласно формулы (7) превращается в

$$\mathcal{U}_{n+1} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} - \mathcal{V}_{n+1} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Кроме того, условие скачка

$$F_n(x_n+) - F_n(x_n-) = \beta_n F'_n(x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

согласно формул (7), (8) эквивалентно

$$\mathcal{U}_{n+1} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} + \mathcal{V}_{n+1} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) = \frac{(1+i)\beta_n}{\sqrt{2}} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n). \quad (10)$$

Объединяя (9) и (10), приходим к следующим рекуррентным уравнениям

$$\mathcal{U}_{n+1} = \left(\mathcal{U}_n + \frac{(1+i)\beta_n}{\sqrt{2}} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) \right) e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

$$\mathcal{V}_{n+1} = \left(\mathcal{V}_n + \frac{(1+i)\beta_n}{\sqrt{2}} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) \right) e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

для последовательностей $\{\mathcal{U}_n\}_1^{\infty}$ и $\{\mathcal{V}_n\}_1^{\infty}$ со следующими начальными условиями

$$\mathcal{U}_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_1} \mathbb{I}_m \quad \text{и} \quad \mathcal{V}_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_1} \mathbb{I}_m. \quad (13)$$

Осталось проверить, что при условии (5) выполняется включение $F \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{m \times m})$.

Из (7) и (8) следует, что

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 + \|F'\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\|F_n\|_2^2 + \|F'_n\|_2^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{d_n} (\|\mathcal{U}_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}^2 e^{-2x} + \|\mathcal{V}_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}^2 e^{2x}) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\|\mathcal{U}_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}^2 (1 - e^{-2d_n}) + \|\mathcal{V}_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}^2 (e^{2d_n} - 1)). \end{aligned}$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = |\mathcal{I}| < +\infty$, получим, что $d_n \rightarrow 0$ и поэтому $(1 - e^{-2d_n}) \sim (e^{2d_n} - 1) \sim 2d_n$ при $n \rightarrow \infty$. Это дает неравенство $\|F\|_2 < +\infty$ при условии, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\|\mathcal{U}_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}^2 + \|\mathcal{V}_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}^2) d_n < +\infty. \quad (14)$$

Докажем по индукции следующие оценки

$$\|\mathcal{U}_{n+1}\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}, \|\mathcal{V}_{n+1}\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} \leq \exp(d_1 + \dots + d_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^n (1 + \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Для $n = 1$ эти оценки очевидны. Предположим, что (15) верны для $n \leq p - 1$. Тогда, применяя (11) для $n = p$, получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_{p+1}\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} &\leq \left(\|\mathcal{U}_p\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} \left(1 + \frac{\|\beta_p\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}}{2} \right) + \frac{\|\beta_p\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}}{2} \|\mathcal{V}_p\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} \right) e^{d_{p+1}} \\ &\leq \prod_{k=1}^{p-1} (1 + \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}) \left[\left(1 + \frac{\|\beta_p\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}}{2} \right) + \frac{\|\beta_p\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}}{2} \right] e^{d_1 + \dots + d_p + d_{p+1}} \\ &= \exp(d_1 + \dots + d_{p+1}) \cdot \prod_{k=1}^p (1 + \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}) \leq \exp(|\mathcal{I}|) \cdot \prod_{k=1}^p (1 + \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}). \end{aligned}$$

Это неравенство доказывает индуктивную гипотезу (15) для $\mathcal{U}_n$. Оценка для $\mathcal{V}_{p+1}$ доказывается аналогично. Таким образом, доказаны оба неравенства (15).

Объединяя (14) с (15) и условием (5), заключаем, что $F \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{m \times m})$. $\square$

Индексы дефекта класса $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{H}, m)$ блочных якобиевых матриц.

Рассмотрим блочную якобиеву матрицу вида

$$\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_1^2} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{1}{d_1^2} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{d_1^3} (\beta_1 + d_1 \mathbb{I}_m) & \frac{1}{d_1^{3/2} d_2^{1/2}} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_1^{3/2} d_2^{1/2}} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^2} \mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^2} \mathbb{I}_m & -\frac{1}{d_2^3} (\beta_2 + d_2 \mathbb{I}_m) & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^{3/2} d_3^{1/2}} \mathbb{I}_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m \times m}$, $\beta_n = \beta_n^*$, и $d_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{H}, m)$ класс матриц (16).

Из теоремы 2 и предложения 2 следует результат о максимальности индексов дефекта блочной якобиевой матрицы $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$.

Теорема 3. Пусть последовательность $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m \times m})$ удовлетворяет условию (5). Тогда $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})) = m$.

Другие условия максимальности индексов дефекта якобиевых матриц вида (3) были также получены в работе [16]. Здесь мы сравниваем наш результат об индексах дефекта (теорема 3) с результатами из [16].

Чтобы сформулировать их результат, следуя [16], введем матрицы $\mathcal{C}_0 := \mathcal{B}_1^{*-1}$, $\mathcal{C}_1 := \mathbb{I}_m$, и

$$\mathcal{C}_n = \begin{cases} (-1)^j \mathcal{B}_{2j-1}^{-1} \mathcal{B}_{2j}^* \dots \mathcal{B}_2^* \mathcal{B}_1^{-1}, & \text{при } n = 2j, \\ (-1)^j \mathcal{B}_{2j}^{-1} \mathcal{B}_{2j-1}^* \dots \mathcal{B}_2^{-1} \mathcal{B}_1^*, & \text{при } n = 2j + 1, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (17)$$

Теорема 4 ([16]). Предположим, что элементы матрицы $\mathbf{J}$ (3) удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}^2 < +\infty, \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|C_n^* A_n C_n\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} < +\infty, \quad (19)$$

где последовательность C_n определяется равенством (17). Тогда для матрицы $\mathbf{J}$ имеет место вполне неопределенный случай, т.е. $n_{\pm}(\mathbf{J}) = m$.

Далее опишем область применимости теоремы 4 для матриц $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$.

Предложение 1. Пусть $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$. Пусть также $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$ – якобиева матрица вида (16) и C_n – матрицы вида (17), составленные из элементов $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$. Тогда ряд (19) сходится тогда и только тогда, когда $\{\beta_n\}_1^{\infty} \in l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m \times m})$.

Аппендикс. 1. Линейные отношения Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Линейным отношением в $\mathfrak{H}$ называется линейное (необязательно замкнутое) подпространство в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. Множество замкнутых линейных отношений в $\mathfrak{H}$ обозначим $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$.

Напомним, что $\text{dom } \Theta = \{f : \{f, f'\} \in \Theta\}$, $\text{ran } \Theta = \{f' : \{f, f'\} \in \Theta\}$, $\ker \Theta = \{f \in \mathcal{H} : \{f, 0\} \in \Theta\}$ и $\text{mul } \Theta = \{f' : \{0, f'\} \in \Theta\}$ называют областью определения, множеством значений, ядром и многозначной частью линейного отношения Θ , соответственно. Линейное отношение Θ называется симметрическим, если $\Theta \subset \Theta^*$ и самосопряженным, если $\Theta = \Theta^*$. Замкнутый линейный оператор T в $\mathfrak{H}$ отождествляют с его графиком $\text{gr } T$. Поэтому множество $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ замкнутых линейных операторов в $\mathfrak{H}$ отождествляется с подмножеством $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$.

2. Граничные тройки. Пусть A — плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_{\lambda}(A) := \mathfrak{H} \ominus \text{ran } (A - \lambda I) = \ker(A^* - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, — его дефектные подпространства, а $n_{\pm}(A) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(A)$ — его индексы дефекта.

Всюду в дальнейшем мы считаем, $n_{+}(A) = n_{-}(A) < \infty$.

Определение 1. [4, 5] Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, а Γ_j — линейное отображение из $\text{dom } A^*$ в $\mathcal{H}$, $j \in \{0, 1\}$, называется граничной тройкой оператора A^* , если:

(i) справедливо тождество Грина

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom } A^*; \quad (20)$$

(ii) Отображение $\Gamma : f \rightarrow \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ из $\text{dom } A^*$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно.

Граничная тройка для оператора A^* существует в том и только том случае, когда $n_{+}(A) = n_{-}(A)$. Более того, $n_{\pm}(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\ker \Gamma = \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1 = \text{dom } A$.

Расширение $\tilde{A}$ плотно заданного симметрического оператора A называется собственным, если $\text{dom } A \subset \text{dom } \tilde{A} \subset \text{dom } A^*$. Множество собственных расширений оператора A обозначают Ext_A .

Предложение 2. [4, 5] Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для оператора A^* . Тогда отображение $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : \text{dom } A^* \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ задает биективное соответствие между совокупностью Ext_A собственных расширений $\tilde{A}$ оператора A и совокупностью $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ замкнутых линейных отношений в $\mathcal{H}$

$$\text{Ext}_A \ni \tilde{A} \rightarrow \Theta := \Gamma(\text{dom } \tilde{A}) = \{\{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} : f \in \text{dom } \tilde{A}\} \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}). \quad (21)$$

Если Θ является графиком линейного оператора B , $\Theta = \text{gr } B$, то соотношение (21) принимает вид:

$$\text{dom } A_B = \{f \in \text{dom } A^* : \Gamma_1 f = B \Gamma_0 f\}. \quad (22)$$

Для расширения $\tilde{A}$ при выполнении условия (21) $\tilde{A} =: A_\Theta$ или $\tilde{A} =: A_B$ при (22). При этом справедливы соотношения

$$(i) \quad (A_B)^* = A_{B^*};$$

$$(ii) \quad A_{B_1} \subseteq A_{B_2} \iff B_1 \subseteq B_2;$$

(iii) расширение A_B симметрическое $\iff$ оператор B симметрический. При этом $n_\pm(A_B) = n_\pm(B)$. В частности, $A_B = A_B^* \iff B = B^*$.

Аналогичные утверждения верны и для линейного отношения Θ .

Отношение Θ называют *граничным отношением* оператора $\tilde{A} = A_\Theta$.

Рассмотрим расширения оператора A , задаваемые следующим образом:

$$A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0, \quad A_1 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_1.$$

При этом $A_j = A_{\Theta_j}$, $j \in \{0, 1\}$, где подпространства $\Theta_0 := \{0\} \times \mathcal{H}$ и $\Theta_1 := \mathcal{H} \times \{0\}$ — самосопряженные линейные отношения в $\mathcal{H}$. В силу Предложения 2 $A_j = A_j^*$, $j \in \{0, 1\}$. Заметим, что Θ_0 — чистое линейное отношение. При этом оператор B называют *граничным оператором* расширения A_B .

В работе [6] в скалярном случае, построена граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, для которой граничный оператор, соответствующий оператору Шредингера $\mathbf{H}_{X,\beta}$, задается якобиевой матрицей $\mathbf{J}_{X,\beta}$ вида (16), т.е.

$$\text{dom}(\mathbf{H}_{X,\beta}) = \ker(\Gamma_1 - \mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})\Gamma_0).$$

Отсюда и из общих результатов теории граничных троек [5] вытекает как соотношение $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})) = n_\pm(\mathbf{H}_{X,\beta})$, так и другие результаты о связи спектральных свойств операторов $\mathbf{H}_{X,\beta}$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{H})$.

Работа выполнена в ФГБНУ ИПММ при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации программы РНОМЦ «Азово-Черноморский математический центр» по соглашению № 075-02-2026-734.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albeverio, S. Singular perturbations of differential operators and Schrödinger type operators / S. Albeverio, P. Kurasov – Cambridge : Cambridge University Press, 2000. – 432 p. – ISBN 0 521 77912 X.
2. Budyka, V. S. Deficiency indices and discreteness property of block Jacobi matrices and Dirac operators with point interaction / V. S. Budyka, M. M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. – 2022. – V. 506. – No 1. – paper no. 125582. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125582.
3. Carlone R. On the spectral theory of Gesztesy-Seba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on discrete set / R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano // J. Differential Equations. – 2013. – V. 254. – P. 3835–3902. DOI: 10.1016/j.jde.2013.01.026.
4. Derkach, V. A. Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps / V. A. Derkach, M. M. Malamud // Journal of Functional Analysis. – 1995. – Vol. 95. – No 1. – P. 1-95. DOI: 10.1016/0022-1236(91)90024-Y.
5. Derkach, V. Extension Theory of Symmetric Operators and Boundary Value Problems / V. Derkach, M. Malamud – 2nd ed. – Cham : Birkhäuser, 2025. – (Operator Theory: Advances and Applications). – 934 p. – ISBN 978-3-032-02966-9.
6. Kostenko, A. S. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set / A. S. Kostenko, M. M. Malamud // Journal of Differential Equations. – 2010. – Vol. 249. – № 2. – P. 253-304. DOI: 10.1016/J.JDE.2010.02.011.

7. Kostenko, A. 1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review / A. Kostenko, M. Malamud // *Spectral Analysis, Differential Equations and Mathematical Physics: a Festschrift in Honor of Fritz Gesztesy's 60th Birthday* / Proc. Symp. Pure Math. – Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2013. – Vol. 87. – P. 235-262. – ISBN 978-0-8218-7574-2.
8. Альбеверьо, С. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверьо, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден – Москва: МИР, 1991. – 568 с. – ISBN 5-03-001905-7.
9. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский – К.: Наукова думка, 1968. – 798 с.
10. Бudyка, В. С. Индексы дефекта блочных якобиевых матриц, не удовлетворяющих условию Карлемана, и операторы с точечными взаимодействиями / В. С. Бudyка, М. М. Маламуд, И. Л. Покровский // *Математические заметки*. – 2023. – Т. 114. – № 5. – С. 789-795. DOI: 10.4213/mzm14040.
11. Бudyка, В. К спектральной теории одномерных матричных операторов Дирака с точечными матричными взаимодействиями / В. Бudyка, М. Маламуд, А. Посиликано // *Доклады Академии наук*. – 2018. – Т. 479. – № 2. – С. 117-125. DOI: 10.7868/S0869565218080017.
12. Бudyка, В. Об индексах дефекта матричных операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями и некоторых классов возмущенных блочных якобиевых матриц / В. Бudyка, И. Покровский // *Математические вопросы теории распространения волн*. – 2025. – Вып. 54. – (Записки научных семинаров ПОМИ ; Т. 541). – СПб. : ПОМИ, 2025. – С. 30-50.
13. Костенко, А. С. Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями / А. С. Костенко, М. М. Маламуд // *Функциональный анализ и его приложения*. – 2010. – Т. 44. – № 2. – С. 87-91. DOI: 10.4213/faa2982.
14. Костенко, А. С. Матричные операторы Шрёдингера с δ -взаимодействиями / А. С. Костенко, М. М. Маламуд, Д. Д. Натягайло // *Математические заметки*. – 2016. – Т. 100. – № 1. – С. 59-77. DOI: 10.4213/mzm11122.
15. Костюченко, А. Г. Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами / А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев // *Функциональный анализ и его приложения*. – 1999. – Т. 33. – № 1. – С. 30-45. DOI: 10.4213/faa336.
16. Костюченко, А. Г. Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами / А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев // *Функциональный анализ и его приложения*. – 2001. – Т. 35. – № 4. – С. 32-37. DOI: 10.4213/faa271.
17. Крейн, М. Бесконечные J -матрицы и матричная проблема моментов // *Доклады Академии наук СССР*. – 1949. – Т. LXIX. – № 2. – С. 125-128.
18. Мирзоев, К. А. Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля / К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова // *Математические заметки*. – 2016. – Т. 99. – № 2. – С. 262-277. DOI: 10.4213/mzm10854.

REFERENCES

1. Albeverio, S. & Kurasov, P. (2000) *Singular Perturbations of Differential Operators and Schrödinger-Type Operators*. Cambridge: Cambridge University Press. 432 p. ISBN 0 521 77912 X.
2. Budyka, V.S. & Malamud, M.M. (2022) Deficiency Indices and Discreteness Property of Block Jacobi Matrices and Dirac Operators with Point Interaction. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 506 (1), paper no. 125582, doi: 10.1016/j.jmaa.2021.125582.
3. Carlone, R. & Malamud, M. & Posilicano, A. (2013) On the Spectral Theory of Gesztesy–Šeba Realizations of 1-D Dirac Operators with Point Interactions on Discrete Set. *Journal of Differential Equations*. 254, 3835–3902, doi: 10.1016/j.jde.2013.01.026.
4. Derkach, V.A. & Malamud, M.M. (1995) Generalized Resolvents and the Boundary Value Problems for Hermitian Operators with Gaps. *Journal of Functional Analysis*. 95 (1), 1-95, doi: 10.1016/0022-1236(91)90024-Y.
5. Derkach, V. & Malamud, M. (2025) *Extension Theory of Symmetric Operators and Boundary Value Problems*. 2nd ed. Cham: Birkhäuser. 934 p. (Operator Theory: Advances and Applications). ISBN 978-3-032-02966-9.
6. Kostenko, A.S. & Malamud, M.M. (2010) 1-D Schrödinger Operators with Local Point Interactions on a Discrete Set. *Journal of Differential Equations*. 249 (2), 253–304, doi: 10.1016/J.JDE.2010.02.011.
7. Kostenko, A. & Malamud, M. (2013) 1-D Schrödinger Operators with Local Point Interactions: A Review. In: *Spectral Analysis, Differential Equations and Mathematical Physics: A Festschrift in Honor of Fritz Gesztesy's 60th Birthday*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 87, 235–262. Providence, RI: American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-7574-2.
8. Albeverio, S. & Gesztesy, F. & Hoegh-Krohn, R. & Holden, H. (1991) *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Moscow: Mir Publishers. 568 p. ISBN 5-03-001905-7. (In Russian).
9. Berezanskii, Yu.M. (1968) *Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators*. Kiev: Naukova Dumka. 798

- p. (In Russian).
10. Budyka, V.S. & Malamud, M.M. & Pokrovskii, I.L. (2023) Deficiency Indices of Block Jacobi Matrices That Do Not Satisfy the Carleman Condition, and Operators with Point Interactions. *Mathematical Notes*. 114 (5), 1060–1066, doi: 10.1134/s0001434623110378.
 11. Budyka, V.S. & Malamud, M.M. & Posilicano, A. (2018) To the Spectral Theory of One-Dimensional Matrix Dirac Operators with Point Matrix Interactions. *Doklady Mathematics*. 97 (2), 115–121, doi: 10.1134/S1064562418020047.
 12. Budyka, V. & Pokrovskii, I. (2025) [On deficiency indices of matrix Schrödinger operators with point interactions and some classes of perturbed block Jacobi matrices]. *Mathematical Problems of Wave Propagation*. 541, 30–50. (In Russian).
 13. Kostenko, A.S. & Malamud, M.M. (2010) One-Dimensional Schrödinger Operator with δ -Interactions. *Functional Analysis and Its Applications*. 44 (2), 151–155, doi: 10.1007/s10688-010-0019-9.
 14. Kostenko, A.S. & Malamud, M.M. & Natyagailo, D.D. (2016) Matrix Schrödinger Operators with δ -Interactions. *Mathematical Notes*. 100 (1), 49–65, doi: 10.1134/S0001434616070051.
 15. Kostyuchenko, A.G. & Mirzoev, K.A. (1999) Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients. *Functional Analysis and Its Applications*. 33 (1), 25–37, doi: 10.1007/BF02465140.
 16. Kostyuchenko, A.G. & Mirzoev, K.A. (2001) Complete indefiniteness tests for Jacobi matrices with matrix entries. *Functional Analysis and Its Applications*. 35 (4), 265–269, doi: 10.1023/A:1013174423473.
 17. Krein, M. (1949) [Infinite J -matrices and the matrix moment problem]. *Doklady of the Academy of Sciences of the USSR*. LXIX (2), 125–128. (In Russian).
 18. Mirzoev, K.A. & Safonova, T.A. (2016) On the Deficiency Index of the Vector-Valued Sturm–Liouville Operator. *Mathematical Notes*. 99 (2), 290–303, doi: 10.1134/S0001434616010314.

ON THE MAXIMAL DEFICIENCY INDICES OF MATRIX SCHRÖDINGER OPERATORS WITH POINT INTERACTIONS

V. S. Budyka, I. L. Pokrovskii

In this paper, we obtain new conditions for the maximal deficiency indices of matrix Schrödinger operators with δ' -interactions. We also find new conditions for the maximal deficiency indices of a certain class of block Jacobi operators.

Keywords: Schrödinger operator, point interactions, deficiency indices, block Jacobi matrix.

Поступила в редакцию 28.08.2026

Будыка Виктория Сергеевна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики,
Донецкий филиал РАНХиГС, г. Донецк, ДНР, РФ;
ФГБНУ «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: budyka.vik@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4528-5778
SPIN-код: 6408-6779
AuthorID: 922634

Budyka Viktoriya Sergeevna

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk branch of RANEP, Donetsk, DPR, RF;
Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, DPR, RF.

Покровский Илья Леонидович

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры вычислительной
математики и математической физики,
Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, РФ.
E-mail: pokrovski.ilia@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-1954-2833
SPIN-код: 9629-2750
AuthorID: 200908

Pokrovskii Ilya Leonidovich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Bauman Moscow State
Technical University, Moscow, RF

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЙОНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ЯДРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОМПЕЙЮ

© 2026. В. В. Волчков, И. С. Власенко

В работе получены аналоги теоремы единственности Йона для функций, принадлежащих ядру преобразования Помпейю. Установлены условия, при которых обращение такой функции в нуль в некоторой подобласти влечёт её тождественное равенство нулю во всей рассматриваемой области. Рассмотрены случаи произвольного множества, не являющегося шаром, параллелепипеда, а также семейства, состоящего из равнобедренного треугольника с углом $\pi/6$ и квадрата.

Ключевые слова: преобразование Помпейю, ядро преобразования Помпейю, теорема единственности Йона, множество Помпейю, локальный вариант проблемы Помпейю, радиус Йона, семейство из равнобедренного треугольника и квадрата.

Введение

Одним из основных объектов изучения в современной интегральной геометрии является преобразование Помпейю, которое (в одном из простейших случаев) определяется следующим образом.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$, $L_{loc}(\mathcal{U})$ — класс функций, локально суммируемых в области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^s$ — заданное семейство компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с ненулевой лебеговой мерой. Для любой области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, такой что каждое из множеств

$$M(\mathcal{U}, A_i) = \{g \in M(n) : gA_i \subset \mathcal{U}\}, \quad i = 1, \dots, s,$$

непусто, рассмотрим преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{U}}$, отображающее $L_{loc}(\mathcal{U})$ в декартово произведение $C(M(\mathcal{U}, A_1)) \times \dots \times C(M(\mathcal{U}, A_s))$ следующим образом

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{U}} f = (f_1, \dots, f_s), \quad f \in L_{loc}(\mathcal{U}),$$

где

$$f_i(g) = \int_{gA_i} f(x) dx, \quad g \in M(\mathcal{U}, A_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

Преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{U}}$ называется преобразованием Помпейю, связанным с семейством $\mathcal{A}$ и областью $\mathcal{U}$. Особый интерес представляет случай $s = 1$, для которого используется обозначение

$$\mathcal{P}_{A, \mathcal{U}} = \mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{U}}, \quad \text{где } \mathcal{A} = \{A\}.$$

В случае, когда $n = 2$, преобразование $\mathcal{P}_{A, \mathbb{R}^2}$ было рассмотрено Д. Помпейю в 1929 году для некоторых $A \subset \mathbb{R}^2$.

Исследование проводилось в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема № FREM-2026-0004 и тема № FRRE-2026-0015).

Определение $\mathcal{P}_{A,\mathcal{U}}$ и его естественные модификации, связанные с рассмотрением различных пространств функций и распределений на многообразиях, включают ряд известных примеров интегральных преобразований, возникающих в интегральной геометрии и многочисленных приложениях (см. [1–12]). К их числу относятся классическое преобразование Минковского-Функа, преобразование Радона и его обобщения, а также ряд преобразований, связанных с оператором сферического среднего.

Для заданного семейства $\mathcal{A}$ возникают следующие проблемы (см., например, [3], [7, часть 4, раздел 7.1]).

Проблема 1. Описать области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, для которых преобразование $\mathcal{P}_{A,\mathcal{U}}$ инъективно.

Проблема 2. Если $\mathcal{P}_{A,\mathcal{U}}$ не является инъективным, то описать его ядро

$$\text{Ker} \mathcal{P}_{A,\mathcal{U}} = \{f \in L_{loc}(\mathcal{U}) : \mathcal{P}_{A,\mathcal{U}} f = 0\}.$$

Эти проблемы не только представляют значительный самостоятельный интерес, но и важны для многочисленных приложений в интегральной геометрии, в теории кратных тригонометрических рядов с лакунами, в теории аппроксимации, в комплексном анализе, в уравнениях с частными производными, в теории отображений, сохраняющих меру, а также, в комбинаторной геометрии (см. обзоры [1–5] и монографии [7–9] с обширным списком литературы). В нетривиальных случаях они являются, как правило, весьма трудными и содержат в себе некоторые открытые старые проблемы и гипотезы. Отметим, например, известную проблему Помпейю: доказать (или опровергнуть), что если E — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, гомеоморфной сфере, то преобразование $\mathcal{P}_{\overline{E},\mathbb{R}^n}$ неинъективно тогда и только тогда, когда E является шаром (здесь, как обычно, $\overline{E}$ — замыкание E в $\mathbb{R}^n$).

Вопрос об инъективности преобразования $\mathcal{P}_{A,\mathbb{R}^2}$ в случае, когда A — круг, был рассмотрен в 1929 году Д. Помпейю [13], который утверждал, что ответ является положительным.

Однако, спустя пятнадцать лет Л. Чакалов [14] обнаружил, что доказательство Д. Помпейю содержит ошибку. Более того, он показал, что функция $f(x_1, x_2) = \sin(\lambda x_1)$ имеет нулевые интегралы по всем единичным кругам в $\mathbb{R}^2$, если число λ является нулем функции Бесселя J_1 . Впоследствии выяснилось, что аналогичные примеры ненулевых функций можно построить, используя метод, предложенный И. Радонем [15] еще в 1917 году. Этот метод основан на теореме о среднем для собственных функций оператора Лапласа и может быть распространен на произвольное двухточечно-однородное пространство X (см. [9, часть 2, п. 2.4]). Кроме того, он позволяет строить ненулевые функции на X , имеющие нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса.

Если преобразование $\mathcal{P}_{A,\mathcal{U}}$ является инъективным, то говорят, что семейство $\mathcal{A}$ имеет свойство Помпейю в $\mathcal{U}$ (сокращенно $\mathcal{A} \in \text{Pomp}(\mathcal{U})$). Такое семейство называют также семейством Помпейю в $\mathcal{U}$. Аналогично определяются множества со свойством Помпейю в $\mathcal{U}$ (множества Помпейю в $\mathcal{U}$).

В случае, когда $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, понятия свойства Помпейю, семейства Помпейю и множества Помпейю часто используются без упоминания области $\mathcal{U}$.

Большинство результатов, устанавливающих инъективность преобразования $\mathcal{P}_{A,\mathbb{R}^n}$, было получено методами спектрального синтеза (см. [1–3, 16]). Оказалось, что критерием инъективности в этих случаях является отсутствие общих нулей у преобразований Фурье индикаторов всех множеств вида gA , где $g \in M(n)$, $A \in \mathcal{A}$. Использование этого факта позволило доказать инъективность $\mathcal{P}_{A,\mathbb{R}^n}$ для широкого класса множеств A (см. [17–22]).

В случае $\mathcal{U} \neq \mathbb{R}^n$ исследование инъективности преобразования $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{U}}$ является более трудной задачей. В значительной мере это объясняется нарушением групповой структуры сдвигов и, соответственно, невозможностью применения прежних методов, связанных с преобразованием Фурье. Здесь в первую очередь следует отметить следующий результат, полученный в [23] (см. также [8]).

Для $R > 0$ обозначим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Пусть также $r^*(A)$ — наименьший из радиусов замкнутых шаров, содержащих компакт $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда, если семейство $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^s$ имеет свойство Помпейю в $\mathbb{R}^n$, то оно имеет свойство Помпейю в шаре B_R при любом

$$R > \min_{1 \leq i \leq s} r^*(A_i) + \max_{1 \leq i \leq s} r^*(A_i).$$

Некоторые частные случаи этого результата ранее были получены в [7, часть 4] и [24]. Указанное утверждение приводит к следующей проблеме.

Проблема 3. Для данного семейства $\mathcal{A} \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ найти значение

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \inf\{R > 0 : \mathcal{A} \in \text{Pomp}(B_R)\}$$

и выяснить, будет ли $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, B_R}$ инъективным при $R = \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Первые результаты по данной проблеме были получены в работах [25, 26] и содержали верхние оценки величин $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ для некоторых $\mathcal{A}$. Полное решение проблемы 3 для различных $\mathcal{A}$ содержится в [7, часть 4], [8, 9, 22].

Что касается проблемы 2, то она до настоящего времени исследована мало. Большинство из полученных результатов касаются функций с нулевыми интегралами по шарам и некоторых обобщений для систем уравнений свертки с заданными радиальными распределениями-свёртывателями с компактными носителями (см. [7–9]). Полное решение проблемы 2 известно лишь для отдельных случаев, когда $\mathcal{U} = B_R$, $\mathcal{A} = \{A\}$, где A — параллелепипед [27], [7, часть 4], [9], или эллипсоид [7, часть 4], [9]. В связи с этим возникает

Проблема 4. Пусть преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{U}}$ неинъективно и $f \in \text{Ker } \mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{U}}$. При каких дополнительных условиях на f отсюда следует, что $f = 0$?

В случае, когда $\mathcal{A} = \{A\}$, где A — шар в $\mathbb{R}^n$, проблема 4 изучалась во многих работах (см. [7–9, 28]). При этом для неограниченных областей $\mathcal{U}$ в качестве дополнительных условий на функцию f в ряде работ рассматривались различные ограничения на ее рост на бесконечности (см. [7–9, 28]).

Интересным и естественным дополнительным условием на f в проблеме 4 является равенство нулю функции f в некоторой области $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$. Исследования в этом направлении восходят к классической теореме единственности Ф. Йона для функций с нулевыми сферическими средними. Эта теорема (см. [29], а также [6, глава 6]) утверждает, что если функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем сферам фиксированного радиуса r обращается в нуль в некотором шаре радиуса r , то $f = 0$ в $\mathbb{R}^n$. При этом условие бесконечной гладкости f ослабить нельзя (см. [29] для $n = 2, 3$ и [7, часть 2, теорема 1.2] в общем случае). Теорема Ф. Йона получила дальнейшее развитие и уточнение в разных направлениях, см. [7–9], а также [30]. Например, были получены её аналоги для функций с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса на римановых двухточечно-однородных пространствах, а также соответствующие обобщения для функций, удовлетворяющих уравнениям свертки, см. [7–9, 30].

Таким образом, представляет интерес

Проблема 5. Пусть преобразование $\mathcal{P}_{A,B_R}$ неинъективно при некотором $R > \max_{1 \leq i \leq s} r^*(A_i)$, $f \in \text{Ker} \mathcal{P}_{A,B_R}$ и

$$f = 0 \text{ в } B_r$$

при некотором $r \in (0, R)$. Для каких r отсюда следует, что $f = 0$?

Некоторые результаты, связанные с проблемой 5 для случая, когда семейство $\mathcal{A}$ состоит из двух шаров в $\mathbb{R}^n$, получены в [31].

Основные результаты.

В данной работе изучаются некоторые частные случаи проблем 4 и 5. Перейдём к изложению основных результатов работы.

Теорема 1. Пусть A — замыкание ограниченной области в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей и множество $\mathbb{R}^n \setminus A$ является связным. Пусть также A не является шаром, $R > 2r^*(A)$, $f \in \text{Ker} \mathcal{P}_{A,B_R}$ и $f = 0$ в некоторой области $\mathcal{O} \subset B_R$. Тогда $f = 0$ в B_R . Если A — шар, это утверждение неверно, даже если дополнительно предположить, что $f \in C^\infty(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя [8, теорема 19.18], заключаем, что если A не является шаром, то существует ненулевой многочлен p от одной переменной с комплексными коэффициентами, такой что

$$p(\Delta)f = 0 \text{ в } B_R, \quad (1)$$

где, как обычно, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Ввиду эллиптичности дифференциального оператора $p(\Delta)$ всякое решение уравнения (1) почти всюду совпадает с функцией, вещественно аналитической в B_R . Поэтому $f = 0$ во всём B_R в силу теоремы единственности для вещественно аналитических функций. Если A — шар радиуса $r \in (0, R)$, то данное утверждение станет неверным, если в качестве области $\mathcal{O}$ взять открытый шар с радиусом, меньшим чем r (см. [7, часть 2, теорема 1.2]). $\square$

Далее, пусть $a_1, \dots, a_n$ — фиксированные положительные числа, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ и

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : -a_\nu \leq x_\nu \leq a_\nu, \nu = 1, \dots, n\}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n.$$

Пусть $[t]$ — целая часть числа $t \geq 0$, $\{t\} = t - [t]$, $R(a, t) = (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + |a|^2)^{1/2}$, $r_\nu(t) = 2a_\nu - (4a_1^2 t^2 - a_1^2 + a_\nu^2)^{1/2}$, $\nu = 2, \dots, n$.

Обозначим $\zeta = \zeta(a_1, \dots, a_n) = \inf E$, где

$$E = \left\{ t \geq 1 : 2[t] + [2\{t\}] \geq 1 + \frac{1}{a_1} r_2(t), r_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \nu = 2, \dots, n \right\}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{R}(A) = R(a, \zeta)$$

(см. [27, теорема 1]).

Рассмотрим совокупность функций $\rho_\nu(t)$, $\nu = 2, \dots, n$, заданных на интервале $(1/2, +\infty)$ следующим образом: $\rho_\nu(t) = r_\nu(t)$, если $r_\nu(t) \leq 0$; $\rho_\nu(t) = ((2\sqrt{2}a_\nu -$

$\sqrt{4a_1^2t^2 - a_1^2 + 2a_\nu^2}^2 - a_\nu^2)^{1/2}$, если $r_\nu(t) > 0$ и $(7 - 4\sqrt{2})a_\nu^2 > a_1^2(4t^2 - 1)$; $\rho_\nu(t) = 0$, если $r_\nu(t) > 0$ и $(7 - 4\sqrt{2})a_\nu^2 \leq a_1^2(4t^2 - 1)$.

Отметим следующие свойства функций ρ_ν , вытекающие непосредственно из их определения:

- а) ρ_ν является непрерывной и невозрастающей функцией на $(1/2, +\infty)$;
- б) при любом $t \in (1/2, +\infty)$

$$\rho_\nu(t) \leq r_\nu(t) < a_\nu,$$

и $\rho_\nu(t) = r_\nu(t)$ тогда и только тогда, когда $r_\nu(t) \leq 0$.

Далее, при $k = 2, \dots, n$ рассмотрим множества $E^{(k)} = E_1^{(k)} \cap (E_2 \cup E_3)$, где

$$E_1^{(k)} = \left\{ t \geq 1 : r_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \nu = 2, \dots, k \right\},$$

$$E_2 = \left\{ t \geq 1 : \{t\} \geq \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq r_2(t) \right\},$$

$$E_3 = \left\{ t \geq 1 : \{t\} < \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq a_1 + r_2(t) \right\}.$$

Обозначим $\zeta_k = \zeta_k(a_1, \dots, a_n) = \inf E^{(k)}$, тогда $\zeta_n = \zeta$. Аналогично, положим $\Lambda^{(k)} = \Lambda_1^{(k)} \cap (\Lambda_2 \cup \Lambda_3)$ и $\Omega^{(k)} = \Lambda_1^{(k)} \cap \Omega_k$, где

$$\Lambda_1^{(k)} = \left\{ t \geq 1 : \rho_\nu(t) < \left(R^2(a, t) - \sum_{m=\nu}^n a_m^2 \right)^{1/2}, \nu = 2, \dots, k \right\},$$

$$\Lambda_2 = \left\{ t \geq 1 : \{t\} \geq \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq \rho_2(t) \right\},$$

$$\Lambda_3 = \left\{ t \geq 1 : \{t\} < \frac{1}{2}, 2a_1[t] \geq a_1 + \rho_2(t) \right\}.$$

$$\Omega_k = \left\{ t > \sqrt{2 - \sqrt{2}} : \rho_2 < 2a_1\zeta_k - a_1, (2\sqrt{1 + (2\zeta_k - 1)^2} - \sqrt{4t^2 + 1})^2 < 1 + 4(t - 1)^2 \right\}.$$

Пусть также

$$\eta_k = \eta_k(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \inf \Lambda^{(k)}, & \text{если } 2\zeta_k \notin \mathbb{N}, \\ \inf \Omega^{(k)}, & \text{если } 2\zeta_k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и $\omega_k = \max_{2 \leq m \leq k} \eta_m$.

Теорема 2. Пусть $t > \omega_n$, $R = R(a, t)$, $f \in \text{Ker } \mathcal{P}_{A, B_R}$ и $f = 0$ в $B_{r_n(t)}$. Тогда $f = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [27, лемма 7] следует, что $f = c$ в области $B_R \setminus \overline{B_{r_n(t)}}$ для некоторой константы $c \in \mathbb{C}$. Поскольку

$$\int_A f(x) dx = 0 = \int_{A \setminus \overline{B_{r_n(t)}}} f(x) dx,$$

получаем, что $c = 0$, а это дает требуемое утверждение. $\square$

В некоторых случаях теорему 2 можно усилить. Например, имеет место

Теорема 3. Пусть $n \geq 3$, $R = R(a, \zeta)$ и

$$r_n(\zeta) \geq (4a_1^2\zeta^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)^{1/2}.$$

Пусть также $f \in \text{Ker } \mathcal{P}_{A, B_R}$ и $f = 0$ в некоторой области $\mathcal{O} \subset B_R$. Тогда $f = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [27, теорема 1] следует, что при указанных условиях всякая функция $f \in \text{Ker } \mathcal{P}_{A, B_R}$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{если } |x| \geq r_n(\zeta), \\ c - \frac{2}{\pi} c a_n (r_n^2(\zeta) - |x|^2)^{-1/2}, & \text{если } |x| < r_n(\zeta), \end{cases}$$

где c – комплексная постоянная. Если $f = 0$ в $\mathcal{O}$, отсюда заключаем, что $c = 0$. Таким образом, $f = 0$ в B_R . $\square$

Далее рассматривается семейство $\mathcal{A} = \{T, K\}$, состоящее из равнобедренного треугольника $T \subset \mathbb{R}^2$ и квадрата $K \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть $\alpha_0 = \pi/12$. Для треугольника

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \cos \alpha_0, -x \tan \alpha_0 \leq y \leq x \tan \alpha_0\}$$

имеем $r^*(T) = \frac{1}{2 \cos \alpha_0}$.

Квадрат K задается формулой

$$K = \frac{\sqrt{30}}{10} K_1, \quad K_1 = \{(x, y) : -1/2 \leq x \leq 1/2, -1/2 \leq y \leq 1/2\}.$$

Тогда диагональ квадрата K равна $d_K = \frac{\sqrt{15}}{5}$, а радиус описанной окружности равен $r^*(K) = \frac{d_K}{2} = \frac{\sqrt{15}}{10}$. Для такого выбора масштаба выполняется

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(K) = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

однако для семейства $\mathcal{A} = \{T, K\}$ получен более сильный результат

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\{T, K\}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(см. [32]).

Теорема 4. Пусть $R \in \left(\frac{\sqrt{15}}{10}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$, $f \in \text{Ker } \mathcal{P}_{A, B_R}$ и $f = 0$ в B_r при некотором $r > \frac{\sqrt{15}}{5} - R$. Тогда $f = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя стандартный приём сглаживания, получаем, что утверждение теоремы 4 достаточно доказать для функции f класса $C^\infty(B_R)$. Кроме того, не ограничивая общности, можно считать, что функция f является радиальной (см. [7, часть 4, доказательство леммы 1.1]). Как показано в работе [32], при указанных условиях существует ненулевой многочлен $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, такой что

$$q(\Delta)f = 0 \text{ в области } \frac{\sqrt{15}}{5} - R < |x| < R.$$

В силу эллиптичности оператора $q(\Delta)$ отсюда следует, что f вещественно аналитична в данной области. Поскольку $r > \frac{\sqrt{15}}{5} - R$ и $f(x) = 0$ при $|x| < r$, из теоремы единственности для вещественно аналитических функций получаем требуемое утверждение. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беренштейн, К. Комплексный анализ и уравнения в свертках / К. Беренштейн, Д. Струппа // Комплексный анализ – многие переменные – 5. – М.: ВИНТИ, 1989. – (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления; Т. 54). – С. 5–111. – DOI англ. версии: 10.1007/978-3-642-58011-6_1.
2. Zalcman, L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / L. Zalcman // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations (Hansthalm, 1991). – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.; Vol. 365). – P. 185–194. – DOI: 10.1007/978-94-011-2436-2_17.
3. Zalcman, L. Supplementary bibliography to: “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” / L. Zalcman // Radon Transforms and Tomography (South Hadley, MA, 2000). – Providence, RI: American Mathematical Society, 2001. – (Contemporary Mathematics; Vol. 278). – P. 69–74. – DOI: 10.1090/conm/278/04595.
4. Волчков, В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – Киев: Научно-методический центр высшего образования, 2001. – Вып. 12, № 1. – С. 51–79.
5. Netuka, I. Mean value property and harmonic functions / I. Netuka, J. Vesely // Classical and Modern Potential Theory and Applications. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. – (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.; Vol. 430). – P. 359–398. – DOI: 10.1007/978-94-011-1138-6_29.
6. Йон, Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон ; пер. с англ. Н. Д. Введенской ; под ред. С. Г. Михлина. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 158 с.
7. Volchkov, V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – XII, 454 p. – DOI: 10.1007/978-94-010-0023-9.
8. Volchkov, V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – XI, 671 p. – (Springer Monographs in Mathematics). – DOI: 10.1007/978-1-84882-533-8.
9. Volchkov, V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhauser, 2013. – X, 592 p. – DOI: 10.1007/978-3-0348-0572-8.
10. Helgason, S. Integral Geometry and Radon Transforms / S. Helgason. – New York: Springer, 2010. – XIII, 301 p. – DOI: 10.1007/978-1-4419-6055-9.
11. Gonzalez, F. B. Notes on Integral Geometry and Harmonic Analysis / F. B. Gonzalez. – Kyushu: Kyushu University, 2010. – 125 p. – (COE Lecture Note; No. 24).
12. The Mathematical Legacy of Leon Ehrenpreis / eds. I. Sabadini, D. C. Struppa. – Milano: Springer, 2012. – X, 394 p. – (Springer Proceedings in Mathematics; Vol. 16). – DOI: 10.1007/978-88-470-1947-8.
13. Pompeiu, D. Sur une propriete integrale de fonctions de deux variables reelles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique. – 1929. – Vol. 15, Ser. 5. – P. 265–269.
14. Chakalov, L. Sur un probleme de D. Pompeiu / L. Chakalov // Annuaire [Godisnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. – 1944. – Vol. 40. – P. 1–14.
15. Radon, J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon // Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat. Kl. – 1917. – Vol. 69. – P. 262–277.
16. Brown, L. Spectral synthesis and the Pompeiu problem / L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor // Annales de l'Institut Fourier. – 1973. – Vol. 23, No. 3. – P. 125–154. – DOI: 10.5802/aif.474.
17. Williams, S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – Vol. 223, No. 2. – P. 183–190. – DOI: 10.1007/BF01360881.
18. Williams, S. A. Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property / S. A. Williams // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – Vol. 30, No. 3. – P. 357–369. – DOI: 10.1512/iumj.1981.30.30028.
19. Dalmasso, R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 352, No. 6. – P. 2723–2736. – DOI: 10.1090/S0002-9947-99-02533-7.
20. Garofalo, N. Univalent functions and the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – Vol. 346, No. 1. – P. 137–146. – DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1250819-4.
21. Ebenfelt, P. Propagation of singularities from singular and infinite points in certain complex-analytic Cauchy problems and an application to the Pompeiu problem / P. Ebenfelt // Duke Math. J. – 1994. – Vol. 73, No. 3. – P. 561–582. – DOI: 10.1215/S0012-7094-94-07323-7.
22. Волчков, В. В. Множества со свойством Помпейю на плоскости и сфере / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, № 1. – С. 69–82. – DOI: 10.4213/mzm5158.
23. Volchkov, V. V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Journal d'Analyse Mathematique. – 2008. – Vol. 105. – P. 43–123. – DOI: 10.1007/s11854-008-0031-7.

24. Berenstein, C. A. Le probleme de Pompeiu local / C. A. Berenstein, R. Gay // Journal d'Analyse Mathematique. – 1989. – Vol. 52. – P. 133–166. – DOI: 10.1007/BF02820476.
25. Smith, J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J. D. Smith // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – Vol. 72, No. 3. – P. 403–416. – DOI: 10.1017/S0305004100047241.
26. Berenstein, C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein, R. Gay // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 55, No. 3. – P. 267–288. – DOI: 10.1007/BF02765026.
27. Волчков, В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II / В. В. Волчков // Математический сборник. – 2000. – Т. 191, № 5. – С. 3–16. – DOI: 10.4213/sm474.
28. Очаковская, О. А. Функции с нулевыми интегралами по шарам / О. А. Очаковская ; НАН Украины, Ин-т прикладной математики и механики. – Киев: Наукова думка, 2014. – 257, [1] с. – ISBN 978-966-00-1454-1.
29. John, F. Abhangigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion / F. John // Math. Ann. – 1935. – Vol. 111. – P. 541–559. – DOI: 10.1007/BF01472237.
30. Волчков, В. В. Экстремальные задачи, связанные с теоремой единственности Ф. Йона / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21. – № 5. – С. 37–69. – DOI: 10.1090/S1061-0022-2010-01113-0.
31. Краснощёких, Г. Вит. Шаровые средние относительно свёртки Бесселя и их применение / Г. Вит. Краснощёких, Вит. В. Волчков // Математические труды. – 2025. – Т. 28, № 2. – С. 62–86. – DOI: 10.25205/1560-750X-2025-28-2-62-86.
32. Машаров, П. А. Экстремальный вариант проблемы Помпейю для семейства из равнобедренного треугольника и квадрата / П. А. Машаров, И. С. Власенко // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2024. – № 2. – С. 62–69. – DOI: 10.5281/zenodo.13752218.

REFERENCES

1. Berenstein, C.A. & Struppa, D.C. (1989) [Complex analysis and convolution equations]. *Complex Analysis – Several Variables – 5. Results of Science and Technology. Series: Contemporary Problems of Mathematics. Fundamental Directions.* 54, 5–111. Moscow: VINITI. (In Russian). DOI: 10.1007/978-3-642-58011-6_1.
2. Zalcman, L. (1992) A bibliographic survey of the Pompeiu problem. In: *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations (Hansholm, 1991)*. NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences. 365, 185–194. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. DOI: 10.1007/978-94-011-2436-2_17.
3. Zalcman, L. (2001) Supplementary bibliography to: “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”. In: *Radon Transforms and Tomography (South Hadley, MA, 2000)*. Contemporary Mathematics. 278, 69–74. Providence, RI: American Mathematical Society. DOI: 10.1090/conm/278/04595.
4. Volchkov, V.V. & Volchkov, Vit.V. (2001) [Extremal problems of integral geometry]. *Mathematics Today*. 12 (1), 51–79. (In Russian).
5. Netuka, I. & Vesely, J. (1994) Mean value property and harmonic functions. In: *Classical and Modern Potential Theory and Applications*. NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences. 430, 359–398. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. DOI: 10.1007/978-94-011-1138-6_29.
6. John, F. (1958) *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*. Moscow: Foreign Languages Publishing House. 158 p. (In Russian).
7. Volchkov, V.V. (2003) *Integral Geometry and Convolution Equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 454 p. DOI: 10.1007/978-94-010-0023-9.
8. Volchkov, V.V. & Volchkov, Vit.V. (2009) *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*. London: Springer. 671 p. DOI: 10.1007/978-1-84882-533-8.
9. Volchkov, V.V. & Volchkov, Vit.V. (2013) *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*. Basel: Birkhauser. 592 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0572-8.
10. Helgason, S. (2010) *Integral Geometry and Radon Transforms*. New York: Springer. 301 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-6055-9.
11. Gonzalez, F.B. (2010) *Notes on Integral Geometry and Harmonic Analysis*. Kyushu: Kyushu University. 125 p. COE Lecture Note. No. 24.
12. Sabadini, I. & Struppa, D.C. (eds.) (2012) *The Mathematical Legacy of Leon Ehrenpreis*. Milano: Springer. 394 p. Springer Proceedings in Mathematics. Vol. 16. DOI: 10.1007/978-88-470-1947-8.
13. Pompeiu, D. (1929) Sur une propriete integrale de fonctions de deux variables reelles. *Bulletin des Sciences Mathematiques de l'Academie Royale de Belgique*. 15 (5), 265–269.
14. Chakalov, L. (1944) Sur un probleme de D. Pompeiu. *Annuaire de l'Universite de Sofia, Faculte Physico-*

Mathematique, Livre I. 40, 1–14.

15. Radon, J. (1917) Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse.* 69, 262–277.
16. Brown, L., Schreiber, B.M. & Taylor, B.A. (1973) Spectral synthesis and the Pompeiu problem. *Annales de l'Institut Fourier.* 23 (3), 125–154. DOI: 10.5802/aif.474.
17. Williams, S.A. (1976) A partial solution of the Pompeiu problem. *Mathematische Annalen.* 223 (2), 183–190. DOI: 10.1007/BF01360881.
18. Williams, S.A. (1981) Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property. *Indiana University Mathematics Journal.* 30 (3), 357–369. DOI: 10.1512/iumj.1981.30.30028.
19. Dalmasso, R. (2000) A new result on the Pompeiu problem. *Transactions of the American Mathematical Society.* 352 (6), 2723–2736. DOI: 10.1090/S0002-9947-99-02533-7.
20. Garofalo, N. & Segala, F. (1994) Univalent functions and the Pompeiu problem. *Transactions of the American Mathematical Society.* 346 (1), 137–146. DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1250819-4.
21. Ebenfelt, P. (1994) Propagation of singularities from singular and infinite points in certain complex-analytic Cauchy problems and an application to the Pompeiu problem. *Duke Mathematical Journal.* 73 (3), 561–582. DOI: 10.1215/S0012-7094-94-07323-7.
22. Volchkov, V.V. & Volchkov, Vit.V. (2010) [Sets with the Pompeiu property on the plane and on the sphere]. *Mathematical Notes.* 87 (1), 59–70. (In Russian). DOI: 10.1134/S0001434610010086.
23. Volchkov, V.V. & Volchkov, Vit.V. (2008) Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group. *Journal d'Analyse Mathématique.* 105, 43–123. DOI: 10.1007/s11854-008-0031-7.
24. Berenstein, C.A. & Gay, R. (1989) Le probleme de Pompeiu local. *Journal d'Analyse Mathématique.* 52, 133–166. DOI: 10.1007/BF02820476.
25. Smith, J.D. (1972) Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 72 (3), 403–416. DOI: 10.1017/S0305004100047241.
26. Berenstein, C.A. & Gay, R. (1986) A local version of the two-circles theorem. *Israel Journal of Mathematics.* 55 (3), 267–288. DOI: 10.1007/BF02765026.
27. Volchkov, V.V. (2000) [Extremal problems on Pompeiu sets. II]. *Sbornik: Mathematics.* 191 (5), 619–632. (In Russian). DOI: 10.1070/SM2000v191n05ABEH000474.
28. Ochakovskaya, O.A. (2014) *Functions with Zero Integrals over Balls.* Kyiv: Naukova Dumka. 258 p. (In Russian). ISBN 978-966-00-1454-1.
29. John, F. (1935) Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion. *Mathematische Annalen.* 111, 541–559. DOI: 10.1007/BF01472237.
30. Volchkov, V.V. & Volchkov, Vit.V. (2009) [Extremal problems related to F. John's uniqueness theorem]. *Algebra and Analysis.* 21 (5), 37–69. (In Russian). DOI: 10.1090/S1061-0022-2010-01113-0.
31. Krasnoshchekikh, G.V. & Volchkov, Vit.V. (2025) [Ball averages relative to the Bessel convolution and their application]. *Mathematical Proceedings.* 28 (2), 62–86. (In Russian). DOI: 10.25205/1560-750X-2025-28-2-62-86.
32. Masharov, P.A. & Vlasenko, I.S. (2024) [Extremal version of the Pompeiu problem for a family consisting of an isosceles triangle and a square]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences.* 2, 62–69. (In Russian). DOI: 10.5281/zenodo.13752218.

ANALOGUES OF JON'S UNIQUENESS THEOREM FOR FUNCTIONS FROM THE POMPEIU TRANSFORM KERNEL

V. V. Volchkov, I. S. Vlasenko

The paper obtains analogues of the Jon uniqueness theorem for functions belonging to the kernel of the Pompeiu transform. Conditions are established under which the vanishing of such a function in some subdomain entails its identically equal to zero in the whole considered domain. The cases of an arbitrary set that is not a ball, a parallelepiped, and a family consisting of an isosceles triangle with an angle $\pi/6$ and a square are considered.

Keywords: the Pompeiu transform, the Pompeiu transform's kernel, Jon's uniqueness theorem, Pompeiu set, a local version of the Pompeiu problem, Jon's radius, isosceles triangle and square family.

Поступила в редакцию 31.07.2026

Волчков Валерий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений, ФГБОУ ВО «До-
нецкий государственный университет»,

г. Донецк, Россия

ФГБНУ «Институт прикладной математики и ме-
ханики», г. Донецк, Россия.

E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

ORCID: 0000-0003-4274-0034

SPIN-код: 7550-4673

AuthorID: 290673

Volchkov Valeriy Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences,
Professor, Donetsk State University, Donetsk, Russia;
Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia.

Власенко Илона Сергеевна

аспирант кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный универ-
ситет», г. Донецк, Россия

ORCID: 0009-0009-8528-9360

SPIN-код: 2734-4761

AuthorID: 1310974

Vlasenko Ilona Sergeevna

Graduate student, Donetsk State University, Donetsk,
Russia

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОМПЕЙЮ

© 2026. *В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, К. В. Сероштанова*

В работе приводится краткий обзор результатов, посвященных классической проблеме Помпейю и её локальным аналогам. Также рассматриваются задачи об инъективности преобразования Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$, в частности, описание множеств $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, для которых преобразование инъективно, и выяснение условий инъективности для шаров заданного радиуса.

Ключевые слова: свойство Помпейю, преобразование Помпейю, проблемы инъективности, преобразование Минковского-Функа, преобразование Радона, группа Гейзенберга

§ 1. Классическая проблема Помпейю. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, A – ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ с положительной лебеговой мерой. Далее, как обычно, $\overline{A}$ – замыкание A в $\mathbb{R}^n$ и ∂A – граница A в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $\lambda \in M(n)$ положим $\lambda A = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda^{-1}x \in A\}$.

Говорят, что множество A имеет свойство Помпейю (сокращенно $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$), если всякая локально суммируемая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

при всех $\lambda \in M(n)$, равна нулю почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Такое множество A называют также множеством Помпейю.

Проблема Помпейю, в её первоначальной форме, состоит в следующем: при каких условиях множество A принадлежит $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$? Эта задача допускает различные обобщения и модификации. Например, вместо одного множества A можно рассматривать семейство множеств, а вместо уравнения (1) изучать решения соответствующей системы уравнений свёртки f с заданными распределениями с компактными носителями.

Первые работы по этой теме принадлежат румынскому математику Д. Помпейю, который ошибочно предполагал, что в случае, когда A – шар, уравнение (1) имеет только нулевое решение. Позже, в исследованиях Ф. Йона, Д. Дельсарта, Л. Хермандера, Л. Зальцмана, К.А. Беренштейна и др., обнаружили глубокие связи указанных вопросов со многими разделами современной математики и приложениями (см. обзорные статьи [1–4] и книги [5–7] с обширной библиографией).

Можно показать, что любой шар в $\mathbb{R}^n$ не имеет свойства Помпейю (см., например, [1]). Ряд примеров многосвязных областей без свойства Помпейю содержится в [1]. Некоторые достаточные условия, при которых множество имеет свойство Помпейю, были получены С.А. Вильямсом [8, 9]. Он показал, что если ограниченная область $A \subset \mathbb{R}^n$ с границей Липшица не имеет свойства Помпейю и дополнение к $\overline{A}$ связно, то ∂A является

Исследование проводилось в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема № FREM-2026-0004 и тема № FRRE-2026-0015).

вещественно-аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что если граница A липшицева, но не вещественно-аналитична, то $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$.

Множества с вещественно-аналитической границей и свойством Помпейю существуют (например, любой эллипсоид, отличный от шара, см. [1], [5, часть 4]). Ряд других примеров множеств Помпейю с вещественно-аналитической границей можно найти в [10–12].

В работе [13] получены достаточные условия, при которых множество в $\mathbb{R}^2$ имеет свойство Помпейю, без каких-либо требований регулярности для граничных точек. Это позволило построить примеры множеств Помпейю с нелипшицевой (и даже фрактальной) границей. В частности, было показано, что знаменитая "снежинка Кох" (см., например, [14]) является множеством Помпейю.

В работе [15] (см. также [7]) получено следующее описание множеств Помпейю в терминах аппроксимации их индикаторов линейными комбинациями индикаторов шаров. Пусть J_ν – функция Бесселя первого рода с индексом ν .

Теорема 1. *Для того чтобы существовала ненулевая функция роста с нулевыми интегралами по всем множествам из $\mathbb{R}^n$ конгруэнтным A , необходимо и достаточно, чтобы индикатор A был пределом в $L^1(\mathbb{R}^n)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров с радиусами, пропорциональными положительным корням $J_{\frac{n}{2}}$. При этом коэффициент пропорциональности один и тот же для всех шаров и зависит только от A .*

Отметим также некоторые L^p -аналоги этого результата, полученные в [16, раздел 8.1].

Несмотря на многочисленные исследования, до настоящего времени не известно ни одного примера ограниченной области $A \subset \mathbb{R}^n$ без свойства Помпейю, которая не является шаром и имеет границу, гомеоморфную сфере. В связи с этим представляют интерес следующие результаты, полученные в [17] (см. также [6, раздел 19.4]).

Теорема 2. *Пусть A – область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей и множество $\mathbb{R}^n \setminus A$ является связным. Пусть также $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и для всех $\lambda \in M(n)$ выполнено условие (1). Тогда либо A – шар, либо существует ненулевой многочлен p , такой что*

$$p(\Delta)f = 0 \quad (2)$$

(здесь Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ и равенство (2) понимается в смысле распределений).

Из теоремы 2 и эллиптичности дифференциального оператора $p(\Delta)$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть A удовлетворяет условиям теоремы 2 и существует функция $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, которая не является вещественно аналитической и удовлетворяет (1). Тогда A – шар. Обратно, если A – шар, то существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которая не является вещественно аналитической в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет (1) при всех $\lambda \in M(n)$.*

Проблема Помпейю допускает важные обобщения, связанные с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, M(n), dx)$ тройкой $(X, G, d\mu)$, где X – многообразие, G – группа Ли, действующая транзитивно на X , $d\mu$ – мера на X , инвариантная относительно G . Наиболее полные результаты установлены в следующем случае: X – двухточечно-однородное пространство [18, гл.1], G – группа изометрий X , $d\mu$ – риманова мера на X . В частности, для гиперболических пространств была доказана эквивалентность между отсутствием свойства Помпейю и существованием решения переопределенной граничной задачей Нейма-

на, а также получен аналог теоремы С.А. Вильямса [19]. Для компактных двухточечно-однородных пространств возникли принципиально новые эффекты. Например, многоугольник на двумерной сфере S^2 уже не всегда является множеством Помпейю [20, 21], а шар на S^2 , в зависимости от его радиуса, может иметь это свойство [20, 22].

§ 2. Локальное свойство Помпейю

В последние годы значительное внимание уделяется локальным вариантам сформулированной задачи, то есть, когда функция f задана на ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и равенство (1) выполнено для $g \in M(n) : gA \subset \mathcal{D}$. При переходе от глобальной ситуации к локальной возникающие трудности существенно возрастают. В значительной мере это объясняется нарушением групповой структуры сдвигов и, соответственно, невозможностью применения прежних методов, связанных с преобразованием Фурье. Среди первых результатов в этом направлении можно отметить аппроксимационную теорему Л. Хермандера для решений уравнения свертки на выпуклых областях $\mathbb{R}^n$, а также локальную теорему о двух радиусах, полученную К.А. Беренстейном и Р. Гэем в 1986 году.

Мощный аппарат для полного решения многих задач такого типа, позволивший, в частности, снять абсолютно все лишние ограничения, имеющиеся в работах предшественников, был создан в работах В.В. Волчкова в конце прошлого века. Он основан на представлении решений широкого класса уравнений свертки в виде рядов по специальным функциям. Результаты этой методики были подытожены в монографии [5], где также были поставлены более пятидесяти новых проблем, рассчитанных на продвижение данного направления. В частности, многообещающей программой исследований представлялось развитие техники из [5] для различных классов однородных пространств с инвариантной мерой. Однако, здесь возникли серьёзные препятствия (например, в случае компактных двухточечно-однородных пространств, симметрических пространств высоких рангов и группы Гейзенберга).

Ряд этих трудностей был преодолен в результате создания и развития нового метода, разработанного В.В. Волчковым и Вит.В. Волчковым [6, 7, 17, 23–30]. Он основан на построении и изучении семейства трансмутационных операторов, устанавливающих гомеоморфизм между пространством однородных функций заданной степени на том или ином пространстве и пространством чётных функций на вещественной оси. В некотором обобщенном смысле эти операторы коммутируют с оператором обобщенной свертки, что позволяет произвести редукцию ряда задач интегральной геометрии и уравнений свертки на однородном пространстве к одномерному случаю, который хорошо изучен. Отметим, что реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщенных сферических функций и соответствующих сферических преобразований.

§ 3. Проблемы инъективности преобразования Помпейю

Одним из основных объектов изучения в современной интегральной геометрии является преобразование Помпейю, которое определяется следующим образом.

Пусть $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i=1}^s$ — заданное семейство распределений с компактными носителями в $\mathbb{R}^n$. Для $g \in M(n)$ обозначим через gT_i распределение, действующее на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\langle gT_i, f \rangle = \langle T_i, f \circ g^{-1} \rangle, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, такого что каждое из множеств

$$\Lambda(\mathcal{U}, T_i) = \{g \in M(n) : \text{supp } gT_i \subset \mathcal{U}\}, \quad i = 1, \dots, s,$$

непусто, рассмотрим преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$, отображающее $C^\infty(\mathcal{U})$ в декартово произве-

дение $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_1)) \times \cdots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_s))$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}} f = (f_1, \dots, f_s), \quad f \in C^\infty(\mathcal{U}),$$

где

$$f_i(g) = \langle g T_i, f \rangle, \quad g \in \Lambda(\mathcal{U}, T_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

Преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ называется преобразованием Помпейю, связанным с семейством $\mathcal{F}$ и множеством $\mathcal{U}$. Особый интерес представляет случай $s = 1$, для которого используется обозначение

$$\mathcal{P}_{T, \mathcal{U}} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}, \quad \text{где } \mathcal{F} = \{T\}, \quad T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

(здесь, как обычно, $\mathcal{E}'$ — пространство распределений с компактными носителями). Как уже отмечалось, в случае, когда $n = 2$, а $T = \chi_E$ — индикатор компактного множества $E \subset \mathbb{R}^2$, преобразование $\mathcal{P}_{T, \mathbb{R}^2}$ было рассмотрено Д. Помпейю в 1929 году.

Определение $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ и его незначительные естественные модификации, связанные с рассмотрением различных пространств функций и распределений на многообразиях, включают ряд известных примеров интегральных преобразований, возникающих в интегральной геометрии и многочисленных приложениях (см. [3, 5–7, 31–34]). К их числу относятся классическое преобразование Минковского–Функа, преобразование Радона и его обобщения, а также ряд преобразований, связанных с оператором сферического среднего.

Для заданного семейства $\mathcal{F}$ возникают следующие проблемы (см., например, [3, § 3], [5, часть 4, раздел 7.1]):

(i) описать множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, для которых преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ инъективно;

(ii) выяснить, для каких $R > 0$ преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, B_R}$, где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, является инъективным.

Эти проблемы не только представляют значительный самостоятельный интерес, но и важны для многочисленных приложений в интегральной геометрии, в теории кратных тригонометрических рядов с лакунами, в теории аппроксимации, в комплексном анализе, в уравнениях с частными производными, в теории отображений, сохраняющих меру, а также в комбинаторной геометрии (см. обзоры [1–4, 35] и монографии [5–7] с обширным списком литературы). В нетривиальных случаях они являются, как правило, весьма трудными и содержат в себе некоторые открытые старые проблемы и гипотезы. Отметим, например, известную проблему Помпейю: доказать (или опровергнуть), что если E — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, гомеоморфной сфере, то преобразование $\mathcal{P}_{\chi_E, \mathbb{R}^n}$ неинъективно тогда и только тогда, когда E является шаром.

Следуя классическим работам Г. Минковского, П. Функа, И. Радона, Д. Помпейю и Ф. Йона, многие авторы изучали $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ для случаев, когда $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, а T_i равно χ_{r_i} или σ_{r_i} , где χ_{r_i} — индикатор шара $B_{r_i} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r_i\}$, σ_{r_i} — поверхностная дельта-функция сферы ∂B_{r_i} , $i = 1, \dots, s$. Среди полученных результатов можно отметить теорему о двух радиусах для сферических средних, полученную Л. Зальцманом и К.А. Беренстейном, а также близкую по смыслу теорему Д. Дельсарта, характеризующую гармонические функции в терминах теоремы о среднем [3, § 3], [35]. Оказалось, что критерием инъективности преобразований Помпейю, соответствующих этим случаям, является отсутствие общих нулей у сферических преобразований всех распределений $T_i \in \mathcal{F}$. Подобные результаты для семейств $\mathcal{F}$, состоящих из радиальных распределений, получены в [36].

Отметим также ряд исследований, в которых была установлена инъективность преобразования $\mathcal{P}_{\chi_E, \mathbb{R}^n}$ для различных множеств $E \subset \mathbb{R}^n$ (см. обзоры [1–4]).

В случае $\mathcal{U} \neq \mathbb{R}^n$ исследование инъективности преобразования $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ является более трудной задачей. Исследования, касающиеся случая $\mathcal{U} \neq \mathbb{R}^n$, можно разделить на следующие четыре направления.

1. $\mathcal{U} = B_R$, $\mathcal{F} = \{\chi_{r_1}, \chi_{r_2}\}$ (см. [37–41]).
2. $\mathcal{U} = B_R$, а семейство $\mathcal{F}$ состоит из радиальных распределений (см. [5, часть 3], [6, 17, 38, 39, 42]).
3. $\mathcal{U} = B_R$, $\mathcal{F} = \{\chi_E\}$ (см. [5, часть 4], [7, 13, 17, 43–45]).
4. Случай произвольного $\mathcal{U}$ (см. [5, часть 4, раздел 7], [46]).

Отметим, что, несмотря на большое число исследований, за исключением тривиальных случаев, полное решение проблемы (i) в настоящее время известно лишь для некоторых $\mathcal{F}$, состоящих из распределений с носителем на сфере [46]. Для формулировки этого результата потребуются следующие обозначения.

Пусть $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ — пространство распределений на $\mathbb{S}^{n-1}$ (см., например, [18, гл. 2, § 2, п. 2]), $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство распределений с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Всякое распределение $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ продолжается до распределения $\varphi^* \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ с носителем на $\mathbb{S}^{n-1}$, при этом $\langle \varphi^*, f \rangle = \langle \varphi, f|_{\mathbb{S}^{n-1}} \rangle$ для любой $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, где $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ — сужение f на $\mathbb{S}^{n-1}$. Для любого $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим через I_ψ совокупность всех открытых множеств $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, для которых преобразование $\mathcal{P}_{\psi, \mathcal{U}}$ инъективно. Если $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$, то положим $I_\varphi = I_\psi$, где $\psi = \varphi^*$.

Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$, $1 \leq l \leq a_k$, — фиксированный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$ (см. [47, гл. 4, § 2]). Каждому распределению $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ соответствует ряд Фурье

$$\varphi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} \varphi_{kl} Y_l^{(k)},$$

где $\varphi_{kl} = \langle \varphi, \overline{Y_l^{(k)}} \rangle$. Обозначим через $\text{спес } \varphi$ спектр распределения φ , т.е. множество всех пар индексов (k, l) , для которых $\varphi_{kl} \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность всех открытых множеств $G \subset \mathbb{R}^n$, обладающих следующим свойством: $G \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда всякое непустое открытое подмножество G имеет непустое пересечение с некоторой сферой единичного радиуса, содержащейся в G . Отметим, что в $\mathfrak{M}$ имеются множества, не представимые в виде объединения единичных сфер (например, открытый шар радиуса $R = 2$).

Основным результатом работы [46] является

Теорема 3. Пусть $n \geq 3$ и $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. $I_\varphi = \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\text{supp } \varphi = \mathbb{S}^{n-1}$ и $\text{спес } \varphi$ — бесконечное множество, содержащее пару $(0, 1)$;
2. $I_\varphi = \emptyset$ тогда и только тогда, когда либо $\text{спес } \varphi$ состоит только из пары $(0, 1)$, либо $(0, 1) \notin \text{спес } \varphi$;
3. $I_\varphi \subset \mathfrak{M}$, но $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда либо $\text{спес } \varphi$ конечен (или пуст), либо $(0, 1) \notin \text{спес } \varphi$;
4. $\mathfrak{M} \subset I_\varphi$, но $I_\varphi \neq \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\text{supp } \varphi \neq \mathbb{S}^{n-1}$ и $(0, 1) \in \text{спес } \varphi$.

Нетрудно видеть, что перечисленные в теореме 3 свойства множества $\text{spes } \varphi$ не зависят от выбора базиса в пространствах $\mathcal{H}_k$. Таким образом, в утверждениях 1, 2 теоремы содержится полное описание множеств инъективности преобразования Помпейю для широкого класса распределений $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$. Поскольку носитель распределения с конечным спектром совпадает с $\mathbb{S}^{n-1}$, всякое распределение из $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1})$ удовлетворяет условиям одного из утверждений теоремы 3. Из утверждений 3, 4 следуют соответственно необходимые и достаточные условия инъективности.

Из доказательства теоремы 3 (см. [46, § 7]) видно, что утверждения 2, 4 теоремы сохраняют силу и в двумерном случае. Утверждения 1 и 3 в приведённой выше формулировке при $n = 2$ неверны. Тем не менее, для специально выбранного базиса в $\mathcal{H}_k$ (см. [46, § 2]) при $n = 2$ имеют место аналоги утверждений 1, 3, в которых условие бесконечности спектра заменяется более сильным требованием: $\text{spes } \varphi$ содержит бесконечное число пар вида $(k, 1)$ и бесконечное число пар вида $(m, 2)$.

Что касается проблемы (ii), то в первую очередь следует отметить полученный в [17] результат об эквивалентности локального и глобального свойств Помпейю в самом общем случае (см. теорему 4 ниже).

Для распределения $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ символом $r(\psi)$ будем обозначать наименьший из радиусов замкнутых шаров, содержащих носитель ψ .

Если $r(\psi) < R$, положим $M_{\psi,R} = \{g \in M(n) : \text{supp } g\psi \subset B_R\}$.

Пусть $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — семейство распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $r(\psi_\alpha) < R \leq +\infty$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ (здесь $\mathcal{A}$ — некоторое непустое множество индексов). Будем говорить, что Ψ имеет свойство Помпейю в шаре B_R , если для любой $f \in C^\infty(B_R)$ из условия

$$\langle g\psi_\alpha, f \rangle = 0 \quad \text{при всех } \alpha \in \mathcal{A} \text{ и всех } g \in M_{\psi_\alpha,R}$$

следует, что $f = 0$. Случай, соответствующий классической проблеме Помпейю, возникает, когда семейство Ψ состоит из единственного распределения ψ , совпадающего с характеристической функцией некоторого компакта E в $\mathbb{R}^n$. В этом случае E называется множеством Помпейю в шаре B_R , если соответствующее Ψ имеет свойство Помпейю в B_R .

Теорема 4. Пусть $n \geq 2$ и $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — семейство распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} r(\psi_\alpha) + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} r(\psi_\alpha) < R$ для некоторого $R > 0$.

Тогда Ψ имеет свойство Помпейю в шаре B_R тогда и только тогда, когда оно имеет свойство Помпейю в $\mathbb{R}^n$.

Из теоремы 4 непосредственно получаем следующий результат.

Следствие 2. Пусть E — непустое компактное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть r_E — радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$, содержащего E .

Тогда если E является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$ и $R > 2r_E$, то E является множеством Помпейю в шаре B_R .

Отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ из неравенства $R > (2 - \varepsilon)r_E$ не следует вообще говоря, что E — множество Помпейю в B_R (см. [5, часть 4, теорема 1.6]). Аналоги следствия 2 при различных дополнительных ограничениях, связанных с регулярностью границы множества E , ранее были получены в [5, часть 4] и [43].

Отметим также ряд результатов, связанных с аналогами проблем (i), (ii), на симметрических пространствах и группе Гейзенберга (см. [6, 7] и библиографию к этим работам).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zalcman, L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / L. Zalcman // *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations* (Hanstholm, 1991). – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1992. – NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. ; Vol. 365. – P. 185–194.
2. Zalcman, L. Supplementary bibliography to: "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" / L. Zalcman // *Radon Transforms and Tomography* (South Hadley, MA, 2000). – Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2001. – ContemP. Math. ; Vol. 278. – P. 69–74.
3. Беренштейн, К. Комплексный анализ и уравнения в свертках / К. Беренштейн, Д. Струппа // *Комплексный анализ – многие переменные – 5*. – М. : ВИНТИ, 1989. – (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления ; Т. 54). – С. 5–111.
4. Волчков, В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // *Математика сегодня*. – Киев : Научно-методический центр высшего образования, 2001. – Т. 12. – С. 51–79.
5. Volchkov, V. V. *Integral Geometry and Convolution Equations* / V. V. Volchkov. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ. – 2003. – 454 p.
6. Volchkov, V. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Dordrecht : Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
7. Volchkov, V. V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel : Birkhauser, 2013. – 592 p.
8. Williams, S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // *Math. Ann.* – 1976. – Vol. 223. – No 2. – P. 183–190.
9. Williams, S. A. Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property / S. A. Williams // *Indiana Univ. Math. J.* – 1981. – Vol. 30. – No 3. – P. 357–369.
10. Dalmasso, R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 2000. – Vol. 352. – No 6. – P. 2723–2736.
11. Garofalo, N. Univalent functions and the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1994. – Vol. 346. – No 1. – P. 137–146.
12. Ebenfelt, P. Propagation of singularities from singular and infinite points in certain complex-analytic Cauchy problems and an application to the Pompeiu problem / P. Ebenfelt // *Duke Math. J.* – 1994. – Vol. 73. – No 3. – P. 561–582.
13. Волчков, В. В. Множества со свойством Помпейю на плоскости и сфере / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // *Математические заметки*. – 2010. – Т. 87. – № 1. – С. 69–82.
14. Турбин, А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый. – Киев : Наукова думка, 1992. – 208 с.
15. Волчков, В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца / В. В. Волчков // *Математический сборник*. – 1993. – Т. 184. – № 7. – С. 71–78.
16. Очаковская, О.А. Функции с нулевыми интегралами по шарам / О.А. Очаковская. – Киев : Наукова думка, 2014. – 259 с.
17. Волчков, В. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // *Матем. сб.* – 2008. – Т. 199. – № 8. – С. 29–60.
18. Хелгасон, С. Группы и геометрический анализ. Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1987. – 736 с.
19. Berenstein, C. A. Harmonic analysis and the Pompeiu problem / C. A. Berenstein, M. Shahshahani // *Amer. J. Math.* – 1983. – Vol. 105. – No 5. – P. 1217–1229.
20. Ungar, P. Freak theorem about functions on a sphere / P. Ungar // *J. London Math. Soc.* – 1954. – Vol. 29. – P. 100–103.
21. Armitage, D. H. The Pompeiu property for spherical polygons / D. H. Armitage // *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A.* – 1996. – Vol. 96. – No 1. – P. 25–32.
22. Berenstein, C. A. Pompeiu's problem on symmetric spaces / C. A. Berenstein, L. Zalcman // *Comment. Math. Helv.* – 1980. – Vol. 55. – No 4. – P. 593–621.
23. Волчков, В. В. Спектральный анализ на группе конформных автоморфизмов единичного круга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // *Математический сборник*. – 2016. – Т. 207. – № 7. – С. 50–80.
24. Волчков, В. В. Спектральный синтез на группе конформных автоморфизмов единичного круга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // *Математический сборник*. – 2018. – Т. 209. – № 1. – С. 3–36.
25. Волчков, В. В. Аналог теоремы Брауна–Шрейбера–Тэйлора для взвешенных гиперболических сдвигов / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // *Математические заметки*. – 2018. – Т. 103. – № 2. – С. 172–185.

26. Волчков, В. В. Теоремы типа Мореры в гиперболическом диске / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2018. – Т. 82. – № 1. – С. 34–64.
27. Волчков, В. В. Спектральный синтез на редуцированной группе Гейзенберга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математические заметки. – 2023. – Т. 113. – вып. 1. – С. 46–57.
28. Волчков, В. В. Единственность решений уравнений обобщённой свёртки на гиперболической плоскости и группе $PSL(2, \mathbb{R})$ / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2024. – Т. 88. – № 6. – С. 3–40.
29. Volchkov, V. V. Zalcman's problem and related two-radii theorems / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Analysis and Mathematical Physics. – 2023. – Vol. 13. – No 5. – P. 1–47.
30. Volchkov, V. V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // J. d'Anal. Math. – 2008. – Vol. 105. – No 1. – P. 43–124.
31. Хелгасон, С. Интегральная геометрия и преобразования Радона / С. Хелгасон. – Москва : ИКИ, 2011. – 301 с. – (Перев. с англ. изд.: S. Helgason, Integral geometry and Radon transforms, Springer, New York, 2011).
32. Йон, Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – Москва : Изд-во иностранной литературы, 1958. – 158 с. – (Перев. с англ. изд.: F. John, Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience Publ., New York–London, 1955).
33. Gonzalez, F. B. Notes on integral geometry and harmonic analysis / F. B. Gonzalez. – Kyushu : Kyushu University, 2010. – (COE Lecture Note ; No 24). – 125 p.
34. Sabadini, I. The mathematical legacy of Leon Ehrenpreis / I. Sabadini, D. C. Struppa. – Berlin : Springer, 2012. – (Springer Proceedings in Mathematics ; Vol. 16). – 400 c.
35. Netuka, I. Mean value property and harmonic functions / I. Netuka, J. Vesely // Classic and modern potential theory and applications : материалы конф. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1994. – (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. ; Vol. 430). – P. 359–398.
36. Brown, L. Spectral synthesis and the Pompeiu problem / L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1973. – Vol. 23. – No 3. – P. 125–154.
37. Smith, J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J. D. Smith // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – Vol. 72. – No 3. – P. 403–416.
38. Berenstein, C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein, R. Gay // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 55. – No 3. – P. 267–288.
39. Berenstein, C. A. Inversion of the local Pompeiu transform / C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger // J. Analyse Math. – 1990. – Vol. 54. – No 1. – P. 259–287.
40. Волчков, В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах / В. В. Волчков // Математический сборник. – 1995. – Т. 186. – № 6. – С. 15–34.
41. Волчков, В. В. Локальная теорема о двух радиусах для квазианалитических классов функций / В. В. Волчков // Математические заметки. – 2006. – Т. 80. – № 4. – С. 490–500.
42. Волчков, В. В. Об одной проблеме Беренштейна–Гэя и её обобщениях / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Известия РАН. Серия математическая. – 2010. – Т. 74. – № 4. – С. 33–62.
43. Berenstein, C. A. Le probleme de Pompeiu local / C. A. Berenstein, R. Gay // J. Analyse Math. – 1988. – Vol. 52. – P. 133–166.
44. Волчков, В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II / В. В. Волчков // Математический сборник. – 2000. – Т. 191. – № 5. – С. 3–16.
45. Елец, Л. В. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю / Л. В. Елец, П. А. Машаров // Украинский математический журнал. – 2009. – Т. 61. – С. 61–72.
46. Волчков, В. В. О множествах инъективности преобразования Помпейю / В. В. Волчков // Математический сборник. – 1999. – Т. 190. – № 11. – С. 51–66.
47. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – Москва : Мир. – 1974 с. – 333 с.

REFERENCES

1. Zalcman, L. (1992) A bibliographic survey of the Pompeiu problem. In *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations (Hansholm, 1991)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences; 365), 185–194.

2. Zalcman, L. (2001) Supplementary bibliography to: "A bibliographic survey of the Pompeiu problem". In *Radon Transforms and Tomography (South Hadley, MA, 2000)*. Providence, RI: American Mathematical Society. (Contemporary Mathematics; 278), 69–74.
3. Berenstein, C. & Struppa, D. (1989) [Complex analysis and convolution equations]. In *Complex analysis – several variables – 5*. Moscow: VINITI. (Progress in science and technology. Series: Contemporary problems of mathematics. Fundamental directions; 54), 5–111. (In Russian).
4. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2001) [Extremal problems of integral geometry]. In *Mathematics today*. Kyiv: Scientific and Methodological Center for Higher Education. 12, 51–79. (In Russian).
5. Volchkov, V. V. (2003) *Integral geometry and convolution equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 454 p.
6. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2009) *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*. Dordrecht: Springer-Verlag.
7. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2013) *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*. Basel: Birkhauser.
8. Williams, S. A. (1976) [A partial solution of the Pompeiu problem]. *Mathematische Annalen*. 223 (2), 183–190.
9. Williams, S. A. (1981) [Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property]. *Indiana University Mathematics Journal*. 30 (3), 357–369.
10. Dalmasso, R. (2000) [A new result on the Pompeiu problem]. *Transactions of the American Mathematical Society*. 352 (6), 2723–2736.
11. Garofalo, N. & Segala, F. (1994) [Univalent functions and the Pompeiu problem]. *Transactions of the American Mathematical Society*. 346 (1), 137–146.
12. Ebenfelt, P. (1994) [Propagation of singularities from singular and infinite points in certain complex-analytic Cauchy problems and an application to the Pompeiu problem]. *Duke Mathematical Journal*. 73 (3), 561–582.
13. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2010) [Sets with the Pompeiu property on the plane and the sphere]. *Mathematical Notes*. 87 (1), 69–82. (In Russian).
14. Turbin, A. F. & Pratsevityi, N. V. (1992) *Fractal sets, functions, distributions*. Kyiv: Naukova Dumka, 208 p. (In Russian).
15. Volchkov, V. V. (1993) [New mean value theorems for solutions of the Helmholtz equation]. *Sbornik: Mathematics*. 184 (7), 71–78. (In Russian).
16. Ochakovskaya, O. A. (2014) *Functions with zero integrals over balls*. Kyiv: Naukova Dumka, 259 p. (In Russian).
17. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2008) [Convolution equations on multidimensional domains and the reduced Heisenberg group]. *Sbornik: Mathematics*. 199 (8), 29–60. (In Russian).
18. Helgason, S. (1987) *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators and spherical functions*. Moscow: Mir, 736 p. (In Russian).
19. Berenstein, C. A. & Shahshahani, M. (1983) [Harmonic analysis and the Pompeiu problem]. *American Journal of Mathematics*. 105 (5), 1217–1229.
20. Ungar, P. (1954) [Freak theorem about functions on a sphere]. *Journal of the London Mathematical Society*. 29, 100–103.
21. Armitage, D. H. (1996) [The Pompeiu property for spherical polygons]. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A*. 96 (1), 25–32.
22. Berenstein, C. A. & Zalcman, L. (1980) [Pompeiu's problem on symmetric spaces]. *Commentarii Mathematici Helvetici*. 55 (4), 593–621.
23. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2016) [Spectral analysis on the group of conformal automorphisms of the unit disk]. *Sbornik: Mathematics*. 207 (7), 50–80. (In Russian).
24. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2018) [Spectral synthesis on the group of conformal automorphisms of the unit disk]. *Sbornik: Mathematics*. 209 (1), 3–36. (In Russian).
25. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2018) [An analogue of the Brown–Schreiber–Taylor theorem for weighted hyperbolic shifts]. *Mathematical Notes*. 103 (2), 172–185. (In Russian).
26. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2018) [Morera-type theorems in the hyperbolic disk]. *Izvestiya: Mathematics*. 82 (1), 34–64. (In Russian).
27. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2023) [Spectral synthesis on the reduced Heisenberg group]. *Mathematical Notes*. 113 (1), 46–57. (In Russian).
28. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2024) [Uniqueness of solutions to generalized convolution equations on the hyperbolic plane and the group $PST(2, \mathbb{R})$]. *Izvestiya: Mathematics*. 88 (6), 3–40. (In Russian).
29. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2023) [Zalcman's problem and related two-radii theorems]. *Analysis and Mathematical Physics*. 13 (5), 1–47.

30. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2008) [Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group]. *Journal d'Analyse Mathématique*. 105 (1), 43–124.
31. Helgason, S. (2011) *Integral geometry and Radon transforms*. Moscow: IKI, 301 p. (Translated from the English edition: S. Helgason, *Integral geometry and Radon transforms*, Springer, New York, 2011). (In Russian).
32. John, F. (1958) *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*. Moscow: Foreign Literature Publishing House. (Translated from the English edition: F. John, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience Publishers, New York–London, 1955), 158 p. (In Russian).
33. Gonzalez, F. B. (2010) *Notes on integral geometry and harmonic analysis*. Kyushu: Kyushu University, 125 p. (COE Lecture Note; 24).
34. Sabadini, I. & Struppa, D. C. (2012) *The mathematical legacy of Leon Ehrenpreis*. Berlin: Springer, 400 p. (Springer Proceedings in Mathematics; 16).
35. Netuka, I. & Vesely, J. (1994) [Mean value property and harmonic functions]. In *Classic and modern potential theory and applications: conference proceedings*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences; 430), 359–398.
36. Brown, L. & Schreiber, B. M. & Taylor, B. A. (1973) [Spectral synthesis and the Pompeiu problem]. *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*. 23 (3), 125–154.
37. Smith, J. D. (1972) [Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$]. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 72 (3), 403–416.
38. Berenstein, C. A. & Gay, R. (1986) [A local version of the two-circles theorem]. *Israel Journal of Mathematics*. 55 (3), 267–288.
39. Berenstein, C. A. & Gay, R. & Yger, A. (1990) [Inversion of the local Pompeiu transform]. *Journal d'Analyse Mathématique*. 54 (1), 259–287.
40. Volchkov, V. V. (1995) [The final version of the local two-radii theorem]. *Sbornik: Mathematics*. 186 (6), 15–34. (In Russian).
41. Volchkov, V. V. (2006) [Local two-radii theorem for quasianalytic classes of functions]. *Mathematical Notes*. 80 (4), 490–500. (In Russian).
42. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2010) [On a problem of Berenstein–Gay and its generalizations]. *Izvestiya: Mathematics*. 74 (4), 33–62. (In Russian).
43. Berenstein, C. A. & Gay, R. (1988) [Le probleme de Pompeiu local]. *Journal d'Analyse Mathématique*. 52, 133–166.
44. Volchkov, V. V. (2000) [Extremal problems on Pompeiu sets. II]. *Sbornik: Mathematics*. 191 (5), 3–16. (In Russian).
45. Yelets, L. V. & Masharov, P. A. (2009) [On an extremal problem on Pompeiu sets]. *Ukrainian Mathematical Journal*. 61, 61–72. (In Russian).
46. Volchkov, V. V. (1999) [On injectivity sets of the Pompeiu transform]. *Sbornik: Mathematics*. 190 (11), 51–66. (In Russian).
47. Stein, I. & Weiss, G. (1974) *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Moscow: Mir, 333 p. (In Russian).

SOME PROBLEMS IN INTEGRAL GEOMETRY RELATED TO THE POMPEIU TRANSFORMATION

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, K. V. Seroshtanova

The paper provides a brief overview of the results devoted to the classical Pompeiu problem and its local analogues. It also addresses problems concerning the injectivity of the Pompeiu transform $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$, in particular, the description of sets $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ for which the transform is injective, and the determination of conditions for injectivity for balls of a given radius.

Keywords: the Pompeiu property, the Pompeiu transform, injectivity problems, the Minkowski–Funk transform, the Radon transform, the Heisenberg group.

Поступила в редакцию 31.07.2026

Волчков Валерий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
Донецкий государственный университет,
ФГБНУ "Институт прикладной математики и механики",
г. Донецк, РФ
valeriyvolchkov@gmail.com
ORCID: 0009-0009-9443-8399
SPIN-код: 7550-4673
AuthorID: 290673

Волчков Виталий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
Донецкий государственный университет,
ФГБНУ "Институт прикладной математики и механики",
г. Донецк, РФ
volna936@gmail.com
valeriyvolchkov@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4274-0034
SPIN-код: 4478-1677
AuthorID: 505219

Сероштанова Карина Витальевна

Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ
ktimofeeva75@gmail.com
ORCID: 0009-0000-5926-3671
SPIN-код: 1421-1978
AuthorID: 1257120

Volchkov Valeriy Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor
Donetsk State University, Institute of Applied
Mathematics and Mechanics, Donetsk, RF

Volchkov Vitaliy Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor
Donetsk State University, Institute of Applied
Mathematics and Mechanics, Donetsk, RF

Seroshtanova Karina Vitalievna

Donetsk State University, Donetsk, RF

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

© 2026. В. П. Заставный, А. Д. Манов

Пусть $J(t) = \psi(t) + \varphi(t)$, где ψ — почти периодическая функция, $\psi \not\equiv 0$, $h(t) = t^\delta J(t)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < x_1 < \dots < x_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, и $\{c_k\}_{k=1}^n$ — набор комплексных чисел. При некоторых дополнительных условиях на функции ψ и φ в теоремах 1 и 2 доказано, что если для некоторого $\xi > 0$ и для всех $t \geq \xi$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n c_k h(tx_k) \geq 0$, то $c_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

Ключевые слова: почти периодическая по Бору функция.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов. Определения и теоремы о почти периодических функциях, изложенные в этом параграфе, взяты из монографий Бора [1] и Левитана [2].

Определение 1. Непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется равномерной почти периодической функцией (почти периодической по Бору), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что каждый интервал длины l содержит хотя бы одну точку τ такую, что

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Для таких функций будем употреблять краткое название – почти периодическая (п.п.) функция. Очевидно любая непрерывная и периодическая на $\mathbb{R}$ функция является почти периодической. Различные обобщения и применения почти периодических функций можно найти, например, в работах [3–5].

Приведём основные теоремы теории п.п. функций.

Теорема А (Свойства п.п. функций). Пусть функции f , g и $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ являются почти периодическими. Тогда:

- 1) Почти периодическими являются функции $\alpha f + \beta g$, $f(x + a)$, $f(kx)$, fg , $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $a, k \in \mathbb{R}$.
- 2) Функция f является ограниченной и равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.
- 3) Если дополнительно $\inf_{\mathbb{R}} |f(x)| > 0$, то функция $1/f$ является почти периодической.
- 4) Если дополнительно функция f является вещественнозначной и $E(f)$ – её область значений, а F равномерно непрерывна на $E(f)$, то суперпозиция $F(f(x))$ является почти периодической.
- 5) Если $h_n(x) \rightarrow h(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$, то функция h является почти периодической.
- 6) Если дополнительно производная f' является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, то f' является почти периодической.

Исследование проводилось по теме государственного задания № 126052121089-1, шифр FRRE-2026-0015

Теорема В (О среднем значении). Для любой почти периодической функции f существует среднее значение

$$M(f) := \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx. \quad (2)$$

Теорема С (Свойства среднего значения). Если функции f и g являются почти периодическими, то для любых $c \in \mathbb{C}$ и $a \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$M(cf) = cM(f), \quad M(f + g) = M(f) + M(g), \quad M(f(x + a)) = M(f).$$

Кроме того, равномерно по $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_a^{a+b} f(x) dx = M(f).$$

В частности,

$$M(f) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_{-b}^0 f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b f(x) dx.$$

Если функции $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются почти периодическими и $h_n(x) \rightarrow h(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$, то $M(h_n) \rightarrow M(h)$.

Теорема D (О коэффициентах Фурье.). Пусть f – почти периодическая функция. Тогда её коэффициенты Фурье, которые определяются по формуле

$$a_f(\lambda) := M(f(x)e^{-i\lambda x}) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b f(u)e^{-i\lambda u} du, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

могут отличаться от нуля самое большое для счётного множества значений λ .

Если $a_f(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то $f \equiv 0$ (теорема единственности).

Если $\Lambda(f) := \{\lambda \in \mathbb{R} : a_f(\lambda) \neq 0\}$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{\lambda \in \Lambda(f)} |a_f(\lambda)|^2 = M(|f|^2).$$

Замечание 1. Отметим, что теорема единственности эквивалентна равенству Парсеваля. При доказательстве теоремы единственности используется следующая теорема о неотрицательных почти периодических функциях ([1, § 72], [2, Гл. I, § 5, Теорема 1.5.1]): если почти периодическая функция f является неотрицательной и $a_f(0) = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Справедливы рассуждения и в обратную сторону (см. доказательство утверждения 2 этой работы): из теоремы единственности вытекает теорема о неотрицательных п.п. функциях. Если $f(t) \not\equiv 0$, то из равенства Парсеваля и теоремы о неотрицательных п.п. функциях вытекает, что $\Lambda(f) \neq \emptyset$.

Замечание 2. Не сложно доказать следующее утверждение: если f – периодическая функция с периодом $T > 0$ (необязательно непрерывная), $f \in L[0, T]$ и $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$, то следующие условия эквивалентны: $i_1)$ F – периодическая функция; $i_2)$ функция F ограничена на $\mathbb{R}$; $i_3)$ $\int_0^T f(t) dt = 0$.

Теорема Е (Об ограниченности первообразной). Пусть f – почти периодическая функция и $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда:

- 1) Следующие два условия эквивалентны: $i_1)$ F – почти периодическая функция; $i_2)$ функция F ограничена на $\mathbb{R}$. В этом случае $a_f(0) = 0$ и $a_F(\lambda) = a_f(\lambda)/(i\lambda)$ при $\lambda \neq 0$.
- 2) Если для некоторого $\alpha > 0$ равенство $a_f(\lambda) = 0$ выполняется при $|\lambda| < \alpha$, то F ограничена на $\mathbb{R}$.

Основным результатом данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть $J(t) = \psi(t) + \varphi(t)$, где функция φ при некотором $r > 0$ принадлежит классу $L[r, b]$ при любом $b > r$ и сходится несобственный интеграл $\int_r^{+\infty} \varphi(s) ds$, ψ – почти периодическая функция с ограниченной первообразной $\int_0^x \psi(s) ds$, $\psi \not\equiv 0$ и при некотором $\alpha > 0$ выполняется одно из двух условий:

$$i_1) \ a_\psi(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| < \alpha \text{ или } i_2) \ a_\psi(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| > \alpha.$$

Пусть $h(t) = t^\delta J(t)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < x_1 < \dots < x_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, и $\{c_k\}_{k=1}^n$ – набор комплексных чисел. Если для некоторого $\xi \geq r/x_1$ и для почти всех $t \geq \xi$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n c_k h(tx_k) \geq 0$, то $c_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

Теорема 2. Пусть $J(t) = \psi(t) + \varphi(t)$, где функция $\varphi(t) = o(1)$ при $t \rightarrow +\infty$, ψ – почти периодическая функция, для которой $a_\psi(0) = 0$, $\psi \not\equiv 0$ и при некотором $\alpha > 0$ выполняется одно из двух условий:

$$i_1) \ a_\psi(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| < \alpha \text{ или } i_2) \ a_\psi(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| > \alpha.$$

Пусть $h(t) = t^\delta J(t)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < x_1 < \dots < x_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, и $\{c_k\}_{k=1}^n$ – набор комплексных чисел. Если для некоторого $\xi > 0$ и для всех $t \geq \xi$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n c_k h(tx_k) \geq 0$, то $c_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

Отметим, что любая непрерывная периодическая функция ψ с ограниченной первообразной удовлетворяет условию i_1 теорем 1 и 2.

Пример 1. Условиям теорем 1 и 2 удовлетворяет функция $h(t) = h_{\nu, \mu}(t) = J_\nu(t)t^{-\mu}$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$, где J_ν – функция Бесселя первого рода. Это вытекает из хорошо известной асимптотики (см., например, [6])

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (\psi_\nu(t) + \varphi_\nu(t)), \quad t > 0,$$

где $\psi_\nu(t) = \cos\left(t - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)$ и $\varphi_\nu(t) = -\sin\left(t - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) \frac{4\nu^2-1}{8t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, при $t \rightarrow +\infty$.

Тогда $h_{\nu, \mu}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-\mu-\frac{1}{2}} (\psi_\nu(t) + \varphi_\nu(t))$, $t > 0$.

§ 2. Вспомогательные утверждения о неотрицательных почти периодических функциях. Если периодическая функция неотрицательна на промежутке $(\xi, +\infty)$, то очевидно она неотрицательна на $\mathbb{R}$. Это утверждение обобщается и на п.п. функции при более слабых предположениях.

Здесь и далее в работе почти всюду относительно меры Лебега.

Предложение 1. Пусть f – почти периодическая функция, функция $g(t) = o(1)$ при $t \rightarrow +\infty$ и для некоторого $\xi \in \mathbb{R}$ неравенство $f(t) + g(t) \geq 0$ выполняется для всех $t > \xi$. Тогда $f(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда функция f – вещественнозначная. Тогда g также вещественнозначная при $t > \xi$. Предположим, что $f(t_0) < 0$ в некоторой точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Из определения п.п. функции следует, что для числа $\varepsilon = -f(t_0)/2 > 0$ найдётся последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $t_0 + \tau_n > \xi$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n \rightarrow +\infty$ и

$$|f(t_0 + \tau_n) - f(t_0)| < \frac{f(t_0)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из этого неравенства и условия следует, что выполняется неравенство

$$0 \leq f(t_0 + \tau_n) + g(t_0 + \tau_n) < \frac{f(t_0)}{2} + g(t_0 + \tau_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $0 \leq f(t_0)/2$, что противоречит предположению $f(t_0) < 0$. Поэтому $f(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Из предположения утверждения следует, что для всех $t > \xi$ выполняются условия

$$\operatorname{Re} f(t) + \operatorname{Re} g(t) \geq 0, \quad \operatorname{Im} f(t) + \operatorname{Im} g(t) = 0.$$

По доказанному $\operatorname{Re} f(t) \geq 0$ и $\pm \operatorname{Im} f(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно $f(t) = \operatorname{Re} f(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Следствие 1. Если у почти периодической функции h существует конечный предел $h(+\infty)$, то $h(t) \equiv h(+\infty)$ на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h(+\infty) = c$. Рассмотрим сначала случай, когда h – вещественнозначная функция. Тогда $c \in \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\xi(\varepsilon) > 0$, что для всех $t > \xi(\varepsilon)$ выполняются неравенства $h(t) - c - \varepsilon \leq 0$ и $h(t) - c + \varepsilon \geq 0$. Из утверждения 1 следует, что оба неравенства выполняются для всех $t \in \mathbb{R}$ и любом $\varepsilon > 0$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем, что $h(t) \equiv c$ на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь общий случай. У вещественнозначных почти периодических функций $\operatorname{Re} h(t)$ и $\operatorname{Im} h(t)$ существуют конечные пределы при $t \rightarrow +\infty$, равные соответственно $\operatorname{Re} c$ и $\operatorname{Im} c$. По доказанному $\operatorname{Re} h(t) \equiv \operatorname{Re} c$ и $\operatorname{Im} h(t) \equiv \operatorname{Im} c$ на $\mathbb{R}$. Следовательно $h(t) \equiv c$ на $\mathbb{R}$. $\square$

Замечание 3. В приведенном доказательстве следствия 1 по существу используется только определение почти периодической функции. Приведем другое доказательство, основанное на теореме единственности. Функция $g(u) := h(u) - h(+\infty)$ является почти периодической и для её коэффициентов Фурье при любом $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$|a_g(\lambda)| \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b |g(u)| du \leq \sup_{u \geq \delta} |g(u)|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\delta \rightarrow +\infty$. Поэтому $a_g(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $g(u) \equiv 0$ и $h(u) \equiv h(+\infty)$ на $\mathbb{R}$.

Предложение 2. Если функция f является почти периодической и для некоторого $\xi > 0$ неравенство $f(t) \geq 0$ выполняется для всех $t > \xi$, то для её коэффициентов Фурье выполняется неравенство $|a_f(\lambda)| \leq a_f(0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Если дополнительно $a_f(0) = 0$, то $f(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство вытекает из следующих очевидных соотношений при $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|a_f(\lambda)| \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b |f(u)| du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_{\xi}^b |f(u)| du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_{\xi}^b f(u) du = \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b f(u) du = a_f(0).$$

Отметим, что можно было воспользоваться утверждением 1, из которого следует, что неравенство $f(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \in \mathbb{R}$.

Если дополнительно $a_f(0) = 0$, то $a_f(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и надо применить теорему единственности. $\square$

Предложение 3. Пусть f – почти периодическая функция, функция $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ограничена на $\mathbb{R}$, а функция g при некотором $\xi \in \mathbb{R}$ принадлежит классу $L[\xi, b]$ при любом $b > \xi$ и сходится несобственный интеграл $\int_{\xi}^{+\infty} g(t) dt$. Если неравенство $f(t) + g(t) \geq 0$ выполняется для почти всех $t > \xi$, то $f(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x \geq \xi$ рассмотрим функцию

$$H(x) := \int_{\xi}^x (f(t) + g(t)) dt = F(x) - F(\xi) + G(x), \text{ где } G(x) := \int_{\xi}^x g(t) dt.$$

Функция H возрастает на $[\xi, +\infty)$. Функция F ограничена на $[\xi, +\infty)$, а функция G непрерывна на $[\xi, +\infty)$ и имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому функция H ограничена на $[\xi, +\infty)$ и, значит, имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно функция F также имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$. Так как F – почти периодическая (см. теорему E), то $F(x) \equiv F(+\infty)$ на $\mathbb{R}$ (см. следствие 1) и, значит, $f(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. $\square$

Предложение 4. Пусть функция $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $a(0) = 0$, $a(\lambda) \neq 0$ и при некотором $\alpha > 0$ выполняется одно из двух условий:

$$i_1) \ a(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| < \alpha \text{ или } i_2) \ a(\lambda) = 0 \text{ при } |\lambda| > \alpha.$$

Пусть $0 < |x_1| < \dots < |x_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{x_k\}_{k=1}^n$ – набор вещественных чисел и $\{C_k\}_{k=1}^n$ – набор комплексных чисел. Если выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^n C_k a\left(\frac{\lambda}{x_k}\right) = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

то $C_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a(\lambda) \neq 0$, то $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R} : a(\lambda) \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$. Пусть

$$m := \inf_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|, \quad M := \sup_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|.$$

Очевидно $0 \leq m \leq M \leq +\infty$, $m < +\infty$. Так как $a(0) = 0$, то $0 \notin \Lambda$. Поэтому $M > 0$.

Если выполняется условие i_1 , то $m \geq \alpha > 0$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдётся $\lambda(\varepsilon) \in \Lambda$ такое, что $m \leq |\lambda(\varepsilon)| < m + \varepsilon$. В равенстве (3) берём $\lambda = \lambda(\varepsilon)x_1$. Очевидно $a(\lambda/x_1) = a(\lambda(\varepsilon)) \neq 0$. Если $n = 1$, то $C_1 = 0$ и утверждение доказано. Если $n \geq 2$, то при $0 < \varepsilon < m(|x_2| - |x_1|)/|x_1|$ и $2 \leq k \leq n$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\lambda}{x_k} \right| = \frac{|\lambda(\varepsilon)| |x_1|}{|x_k|} < \frac{(m + \varepsilon)|x_1|}{|x_2|} < m$$

и, значит, $a(\lambda/x_k) = 0$. Поэтому $C_1 = 0$. Теперь в (3) берём $\lambda = \lambda(\varepsilon)x_2$ и аналогично получаем, что $C_2 = 0$ и так далее. В случае выполнения условия i_1 утверждение доказано.

Если выполняется условие i_2 , то $0 < M < +\infty$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдётся $\lambda(\varepsilon) \in \Lambda$ такое, что $M - \varepsilon < |\lambda(\varepsilon)| \leq M$. В равенстве (3) берём $\lambda = \lambda(\varepsilon)x_n$. Очевидно $a(\lambda/x_n) = a(\lambda(\varepsilon)) \neq 0$. Если $n = 1$, то $C_n = 0$ и утверждение доказано. Если $n \geq 2$, то при $0 < \varepsilon < M(|x_n| - |x_{n-1}|)/|x_n|$ и $1 \leq k \leq n - 1$ выполняются неравенства

$$M - \varepsilon > 0, \quad \left| \frac{\lambda}{x_k} \right| = \frac{|\lambda(\varepsilon)| |x_n|}{|x_k|} > \frac{(M - \varepsilon)|x_n|}{|x_{n-1}|} > M$$

и, значит, $a(\lambda/x_k) = 0$. Поэтому $C_n = 0$. Теперь в (3) берём $\lambda = \lambda(\varepsilon)x_{n-1}$ и аналогично получаем, что $C_{n-1} = 0$ и так далее. Утверждение полностью доказано. $\square$

§ 3. Доказательство теоремы 1. При почти всех $t \geq \xi$ выполняется неравенство

$$t^{-\delta} \sum_{k=1}^n c_k h(tx_k) = f(t) + g(t) \geq 0,$$

где функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k^\delta \psi(tx_k), \quad g(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k^\delta \varphi(tx_k) \quad (4)$$

очевидно удовлетворяют условиям утверждения 3. Следовательно $f(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$ и, значит,

$$a_f(\lambda) = \sum_{k=1}^n c_k x_k^\delta a_\psi \left(\frac{\lambda}{x_k} \right) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Из ограниченности первообразной следует, что $a_\psi(0) = 0$. Так как $\psi(t) \not\equiv 0$, то $a_\psi(\lambda) \not\equiv 0$ (см. замечание 1). Таким образом функция a_ψ удовлетворяет условиям утверждения 4 с числами $C'_k = c_k x_k^\delta$. Поэтому $c_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

§ 4. Доказательство теоремы 2. Доказательство повторяет доказательство теоремы 1. Из условия теоремы 2 вытекает, что для всех $t \geq \xi$ выполняются неравенство

$f(t) + g(t) \geq 0$, где функции f и g определены по формуле (4) и удовлетворяют условию утверждения 1. Поэтому $f(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как

$$a_f(0) = \sum_{k=1}^n c_k x_k^\delta a_\psi(0) = 0,$$

то (см. утверждение 2) $f(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$ и выполняется равенство (5). Так как $\psi(t) \not\equiv 0$, то $a_\psi(\lambda) \not\equiv 0$. Таким образом функция a_ψ удовлетворяет условиям утверждения 4 с числами $C_k = c_k x_k^\delta$. Поэтому $c_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор, Г. Почти периодические функции / Г. Бор. – Москва, Ленинград: Государственное технико-теоретическое изд.-во, 1934. – 128 с.
2. Левитан, Б.М. Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. – Москва: Государственное изд.-во технико-теоретической литературы, 1953. – 396 с.
3. N'Guérékata, G.M. Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces / G.M. N'Guérékata. – 2nd ed. – Cham: Springer, 2021. – XII, 134 p. – ISBN 978-3-030-73717-7. DOI: [10.1007/978-3-030-73718-4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-73718-4).
4. Kostić, M. Selected topics in almost periodicity / M. Kostić. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2022. – XLVIII, 686 p. – ISBN 978-3-11-076322-5. DOI: [10.1515/9783110763522](https://doi.org/10.1515/9783110763522).
5. Du, W.-S. Almost periodic functions and their applications: a survey of results and perspectives / W.-S. Du, M. Kostić, M. Pinto // Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 2021. – Article ID 5536018. – 21 p. DOI: [10.1155/2021/5536018](https://doi.org/10.1155/2021/5536018).
6. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – Москва: ИЛ, 1949. – 800 с.

REFERENCES

1. Bohr, H. (1934) Almost periodic functions. Moscow, Leningrad: State Technical and Theoretical Publishing House. 128 p. (In Russian).
2. Levitan, B.M. (1953) Almost-periodic functions. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature. 396 p. (In Russian).
3. N'Guérékata, G.M. (2021) Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces. 2nd ed. Cham: Springer. XII, 134 p. ISBN 978-3-030-73717-7. doi: [10.1007/978-3-030-73718-4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-73718-4).
4. Kostić, M. (2022) Selected topics in almost periodicity. Berlin, Boston: De Gruyter. XLVIII, 686 p. ISBN 978-3-11-076322-5. doi: [10.1515/9783110763522](https://doi.org/10.1515/9783110763522).
5. Du, W.-S., Kostić, M., & Pinto, M. (2021) Almost periodic functions and their applications: a survey of results and perspectives. Journal of Mathematics, 2021, Article ID 5536018, 21 p. doi: [10.1155/2021/5536018](https://doi.org/10.1155/2021/5536018).
6. Watson, G.N. (1949) The theory of Bessel functions. Moscow: Foreign Languages Publishing House. 800 p. (In Russian).

SUPPLEMENT TO THE THEOREM ON NON-NEGATIVE ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

V. P. Zastavnyi, A. D. Manov

Let $J(t) = \psi(t) + \varphi(t)$, where ψ — is an almost periodic function, $\psi \not\equiv 0$, $h(t) = t^\delta J(t)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < x_1 < \dots < x_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, and $\{c_k\}_{k=1}^n$ — is a set of complex numbers. Under some additional conditions on the functions ψ and φ , Theorems 1 and 2 prove that if for some $\xi > 0$ and for all $t \geq \xi$ the inequality $\sum_{k=1}^n c_k h(tx_k) \geq 0$, then $c_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

Keywords: Bohr almost periodic function.

Поступила в редакцию 05.07.2026

Заставный Виктор Петрович

доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.

E-mail: zastavn@rambler.ru

ORCID: 0000-0002-4833-3897

SPIN-код: 4324-9397

AuthorID: 325416

Манов Анатолий Дмитриевич

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и диф-
ференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.

E-mail: manov.ad@ro.ru

ORCID: 0009-0008-9623-5459

SPIN-код: 3157-6105

AuthorID: 1167219

Zastavnyi Viktor Petrovych

Doctor of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk State University,
Donetsk, Russia.

Manov Anatoliy Dmitrievich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk State University,
Donetsk, Russia.

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ОБОБЩЁННЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ПО ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

© 2026. А. Д. Манов

В работе доказано, что неотрицательные обобщённые многочлены по функциям Бесселя обладают свойством, аналогичным известному свойству неотрицательных тригонометрических многочленов. А именно, пусть $\kappa \geq 0$, $x_1, \dots, x_n \in (0, +\infty)$ попарно различны и $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Если $c_0 + \sum_{j=1}^n c_j j_{\kappa-\frac{1}{2}}(x_j t) \geq 0$, $t \geq 0$, то найдётся константа $K = K(\kappa, x_1, \dots, x_n) > 0$ такая, что $|c_j| \leq K c_0$.

Ключевые слова: почти периодические функции, функция Бесселя, обобщённые многочлены.

§ 1. Введение. Из хорошо известного соотношения ортогональности для системы экспонент $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ следует, что для коэффициентов неотрицательного многочлена

$$\sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt} \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

имеет место неравенство $|c_k| \leq c_0$, $k = -n, \dots, n$. В данной работе мы докажем аналогичное неравенство для неотрицательных обобщённых многочленов по функциям Бесселя:

$$f(t) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j j_{\kappa-\frac{1}{2}}(x_j t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь $\kappa \geq 0$, $x_1, \dots, x_n \in (0, +\infty)$ и $j_\alpha(z)$ – нормированная функция Бесселя:

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

В частности, при $\alpha = -1/2$ и $\alpha = 1/2$ имеем

$$j_{-1/2}(z) = \cos z, \quad j_{1/2}(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отметим также, что $|j_\alpha(t)| \leq j_\alpha(0) = 1$, $t \in \mathbb{R}$. В данной работе докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\kappa \geq 0$, $x_1, \dots, x_n \in (0, +\infty)$ попарно различны, $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ и справедливо неравенство

$$f(t) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j j_{\kappa-\frac{1}{2}}(x_j t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

Тогда найдётся константа $K = K(\kappa, x_1, \dots, x_n) > 0$ такая, что $|c_j| \leq K c_0$ при $j = 1, \dots, n$.

Исследование проводилось по теме государственного задания № 126052121089-1, шифр FRRE-2026-0015

Замечание 1. Отметим, что условие $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ не ограничивает общность теоремы. Действительно, предположим, что $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Из (1) следует, что $\overline{f(t)} = f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Так как система $\{j_{\kappa-1/2}(x_j \cdot)\}_{j=0}^n$ линейно независима на $\mathbb{R}_+$ (см. замечание 2 ниже), то $\overline{c_j} = c_j$, $j = 0, \dots, n$. Таким образом, $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

§ 2. Вспомогательные факты и утверждения.

Лемма 1. Пусть $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ попарно различны, $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и справедливо неравенство

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{ix_k t} \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда $|c_k| \leq c_0$, $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим соотношением ортогональности:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\alpha t} e^{-i\beta t} dt = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Из (2) сразу следует, что

$$c_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt \quad \text{и} \quad c_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ix_k t} dt, \quad k = 1, \dots, n.$$

В силу неотрицательности функции f на $\mathbb{R}$ имеет место неравенство:

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ix_k t} dt \right| \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt.$$

Перейдя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим, что $|c_k| \leq c_0$, $k = 1, \dots, n$. □

Напомним, что функция $f \in C(\mathbb{R})$ называется равномерной почти периодической (п. п.) функцией, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что каждый интервал длины l содержит хотя бы одну точку τ такую, что

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Число τ такое, что имеет место неравенство (3), называется ε -почти периодом функции f . Примерами п. п. функций являются конечные суммы непрерывных периодических функций (см., например, [1–5]). В частности, п. п. функциями являются тригонометрические многочлены вида:

$$\sum_{k=1}^n c_k e^{ix_k t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

Лемма 2. Пусть f – равномерная п. п. функция, функция $g(t) = o(1)$ при $t \rightarrow +\infty$ и для некоторого $\xi \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$F(t) := f(t) + g(t) \geq 0, \quad t > \xi,$$

Тогда $f(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда f – вещественнозначная. Тогда g также вещественнозначна при $t > \xi$. Предположим, что $f(t_0) < 0$ в некоторой точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Из определения п. п. функции следует, что для числа $\varepsilon = -f(t_0)/2 > 0$ найдётся последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ ε -почти периодов функции f такая, что $t_0 + \tau_n > \xi$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n \rightarrow \infty$ и

$$|f(t_0 + \tau_n) - f(t_0)| < -\frac{f(t_0)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности, справедливо неравенство

$$f(t_0 + \tau_n) < \frac{f(t_0)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Отсюда получаем, что

$$F(t_0 + \tau_n) = f(t_0 + \tau_n) + g(t_0 + \tau_n) < \frac{f(t_0)}{2} + g(t_0 + \tau_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $f(t_0)/2 \geq 0$, что противоречит предположению $f(t_0) < 0$. Поэтому $f(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Из предположения леммы следует, что для всех $t > \xi$ выполняются условия

$$\operatorname{Re} f(t) + \operatorname{Re} g(t) \geq 0, \quad \operatorname{Im} f(t) + \operatorname{Im} g(t) = 0.$$

По доказанному $\operatorname{Re} f(t) \geq 0$ и $\pm \operatorname{Im} f(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f(t) = \operatorname{Re} f(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Далее нам потребуется следующая асимптотика для функции Бесселя (см., например, [6–9]):

$$J_{\alpha}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty, \alpha \geq -1/2. \quad (5)$$

Из (5) вытекает асимптотика для нормированной функции Бесселя:

$$j_{\alpha}(t) = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}t^{\alpha+1/2}} \cos\left(t - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-\alpha-3/2}), \quad t \rightarrow \infty, \alpha \geq -1/2. \quad (6)$$

Лемма 3. Пусть $\kappa > 0$, $x_1, \dots, x_n \in (0, +\infty)$ попарно различны, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и справедливо неравенство

$$f(t) = \sum_{j=1}^n c_j j_{\kappa-1/2}(x_j t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда $c_j = 0, j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6) следует, что

$$t^{\kappa} f(t) = \frac{2^{\kappa}\Gamma(\kappa+1/2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{x_j^{\kappa}} \cos\left(x_j t - \frac{\pi\kappa}{2}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Так как $t^\kappa f(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, то из леммы 2 следует, что

$$\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{x_j^\kappa} \cos \left(x_j t - \frac{\pi \kappa}{2} \right) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Из леммы 1 вытекает, что $c_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. $\square$

Замечание 2. Отметим, что из леммы 3, в частности, следует линейная независимость функций $\{j_{\kappa-1/2}(x_j \cdot)\}_{j=0}^n$ на $\mathbb{R}_+$ при $\kappa > 0$ и $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Действительно, пусть вначале $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$c_0 j_{\kappa-1/2}(x_0 t) + c_1 j_{\kappa-1/2}(x_1 t) + \dots + c_n j_{\kappa-1/2}(x_n t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

Если $c_0 = 0$, то левая часть (8) неотрицательна и из леммы 3 следует, что $c_j = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Предположим, что $c_0 \neq 0$. Тогда

$$1 \equiv j_{\kappa-1/2}(x_0 t) = -\frac{c_1}{c_0} j_{\kappa-1/2}(x_1 t) + \dots - \frac{c_n}{c_0} j_{\kappa-1/2}(x_n t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (9)$$

Правая часть (9) неотрицательна, и значит, по лемме 3 имеем $c_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом, $1 = 0$. Пришли к противоречию, и значит, $c_0 = 0$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется также следующая лемма (см. [10]).

Лемма 4. Пусть $G : V \rightarrow \mathbb{R}$, $M := \sup_V G(t)$ и $m := \inf_V G(t)$. Если $M > 0$ и $m < 0$, то неравенство $1 - sG(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \in V$ тогда и только тогда, когда $1/m \leq s \leq 1/M$.

§ 3. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\kappa = 0$. Тогда из леммы 1 и формулы Эйлера следует, что $|c_j| \leq 2c_0$, $j = 1, \dots, n$.

Далее будем предполагать, что $\kappa > 0$. Если $c_0 = 0$, то утверждение теоремы вытекает из леммы 3.

Пусть $c_0 \neq 0$. Так как $\kappa > 0$, то $j_{\kappa-1/2}(x_j \cdot) \in C_0(\mathbb{R}_+)$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом, из неравенства (1) следует, что $c_0 > 0$.

Введём следующие обозначения:

$$c := (c_1, \dots, c_n), \quad j(t) := (j_{\kappa-1/2}(x_1 t), \dots, j_{\kappa-1/2}(x_n t)), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда неравенство (1) можно переписать в виде: $c_0 + \langle c, j(t) \rangle \geq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Представим теперь вектор c следующим образом: $c = r \cdot u$, где $r \geq 0$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Тогда неравенство (1) равносильно следующему:

$$1 + \frac{r}{c_0} \langle u, j(t) \rangle \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (10)$$

Так как вектор u отличен от нулевого, то из леммы 3 следует, что функция $\langle u, j(t) \rangle$ меняет знак на $\mathbb{R}_+$. Кроме того, так как $\langle u, j(\cdot) \rangle \in C_0(\mathbb{R}_+)$, то функция $\langle u, j(t) \rangle$ достигает своего наименьшего и наибольшего значения на $\mathbb{R}_+$.

Пусть $V = \mathbb{R}_+$ и $G(t) := -\langle u, j(t) \rangle$, $t \in V$. Из леммы 4 следует, что неравенство (10) равносильно тому, что

$$0 \leq r \leq -\frac{c_0}{m(u)}, \quad \text{где } m(u) := \min_{t \in \mathbb{R}_+} \langle u, j(t) \rangle.$$

Таким образом, если выполняется неравенство (10), то

$$0 \leq r \leq \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \left(-\frac{c_0}{m(u)} \right) = -\frac{c_0}{\sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} m(u)}. \quad (11)$$

Покажем, что в правой части (11) стоит конечное число. Для этого докажем, что функция $m(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|\langle u, j(t) \rangle - \langle v, j(t) \rangle| \leq |u - v| \cdot |j(t)| \leq \sqrt{n} |u - v|, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Таким образом,

$$-\sqrt{n} |u - v| + \langle v, j(t) \rangle \leq \langle u, j(t) \rangle \leq \langle v, j(t) \rangle + \sqrt{n} |u - v|, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (12)$$

Перейдём теперь к минимуму по t в (12). Получим, что

$$|m(u) - m(v)| \leq \sqrt{n} |u - v|, \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, $m(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Так как единичная сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ компактна, то найдётся вектор $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такой, что $\sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} m(u) = m(u_0)$.

Далее, так как $\langle u_0, j(t) \rangle$ меняет знак и достигает своего наименьшего значения на $\mathbb{R}_+$, то найдётся точка $t_0 \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} m(u) = m(u_0) = \langle u_0, j(t_0) \rangle < 0.$$

Таким образом, справедливо неравенство:

$$|c_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2 \right)^{1/2} =: r \leq K c_0, \quad \text{где } 0 < K := \frac{-1}{\sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} m(u)} < \infty.$$

§ 4. Заключение. В заключении отметим, что константа $K = K(\kappa, x_1, \dots, x_n)$ в теореме 1 существенно зависит от расположения точек $x_1, \dots, x_n$.

Пусть $\kappa > 0$ и $x > 1$. Покажем, что для любой константы $K = K(\kappa, 1, x)$ для которой справедливо заключение теоремы 1 удовлетворяет условию

$$K(\kappa, 1, x) \rightarrow \infty, \quad \text{при } x \rightarrow 1 + 0.$$

Для этого определим следующую величину:

$$s(x) := \sup_{t \geq 0} \left| j_{\kappa-\frac{1}{2}}(t) - j_{\kappa-\frac{1}{2}}(xt) \right|, \quad x > 1.$$

Очевидно, что $s(x) > 0$ при $x > 1$ (см. замечание 2). Кроме того, $s(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1 + 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция $j_{\kappa-\frac{1}{2}}(\cdot)$ исчезает на бесконечности и $x > 1$, то найдётся $t_0 > 0$ такое, что при $t > t_0$ справедливы неравенства

$$\left| j_{\kappa-\frac{1}{2}}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{и} \quad \left| j_{\kappa-\frac{1}{2}}(xt) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при $t > t_0$ имеет место неравенство

$$\left| j_{\kappa-\frac{1}{2}}(t) - j_{\kappa-\frac{1}{2}}(xt) \right| < \varepsilon. \quad (13)$$

Предположим теперь, что $x \in (1, 2)$. Тогда $t, xt \in [0, 2t_0]$ при $t \in [0, t_0]$. Так как функция $j_{\kappa-\frac{1}{2}}(\cdot)$ равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2t_0]$, то найдётся $\delta > 0$ такое, что из $|t(x - 1)| < \delta$ следует неравенство (13). Таким образом, если $|x - 1| < \delta/t_0$, то неравенство (13) справедливо для всех $t \in [0, t_0]$, и значит, при $t \in [0, +\infty)$.

Рассмотрим следующий обобщённый многочлен по функциям Бесселя:

$$1 + \frac{1}{s(x)}(j_{\kappa-\frac{1}{2}}(t) - j_{\kappa-\frac{1}{2}}(xt)) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Из теоремы 1 следует, что $1/s(x) \leq K(\kappa, 1, x)$. Так как $s(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1 + 0$, то $K(\kappa, 1, x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1 + 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор, Г. Почти периодические функции / Г. Бор. – Москва, Ленинград: Государственное технико-теоретическое изд.-во, 1934. – 128 с.
2. Левитан, Б.М. Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. – Москва: Государственное изд.-во технико-теоретической литературы, 1953. – 396 с.
3. N'Guérékata, G.M. Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces / G.M. N'Guérékata. – 2nd ed. – Cham: Springer, 2021. – XII, 134 p. – ISBN 978-3-030-73717-7. DOI: [10.1007/978-3-030-73718-4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-73718-4).
4. Kostić, M. Selected topics in almost periodicity / M. Kostić. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2022. – XLVIII, 686 p. – ISBN 978-3-11-076322-5. DOI: [10.1515/9783110763522](https://doi.org/10.1515/9783110763522).
5. Du, W.-S. Almost periodic functions and their applications: a survey of results and perspectives / W.-S. Du, M. Kostić, M. Pinto // Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 2021. – Article ID 5536018. – 21 p. DOI: [10.1155/2021/5536018](https://doi.org/10.1155/2021/5536018).
6. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – Москва: ИЛ, 1949. – 800 с.
7. Nemes, G. Error bounds for the large-argument asymptotic expansions of the Hankel and Bessel functions / G. Nemes // Acta Applicandae Mathematicae. – 2017. – Vol. 150, No. 1. – P. 141–177. DOI: [10.1007/s10440-017-0099-0](https://doi.org/10.1007/s10440-017-0099-0).
8. Sher, D.A. Joint asymptotic expansions for Bessel functions / D. A. Sher // Pure and Applied Analysis. – 2023. – Vol. 5, No. 2. – P. 461–505. DOI: [10.2140/paa.2023.5.461](https://doi.org/10.2140/paa.2023.5.461).
9. NIST Digital Library of Mathematical Functions. Chapter 10: Bessel Functions [Электронный ресурс] / F.W.J. Olver, A.B. Olde Daalhuis, D.W. Lozier [и др.], ред. – Release 1.2.8 of 15.09.2026. – Режим доступа: <https://dlmf.nist.gov/10> (дата обращения: 17.06.2026).
10. Манов, А.Д. О единственности продолжения одной функции до положительно определенной / А. Д. Манов // Математические заметки. – 2020. – Т. 107, № 4. – С. 575–590. DOI: [10.4213/mzm12402](https://doi.org/10.4213/mzm12402).

REFERENCES

1. Bohr, H. (1934) Almost periodic functions. Moscow, Leningrad: State Technical and Theoretical Publishing House. 128 p. (In Russian).
2. Levitan, B.M. (1953) Almost-periodic functions. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature. 396 p. (In Russian).
3. N'Guérékata, G.M. (2021) Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces. 2nd ed. Cham: Springer. XII, 134 p. ISBN 978-3-030-73717-7. doi: [10.1007/978-3-030-73718-4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-73718-4).
4. Kostić, M. (2022) Selected topics in almost periodicity. Berlin, Boston: De Gruyter. XLVIII, 686 p. ISBN 978-3-11-076322-5. doi: [10.1515/9783110763522](https://doi.org/10.1515/9783110763522).
5. Du, W.-S., Kostić, M., & Pinto, M. (2021) Almost periodic functions and their applications: a survey of results and perspectives. Journal of Mathematics, 2021, Article ID 5536018, 21 p. doi: [10.1155/2021/5536018](https://doi.org/10.1155/2021/5536018).
6. Watson, G.N. (1949) The theory of Bessel functions. Moscow: Foreign Languages Publishing House. 800 p. (In Russian).

7. Nemes, G. (2017) Error bounds for the large-argument asymptotic expansions of the Hankel and Bessel functions. *Acta Applicandae Mathematicae*, 150(1), 141–177. doi: 10.1007/s10440-017-0099-0.
8. Sher, D.A. (2023) Joint asymptotic expansions for Bessel functions. *Pure and Applied Analysis*, 5(2), 461–505. doi: 10.2140/paa.2023.5.461.
9. Olver, F.W.J., Olde Daalhuis, A.B., Lozier, D.W., Schneider, B.I., Boisvert, R.F., Clark, C.W., Miller, B.R., Saunders, B.V., Cohl, H.S., & McClain, M.A. (eds.). (2026) NIST Digital Library of Mathematical Functions. Release 1.2.8 of 15 September 2026. Chapter 10: Bessel Functions. Retrieved from: <https://dlmf.nist.gov/10> (date of application: 17.06.2026).
10. Manov, A.D. (2020) Uniqueness of the continuation of a certain function to a positive definite function. *Mathematical Notes*, 107(4), 575–590. doi: 10.4213/mzm12402. (In Russian).

ON NONNEGATIVE GENERALIZED POLYNOMIALS IN BESSEL FUNCTIONS

A. D. Manov

It is proved that nonnegative generalized polynomials in Bessel functions possess a property analogous to a well-known property of nonnegative trigonometric polynomials. Namely, let $\kappa \geq 0$, let $x_1, \dots, x_n \in (0, +\infty)$ be pairwise distinct, and let $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. If $c_0 + \sum_{j=1}^n c_j j_{\kappa-\frac{1}{2}}(x_j t) \geq 0$, $t \geq 0$, then there exists a constant $K = K(\kappa, x_1, \dots, x_n) > 0$ such that $|c_j| \leq K c_0$.

Keywords: almost periodic functions, Bessel functions, generalized polynomials.

Поступила в редакцию 22.06.2028

Манов Анатолий Дмитриевич

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и диф-
ференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.
E-mail: manov.ad@ro.ru
ORCID: 0009-0008-9623-5459
SPIN-код: 3157-6105
AuthorID: 1167219

Manov Anatoliy Dmitrievich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk State University,
Donetsk, Russia.

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ДУГАМ ОКРУЖНОСТЕЙ

© 2026. П. А. Машаров

Получено значение наименьшего радиуса круга, в котором из равенства нулю интегралов следует равенство нулю функции. Рассматриваются интегралы первого рода по дугам окружностей.

Ключевые слова: проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю, свойства функции с нулевыми интегралами по дугам окружностей, локальный вариант проблемы Помпейю, экстремальный радиус Помпейю для дуги окружности.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если из того, что локально суммируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой при всех $\lambda \in M(n)$ выполняются равенства

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

следует, что она равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A . В данной постановке сформулированная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получены в XX веке (см. обзор литературы в [1]).

Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [2], описывающую довольно широкий набор множеств Помпейю.

Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гооморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\bar{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно-аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, M(n), dx)$ на тройку $(X, \mathcal{Z}, d\mu)$, где X — многообразие, $\mathcal{Z}$ — группа Ли, действующая транзитивно на X , $d\mu$ — инвариантная относительно $\mathcal{Z}$ мера на X [3, 4].

Другие обобщения возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, инвариантным только относительно вращений. Одно из таких обобщение известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R^n \subset \mathbb{R}^n$, и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R^n)$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{B}_R^n$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}_R^n$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (по сравнению с размерами множества A) выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ [5–7].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{ R > 0 : A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю для множества A .

В [7] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренштейном и Р. Гэем [5, 6], а также В. В. Волчковым [7, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [7–15].

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество A имеет такую же размерность, что и пространство. Пусть теперь размерность множества A равна $m \leq n$, интеграл в (1) понимается как m -кратный. Чтобы выделить такие интегралы, вместо dx будем писать $d\mu_m$. В определении множества Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ для множества положительной коразмерности (если $m < n$) условие локальной суммируемости функции f заменим на непрерывность. Это обусловлено тем, что даже равная нулю почти всюду (по n -мерной мере Лебега μ_n) функция может иметь не все равные нулю интегралы, поскольку если множество A имеет размерность $m < n$, то $\mu_n(A) = 0$. Будем рассматривать совокупность $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)$ всех m -мерных множеств Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ и величину

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Аналогично проблеме 1, в [16] поставлена следующая

Проблема 2. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^m$ найти значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$.

Локальный вариант проблемы Помпейю для множеств положительной коразмерности напоминает теорему Мореры, в которой из нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции. В [17] рассмотрена проблема Помпейю для шаров и сфер положительной коразмерности. Достаточно полный список множеств A , для которых известно точное значение или оценки величины $\mathcal{R}_{m,n}(A)$, можно найти в [13, 15, 18, 19].

Пусть далее $n = 2$. Для каждого фиксированного $\alpha \in (0; \pi/2]$ рассмотрим множество $l = l(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \geq \cos \alpha\}$, представляющее из себя дугу единичной окружности раствора 2α . Будем говорить, что $l \in \mathcal{P}_{1,2}^1(B)$, если для любой $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(B)$ из условий

$$\int_{\lambda l} f(x) ds = 0 \tag{2}$$

для любого $\lambda \in \text{Mot}(l, B)$ следует, что $f \equiv 0$ в B . Интеграл в (2) понимается как криволинейный интеграл первого рода, то есть по длине кривой. В нём ds — элемент длины дуги кривой.

В рассматриваемом случае проблему 2 можно сформулировать следующим образом.

Проблема 3. Найти величину

$$\mathcal{R}_{1,2}^1(l) = \inf\{R > 0: l \in \mathcal{P}_{1,2}^1(\mathbb{B}_R)\}.$$

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. Для каждого $\alpha \in [\arcsin(3/4); \pi/2]$ имеет место $\mathcal{R}_{1,2}^1(l(\alpha)) = 2 \sin(\alpha/2)$.

Заметим, что величина $\arcsin(3/4) \approx 48,59^\circ$.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее в действительном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ размерности 2 рассматриваются евклидова норма $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $M(2)$ — группа движений $\mathbb{R}^2$. Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^2$ положим $\text{Mot}(A, B) =$

$\{\lambda \in \mathbf{M}(2): \lambda A \subset B\}$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим множества: $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| < R\}$ — круг в $\mathbb{R}^2$ радиуса R ; $\mathbb{B}_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^2: r < |x| < R\}$ — кольцо, если $r \geq 0$, или круг в $\mathbb{R}^2$, если $r < 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества $D \subset \mathbb{R}^2$ под $C^k(D)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в D , $C(D)$ — класс непрерывных на D функций, $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$.

Под $\mathfrak{P}(l, D)$ будем понимать класс локально суммируемых в D функций, для которых равенство (2) верно для всех $\lambda \in \text{Mot}(l, D)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^k(l, D) = \mathfrak{P}(l, D) \cap C^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(l, D) = \mathfrak{P}(l, D) \cap C^\infty(D)$; $\mathfrak{P}_0^\infty(l, \mathbb{B}_R)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(l, \mathbb{B}_R)$, то есть таких, что для всех $x, y \in \mathbb{B}_R$, для которых $|x| = |y|$, выполняется $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частной производной функции $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ по переменной x_j будем использовать запись $\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Очевидно, что для каждого $\alpha \in (0; \pi/2]$ значение величины $r^*(l(\alpha)) = \inf\{r > 0: \text{Mot}(l(\alpha), \mathbb{B}_r) \neq \emptyset\}$ равно $\sin \alpha$ — половине длины отрезка, соединяющего концы дуги $l(\alpha)$. Заметим, что указанная величина играет важную роль в локальном варианте проблемы Помпейю, поскольку для широкого класса множеств A имеет место оценка $\mathcal{R}(A) \leq 2r^*(A)$ [7]. Таким образом, тривиальная оценка искомой величины выражается неравенством

$$\sin \alpha \leq \mathcal{R}_{1,2}^1(l(\alpha)) \leq 2 \sin \alpha.$$

Рассмотрим граничные положения $\lambda l(\alpha)$ в замыкании круга $\mathbb{B}_R$ с центром в точке O при $\sin \alpha < R < 1$ (рис. 1). Будем располагать дугу λl таким образом, чтобы отрезок $P_j Q_j$, соединяющий её концы, был параллелен оси ординат. Другими словами, в качестве λ будем рассматривать только сдвиги. Пусть T_j — середина отрезка $P_j Q_j$, S_j — середина дуги $\lambda_j l = P_j Q_j$.

Заметим, что $PT = TQ = \sin \alpha$, $TS = 1 - \cos \alpha$.

Если λl занимает крайнее левое положение, то есть когда абсцисса точек P_1 и Q_1 равна $-\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}$, то абсцисса точки T_1 также равна $-\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}$, а точки S_1 равна $1 - \cos \alpha - \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}$.

Если λl занимает крайнее нижнее положение, то есть когда точка P_1 имеет координаты $(0; -R)$, то Q имеет координаты $(0; 2 \sin \alpha - R)$.

Если λl занимает крайнее правое положение, то есть когда абсцисса точек P_1 и Q_1 равна $\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}$, то абсцисса точки S_1 равна $1 - \cos \alpha + \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}$.

Приведённые вычисления показывают, что если $r = 1 - \cos \alpha - \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} > 0$, то любая локально суммируемая функция с носителем в $\mathbb{B}_r$ также принадлежит $\mathfrak{P}(l, \mathbb{B}_R)$. Решая это неравенство относительно R , имеем $R^2 - \sin^2 \alpha < 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha$; $R^2 < 2 - 2 \cos \alpha$. Отсюда получаем оценку снизу экстремального радиуса $\mathcal{R}_{1,2}^1(l(\alpha)) \geq 2 \sin(\alpha/2)$.

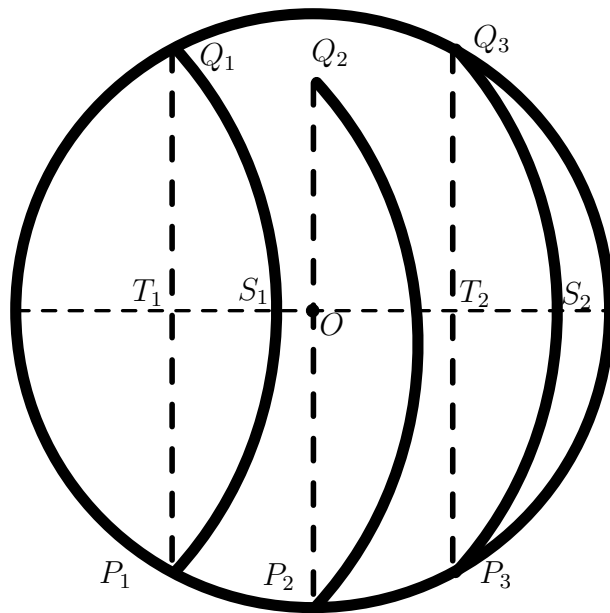


Рис. 1: Расположения λl в $\overline{\mathbb{B}_R}$

Рассмотрим дифференциальный оператор $\nu = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Заметим, что концы дуги $l(\alpha)$ имеют координаты $P(\cos \alpha, -\sin \alpha)$, $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$, а для дифференциального оператора выполняется равенство $df(\cos t, \sin t) = (-\sin t \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cos t \frac{\partial f}{\partial x_2}) dt = -\nu f dt$.

Лемма 1. Пусть $f \in C^1(D)$, где D — область, содержащая $l(\alpha)$. Тогда имеет место равенство

$$\int_{l(\alpha)} \nu f(x) ds = f(P) - f(Q). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Параметризацией кривой $l(\alpha)$ является $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $t \in [-\alpha; \alpha]$. Элемент длины дуги $ds = \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2} dt = dt$. Отсюда $\int_{l(\alpha)} f(x) ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\cos t, \sin t) dt$. Применяя к функции f оператор ν , получаем с противоположным знаком интеграл от полного дифференциала функции, откуда по формуле Ньютона–Лейбница следует искомое равенство. $\square$

Доказательства следующих двух утверждения можно найти в [18] и [1] соответственно.

Лемма 2. Пусть A — компакт, B — область в $\mathbb{R}^n$, числа $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы, функция $\varphi_\varepsilon \in C^k(B_\varepsilon)$ имеет носитель $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon^n$, а функция $f \in \mathfrak{P}(A, B_\varepsilon)$. Тогда свёртка $f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{P}^k(A, B)$.

Лемма 3. Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{d}$ — один из дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, и для некоторого открытого множества D , для которого $\text{Mot}(K, D) \neq \emptyset$, выполнено $f \in \mathfrak{P}^\infty(K, D)$. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{P}^\infty(K, D)$.

Отсюда можно сделать вывод о значениях функции в некотором кольце.

Лемма 4. Пусть $\alpha \in (0; \pi/2]$, $\sin \alpha < R < 2 \sin \alpha$, $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(l(\alpha), \mathbb{B}_R)$. Тогда f постоянна в кольце $\mathbb{B}_{r,R}$, где $r = 2 \sin \alpha - R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 следует, что $\nu f \in \mathfrak{P}^\infty(l(\alpha), \mathbb{B}_R)$, откуда по лемме 1 делаем вывод, что значения функции f совпадают в любых двух точках, расположенных в $\mathbb{B}_R$, расстояние между которыми равно $2 \sin \alpha$. Это с учётом второго положения λl на рис. 1 означает утверждение леммы. $\square$

Заметим, что если $R \geq 2 \sin \alpha$, то с учётом непрерывности функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(l(\alpha), \mathbb{B}_R)$ в начале координат и равному нулю интегралу по дуге получаем, что она равна нулю в $\mathbb{B}_R$.

Соотношение между R и α , при котором дуга λl в крайнем правом положении полностью содержится в кольце постоянства функции f из леммы 4, описывается неравенством

$$2 \sin \alpha - R < \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} + 1 - \cos \alpha. \quad (4)$$

Преобразуем его относительно R .

Имеем $2 \sin \alpha - R - 1 + \cos \alpha < \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}$; $4 \sin^2 \alpha + R^2 + 1 + \cos^2 \alpha - 4 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos \alpha - 2R(2 \sin \alpha - 1 + \cos \alpha) < R^2 - \sin^2 \alpha$. Так как $2 \sin \alpha - 1 + \cos \alpha = 4 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) - 2 \sin^2(\alpha/2) = 2 \sin(\alpha/2)(2 \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2))$, то при $\text{tg}(\alpha/2) < 2$ выражение $2 \sin \alpha - 1 + \cos \alpha > 0$. Учитывая $\text{arctg } 2 > \text{arctg } 1 = \pi/4$, для всех рассматриваемых $\alpha \in (0; \pi/2]$ выполняется $2 \sin \alpha - 1 + \cos \alpha > 0$. Продолжая изучать неравенство (4), приходим к $4 \sin^2 \alpha + 2 - 4 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos \alpha < 2R(2 \sin \alpha - 1 + \cos \alpha)$; $R > (2 \sin^2 \alpha + 1 - 2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha) / (2 \sin(\alpha/2)(2 \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)))$. Числитель выражения в правой части преобразуем к виду $8 \sin^2(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) + 2 \sin^2(\alpha/2) - 4 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) + 4 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) \cos \alpha$, откуда решение (4) можно записать в виде $R > (4 \sin(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 2 \cos(\alpha/2) + 2 \cos(\alpha/2) \cos \alpha) / (2 \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2))$.

Найдем теперь значения $\alpha \in (0; \pi/2]$, для которых (4) эквивалентно полученной ранее оценки снизу экстремального радиуса $R > 2 \sin(\alpha/2)$. Для этого решим уравнение $4 \sin(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 2 \cos(\alpha/2) + 2 \cos(\alpha/2) \cos \alpha = 2 \sin(\alpha/2)(2 \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2))$.

Имеем $4 \sin(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) - 4 \sin^2(\alpha/2) \cos(\alpha/2) = 2 \sin(\alpha/2)(2 \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2))$; $4 \cos^2(\alpha/2) + 1 - 4 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) = 2(2 \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2))$.

Выполним в полученном равенстве замену $\alpha = 2t - \pi/2$. Получим $4 \cos^2(t - \pi/4) + 1 - 2 \sin(2t - \pi/2) = 4 \cos(t - \pi/4) - 2 \sin(t - \pi/4)$; $2(\cos t + \sin t)^2 + 1 + 2 \cos 2t = 2\sqrt{2} \cos t + 2\sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t$; $3 + 2 \sin 2t + 2 \cos 2t = 3\sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t$; $4 \cos^2 t + 4 \sin t \cos t + 1 = \sqrt{2}(3 \cos t + \sin t)$; $1 - 8 \cos^2 t + 4 \cos t(3 \cos t + \sin t) = \sqrt{2}(3 \cos t + \sin t)$. Приводя подобные и раскладывая на множители, получаем $(1 - 2\sqrt{2} \cos t)(1 + 2\sqrt{2} \cos t) = \sqrt{2}(3 \cos t + \sin t)(1 - 2\sqrt{2} \cos t)$.

Если $\cos t = \sqrt{2}/4$, то неравенство выполняется. Выполнив обратную замену, получаем $\alpha/2 = \pm \arccos(\sqrt{2}/4) + 2\pi k - \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Промежутку $(0; \pi/2]$ принадлежит $\alpha = 2 \arccos(\sqrt{2}/4) - \pi/2$. Чтобы в этом убедиться, вычислим и оценим $\sin \alpha = \sin(2 \arccos(\sqrt{2}/4) - \pi/2) = -\cos(2 \arccos(\sqrt{2}/4)) = -(2 \cdot 2/16 - 1) = 1 - 1/4 = 3/4 > 0$, $\cos \alpha = \sin(2 \arccos(\sqrt{2}/4)) = 2(\sqrt{14}/4)(\sqrt{2}/4) = \sqrt{7}/4 > 0$.

Возвращаясь к исходному уравнению, рассмотрим $1 + 2\sqrt{2} \cos t = \sqrt{2}(3 \cos t + \sin t)$; $\cos(t - \pi/4) = 1/2$; $t = \pi/4 \pm \pi/3 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\alpha = \pm 2\pi/3 + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, ни один из которых не принадлежит $(0; \pi/2]$.

Приведём одно утверждение, доказательство которого можно найти в [7], предварительно пояснив смысл входящих в него обозначений.

Пусть $\mathcal{U}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Под $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ понимается класс функций из $C^\infty(\mathcal{U})$ с компактным носителем в $\mathcal{U}$; $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ — пространство распределений на $\mathcal{U}$; $SO(n)$ — группа евклидовых вращений пространства $\mathbb{R}^n$; для распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ и $\lambda \in M(n)$ распределение $\lambda\varphi$ определяется на $\mathcal{D}'(\lambda^{-1}\mathcal{U})$ формулой $\langle \lambda\varphi, f(x) \rangle = \langle \varphi, f(\lambda^{-1}x) \rangle$, где $f \in \mathcal{D}(\lambda^{-1}\mathcal{U})$, $\langle \varphi, f \rangle$ обозначает значение φ на элементе f ; $\mathcal{D}'_\varphi(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}) : f * \varphi = 0 \text{ в области определения}\}$; $C_\varphi^m(\mathcal{U}) = (\mathcal{D}'_\varphi \cap C^m)(\mathcal{U})$, где $m \in \mathbb{Z}_+$ или $m = \infty$; $A_\varphi^m(\mathcal{U}) = \bigcap_{\tau \in SO(n)} C_{\tau\varphi}^m(\mathcal{U})$.

Утверждение 1 (Предложение 5.9 из [7, Глава 1]). Пусть $\mathcal{U} = \mathbb{B}_R$ и $A_\varphi^\infty(\mathcal{U}) \neq \{0\}$. Тогда $A_\varphi^\infty(\mathcal{U})$ содержит радиальную функцию, отличную от нуля.

Взяв $\varphi = \chi_l$ — индикатор множества l , получаем

Следствие 1. Пусть для некоторого $R > 0$ выполняется $\mathfrak{P}_0^\infty(l, \mathbb{B}_R) = \{0\}$. Тогда $\mathfrak{P}^\infty(l, \mathbb{B}_R) = \{0\}$.

Доказательство основного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Пусть $\alpha \in [\arcsin(3/4); \pi/2]$ фиксировано.

В случае $R < 2 \sin(\alpha/2)$ величина $r = 1 - \cos \alpha - \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} > 0$, и дуги λl при $\lambda \in \text{Mot}(l, \mathbb{B}_R)$ не имеют общих точек с кругом $\mathbb{B}_r$. Тогда любая непрерывная в $\mathbb{B}_R$ функция с носителем в $\mathbb{B}_r$ равна нулю в кольце $\mathbb{B}_{r,R}$ и имеет нулевые интегралы по дугам $\lambda l \subset \mathbb{B}_R$, откуда следует оценка $\mathcal{R}_{1,2}^1(l(\alpha)) \geq 2 \sin(\alpha/2)$.

Рассмотрим теперь $R > 2 \sin(\alpha/2)$. Пусть непрерывная, радиальная $f: \mathbb{B}_R \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет (2) для любого $\lambda \in \text{Mot}(l, \mathbb{B}_R)$. Для $r \in (2 \sin(\alpha/2); R)$ рассмотрим $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$: $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{B}_{R-r}$. Тогда по лемме 2 функция $\tilde{f} = \varphi * f \in C^\infty(\mathbb{B}_r)$ и удовлетворяет (2) для любого $\lambda \in \text{Mot}(l, \mathbb{B}_r)$, то есть $\tilde{f} \in \mathfrak{P}_0^\infty(l, \mathbb{B}_r)$. По лемме 4 $\tilde{f}$ постоянна в кольце $\mathbb{B}_{q,r}$,

где $q = 2 \sin \alpha - r$.

Для рассматриваемых α и R выполняется (4), что означает, что существует такое движение λ дуги l , что $\lambda l \subset \mathbb{B}_{q,r}$, откуда $\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}_{q,r}$. Рассматривая теперь различные $\lambda \in \text{Mot}(l, \mathbb{B}_r)$ (двигая дугу от крайнего правого к крайнему левому положению: на рис. 1 от третьего к первому) и применяя предложение 2.2 из [20], получаем $\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{B}_r$, что означает $\mathfrak{P}_0^\infty(l, \mathbb{B}_r) = \{0\}$. Применив следствие 1, получаем $\mathfrak{P}^\infty(l, \mathbb{B}_r) = \{0\}$. Устремив $r \rightarrow R - 0$, приходим к $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$, что вместе с доказанной ранее оценкой снизу означает $\mathcal{R}_{1,2}^1(l(\alpha)) = 2 \sin(\alpha/2)$. $\square$

Непосредственно из теоремы 1 следует следующая теорема единственности для непрерывных функций с нулевыми интегралами по дугам.

Следствие 2. Пусть для фиксированных $\alpha \in [\arcsin(3/4); \pi/2]$, $R > 0$ функции $f, g \in C(\mathbb{B}_R)$, и выполняется условие

$$\int_{\lambda l(\alpha)} f(x) ds = \int_{\lambda l(\alpha)} g(x) ds \quad \forall \lambda \in \text{Mot}(l(\alpha), \mathbb{B}_R). \quad (5)$$

Тогда если $R > 2 \sin(\alpha/2)$, то $f \equiv g$ в $\mathbb{B}_R$. Если $R < 2 \sin(\alpha/2)$, то существует пара различных функций f и g , удовлетворяющих (5).

Отсюда также следует приложение в теории отображений, сохраняющих меру. Будем говорить, что отображение f сохраняет длину спрямляемой кривой γ , если длина γ равна длине образа γ при отображении f .

Следствие 3. Пусть для фиксированных $\alpha \in [\arcsin(3/4); \pi/2]$, $R > 2 \sin(\alpha/2)$ отображение $f: \mathbb{B}_R \rightarrow \mathbb{R}^2$ сохраняет длину каждой дуги $\lambda l(\alpha) \subset \mathbb{B}_R$. Тогда f сохраняет длину любой спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbb{B}_R$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машаров, П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2. – С. 77–88.
2. Williams, S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Mathematische Annalen. – 1976. – V. 223. – No 2. – P. 183–190.
3. Benyamini, Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SU(1, 1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Annales de l'institut Fourier. – 1992. – V. 42. – No 3. – P. 671–694.
4. Аграновский, М. Л. Преобразование Фурье на $SL_2(\mathbb{R})$ и теоремы типа Морера. / М. Л. Аграновский // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 243. – № 6. – С. 1353–1356.
5. Berenstein, C. A. Le probleme de Pompeiu local / C. A. Berenstein, R. Gay // J. Analyse Math. – 1988. – Vol. 52. – P. 133–166.
6. Berenstein, C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein, R. Gay // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 55. – No 3. – P. 267–288.
7. Volchkov, V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 2003. – 454 p.
8. Zalcman, L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman ; ed. B. Fuglede et al. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1992. – P. 185–194.
9. Zalcman, L. Supplementary bibliography to: "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" / L. Zalcman // Radon Transforms and Tomography (South Hadley, MA, 2000). – Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2001. – Contemp. Math. ; Vol. 278. – P. 69–74.
10. Volchkov, V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer. – 2009. – 671 p.
11. Volchkov, V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
12. Волчков, В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12. – № 1. – С. 51–79.

13. Машаров, П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.
14. Волчков, В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52. – EDN CHSCLT.
15. Машаров, П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
16. Машаров, П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
17. Chang, D. C. The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group / D. C. Chang, W. Eby // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2008. – V. 12. – P. 2619–2640.
18. Машаров, П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для куба в многомерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 92–103.
19. Машаров, П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равнобедренным прямоугольным треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2025. – № 3. – С. 37–45.
20. Quinto, E. T. Radon transform on curves in the plane / E. T. Quinto // Lect. Applied Math. – 1989. – V. 30. – P. 231–243.

REFERENCES

1. Masharov, P. A. (2022) [The Pompey radius for a family consisting of a sector and a semicircle]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 2, 77–88. (In Russian).
2. Williams, S. A. (1976) [A partial solution of the Pompeiu problem]. *Mathematische Annalen*. 223 (2), 183–190.
3. Benyamini, Y. & Weit, Y. (1992) [Harmonic analysis of spherical functions on $SU(1, 1)$]. *Annales de l'Institut Fourier*. 42 (3), 671–694.
4. Agranovsky M. L. (1978) [Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem]. *Sov. Math. Dokl.* 19, 1522–1525.
5. Berenstein, C. A. & Gay, R. (1988) [Le probleme de Pompeiu local]. *Journal d'Analyse Mathematique*. 52, 133–166.
6. Berenstein, C. A. & Gay, R. (1986) [A local version of the two-circles theorem]. *Israel Journal of Mathematics*. 55 (3), 267–288.
7. Volchkov, V. V. (2003) *Integral geometry and convolution equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 454 p.
8. Zalcman, L. (1992) A bibliographic survey of the Pompeiu problem. In *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations (Hansholm, 1991)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 185–194.
9. Zalcman, L. (2001) Supplementary bibliography to: "A bibliographic survey of the Pompeiu problem". In *Radon Transforms and Tomography (South Hadley, MA, 2000)*. Providence, RI: American Mathematical Society. (Contemporary Mathematics; 278), 69–74.
10. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2009) *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*. Dordrecht: Springer-Verlag. 671 p.
11. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2013) *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*. Basel: Birkhauser. 592 p.
12. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2001) [Extremal problems of integral geometry]. *Mathematics today*. Kyiv: Scientific and Methodological Center for Higher Education. 12, 51–79. (In Russian).
13. Masharov, P. A. & Rybenko, E. A. (2020) [A local variant of the Pompeiu problem for a family consisting of a triangle and a square]. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics*. 34, 85–92. (In Russian).
14. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2021) [Elements of non-traditional integral geometry]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 2, 9–52. (In Russian).
15. Masharov, P. A. (2021) [On functions with zero surface integrals over equilateral triangles]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 2, 110–120. (In Russian).

16. Masharov, P. A. (2017) [A local variant of the Pompeiu problem for a square in three-dimensional space]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 2, 50–60. (In Russian).
17. Chang, D. C. & Eby, W. (2008) [The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group]. *Taiwanese Journal of Mathematics*. 12, 2619–2640.
18. Masharov, P. A. (2020) [A local variant of the Pompeiu problem for a cube in multidimensional space]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 2, 92–103. (In Russian).
19. Masharov, P. A. (2025) [On functions with zero surface integrals over isosceles right triangles]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*. 3, 37–45. (In Russian).
20. Quinto, E. T. (1989) [Radon transform on curves in the plane] *Lect. Applied Math*. 30, 231–243.

ON FUNCTIONS WITH ZERO INTEGRALS OVER ARCS OF CIRCLES

P. A. Masharov

The value of the smallest radius of the circles is obtained, in which the equality of zero of the integrals implies the equality of zero of the function. First-order integrals over circular arcs are considered.

Keywords: the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius, the properties of functions with vanishing integrals by arcs of circles, the local Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius for the arc of a circle.

Поступила в редакцию 25.08.2026

Машаров Павел Анатольевич

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: p.masharov.dongu@mail.ru
ORCID: 0009-0003-2423-9390
SPIN-код: 5663-9414
AuthorID: 954456

Masharov Pavel Anatolievych

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Departments of
Mathematical Analysis and Differential Equations,
Donetsk State University, Donetsk, RF.

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

DOI: 10.5281/zenodo.22786046

EDN: YEUOSG

**ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦ МОМЕНТОВ
И ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ ДЛЯ СЛУЧАЯ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ
ПЛАСТИНЫ НА БАЗЕ $\{1,0\}$ -АППРОКСИМАЦИИ
ПРИ ОТСУТСТВИИ «ГИПОТЕТИЧЕСКОГО» МОДУЛЯ СДВИГА**© 2026. *Н. С. Бондаренко*

Построены фундаментальные матрицы внутренних силовых факторов в ортотропной пластине при действии сосредоточенной силы, вызывающей состояние изгиба. В качестве разрешающей взята система дифференциальных уравнений статики на базе обобщённой теории пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. Рассмотрен случай отсутствия «гипотетического» модуля сдвига. Проведены численные исследования зависимости обобщённых моментов и перерезывающих сил от упругих постоянных материала пластины.

Ключевые слова: $\{1,0\}$ -аппроксимация; полиномы А. М. Лежандра; ортотропная пластина; сосредоточенная сила; двумерное интегральное преобразование Ж. Фурье; фундаментальная матрица.

Введение. Использование ортотропных материалов, ключевой особенностью которых являются различные упругие свойства в разных направлениях, позволяет создавать тонкостенные элементы конструкций, являющиеся одновременно и лёгкими, и прочными. Решение задачи статики для ортотропных пластин актуально ввиду широкого применения таких конструкций в авиационной и космической технике, судостроении, химическом машиностроении, а также в промышленном и гражданском строительстве.

В реальных условиях на тонкостенные (пластинчатые) элементы конструкций могут действовать не только равномерно распределённые нагрузки, но и сосредоточенные силы, температурные поля, а также комбинированные силовые и тепловые воздействия. Поэтому построение фундаментальных решений задачи статики критически важно для оценки прочности и жёсткости конструкций.

Необходимость решения вышеупомянутых задач стимулирует развитие новых математических методов, повышающих точность расчётов компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС) пластин. Одним из таких подходов является обобщённая теория пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации [1]. Данная теория основана на методе И. Н. Векуа разложения искомых и заданных функций в ряды Ж. Фурье по полиномам А. М. Лежандра от поперечной координаты.

К преимуществам данного подхода относятся:

- возможность сокращения размерности системы разрешающих дифференциальных уравнений, что позволяет существенно уменьшить сложность решаемой задачи;
- возможность учёта поперечных сдвигов и обжатия, что позволяет более точно описать распределение напряжений в пластине, особенно в случаях, когда классическая теория Г. Кирхгофа недостаточно точна;
- возможность рассматривать не только тонкие, но и пластины средней и большой толщины;
- повышенная точность анализа концентрации напряжений и улучшенная обработка сложных условий нагружения;

• возможность получения решения с произвольной, наперёд заданной, точностью в зависимости от числа удерживаемых слагаемых в разложениях заданных и искоемых функций.

Построение решений задач статики с использованием разложений заданных и искоемых функций по системам ортогональных (квазиортогональных) полиномов является актуальным, о чём свидетельствует ряд публикаций последних лет.

Так, в статье О. В. Гермидер, В. Н. Попова [2] рассматривается задача об изгибе тонкой ортотропной прямоугольной пластины, зажатой по краям. Решение получено с использованием полиномов А. М. Лежандра и П. Л. Чебышёва первого рода. Функция, аппроксимирующая решение бигармонического уравнения для ортотропной пластины, представлена в виде разложения в двойной ряд по этим полиномам.

В работе Д. П. Голоскокова, А. В. Матросова [3] исследуется изгиб защемлённой тонкой ортотропной пластины методом Л. В. Канторовича. Базисными функциями служат полиномы специального вида, построенные на основе классических полиномов К. Г. Якоби и удовлетворяющие условиям защемления. Свойство «квазиортогональности» первых и вторых производных полиномов позволяет сразу выписать формулу для прогиба пластины в виде ряда.

В публикациях Д. А. Иванычева с соавторами [4, 5] представлена методика построения упругого поля для трансверсально-изотропного тела вращения. Решения задач проводились методом граничных состояний. Проводится ортогонализация базисов состояний, и искомое состояние раскладывается в ряд Ж. Фурье по элементам ортонормированного базиса. Коэффициенты этих рядов есть квадратуры.

Целью настоящей статьи является построение фундаментальных матриц моментов и перерезывающих сил на базе обобщённой теории пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации.

Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластину толщины $2h$, на которую действует сосредоточенная сила, приложенная в начале координат и вызывающая состояние изгиба. Отнесём пластину к безразмерной системе координат x_1, x_2, x_3 , определённой с точностью до полутолщины пластины h . Здесь x_1, x_2 – координаты точки в срединной плоскости, x_3 – поперечная координата.

В рамках $\{1,0\}$ -аппроксимации имеют место такие разложения компонент НДС в ряды Ж. Фурье по полиномам А. М. Лежандра $P_k = P_k(x_3)$ от толщинной координаты x_3 [1]:

- компоненты вектора перемещений

$$u_k(x_1, x_2, x_3) = \gamma_k(x_1, x_2)P_1(x_3) \quad (k=1, 2); \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = w_0(x_1, x_2)P_0(x_3),$$

где γ_k, w_0 – обобщённые перемещения (углы поворота нормали и прогиб срединной поверхности соответственно);

- ненулевые компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{kk}(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}M_k(x_1, x_2)P_1(x_3) \quad (k=1, 2); \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}H_{12}(x_1, x_2)P_1(x_3);$$

$$\sigma_{k3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}Q_{k0}(x_1, x_2)\{P_0(x_3) - P_2(x_3)\} \quad (k=1, 2),$$

где M_k, H_{12} – обобщённые изгибающие и крутящий моменты; Q_{k0} – обобщённые перерезывающие силы;

- компоненты вектора объёмной силы

$$F_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2} m_k(x_1, x_2) P_1(x_3) \quad (k=1, 2); \quad F_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} q(x_1, x_2) P_0(x_3).$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений, описывающая состояние изгиба ортотропных пластин в рамках $\{1,0\}$ -аппроксимации, включает в себя [1]:

- уравнения равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} L_{k1}\gamma_1 + L_{k2}\gamma_2 + L_{k3}w_0 &= -m_k(x_1, x_2) \quad (k=1, 2); \\ L_{31}\gamma_1 + L_{32}\gamma_2 + L_{33}w_0 &= q(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где L_{kj} – дифференциальные операторы второго порядка

$$\begin{aligned} L_{11} &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_1; \quad L_{12} = L_{21} = (v_{21}D_1 + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ L_{33} &= -\left(\Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right); \quad L_{22} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_2; \\ L_{k3} = L_{3k} &= -\Lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k=1, 2); \quad D_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{1}{1-v_{12}v_{21}}; \quad D_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{1}{1-v_{12}v_{21}}; \\ D_{12} &= \frac{2G_{12}}{3E}; \quad \Lambda_k = \frac{5G_{k3}}{3E} \quad (k=1, 2); \quad E = \sqrt{E_1 E_2}; \end{aligned}$$

E_1, E_2 – модули Т. Юнга для направлений x_1, x_2 соответственно; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига, характеризующие изменение углов между главными направлениями x_1 и x_2, x_1 и x_3, x_2 и x_3 соответственно; v_{12}, v_{21} – коэффициенты С. Д. Пуассона ($E_2 v_{12} = E_1 v_{21}$);

- соотношения упругости в перемещениях

$$\begin{aligned} M_1 &= D_1 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + v_{21} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right); \quad M_2 = D_2 \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + v_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right); \quad H_{12} = D_{12} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); \\ Q_{k0} &= \Lambda_k \left(\gamma_k + \frac{\partial w_0}{\partial x_k} \right) \quad (k=1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

Обобщённые моменты в уравнениях (1), (2) определены с точностью до значения Eh^2 , а обобщённые перерезывающие силы – с точностью до Eh .

Предполагаем, что на упругие константы ортотропного материала пластины не наложено дополнительное ограничение в виде «гипотетического» модуля сдвига. Т. е. в общем случае выполнено неравенство

$$G_{12} \neq \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{v_{12} v_{21}})}.$$

Действие сосредоточенной силы, приложенной на пластину, моделируется с помощью двумерной дельта-функции П. Дирака $\delta(x_1, x_2)$ [6]. Поэтому правые части уравнений системы (1) берём в виде

$$m_k(x_1, x_2) = m_k^* \delta(x_1, x_2) \quad (k = 1, 2); \quad q(x_1, x_2) = q^* \delta(x_1, x_2), \quad (3)$$

где $m_k^* = \text{const}$; $q^* = \text{const}$.

Понятие фундаментальной матрицы. В силу линейности системы уравнений (1) с правыми частями (3) каждую из компонент сосредоточенной силы можно рассматривать поочерёдно. Тогда фундаментальное решение задачи (1), (2) в общем виде можно представить в виде линейной комбинации трёх решений, соответствующих таким случаям нагружения пластины:

$$m_1(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2); \quad m_2(x_1, x_2) = 0; \quad q(x_1, x_2) = 0; \quad (4)$$

$$m_1(x_1, x_2) = 0; \quad m_2(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2); \quad q(x_1, x_2) = 0; \quad (5)$$

$$m_1(x_1, x_2) = 0; \quad m_2(x_1, x_2) = 0; \quad q(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2). \quad (6)$$

Фундаментальные матрицы обобщённых перемещений, обобщённых моментов и обобщённых перерезывающих сил соответственно имеют вид [7]:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^{01} & \gamma_2^{01} & w_0^{01} \\ \gamma_1^{02} & \gamma_2^{02} & w_0^{02} \\ \gamma_1^{03} & \gamma_2^{03} & w_0^{03} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} M_1^{01} & M_2^{01} & H_{12}^{01} \\ M_1^{02} & M_2^{02} & H_{12}^{02} \\ M_1^{03} & M_2^{03} & H_{12}^{03} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} Q_{10}^{01} & Q_{20}^{01} \\ Q_{10}^{02} & Q_{20}^{02} \\ Q_{10}^{03} & Q_{20}^{03} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где верхние индексы «01», «02», «03» отвечают случаям действия сосредоточенных сил вида (4), (5), (6) соответственно.

Для построения фундаментальных матриц (7) нужно решить три системы

$$\begin{aligned} L_{k1}\gamma_1^{0l} + L_{k2}\gamma_2^{0l} + L_{k3}w_0^{0l} &= -\delta_k^l \delta(x_1, x_2) \quad (k = 1, 2; l = \overline{1, 3}); \\ L_{31}\gamma_1^{0l} + L_{32}\gamma_2^{0l} + L_{33}w_0^{0l} &= \delta_3^l \delta(x_1, x_2) \quad (l = \overline{1, 3}), \end{aligned} \quad (8)$$

где δ_k^l – символ Л. Кронекера:

$$\delta_k^l = \begin{cases} 1, l = k; \\ 0, l \neq k. \end{cases}$$

После решения систем (8) внутренние силовые факторы определяются из соотношений упругости в перемещениях (2), записанных в виде

$$\begin{aligned} M_1^{0l} &= D_1 \left(\frac{\partial \gamma_1^{0l}}{\partial x_1} + \nu_{21} \frac{\partial \gamma_2^{0l}}{\partial x_2} \right); \quad M_2^{0l} = D_2 \left(\frac{\partial \gamma_2^{0l}}{\partial x_2} + \nu_{12} \frac{\partial \gamma_1^{0l}}{\partial x_1} \right) \quad (l = \overline{1, 3}); \\ H_{12}^{0l} &= D_{12} \left(\frac{\partial \gamma_1^{0l}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2^{0l}}{\partial x_1} \right); \quad Q_{k0}^{0l} = \Lambda_k \left(\gamma_k^{0l} + \frac{\partial w_0^{0l}}{\partial x_k} \right) \quad (k = 1, 2; l = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (9)$$

Методика решения задачи базируется на применении двумерного интегрального преобразования Ж. Фурье [8] к разрешающим системам дифференциальных уравнений

(8), (9). Методика обращения трансформант основана на применении специальной G -функции, интегральное представление которой имеет вид [9]

$$G_{n,v}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{v-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{v-n+1} J_{v+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho \quad (10)$$

$$\left(r > 0; \operatorname{Re} z > 0; -1 < \operatorname{Re} v < n + \frac{3}{2}\right),$$

где $J_v(x)$ – функция Ф. В. Бесселя первого рода порядка v .

В результате применения двумерного интегрального преобразования Ж. Фурье [8] к соотношениям (8) получим три системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^{0l} \\ \tilde{\gamma}_2^{0l} \\ \tilde{w}_0^{0l} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \delta_1^l \\ \delta_2^l \\ -\delta_3^l \end{pmatrix} \quad (l = \overline{1, 3}), \quad (11)$$

где $\tilde{\gamma}_1^{0l}$, $\tilde{\gamma}_2^{0l}$, $\tilde{w}_0^{0l}$ – трансформанты обобщённых перемещений;

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} D_1 \xi_1^2 + D_{12} \xi_2^2 + \Lambda_1 & (v_{21} D_1 + D_{12}) \xi_1 \xi_2 & -i \Lambda_1 \xi_1 \\ (v_{21} D_1 + D_{12}) \xi_1 \xi_2 & D_{12} \xi_1^2 + D_2 \xi_2^2 + \Lambda_2 & -i \Lambda_2 \xi_2 \\ -i \Lambda_1 \xi_1 & -i \Lambda_2 \xi_2 & -\Lambda_1 \xi_1^2 - \Lambda_2 \xi_2^2 \end{bmatrix};$$

ξ_1 , ξ_2 – координаты точки в пространстве трансформант.

Выполним замену независимых переменных в пространстве оригиналов и трансформант:

$$\eta_1 = \sqrt{\Lambda_1} \xi_1; \quad \eta_2 = \sqrt{\Lambda_2} \xi_2; \quad y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\Lambda_1}}; \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\Lambda_2}},$$

тогда СЛАУ (11) примут вид:

$$\begin{bmatrix} A_1 \eta_1^2 + A_4 \eta_2^2 + 1 & A_3 \eta_1 \eta_2 & -i \eta_1 \\ A_3 \eta_1 \eta_2 & A_4 \eta_1^2 + A_2 \eta_2^2 + 1 & -i \eta_2 \\ -i \eta_1 & -i \eta_2 & -\eta_1^2 - \eta_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^{01} \sqrt{\Lambda_1} \\ \tilde{\gamma}_2^{01} \sqrt{\Lambda_2} \\ \tilde{w}_0^{01} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{\delta_1^l}{\sqrt{\Lambda_1}} \\ \frac{\delta_2^l}{\sqrt{\Lambda_2}} \\ -\delta_3^l \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$A_1 = \frac{D_1}{\Lambda_1^2}; \quad A_2 = \frac{D_2}{\Lambda_2^2}; \quad A_3 = \frac{v_{21} D_1 + D_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2}; \quad A_4 = \frac{D_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2}.$$

Решение СЛАУ (12) имеет вид

$$\tilde{\gamma}_k^{0l} = \sum_{m=0}^{14} \beta_{km}^{0l} \tilde{K}_m \quad (k=1, 2); \quad \tilde{w}_0^{0l} = \sum_{m=0}^{14} \beta_{3m}^{0l} \tilde{K}_m \quad (l=\overline{1, 3}), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0 &= \frac{1}{\Delta}; \quad \tilde{K}_1 = \frac{\eta_1^4}{\Delta}; \quad \tilde{K}_2 = \frac{\eta_2^4}{\Delta}; \quad \tilde{K}_3 = \frac{\eta_1^2 \eta_2^2}{\Delta}; \quad \tilde{K}_4 = \frac{\eta_1^2}{\Delta}; \quad \tilde{K}_5 = \frac{\eta_1^3 \eta_2}{\Delta}; \\ \tilde{K}_6 &= \frac{\eta_1 \eta_2^3}{\Delta}; \quad \tilde{K}_7 = \frac{\eta_1 \eta_2}{\Delta}; \quad \tilde{K}_8 = \frac{i \eta_1 \eta_2^2}{\Delta}; \quad \tilde{K}_9 = \frac{i \eta_1^3}{\Delta}; \quad \tilde{K}_{10} = \frac{i \eta_1}{\Delta}; \quad \tilde{K}_{11} = \frac{\eta_2^2}{\Delta}; \\ \tilde{K}_{12} &= \frac{i \eta_1^2 \eta_2}{\Delta}; \quad \tilde{K}_{13} = \frac{i \eta_2^3}{\Delta}; \quad \tilde{K}_{14} = \frac{i \eta_2}{\Delta}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= -(\eta_1^2 + \eta_2^2) \left\{ A_4 (A_1 \eta_1^2 + A_2 \eta_2^2) + (A_4^2 - A_3^2 + A_1 A_2) \eta_1^2 \eta_2^2 \right\} - \\ &\quad - \left\{ A_1 \eta_1^4 + 2(A_3 + A_4) \eta_1^2 \eta_2^2 + A_2 \eta_2^4 \right\}. \end{aligned}$$

Ненулевые коэффициенты в формулах (13) равны

$$\begin{aligned} \beta_{11}^{0l} &= -\frac{\delta_1^l A_4}{\Lambda_1}; \quad \beta_{12}^{0l} = -\frac{\delta_1^l A_2}{\Lambda_1}; \quad \beta_{13}^{0l} = -\frac{\delta_1^l}{\Lambda_1} (A_2 + A_4); \quad \beta_{14}^{0l} = -\frac{\delta_1^l}{\Lambda_1}; \\ \beta_{15}^{0l} &= \beta_{16}^{0l} = \frac{\delta_2^l A_3}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}; \quad \beta_{17}^{0l} = -\frac{\delta_2^l}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}; \quad \beta_{18}^{0l} = \frac{\delta_3^l}{\sqrt{\Lambda_1}} (A_3 - A_2); \quad \beta_{19}^{0l} = -\frac{\delta_3^l A_4}{\sqrt{\Lambda_1}}; \\ \beta_{1,10}^{0l} &= -\frac{\delta_3^l}{\sqrt{\Lambda_1}}; \quad \beta_{21}^{0l} = -\frac{\delta_2^l A_1}{\Lambda_2}; \quad \beta_{22}^{0l} = -\frac{\delta_2^l A_4}{\Lambda_2}; \quad \beta_{23}^{0l} = -\frac{\delta_2^l}{\Lambda_2} (A_1 + A_4); \\ \beta_{25}^{0l} &= \beta_{26}^{0l} = \frac{\delta_1^l A_3}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}; \quad \beta_{27}^{0l} = -\frac{\delta_1^l}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}; \quad \beta_{2,11}^{0l} = -\frac{\delta_2^l}{\Lambda_2}; \quad \beta_{2,12}^{0l} = \frac{\delta_3^l}{\sqrt{\Lambda_2}} (A_3 - A_1); \\ \beta_{2,13}^{0l} &= -\frac{\delta_3^l A_4}{\sqrt{\Lambda_2}}; \quad \beta_{2,14}^{0l} = -\frac{\delta_3^l}{\sqrt{\Lambda_2}}; \quad \beta_{30}^{0l} = -\delta_3^l; \quad \beta_{31}^{0l} = -\delta_3^l A_1 A_4; \quad \beta_{32}^{0l} = -\delta_3^l A_2 A_4; \\ \beta_{33}^{0l} &= -\delta_3^l (A_4^2 + A_1 A_2 - A_3^2); \quad \beta_{34}^{0l} = -\delta_3^l (A_1 + A_4); \quad \beta_{36}^{0l} = -\delta_3^l (A_2 + A_4); \\ \beta_{38}^{0l} &= \frac{\delta_1^l}{\sqrt{\Lambda_1}} (A_2 - A_3); \quad \beta_{39}^{0l} = \frac{\delta_1^l A_4}{\sqrt{\Lambda_1}}; \quad \beta_{3,10}^{0l} = \frac{\delta_1^l}{\sqrt{\Lambda_1}}; \\ \beta_{3,12}^{0l} &= \frac{\delta_2^l}{\sqrt{\Lambda_2}} (A_1 - A_3); \quad \beta_{3,13}^{0l} = \frac{\delta_2^l A_4}{\sqrt{\Lambda_2}}; \quad \beta_{3,14}^{0l} = \frac{\delta_2^l}{\sqrt{\Lambda_2}}. \end{aligned}$$

Методику обращения покажем на примере трансформанты ядра $\tilde{K}_5$ [шестая формула (14)]. Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Ж. Фурье [8], получим:

$$K_5 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1^3 \eta_2}{\Delta} e^{-i(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2)} d\eta_1 d\eta_2. \quad (15)$$

Выделяя в интегралах (15) чётные и нечётные части, найдём

$$K_5 = -\frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\eta_1^3 \eta_2}{\Delta} \sin \eta_1 y_1 \sin \eta_2 y_2 d\eta_1 d\eta_2. \quad (16)$$

В интегралах (16) перейдём к полярным координатам по формулам

$$y_1 = r \cos \varphi; \quad y_2 = r \sin \varphi; \quad \eta_1 = \rho \cos \theta; \quad \eta_2 = \rho \sin \theta,$$

тогда

$$K_5 = \frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta \sin \theta d\theta}{a(\theta)} \int_0^\infty \frac{\rho \sin(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \sin(r\rho \sin \varphi \sin \theta)}{\rho^2 + c^2(\theta)} d\rho,$$

где

$$a(\theta) = A_4 (A_1 \cos^4 \theta + A_2 \sin^4 \theta) + (A_4^2 - A_3^2 + A_1 A_2) \cos^2 \theta \sin^2 \theta;$$

$$c^2(\theta) = \frac{A_1 \cos^4 \theta + 2(A_3 + A_4) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + A_2 \sin^4 \theta}{a(\theta)}. \quad (17)$$

Применяя разложение К. Г. Якоби–К. Т. Ангера [9]

$$\begin{aligned} \cos(x \cos \varphi \cos \theta) \sin(x \sin \varphi \sin \theta) = \\ = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \sin(2n+1)\varphi \sin(2n+1)\theta, \end{aligned}$$

преобразуем выражение (17) к виду

$$K_5 = \frac{4}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin 2n\varphi \int_0^{\pi/2} a_{5,n}(\theta) d\theta \int_0^\infty \frac{\rho J_{2n}(r\rho)}{\rho^2 + c^2(\theta)} d\rho, \quad (18)$$

где

$$a_{5,n}(\theta) = \frac{\cos^3 \theta \sin \theta \sin 2n\theta}{a(\theta)} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Сравнивая интеграл, входящий в формулу (18), с интегральным представлением специальной G -функции (10), заметим, что

$$\int_0^\infty \frac{\rho J_{2n}(r\rho)}{\rho^2 + c^2(\theta)} d\rho = (-1)^n G_{n,n}(rc(\theta)) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Окончательно выражение для K_5 примет вид:

$$K_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\varphi \int_0^{\pi/2} b_{5,n}(\theta) G_{n,n}(rc(\theta)) d\theta, \quad (19)$$

где

$$b_{5,n}(\theta) = -\frac{4}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} a_{5,n}(\theta) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Таким образом, оригиналы обобщённых перемещений (13) имеют вид:

$$\gamma_k^{0l} = \sum_{m=0}^{14} \beta_{km}^{0l} K_m \quad (k=1, 2); \quad w_0^{0l} = \sum_{m=0}^{14} \beta_{3m}^{0l} K_m \quad (l=\overline{1, 3}), \quad (20)$$

где функции K_k определяются из выражений, аналогичных (19).

Подставляя выражения для обобщённых перемещений (20) в соотношения упругости в перемещениях (9), получим

$$\begin{aligned} M_1^{0l} &= D_1 \left(\sum_{m=0}^{14} \beta_{1m}^{0l} K_{m,1} + \nu_{21} \sum_{m=0}^{14} \beta_{2m}^{0l} K_{m,2} \right); \quad M_2^{0l} = D_2 \left(\sum_{m=0}^{14} \beta_{2m}^{0l} K_{m,2} + \nu_{12} \sum_{m=0}^{14} \beta_{1m}^{0l} K_{m,1} \right); \\ H_{12}^{0l} &= D_{12} \left(\sum_{m=0}^{14} \beta_{1m}^{0l} K_{m,2} + \sum_{m=0}^{14} \beta_{2m}^{0l} K_{m,1} \right); \\ Q_{k0}^{0l} &= \Lambda_k \left(\sum_{m=0}^{14} \beta_{km}^{0l} K_m + \sum_{m=0}^{14} \beta_{3m}^{0l} K_{m,k} \right) \quad (k=1, 2), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$K_{m,k} = \frac{\partial K_m}{\partial x_k} \quad (k=1, 2; m=\overline{1, 14}).$$

При нахождении производных в соотношениях (21) использована формула дифференцирования специальной G -функции [9]. Применительно к выражению (19) эта формула даст

$$\begin{aligned} K_{5,k} &= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \frac{x_1 x_2}{x_k r^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2} b_{5,n}(\theta) G_{n,n}(rc(\theta)) d\theta + \\ &+ \frac{2}{\Lambda_k} \frac{x_k}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\varphi \int_0^{\pi/2} b_{5,n}(\theta) \{n G_{n,n}(rc(\theta)) - G_{n,n+1}(rc(\theta))\} d\theta \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

Анализ результатов. Численные исследования посвящены выявлению влияния упругих констант ортотропного материала пластины на элементы фундаментальных матриц [вторая и третья матрицы в формулах (7)].

На рис. 1–3 представлены графики ненулевых обобщённых внутренних силовых факторов, составляющих фундаментальные матрицы (7). Рис. 1 соответствует случаю действия сосредоточенной силы вида (4), рис. 2 – вида (5), рис. 3 – вида (6). Все графики построены вдоль оси абсцисс x_1 при $x_2 = 0$.

Рассмотрены такие варианты материалов пластины (табл. 1):

- I – модельный изотропный материал [10] (пунктирные линии на рис. 1–3);
- O – ортотропный материал (волокнистый стеклопластик ВМ-1) [11] (сплошные линии на рис. 1–3).

Таблица 1
Механические характеристики материалов

Материал	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}
<i>И</i>	4,76	4,76	4,76	2,071	2,071	2,071	0,149
<i>О</i>	4,76	2,07	1,45	0,531	0,501	0,434	0,149

В табл. 1 константы E_k , G_{kj} приведены с точностью до 10^{10} Па.

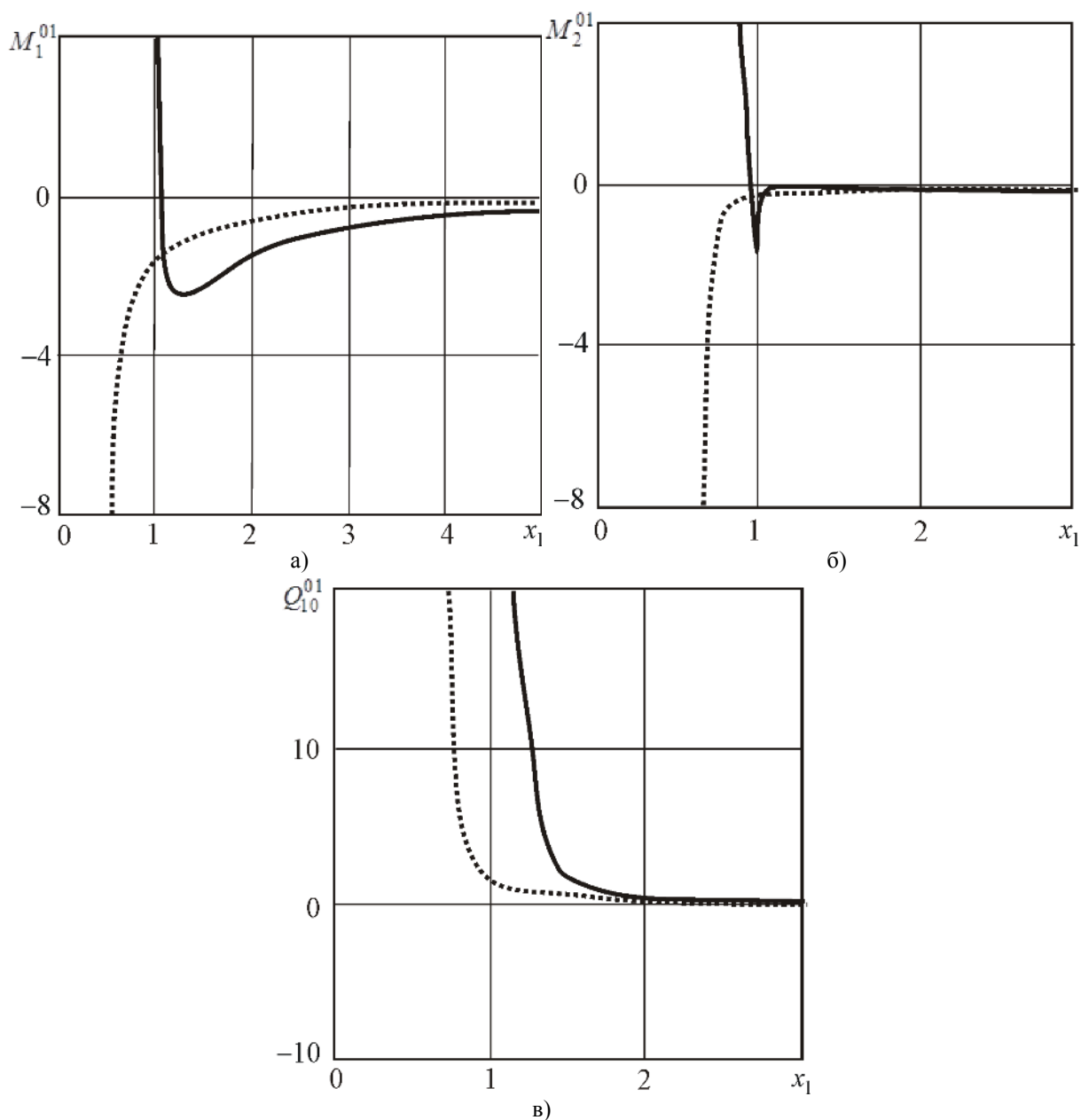


Рис. 1. Внутренние силовые факторы при действии сосредоточенной силы вида (4):

а – изгибающий момент M_1^{01} ; б – изгибающий момент M_2^{01} ;

в – перерезывающая сила Q_{10}^{01}

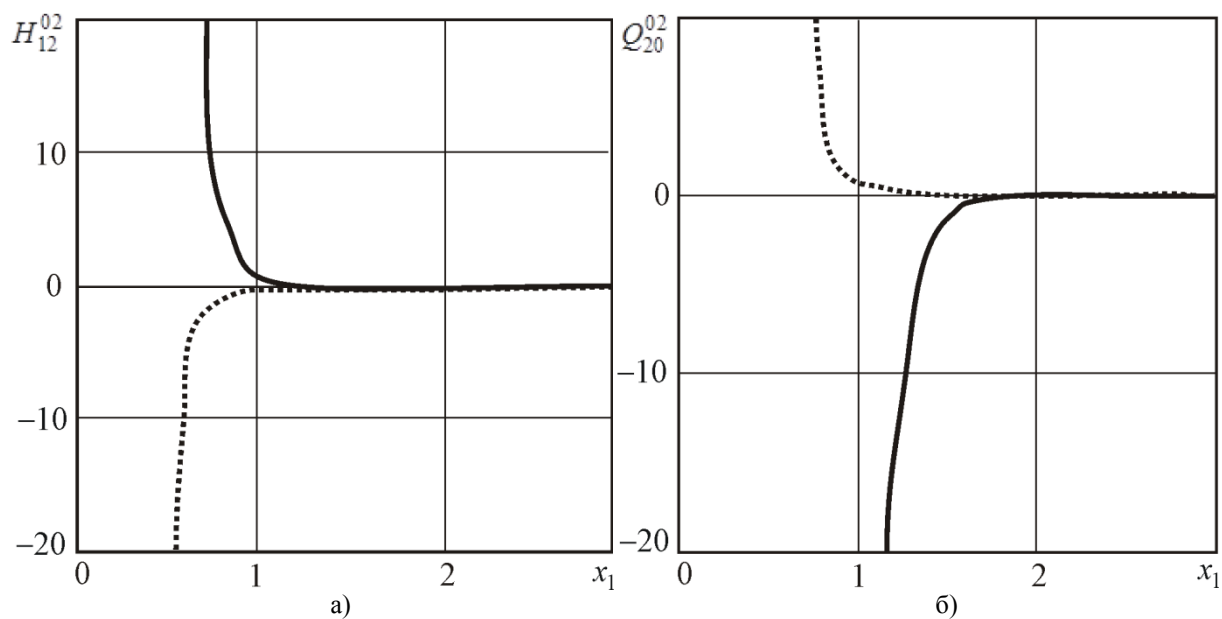
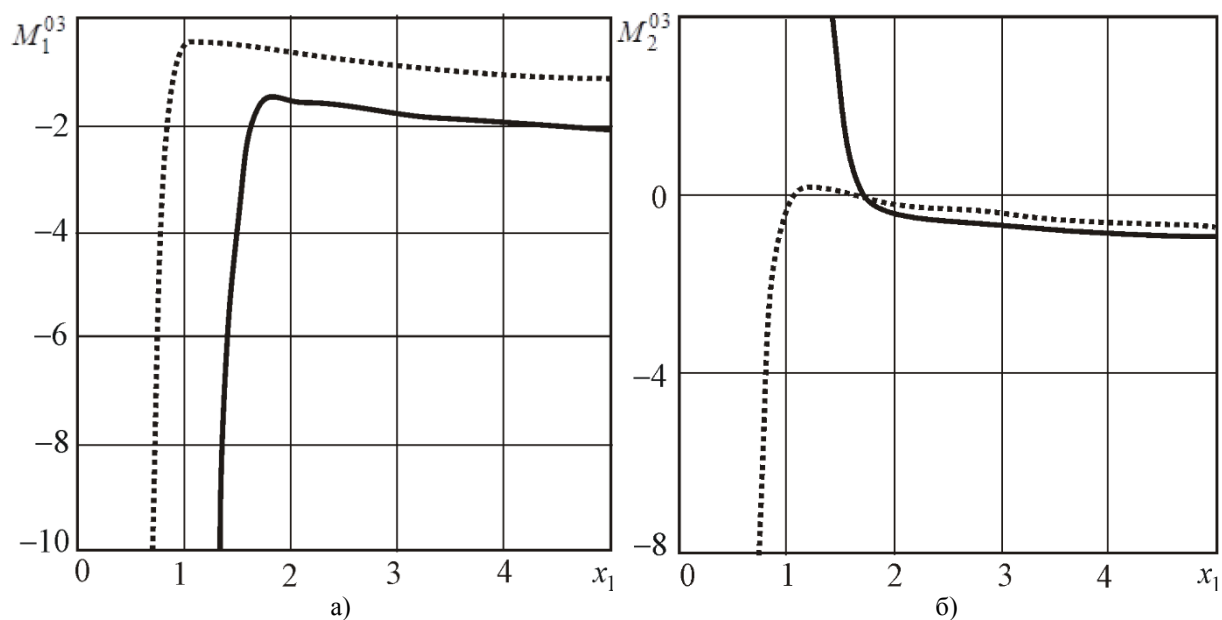


Рис. 2. Внутренние силовые факторы при действии сосредоточенной силы вида (5):
а – крутящий момент H_{12}^{02} ; б – перерезывающая сила Q_{20}^{02}



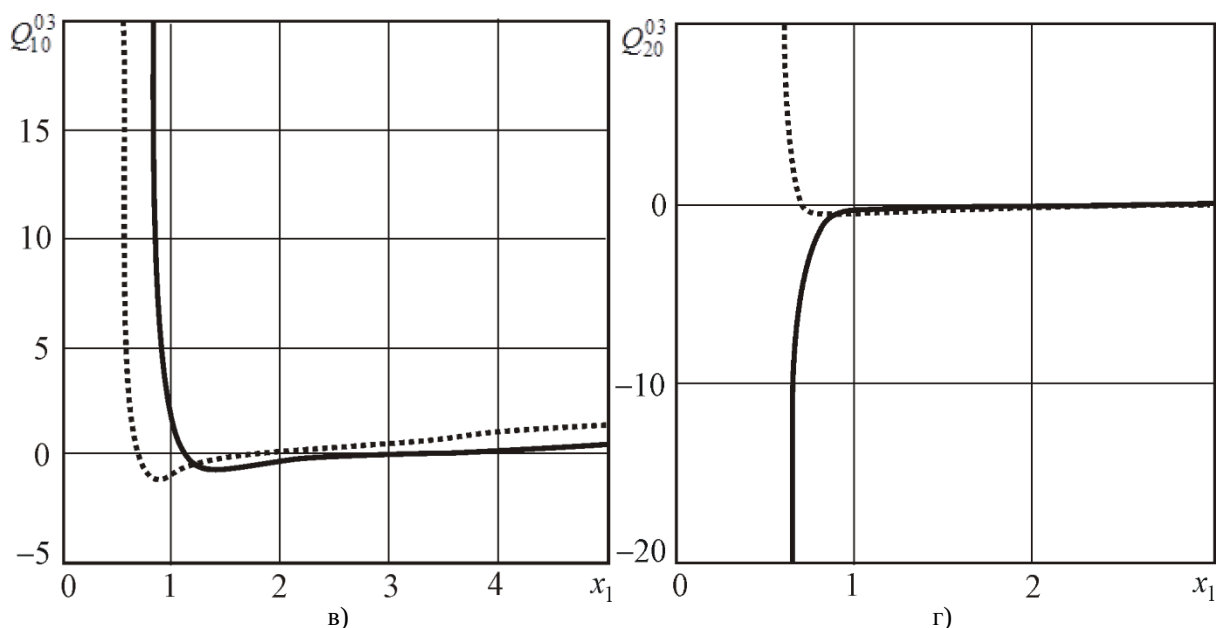


Рис. 3. Внутренние силовые факторы при действии сосредоточенной силы вида (6):

а – изгибающий момент M_1^{03} ; б – изгибающий момент M_2^{03} ;
 в – перерезывающая сила Q_{10}^{03} ; г – перерезывающая сила Q_{20}^{03}

Из рис. 1–3 видно, что механические характеристики ортотропного материала пластины при отсутствии «гипотетического» модуля сдвига для различных вариантов действия сосредоточенных сил оказывают существенное влияние на величину обобщённых моментов и обобщённых перерезывающих сил, составляющих фундаментальные матрицы. Особенно значительным это влияние является в окрестности сосредоточенного силового воздействия.

Выводы. Впервые построены фундаментальные матрицы моментов и перерезывающих сил для состояния изгиба ортотропной пластины на базе обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. На упругие постоянные материала пластины не наложено ограничений в виде «гипотетического» модуля сдвига.

Проведены численные исследования элементов фундаментальных матриц в пластине при действии сосредоточенных сил единичной интенсивности, действующих вдоль осей координат. Рассмотрен как ортотропный, так и изотропный (предельный случай) материал пластины. Из представленных графиков следует, что при проведении прочностных расчётов пластин учёт параметров ортотропии материала является существенным во избежание значительных погрешностей, особенно в окрестности сосредоточенного силового воздействия ($x_1 \ll 1$).

В дальнейшем результаты работы позволят:

- найти более точное решение аналогичной задачи в рамках обобщённой теории пластин в варианте $\{1,2\}$ -аппроксимации;
- получить решение задачи о локальных силовых воздействиях, распределённых по разным законам по областям различной геометрии.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (шифр FRRE-2026-0021).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – Киев : Наукова думка, 1982. – 296 с.
2. Germider O. V. On the calculation of the bending of a thin orthotropic plate using Legendre and Chebyshev polynomials of the first kind / O. V. Germider, V. N. Popov // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. – 2024. – Vol. 17. – No. 5. – P. 586-598. – EDN: JSPTAR.
3. Голоскоков Д. П. Изгиб защемленной тонкой ортотропной пластины методом Канторовича / Д. П. Голоскоков, А. В. Матросов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2025. – Т. 21, № 3. – С. 345-360. – EDN: PLHUYS. – DOI: 10.21638/spbu10.2025.303.
4. Иванычев Д. А. Построение упругого поля для анизотропного тела в условиях несимметричной краевой задачи теории упругости / Д. А. Иванычев, Д. В. Ездакова, С. А. Пономарев // Вестник Липецкого государственного технического университета. – 2025. – № 2 (59). – С. 93-99. – EDN: ACZRQO. – DOI: 10.53015/30343275_2025_2_93.
5. Иванычев Д. А. Построение упругих полей для анизотропных тел от действия нагрузки локального характера / Д. А. Иванычев, Д. И. Балыкин, Д. В. Ездакова, Е. А. Малявин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2024. – Т. 21, № 4. – С. 29-37. – EDN: LEABMC. – DOI: 10.31429/vestnik-21-4-29-37.
6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – Москва : Наука, 1976. – 280 с.
7. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев : А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). – С. 159-196.
8. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.
9. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебное пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.
10. Нескородев Р. Н. Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке / Р. Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 3-4 (60-61). – С. 60-68. – EDN: CXFOZQ.
11. Ашкенази Е. К. Анизотропия конструкционных материалов : справочник / Е. К. Ашкенази, Э. В. Ганов. – Ленинград : Машиностроение, 1980. – 247 с.

REFERENCES

1. Pelekh, B.L. & Laz'ko, V.A. (1982) *Layered anisotropic plates and shells with stress concentrators*. Kiev : Naukova dumka. 296 p. (In Russian).
2. Germider, O.V. & Popov, V.N. (2024) On the calculation of the bending of a thin orthotropic plate using Legendre and Chebyshev polynomials of the first kind. *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*. 17 (5), 586-598.
3. Goloskokov, D.P. & Matrosov, A.V. (2025) Bending of a clamped thin orthotropic plate by the Kantorovich method. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya* = *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 21 (3), 345–360, doi: <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.303>. (In Russian).
4. Ivanychev, D.A. & Ezdakova, D.V. & Ponomarev, S.A. (2025) Mapping an elastic field for an anisotropic body under the conditions of an asymmetrical boundary problem of elasticity theory. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Vestnik of Lipetsk State Technical University*. 2 (59), 93-99, doi: 10.53015/30343275_2025_2_93. (In Russian).
5. Ivanychev, D.A. & Balykin, D.I. & Yezdakova, D.V. & Malyavin, E.A. (2024) Construction of Elastic Fields for Anisotropic Bodies under the Action of a Local Load. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* = *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 21 (4), 29-37, doi: 10.31429/vestnik-21-4-29-37. (In Russian).
6. Vladimirov, V.S. (1976) *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Moscow : Nauka. 280 p. (In Russian).
7. Shevchenko, V.P. (1998) *Methods of fundamental solutions in the theory of orthotropic shells* In: Guz, A.N., Kosmodamiansky, A.S., Shevchenko, V.P. (eds.) *Stress Concentration (Mechanics of Composites: In 12 vols. Vol. 7)*. Kiev : A.S.K., pp. 159–196. (In Russian).
8. Sneddon, I. (1955) *Fourier transforms*. Moscow : Izdatelstvo inostrannoy literatury. 668 p. (In Russian).

9. Khizhnyak, V.K. & Shevchenko, V.P. (1980) *Mixed problem in the theory of plates and shells*. Donetsk : DonGU. 128 p. (In Russian).
10. Neskorochev, R.N. (2017) The decision of a problem of bend orthotropic plate in the improved theory. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 3-4 (60-61), 60-68. (In Russian).
11. Ashkenazi, E.K. & Ganov, E.V. (1980) *Anisotropy of structural materials*. Leningrad: Mechanical Engineering. 247 p. (In Russian).

**CONSTRUCTION OF THE FUNDAMENTAL MATRICES OF MOMENTS AND SHEAR FORCES
FOR THE CASE OF BENDING OF AN ORTHOTROPIC PLATE BASED ON {1,0}-
APPROXIMATION IN THE ABSENCE OF A «HYPOTHETICAL» SHEAR MODULUS**

N. S. Bondarenko

Fundamental matrices of internal force factors in an orthotropic plate under the action of a concentrated force causing a bending state are constructed. The system of differential equations of statics based on the generalized plate theory in the {1,0}-approximation variant is taken as the resolving one. The case of the absence of the «hypothetical» shear modulus is considered. Numerical studies of the dependence of generalized moments and shear forces on the elastic constants of the plate material are carried out.

Keywords: {1,0}-approximation; A. M. Legendre polynomials; orthotropic plate; concentrated force; two-dimensional integral transform of J. Fourier; fundamental matrix..

Поступила в редакцию 17.07.2026 г.

Бондаренко Наталья Сергеевна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной механики
и компьютерных технологий,
старший научный сотрудник НИЧ,
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: n.bondarenko123@mail.ru
ORCID: 0000-0001-5254-5545
SPIN-код: 6065-0292
AuthorID: 1223868

Bondarenko Natalya Sergeevna

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences, Docent,
Associate Professor of the Chair of Applied
Mechanics and Computer Technologies,
Senior Researcher,
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН
СДВИГА ВДОЛЬ ПЛОСКОСТИ КОНТАКТА ФУНКЦИОНАЛЬНО-
ГРАДИЕНТНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ**

© 2026. А. А. Глухов

В работе решена задача разработки численно-аналитического метода исследования процесса распространения электроупругих волн сдвига вдоль плоскости контакта функционально-градиентных пьезокерамических полупространств. Для описания физико-механических свойств функционально-градиентных пьезокерамических полупространств использовался двойной экспоненциальный закон. Реализовано интегрирование системы уравнений сдвигового электроупругого динамического деформирования для упругой непрерывно-неоднородной пьезокерамической среды класса *6mm* с помощью разработанного итерационного матричного алгоритма последовательных приближений. Получено основное дисперсионное соотношение для модели распространения локализованных электроупругих волн сдвига вдоль плоскости контакта функционально-градиентных пьезокерамических полупространств.

Ключевые слова: функционально-градиентное пьезокерамическое полупространство, экспоненциальная физико-механическая неоднородность, сдвиговые электроупругие волны, метод последовательных приближений, дисперсионное соотношение.

Введение. Пьезокерамические волноводы для локализованных связанных электроупругих волн имеют самый широкий круг применений в акустоэлектронных компонентах радиотехнических устройств, и их виды постоянно совершенствуются в связи с разработкой новых типов пьезоактивных материалов [1]. К ряду таких современных материалов относятся пористая и функционально-градиентная пьезокерамика, учет свойств которых в расчетных математических моделях исследуемых волновых процессов требует разработки соответствующих специализированных численно-аналитических методик.

В частности, интерес для применений в проектировании акустоэлектронных радиокомпонентов представляет анализ процессов формирования полей сдвиговых электроупругих волн вдоль плоскости контакта функционально-градиентных пьезокерамических полупространств со специфическими пригранично локализованными зонами выраженной непрерывной неоднородности физико-механических свойств. Данная проблема является обобщением проблемы распространения сдвиговых поверхностных электромеханических волн Гуляева-Блюстейна [2] у поверхности полубесконечных пьезокерамических тел. Одним из эффективных способов описания поперечной приграничной неоднородности композитных сред является использование двойного экспоненциального закона [3–5].

Таким образом, целью настоящей работы является получение дисперсионного соотношения для модели распространения электроупругих волн сдвига вдоль плоскости контакта функционально-градиентных пьезокерамических полупространств с локализованной приграничной неоднородностью, описываемой двойной экспоненциальной функцией.

Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим волноводную структуру, образованную двумя идеально контактирующими функционально-градиентными пьезокерамическими полупространствами, занимающими области

$$\Omega_+ = \{x_1 \geq 0, x_2, x_3 \in R\},$$

$$\Omega_- = \{x_1 \leq 0, x_2, x_3 \in R\}$$

в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ упругой непрерывно-неоднородной пьезокерамической среды класса $6mm$ с осью поляризации Ox_1 соответственно. Соотношения для модулей упругости, пьезоэлектрических и диэлектрических параметров, а также параметров плотности среды имеют вид:

$$\begin{aligned} c_{ij\pm} &= c_{ij0\pm} \cdot \mathcal{G}_{\pm}(\lambda_{\pm}, \beta_{\pm}, x_1), \\ e_{ij\pm} &= e_{ij0\pm} \cdot \mathcal{G}_{\pm}(\lambda_{\pm}, \beta_{\pm}, x_1), \\ \varepsilon_{ij\pm} &= \varepsilon_{ij0\pm} \cdot \mathcal{G}_{\pm}(\lambda_{\pm}, \beta_{\pm}, x_1), \\ \rho_{\pm} &= \rho_{0\pm} \cdot \mathcal{G}_{\pm}(\lambda_{\pm}, \beta_{\pm}, x_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\mathcal{G}_{\pm}(\lambda_{\pm}, \beta_{\pm}, x_1) = \exp(\lambda_{\pm} \exp(\mp \beta_{\pm} x_1)). \quad (2)$$

Описываемый таким образом вариант распределения свойств по координатному направлению Ox_1 в полупространствах Ω_+ и Ω_- отвечает случаю приграничной локализации зон неоднородности вблизи граничной поверхности $x_1 = 0$, а физико-механические характеристики материалов в глубине полупространств при $\beta_{\pm} > 0$ асимптотически стремятся к величинам $c_{ij0\pm}$, $e_{ij0\pm}$, $\varepsilon_{ij0\pm}$, $\rho_{0\pm}$.

Исходные соотношения распространения электроупругих волн сдвига для полупространства Ω_+ запишем в виде системы дифференциальных волновых уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_1(c_{44+}\partial_1u_3) + c_{44+}\partial_2^2u_3 + \partial_1(e_{15+}\partial_1\varphi) + e_{15+}\partial_2^2\varphi - \rho_+\ddot{u}_3 &= 0, \\ \partial_1(e_{15+}\partial_1u_3) + e_{15+}\partial_2^2u_3 - \partial_1(\varepsilon_{11+}\partial_1\varphi) - e_{11+}\partial_2^2\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом представлений для упругих перемещений и потенциала квазистатического электрического поля в исследуемой электромеханической волне с циклической частотой ω и волновым числом k :

$$\begin{aligned} u_{3+}(x_1, x_2, t) &= u_{30+}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\ \varphi_+(x_1, x_2, t) &= \varphi_{0+}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)) \end{aligned} \quad (4)$$

система (3) трансформируется систему, которую удобно представить в матричной форме:

$$(\underline{A}_{1+}\partial_1^2 + \underline{A}_{3+})\underline{F}_+(x_1) = (\lambda_+\beta_+) \exp(-\beta_+x_1) \underline{A}_{2+}\partial_1\underline{F}_+(x_1), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{F}_+(x_1) &= \begin{pmatrix} u_{30+}(x_1) \\ \varphi_{0+}(x_1) \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_{1+} = \begin{pmatrix} c_{440+} & e_{150+} \\ e_{150+} & \varepsilon_{110+} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_{2+} &= \begin{pmatrix} \lambda_+\beta_+c_{440+} & \lambda_+\beta_+e_{150+} \\ \lambda_+\beta_+e_{150+} & -\lambda_+\beta_+\varepsilon_{110+} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_{3+} = \begin{pmatrix} \rho_{0+}\omega^2 - c_{440+}k^2 & -e_{150+}k^2 \\ -e_{150+}k^2 & \varepsilon_{110+}k^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение системы волновых уравнений. В качестве эффективного метода интегрирования системы (5) предложен итерационный алгоритм последовательных приближений [6–8]:

$$\begin{aligned} \underline{F}_+(x_1) &= \underline{F}_{0+}(x_1) + \underline{F}_{1+}(x_1) + \underline{F}_{2+}(x_1) + \dots + \underline{F}_{p+}(x_1) + \dots \\ (\underline{A}_{1+}\partial_3^2 + \underline{A}_{3+})\underline{F}_{0+}(x_1) &= 0, \quad (\underline{A}_{1+}\partial_3^2 + \underline{A}_{3+})\underline{F}_{1+}(x_1) = e^{-\beta_+x_3} \underline{A}_{2+}\partial_1 \underline{F}_{0+}(x_1), \dots, \\ (\underline{A}_{1+}\partial_3^2 + \underline{A}_{3+})\underline{F}_{p+}(x_1) &= e^{-\beta_+x_3} \underline{A}_{2+}\partial_3 \underline{F}_{p-1+}(x_1), \dots \end{aligned} \quad (6)$$

На первом этапе для полупространства $x_1 \geq 0$ определим начальное приближение

$$\underline{F}_{0+}(x_1) = a_{1+} \underline{\Delta}_{1+} e^{-\delta_{1+}x_1} + a_{2+} \underline{\Delta}_{2+} e^{-\delta_{2+}x_1}, \quad (7)$$

где a_{j+} – произвольные постоянные коэффициенты;

$$\underline{\Delta}_{j+} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{110+}\delta_{j+}^2 + \varepsilon_{110+}k^2 \\ e_{150+}k^2 - e_{150+}\delta_{j+}^2 \end{pmatrix};$$

δ_{j+} – удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} \delta_{j+} > 0$ корни биквадратного характеристического уравнения

$$\begin{aligned} (c_{440+}\varepsilon_{110+} - e_{150+}^2)\delta^4 + ((\rho_{0+}\omega^2 - c_{440+}k^2)\varepsilon_{110+} + c_{440+}\varepsilon_{110+}k^2 + \\ + 2e_{150+}^2k^2)\delta^2 + ((\rho_{0+}\omega^2 - c_{440+}k^2)\varepsilon_{110+}k^2 - e_{150+}^2k^4)\delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Далее, исходя из представления $\underline{F}_{0+j}(x_1) = \underline{\Delta}_{j+} e^{-\delta_{j+}x_1}$, последовательно определим

$$\begin{aligned} \underline{F}_{pj+}(x_1) &= \underline{Q}_{j+}^{(p)} \exp((-p\beta_+ + \delta_{j+})x_1), \\ \underline{Q}_{j+}^{(p)} &= \underline{M}_{0pj+}^{-1} \underline{M}_{1pj+} \underline{Q}_{j+}^{(p-1)}, \quad \underline{M}_{0pj+} = (-p\beta_+ + \delta_{j+})^2 \underline{A}_{1+} + \underline{A}_{3+}, \\ \underline{M}_{1pj+} &= ((-p-1)\beta_+ + \delta_{j+})\underline{A}_{2+}, \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\underline{Q}_{j+}^{(p)} = \underline{M}_{0pj+}^{-1} \underline{M}_{1pj+} \underline{M}_{0,p-1,j+}^{-1} \underline{M}_{1,p-1,j+} \dots \underline{M}_{01j+}^{-1} \underline{M}_{11j+} \underline{Q}_{j+}^{(0)}, \quad \underline{Q}_{j+}^{(0)} = \underline{\Delta}_{j+},$$

в результате чего для полупространства $x_1 \geq 0$ можем записать решение системы (5) в виде:

$$\underline{F}_{j+}(x_1) = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{Q}_{j+}^{(p)} \exp((-p\beta_+ + \delta_{j+})x_1) \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (9)$$

Введем следующие обозначения:

$$\underline{Q}_{j+}^{(p)} = \begin{pmatrix} q_{1jp+} \\ q_{2jp+} \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_{j+}(x_1) = \begin{pmatrix} f_{1j+}(x_1) \\ f_{2j+}(x_1) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

С учетом обозначений (10), компоненты вектор-функций $\underline{F}_{j+}(x_1)$ и векторных коэффициентов $\underline{Q}_{j+}^{(p)}$, комплексные функций волновых перемещений и потенциала квазистатического электрического поля в полупространстве $x_1 \geq 0$ запишем в форме

$$\begin{aligned}
u_{3+}(x_1, x_2, t) &= (a_{1+} f_{11+}(x_1) + a_{2+} f_{12+}(x_1)) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\
\varphi_+(x_1, x_2, t) &= (a_{1+} f_{21+}(x_1) + a_{2+} f_{22+}(x_1)) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\
f_{nj+}(x_1) &= \sum_{p=0}^{\infty} q_{njp+} \exp((-p\beta_+ + \delta_{j+})x_1) \quad (n, j = \overline{1, 2}).
\end{aligned} \quad (11)$$

Для полупространства Ω_- получение представлений

$$\begin{aligned}
u_{3-}(x_1, x_2, t) &= (a_{1-} f_{11-}(x_1) + a_{2-} f_{12-}(x_1)) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\
\varphi_-(x_1, x_2, t) &= (a_{1-} f_{21-}(x_1) + a_{2-} f_{22-}(x_1)) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\
f_{nj-}(x_1) &= \sum_{p=0}^{\infty} q_{njp-} \exp((p\beta_- + \delta_{j-})x_1) \quad (n, j = \overline{1, 2}),
\end{aligned} \quad (12)$$

реализуется по аналогичной схеме с заменой величин c_{ij0+} , e_{ij0+} , ε_{ij0+} , ρ_{0+} , δ_{j+} , λ_+ , β_+ в приведенных выше расчетных соотношениях на c_{ij0-} , e_{ij0-} , ε_{ij0-} , ρ_{0-} , $-\delta_{j-}$, λ_- , $-\beta_-$.

Получение дисперсионного соотношения. Дисперсионное соотношение для исследуемых волн является следствием соотношений, получаемых из граничных условий рассматриваемой задачи на контактной плоскости $x_1 = 0$, в качестве которых рассматриваются условия идеального электромеханического контакта

$$\begin{aligned}
u_{3+}(0, x_2, t) &= u_{3-}(0, x_2, t), \quad \varphi_+(0, x_2, t) = \varphi_-(0, x_2, t), \\
\sigma_{13+}(0, x_2, t) &= \sigma_{13-}(0, x_2, t), \quad D_{1+}(0, x_2, t) = D_{1-}(0, x_2, t),
\end{aligned} \quad (13)$$

или

$$\begin{aligned}
u_{3+}(0, x_2, t) &= u_{3-}(0, x_2, t), \quad \varphi_+(0, x_2, t) = \varphi_-(0, x_2, t), \\
(c_{44+} \partial_1 u_{3+} + e_{15+} \partial_1 \varphi_+)_{x_1=0} &= (c_{44-} \partial_1 u_{3-} + e_{15-} \partial_1 \varphi_-)_{x_1=0}, \\
(-\varepsilon_{11+} \partial_1 \varphi_+ + e_{15+} \partial_1 u_{3+})_{x_1=0} &= (-\varepsilon_{11-} \partial_1 \varphi_- + e_{15-} \partial_1 u_{3-})_{x_1=0}.
\end{aligned} \quad (14)$$

Определяемой дисперсионной функцией является функциональный определитель следующей из вышеприведенных соотношений системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка относительно коэффициентов a_{j+} , a_{j-} ($j = \overline{1, 2}$):

$$\begin{aligned}
\det \|\mathcal{G}_{nj}(\omega, k)\| &= 0 \quad (n, j = \overline{1, 4}), \\
\mathcal{G}_{1j} &= f_{1j+}(0), \quad \mathcal{G}_{1j+2} = -f_{1j-}(0) \quad (j = \overline{1, 2}); \\
\mathcal{G}_{2j} &= f_{2j+}(0), \quad \mathcal{G}_{2j+2} = -f_{2j-}(0) \quad (j = \overline{1, 2}); \\
\mathcal{G}_{3j} &= e^{\lambda_+} c_{440+} f'_{1j+}(0) + e^{\lambda_+} e_{150+} f'_{2j+}(0), \\
\mathcal{G}_{3j+2} &= -(e^{\lambda_-} c_{440-} f'_{1j-}(0) + e^{\lambda_-} e_{150-} f'_{2j-}(0)) \quad (j = \overline{1, 2}); \\
\mathcal{G}_{4j} &= e^{\lambda_+} e_{150+} f'_{1j+}(0) - e^{\lambda_+} \varepsilon_{110+} f'_{2j+}(0), \\
\mathcal{G}_{4j+2} &= -(e^{\lambda_-} e_{150-} f'_{1j-}(0) - e^{\lambda_-} \varepsilon_{110-} f'_{2j-}(0)) \quad (j = \overline{1, 2}).
\end{aligned} \quad (15)$$

Заключение. В настоящей работе разработана численно-аналитическая методика анализа процесса распространения электроупругих волн сдвига вдоль плоскости контакта функционально-градиентных пьезокерамических полупространств с локализованной приграничной неоднородностью, описываемой двойной экспоненциальной функцией. Для интегрирования системы волновых уравнений был применен разработанный

матричный итерационный алгоритм последовательных приближений. Конечным результатом исследования является дисперсионное соотношение для сдвиговых электроупругих волн в рассматриваемом волноводе.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложненными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой: монография / М.С. Аносов [и др.]; отв. ред. В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов. – Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2021. – 311 с.
2. Приказчиков Д.А., Эрбаш Б. Общее представление для волны Блюштейна-Гуляева // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 7(19). – С. 1-4. – EDN: RNCQXX. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/848.html>.
3. Карасев Д.С. Интегрирование уравнений распространения связанных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №4 (81). – С. 47–52. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-47-52. – EDN: RAPMHU.
4. Карасев Д. С. Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д. С. Карасев, С. В. Сторожев, В. А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 48–55. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN: SPYOBC.
5. Болнокин В. Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В. Е. Болнокин, А. А. Глухов, В. И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 14–19. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN: BOBAVC.
6. Глухов А.А. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности / А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 26–38. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN: EYFCHN.
7. Глухов А.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 15–22. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN: JBHEKR.
8. Глухов А.А. Локализованные волны сдвига в поперечно-неоднородном анизотропном слое между неоднородными полупространствами / А.А. Глухов, И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 93–101. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-3-93-101. – EDN: UUNEXN.

REFERENCES

1. *Acoustic waves in materials and structural elements with defects, heterogeneities, and microstructure* / M.S. Anosov [et al.]; V.I. Erofeev, A.O. Mal'khanov (eds). Nizhnij Novgorod: Nizhegorod. gos. tekhn. un-t im. R.E. Alekseeva, 2021. 311 p. (In Russian).
2. Prikazchikov D.A. & Erbash B. (2013) [On the Bluestein-Gulyaev waves of arbitrary profile] . *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii = Engineering Journal: Science and Innovation*. 7(19), 1-4, edn: RNCQXX. Retrieved from: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/848.html>.
3. Karasev D. S. & Storozhev S.V. (2022) [Integration of equations a coupled electroelastic shear waves propagation in the halfspace of functional-gradient piezoceramics] . *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 4(81), 47-52, doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-47-52, edn: RAPMHU. (In Russian).
4. Karasev D. S., Storozhev S.V. & Shaldyrvan V.A. (2022) [Integration of propagation equations of localized shear electroelastic waves in functional gradient piezoceramics with double exponential in homogeneity] . *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2(83), 48-55, doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55, edn: SPYOBC. (In Russian).

5. Bolnokin V. E., Glukhov A.A. & Storozhev V.I. (2022) [Analysis of the model of shear elastic waves propagation in a semi-infinite transversally-isotropic functional-gradient geomassif] . *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 3(80), 14-19, doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19, edn: BOBAVC. (In Russian).
6. Glukhov A.A. & Storozhev V.I. (2023) [Analysis of the model of surface Rayleigh waves propagation in a functional-gradient orthotropic half-space with a border localized zone of inhomogeneity] . *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2(83), 26-38, doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38, edn: ETYFCH. (In Russian).
7. Glukhov A.A., Storozhev V.I. & Shaldyryan V.A. (2022) [Integration of a system of equations arbitrary oriented three-partial surface waves propagation in a functional-gradient orthotropic half-space] . *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 4(81), 15-22, doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22, edn: JBHEKR. (In Russian).
8. Glukhov A.A., Moiseenko I.A. & Storozhev V.I. (2023) [Localized shear waves in a transversely inhomogeneous anisotropic layer between inhomogeneous half-spaces] . *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 3(84), 93-101, doi: 10.24412/0136-4545-2023-3-93-101, edn: UUHEXN. (In Russian).

NUMERICAL-ANALYTICAL STUDY OF A MODEL FOR THE PROPAGATION OF LOCALIZED ELECTRO-ELASTIC SHEAR WAVES ALONG THE CONTACT PLANE OF FUNCTIONAL-GRADIENT PIEZO-CERAMIC HALF-SPACES

A. A. Glukhov

The paper solves the problem of developing a numerical -analytical method for studying the process of propagation of electroelastic shear waves along the contact plane of functionally graded piezoceramic half-spaces. A double exponential law was used to describe the physicommechanical properties of functionally graded piezoceramic half-spaces. Integration of the system of equations of shear electroelastic dynamic deformation for an elastic continuously inhomogeneous piezoceramic medium of class 6mm was carried out using the developed iterative matrix algorithm of successive approximations. The main dispersion relation has been obtained for the model of the propagation of localized electroelastic shear waves along the contact plane of functionally graded piezoceramic half-spaces.

Keywords: functionally graded piezoceramic half-space, exponential physical and mechanical inhomogeneity, electroelastic shear waves, successive approximation method.

Поступила в редакцию 30.06.2026 г.

Глухов Антон Александрович

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник НИЧ,
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: antonglukhov2012@yandex.com
ORCID: 0009-0002-5536-4410
SPIN-код: 9113-6847

Glukhov Anton Alexandrovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Researcher, Research Department,
Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia.

РАСЧЁТ ВОЛНОВОГО ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ В ГИДРОПУШКЕ

© 2026 *В. К. Толстых, Ю. В. Дмитрук*

В работе рассматривается задача численного моделирования волнового течения воды в поршневой гидропушке при втекании жидкости в сужающееся сопло. Целью исследования является разработка необходимых алгоритмов численного моделирования, позволяющих количественно оценивать характеристики генерируемой импульсной струи и в дальнейшем решать задачи оптимизации параметров гидропушки, включая форму сопла. Для описания течения используется квазиодномерная нестационарная модель изэнтропического течения невязкой сжимаемой жидкости, учитывающая подвижные границы потока (траекторию поршня и передний фронт воды), условие «антикавитации» и взаимодействие потока с атмосферой на срезе сопла. Исходная система уравнений преобразована к характеристической форме, получены уравнения в обыкновенных дифференциалах вдоль характеристик первого и второго семейств. Для этих уравнений разработана конечно-разностная аппроксимация второго порядка на подвижной пространственно-временной сетке. Проведены тестовые расчёты, показывающие физически достоверное течение воды. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании сопел гидравлических систем, работающих в режиме высокоскоростного истечения жидкости, а также оценки характеристик генерируемой струи.

Ключевые слова: импульсные струи, гидропушка, метод характеристик, численное моделирование.

Введение. Импульсные движения жидкости встречаются во многих физических процессах, связанных с кратковременным и интенсивным воздействием на жидкость, в первую очередь при разрушении пород [1]. Одной из установок для получения импульсных струй высокого давления (ультраструй) является гидропушка. В процессе втекания воды в сужающееся сопло возникает интенсивное волновое течение, порождающее мощный импульс струи на выходе сопла [2]. Существенной особенностью таких движений является ярко выраженный волновой характер, проявляющийся при взаимодействии волн с границами раздела сред и между собой. Кратковременность процессов позволяет пренебречь вязкостью и теплопроводностью жидкости, однако необходимо учитывать сжимаемость жидкости из-за высокого давления [3]. Для таких волновых течений не удаётся получить аналитическое решение. Возникает задача численного моделирования гидродинамики течения воды в гидропушке для количественной оценки характеристик генерируемой струи.

Ранее подобные задачи решались [4–6], однако без достаточного учёта волнового характера течения и особенностей численной реализации на подвижных сетках. Первые конструкции гидропушки созданы под руководством Б. В. Войцеховского [4], который предложил элементарную теорию расчета параметров установок. Построенная на модели идеальной несжимаемой жидкости, эта теория плохо согласовывалась с экспериментом. Значительный вклад в теоретические исследования гидропушки внёс Г. А. Атанов [5, 6]. Для определения параметров течения Г. А. Атанов предложил газодинамическую модель, учитывающую сжимаемость жидкости. Для решения поставленных задач им были развиты численные методы характеристик и Годунова применительно к расчёту нестационарных движений жидкости.

Анализ выполненных теоретических исследований показывает, что, несмотря на значительный объём работ по внутренней баллистике поршневых гидропушек, недостаточно изучено влияние волновых процессов на течение в сопле, а также

вопросы устойчивости численных схем расчёта при решении задач оптимизации. Целью настоящей работы является разработка необходимых алгоритмов численного моделирования волнового течения воды в поршневой гидропушке при втекании жидкости в сужающееся сопло, позволяющих количественно оценивать характеристики генерируемой импульсной струи и решать задачи оптимизации параметров гидропушки, включая форму сопла.

Постановка задачи. Границы нестационарного течения воды в гидропушке представлены пространственно-временной диаграммой на рис. 1 [7]. Начало координат совмещено со входом в сопло x_a . Передний фронт Γ_{b0} потока воды в сопле начинается с момента t_0 и заканчивается истечением из сопла на $\Gamma_{b1} = x_b \times (t_1, t_2)$. Правая граница потока — это $\Gamma_b = \Gamma_{b0} \cup \Gamma_{b1}$, левая граница Γ_p — это траектория движения поршня. Границы $\Gamma_p(t)$ заднего и $\Gamma_{b0}(t)$ переднего фронта воды подвижные. Область определения состояния потока воды — это замкнутая пространственно-временная область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma_p \cup \Gamma_b \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_0 = [x_{p0}, x_a] \times t_0$ — линия начальных условий, $\Gamma_2 = [x_{p2}, x_b] \times t_2$ — терминальная линия процесса. Координаты x_{p0} и x_{p2} — начальное и конечное положение поршня гидропушки.

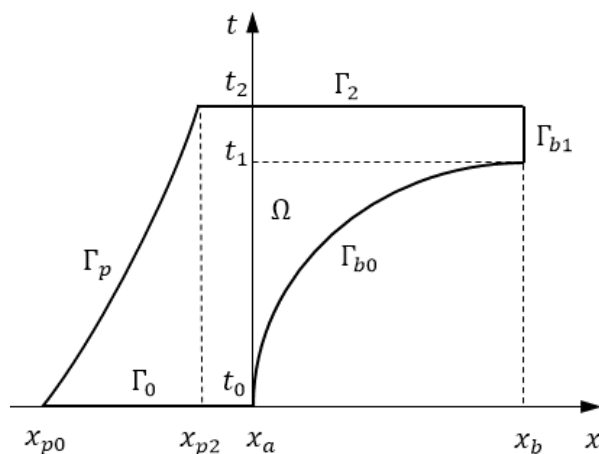


Рис. 1. Пространственно-временная диаграмма течения воды в гидропушке

Для описания течения воды в сопле используется модель изоэнтропического течения невязкой сжимаемой жидкости, включающая уравнения неразрывности, баланса импульса и состояния. Такое течение в сужающемся канале описывается квазиодномерной нестационарной моделью потока в виде квазилинейной гиперболической неоднородной системы уравнений [8]. Соответствующие уравнения исходной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad (x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \tau \in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\varphi = \frac{\rho w}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$, $c^2 = \frac{Bn\rho^{n-1}}{\rho_0^n}$ — скорость звука в воде, σ — площадь поперечного сечения сопла, B, n — постоянные в уравнении состояния воды в форме Тэйта. Система уравнений неоднородная, но без диссипации энергии из-за изоэнтропического течения.

В работе рассматриваются дозвуковые (докритические) течения воды, для которых выполняется условие $w < c_0 = 1475$ м/с, где c_0 — скорость звука в невозмущенной среде. Кроме того, принятая математическая модель не допускает появления кавитации, поэтому при выполнении условия $\rho < \rho_0$ принимается $\rho \leftarrow \rho_0$.

Модель состоит из двух уравнений с первыми производными и имеет соответственно два граничных условия на Γ_p и Γ_b . Слева на траектории поршня — это уравнение движения поршня, которое с учётом уравнения состояния Тэйта принимает вид условия второго рода:

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\sigma_a B}{m_p} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right) = 0 \text{ на } \Gamma_p. \quad (2)$$

Справа на границе x_b , взаимодействующей с атмосферой, мы имеем условие первого рода:

$$\rho = \rho_0 \text{ на } \Gamma_b. \quad (3)$$

Начальные условия:

$$\rho(x, t_0) = \rho_0; \quad w(x, t_0) = w_0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (4)$$

Здесь m_p — масса поршня, ρ_0 — плотность воды при атмосферном давлении, w_0 — скорость воды и поршня до начала втекания в сопло.

Характеристическая форма исходных уравнений. Как и всякая гиперболическая система, система (1) имеет характеристические направления $\lambda_{1,2}$ описывающие волновые процессы в гидропушке [9]. Характеристические направления $\lambda_{1,2}$ являются собственными числами матрицы A :

$$\begin{vmatrix} w - \lambda & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & w - \lambda \end{vmatrix} = (w - \lambda)^2 - c^2 = 0.$$

Откуда следует

$$\lambda_{1,2} = w \pm c.$$

Это означает, что характеристики ξ_1 и ξ_2 в области Ω представляют собой семейство двух типов линий $\xi_1 = x_1(t)$ и $\xi_2 = x_2(t)$, вдоль которых распространяются волны в гидропушке со скоростью

$$\lambda_1 = \frac{dx_1}{dt} = w + c \text{ вдоль } \xi_1, \quad \lambda_2 = \frac{dx_2}{dt} = w - c \text{ вдоль } \xi_2.$$

При дозвуковом течении воды волны первого семейства перемещаются вдоль потока воды к соплу гидропушки, а волны второго семейства — против течения к поршню.

Вдоль характеристических направлений $\lambda_{1,2}$ гиперболическая система (1) принимает характеристическую форму. Для её получения запишем исходную систему на собственных векторах $\Lambda_{1,2}$ матрицы A . Начнём с Λ_1 для $\lambda_1 = w + c$:

$$\Lambda_1^T \begin{pmatrix} w - \lambda_1 & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & w - \lambda_1 \end{pmatrix} = (\Lambda_{11}, \Lambda_{12})^T \begin{pmatrix} -c & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & -c \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Получаем $-\Lambda_{11}c + \Lambda_{12}\frac{c^2}{\rho} = 0$, $\Lambda_{11}\rho - \Lambda_{12}c = 0$. Пусть первая компонента вектора будет $\Lambda_{11} = 1$, тогда вторая $\Lambda_{12} = \frac{\rho}{c}$.

Теперь найдём Λ_2 для $\lambda_2 = w - c$:

$$\Lambda_2^T \begin{pmatrix} w - \lambda_2 & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & w - \lambda_2 \end{pmatrix} = (\Lambda_{21}, \Lambda_{22})^T \begin{pmatrix} c & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & c \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Получаем $\Lambda_{21}c + \Lambda_{22}\frac{c^2}{\rho} = 0$, $\Lambda_{21}\rho + \Lambda_{22}c = 0$, и $\Lambda_{21} = 1$, $\Lambda_{22} = -\frac{\rho}{c}$.

Умножим слева исходную систему в форме (1) сначала на первый вектор Λ_1^T , а потом повторим умножение системы на второй вектор Λ_2^T . При этом вдоль двух семейств характеристик ξ_1 и ξ_2 получим характеристическую форму уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \pm \frac{\rho}{c} \frac{\partial w}{\partial t} + (w \pm c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \pm \frac{\rho}{c} (w \pm c) \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi = 0,$$

где верхний знак соответствует характеристикам первого семейства ξ_1 , а нижний — характеристикам второго семейства ξ_2 .

Если учесть, что вдоль ξ_1 и ξ_2 оператор $\frac{\partial}{\partial t} + (w \pm c) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dt} \Big|_{\xi_{1,2}}$, то уравнения (1) в частных производных примут на характеристиках вид уравнений в обыкновенных дифференциалах:

$$\frac{d\rho}{dt} \pm \frac{\rho}{c} \frac{dw}{dt} + \varphi = 0. \quad (5)$$

Расчетная сетка и конечно-разностные аппроксимации. Аппроксимация задачи осуществлялась на двух сетках. Для сопла задавалась неподвижная пространственная сетка:

$$\{x_{i_s} = i_s \Delta_s x, \quad i_s = 0 \dots n_s, \quad \Delta_s x = (x_b - x_a)/n_s\},$$

где i_s — номера узлов сетки сопла, $\Delta_s x$ шаг сетки сопла, n_s — количество узлов неподвижной сетки сопла.

Исходная задачи решались на подвижной пространственно-временной сетке, которая изображена на рис. 2.

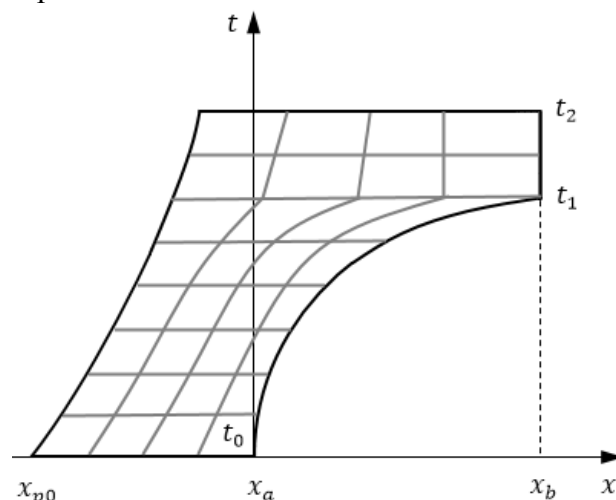


Рис. 2. Принципиальный вид подвижной расчётной сетки

Уравнения в характеристической форме с обыкновенными дифференциалами аппроксимировались по явной конечно-разностной схеме, показанной на рис. 3.

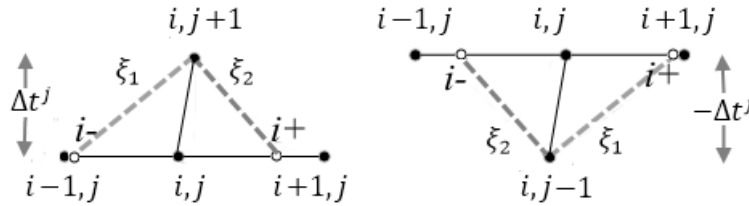


Рис. 3. Шаблоны конечно-разностных аппроксимаций

Границы подвижной пространственной сетки были привязаны к границам потока $\Gamma_p(t)$ и $\Gamma_b(t)$, поэтому сетка меняла свой шаг на разных временных слоях:

$$\begin{aligned} \{x_i^j = \Gamma_p^j + i\Delta x^j, \quad i = 0 \dots n, \quad \Delta x^j = (\Gamma_b^j - \Gamma_p^j)/n\}, \\ \{t^j = t^{j-1} + \Delta t^j, \quad j = 1 \dots m\}, \end{aligned}$$

где n — количество узлов подвижной сетки, $\Gamma_p^j \equiv x_0^j$, $\Gamma_b^j \equiv x_n^j$. Новый временной слой — это $j + 1$. Точки $i \pm$ (белые точки на рисунке 3) соответствуют месту выхода характеристик ξ_1 , ξ_2 слева или справа от точки i .

Условие устойчивости на каждом временном слое для всех характеристик на подвижной сетке имеет вид:

$$\Delta t^j \leq \min_{\forall x} \frac{\Delta x^j}{|(w \pm c)^j \mp \Delta \dot{x}^j|},$$

где $\Delta \dot{x}^j$ — изменение скорости узлов сетки на соседних слоях времени. Все характеристики, пересекающиеся на новом временном слое в центральном узле i , не должны выходить со старого временного слоя из-за пределов отрезка $[x_i^j - \Delta x^j, x_i^j + \Delta x^j]$.

Оценку шага Δt^j можно делать по правой границе. Именно правая граница обладает наибольшей скоростью характеристик, в частности — ξ_1 , поэтому здесь будет получен наименьший шаг по времени, удовлетворяющий всем точкам пространственной сетки.

До начала истечения:

$$\Delta t^j = k_z \frac{\Delta x^j}{(w + c)_n^j - \Delta \dot{x}_n^j}, \quad \Delta \dot{x}_n^j = \begin{cases} w_n^j - w_n^{j-1}, & x_n^j < x_b, \\ 0, & x_n^j \geq x_b, \end{cases}$$

где $k_z = 0,9$ — коэффициент запаса.

Границы потока задавались выражениями:

$$x_0^{j+1} = x_0^j + w_0^j \Delta t^j, \quad x_n^{j+1} = x_n^j + w_n^j \Delta t^j.$$

При первом наступлении события $x_n^{j+1} \geq x_b$ фиксируем $j_m \leftarrow j + 1$ и

$$x_n^{j+1} \leftarrow x_b, \quad \forall j \geq j_m,$$

где индекс m обозначает слой времени j_m начала истечения воды из сопла, что соответствует времени t_1 . Такое фиксирование правой границы потока в момент начала истечения приводит к требованию уменьшения текущего шага по времени.

В момент начала истечения

$$\Delta t^j = k_z \frac{x_b - x_n^{j_m-1}}{w_n^{j_m-1}}, \quad j = j_m - 1.$$

Далее, при продолжении истечения,

$$\Delta t^j = k_z \frac{\Delta x^j}{(w + c)_n^j}, \quad \forall j \geq j_m.$$

Для определения местоположения точек $i \pm$ решались уравнения характеристик $\frac{dx}{dt} = w \pm c$:

$$x_{i+}^j = x_i^{j+1} - (w - c)_i^j \Delta t^j, \quad x_{i-}^j = x_i^{j+1} - (w + c)_i^j \Delta t^j.$$

Далее в точках $x_{i\pm}$ определялись параметры потока $w_{i\pm}^j$, $\rho_{i\pm}^j$ посредством квадратичной интерполяции. Кроме этого, на каждом временном слое выполнялась интерполяция значений площади поперечного сечения сопла $\sigma(x_{i_s})$ из узлов $i_s = 0 \dots n_s$ неподвижной сетки в точки $i \pm$ узлов $i = 0 \dots n$ подвижной сетки потока.

Аппроксимируем обыкновенные дифференциальные уравнения (5) исходной задачи по методу Эйлера с первым порядком точности по Δt . Коэффициенты, свободные члены берутся со старого временного слоя. Тогда на характеристиках первого семейства мы получим:

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_{i-}^j}{\Delta t^j} + e_- \frac{w_i^{j+1} - w_{i-}^j}{\Delta t^j} + \mathcal{F}_- = 0,$$

где $e_- = \left(\frac{\rho}{c}\right)_{i-}^j$, $\mathcal{F}_- = \varphi_{i-}^j$.

На характеристиках второго семейства получим:

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_{i+}^j}{\Delta t^j} - e_+ \frac{w_i^{j+1} - w_{i+}^j}{\Delta t^j} + \mathcal{F}_+ = 0,$$

где $e_+ = \left(\frac{\rho}{c}\right)_{i+}^j$, $\mathcal{F}_+ = \varphi_{i+}^j$.

Из приведенной системы двух уравнений для двух неизвестных ρ_i^{j+1} и w_i^{j+1} находим:

$$\begin{aligned} w_i^{j+1} &= \frac{1}{e_- + e_+} (e_- w_{i-}^j + e_+ w_{i+}^j + \rho_{i-}^j - \rho_{i+}^j + (\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-) \Delta t^j), \\ \rho_i^{j+1} &= \rho_{i-}^j - e_- (w_i^{j+1} - w_{i-}^j) - \mathcal{F}_- \Delta t^j, \quad i = 1 \dots n - 1, \quad j = 0 \dots m - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

На правой границе Γ_b , при $i = n$, будем использовать характеристическое уравнение, соответствующее приходящей туда характеристике ξ_1 . Если учесть, что плотность потока, взаимодействующего с атмосферой $\rho_n^{j+1} = \rho_0$, то во втором уравнении (6) мы имеем $\rho_0 = \rho_{n-}^j - e_- (w_n^{j+1} - w_{n-}^j) - \mathcal{F}_- \Delta t^j$. Откуда, с учётом первого уравнения (6), следует значение граничной скорости потока:

$$w_n^{j+1} = w_{n-}^j + \frac{1}{e_-} (\rho_{n-}^j - \rho_0 - \mathcal{F}_- \Delta t^j).$$

На левой границе Γ_p , при $i = 0$, будем использовать характеристическое уравнение, соответствующее характеристике ξ_2 . Скорость поршня на новом временном слое находим после аппроксимации уравнения его движения (2), а плотность — из аппроксимации условий потока на второй характеристике. Получаем:

$$\begin{aligned} w_i^{j+1} &= w_i^j + \left(\frac{uB}{m_p} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \right) \right)_i^j \Delta t^j, \\ \rho_i^{j+1} &= \rho_{i+}^j + e_+ (w_i^{j+1} - w_{i+}^j) - \mathcal{F}_+^j \Delta t^j, \quad i = 0. \end{aligned}$$

Мы получили конечно-разностные аппроксимации первого порядка точности для исходной задачи на пространственно-временной сетке, характеризуемой тремя множествами $\{t^j\}_{j=0}^m, \{x_0^j\}_{j=0}^m, \{x_n^j\}_{j=0}^m$.

Поскольку исходная задача нелинейная, с быстро меняющимся состоянием потока, то целесообразно улучшать аппроксимации до второго порядка, например, по методу предиктор-корректор. Метод основан на дополнительном втором шаге после метода Эйлера, когда коэффициенты, свободные члены берутся с нового временного слоя. То есть, решение $\rho_i^{j+1} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\rho}$ и $w_i^{j+1} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{w}$, полученное ранее методом Эйлера, называется предсказанием (предиктор) решения. На втором шаге (корректор) решение повторяется на основе имеющихся $\hat{\rho}, \hat{w}$, после чего получаем новое решения $\check{\rho}$ и $\check{w}$. Результирующим решением считается среднеарифметическое двух предыдущих решений.

Для второго шага корректора задаём $e_- = e_+ = \hat{e} = \frac{\hat{\rho}}{c(\hat{w})}$ и $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_- = \hat{\mathcal{F}} = \hat{\phi}_i$ и получаем:

$$\check{w} = \frac{w_{i-}^j + w_{i+}^j}{2} + \frac{\rho_{i-}^j - \rho_{i+}^j}{2\hat{e}}, \quad \check{\rho} = \rho_{i-}^j - \hat{e}(\hat{w} - w_{i-}^j) - \hat{\mathcal{F}} \Delta t^j, \quad i = 1 \dots n-1.$$

На правой границе для скорости потока:

$$\check{w} = w_{i-}^j + \frac{1}{\hat{e}}(\rho_{i-}^j - \rho_0 - \hat{\mathcal{F}} \Delta t^j), \quad \check{\rho} = \rho_0, \quad i = n.$$

На левой границе, где имеется поршень:

$$\check{w} = w_i^j + \left(\frac{\sigma_a B}{m_p} \left(1 - \left(\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \right)^n \right) \right)_i^j \Delta t^j, \quad \check{\rho} = \rho_{i+}^j + \hat{e}(\hat{w} - w_{i+}^j) - \hat{\mathcal{F}} \Delta t^j, \quad i = 0.$$

В итоге новое решение по методу предиктор-корректор имеет вид:

$$w_i^{j+1} = \frac{1}{2}(\hat{w} + \check{w}), \quad \rho_i^{j+1} = \frac{1}{2}(\hat{\rho} + \check{\rho}), \quad i = 0 \dots n, \quad j = 1 \dots m.$$

Мы получили необходимые конечно-разностные аппроксимации метода предиктор-корректор второго порядка точности [10]. Для этого метода, в дополнение к методу Эйлера, необходимо непосредственно после вычислений ρ, w в каждом узле сетки сделать их перерасчёт с новыми значениями коэффициентов e и свободного члена $\mathcal{F}$. При этом новые интерполяции состояния потока не требуются.

При выполнении расчётов течения необходимо отметить две особенности. Первая — это условие «антикавитации»: если $\rho_i^{j+1} < \rho_0$, то $\rho_i^{j+1} \leftarrow \rho_0, \forall i, j$.

Вторая особенность — это возможное появление незначительных по амплитуде осцилляций в решении, что связано с накоплением интерполяционных погрешностей в быстро меняющемся состоянии потока при втекании воды в сопло. Данные погрешности на каждом новом временном слое легко устраняются присвоением среднеарифметического сглаживания по трём точкам, типа:

$$y_i^j \leftarrow \frac{(y_{i-1}^j + y_i^j + y_{i+1}^j)}{3}, \quad i = 1 \dots n - 1, \forall j.$$

Безусловно, результат такого сглаживания не будет точно отражать очень резкие изменения в потоке, но позволит устранить осцилляции.

Результаты расчётов. Расчёты волнового течения воды в поршневой гидропушке были реализованы для различных форм сопел, получаемых на итерациях k при оптимизации формы сопла [11, 12].

На рис. 4 приведено распределение скорости по длине гидропушки на начало и конец истечения.

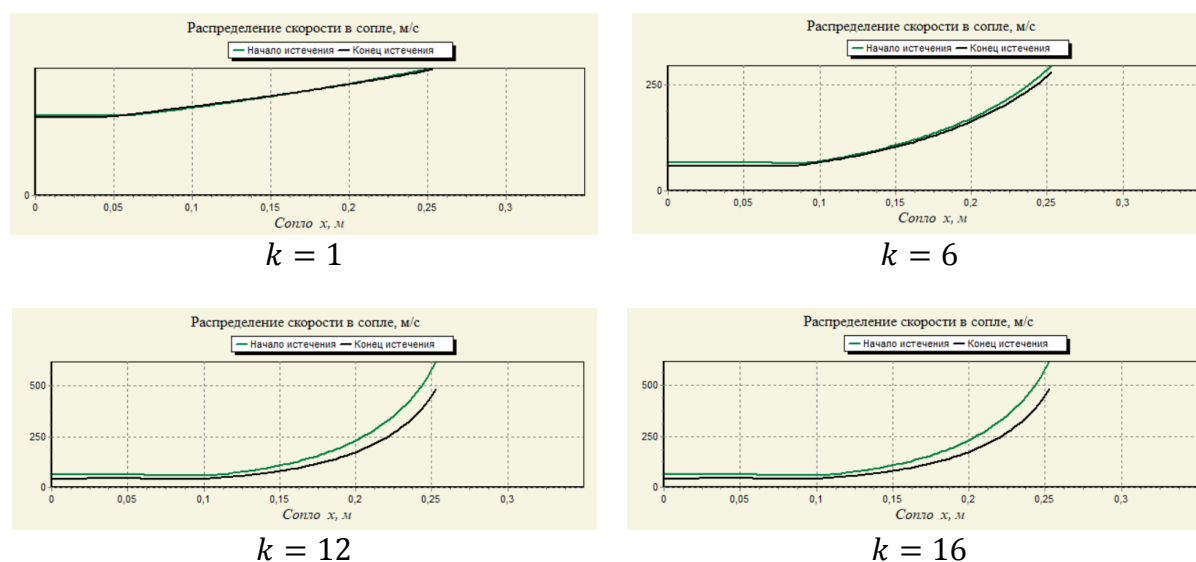


Рис. 4. Распределение скорости по длине гидропушки (k — номер итерации)

Как видно, получены физически достоверные течения воды. Скорость монотонно возрастает от поршня к срезу сопла и при этом, в квазиодномерном приближении, она обратно пропорциональна площади поперечного сечения [13, 14].

На рис. 5 приведен пример зависимости скорости струи (втекания и истечения) от времени для двух различных значений массы поршня.

Втекание жидкости в сопло начинается со скорости, равной скорости поршня, которая затем возрастает вплоть до начала истечения струи. Истечение из сопла начинается с максимальной скоростью, которая затем быстро убывает. Возможны пульсации скорости, обусловленные волновыми процессами. Увеличение массы поршня замедляет падение скорости истечения струи, что подтверждается расчётами, выполненными другими авторами [8, 15]. Однако при этом наблюдается снижение максимального значения импульса струи.

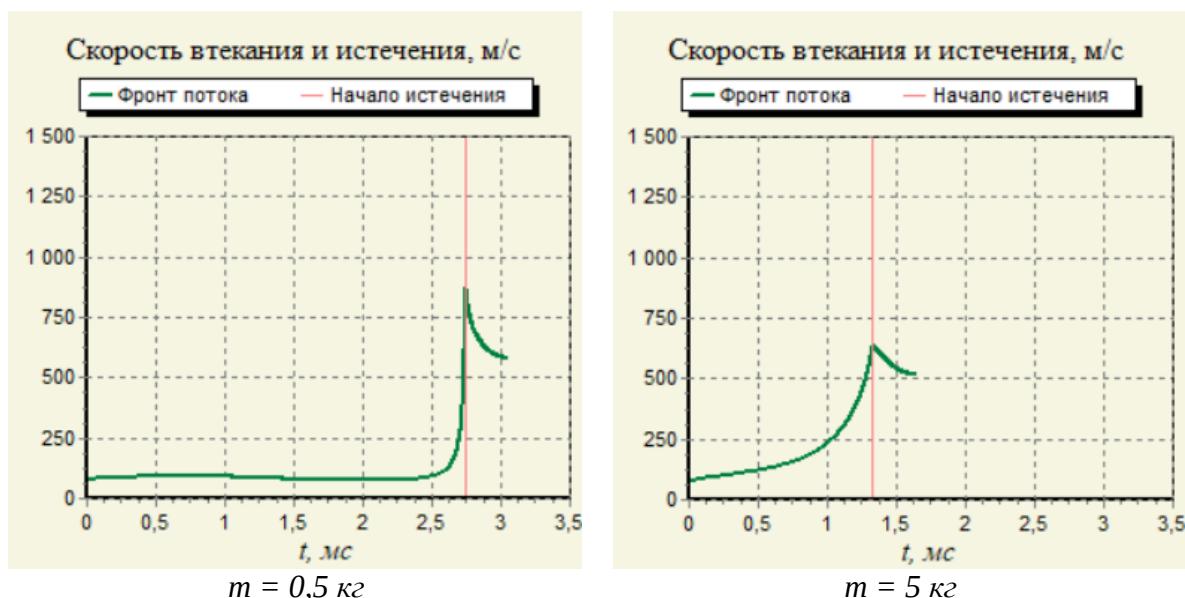


Рис. 5. Зависимость скорости втекания и истечения струи от времени

Выводы. В работе проведено численное моделирование волнового течения воды в поршневой гидропушке при втекании жидкости в сужающееся сопло. Модель течения учитывает подвижные границы потока (траекторию поршня и передний фронт воды), условие «антикавитации» и взаимодействие потока с атмосферой на срезе сопла. Исходная система уравнений преобразована к характеристической форме в обыкновенных дифференциалах вдоль характеристик первого и второго семейств. Для этих уравнений получены конечно-разностные аппроксимации второго порядка. Расчёты согласуются с физическим поведением процессов втекания и истечения. Разработанные алгоритмы могут быть использованы для оптимизации параметров гидропушки, включая форму сопла, а также для оценки характеристик генерируемой струи.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение № 075-02-2026-1321 от 20 февраля 2026 года)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геммерлинг, О.А. Обоснование параметров гидроимпульсного разрушения угля при проведении подготовительных работ на угольных шахтах / О.А. Геммерлинг, О.В. Бушуев // Вестник Луганского государственного университета имени Владимира Даля. — 2021. — № 11 (53). — С. 30–33.
2. Jiang, T. Effect of Nozzle Geometry on the Flow Dynamics and Resistance Inside and Outside the Cone-Straight Nozzle / T. Jiang, Z. Huang, J. Li, Y. Zhou // ACS Omega. — 2022. — Vol. 7. — P. 9652–9665. — DOI:10.1021/acsomega.1c07050.
3. Семко, А.Н. Особенности пульсирующих высокоскоростных струй жидкости / А.Н. Семко, О.В. Казак // Инженерно-физический журнал. — 2020. — Т. 93, № 4. — С. 926–942.
4. Кавитационный эффект в экспоненциальном струйном насадке / Б.В. Войцеховский, Ю.А. Дудин, Ю.А. Николаев, В.П. Николаев, В.В. Никитин // Динамика сплошной среды. — Новосибирск : ИГД СО АН СССР, 1971. — Вып. 9. — С. 7–11.
5. Атанов, Г.А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород / Г.А. Атанов. — Киев : Вища школа, 1987. — 155 с.
6. Атанов, Г.А. Расчет выстрела гидропушки методом «распада разрыва» / Г.А. Атанов // Гидромеханика. — Киев : Наукова думка, 1974. — Вып. 30. — С. 51–54.

7. Дмитрук, Ю.В. Задача оптимизации формы сопла гидропушки для максимизации импульса силы ультразвука / Ю.В. Дмитрук, В.К. Толстых // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. — 2023. — № 11 (4). — URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1433> (дата обращения: 15.06.2026).
8. Импульсные струи жидкости высокой скорости и их применение : монография / под общ. ред. А.Н. Семко. — Донецк : ДонНУ, 2014. — 370 с.
9. Хоскин, Н.Э. Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения / Н.Э. Хоскин // Вычислительные методы в гидродинамике. — Москва : Мир, 1967. — С. 264–291.
10. Толстых, В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем / В.К. Толстых. — Москва : Наука, 2026. — 358 с.
11. Толстых, В.К. Анализ управляемости и оптимизация формы сопла гидропушки на основе прямого экстремального подхода / В.К. Толстых, Ю.В. Дмитрук // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). — 2025. — Т. 25, № 1. — С. 65–76. — DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76.
12. Толстых, В.К. О градиенте в задачах оптимизации нестационарных систем с распределённым управлением / В.К. Толстых // Численные методы и программирование. — 2025. — Т. 26, № 3. — С. 229–244. — DOI: 10.26089/NumMet.v26r316.
13. Решетняк, В.В. Влияние формы сопла на параметры гидропушки / В.В. Решетняк, А.Н. Семко // Прикладная гидромеханика. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 62–74.
14. Семко, А.Н. Об учете сжимаемости жидкости при расчете течения в гидропушке / А.Н. Семко, Ю.В. Локтюшина // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. — Донецк : ДонНУ, 2011. — № 2. — С. 95–101.
15. Решетняк, В.В. Концепция оценки эффективности гидропушки и выбор рациональной конструкции : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.05 / Решетняк В.В. — Донецк, 2010. — 148 с.

REFERENCES

1. Gemmerling, O.A. & Bushuev, O.V. (2021) [Substantiation of parameters of hydro-impulse coal destruction during preparatory works in coal mines]. *Vestnik Luganskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Vladimira Dal'ya = Bulletin of Vladimir Dahl Lugansk State University*. 11 (53), 30–33. (In Russian).
2. Jiang, T., Huang, Z., Li, J. & Zhou, Y. (2022) Effect of Nozzle Geometry on the Flow Dynamics and Resistance Inside and Outside the Cone-Straight Nozzle. *ACS Omega*. 7, 9652–9665, doi: 10.1021/acsomega.1c07050.
3. Semko, A.N. & Kazak, O.V. (2020) [Features of pulsating high-speed fluid jets] *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal = Journal of Engineering Physics*. 93 (4), 926–942. (In Russian).
4. Vojtsekhovskij, B.V., Dudin, Yu.A., Nikolaev, Yu.A., Nikolaev, V.P. & Nikitin, V.V. (1971) [Cavitation effect in an exponential jet nozzle]. *Dinamika sploshnoj sredy*. 9, 7–11. (In Russian).
5. Atanov, G.A. (1987) *Hydro-impulse installations for rock destruction*. Kiev, Vishcha shkola. 155 p. (In Russian).
6. Atanov, G.A. (1974) [Calculation of a water gun shot by the “decay of discontinuity” method]. In: *Gidromekhanika*. Kiev, Naukova dumka. Vol. 30, pp. 51–54. (In Russian).
7. Dmitruk, Yu.V. & Tolstykh, V.K. (2023) [The problem of optimizing the water gun nozzle shape to maximize the force impulse of an ultra-jet]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 11 (4). Retrieved from: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1433> (date of application: 15.09.2026). (In Russian).
8. Semko, A.N. (ed.) (2014) *High-speed pulsed liquid jets and their application*. Donetsk, DonNU. 370 p. (In Russian).
9. Khoskin, N.Eh. (1967) [Method of characteristics for solving equations of one-dimensional unsteady flow]. *Vychislitel'nye metody v gidrodinamike = Computational methods in hydrodynamics*. Moscow, Mir, pp. 264–291. (In Russian).
10. Tolstykh, V.K. (2026) *Practical optimization, identification of distributed systems*. Moscow, Nauka. 358 p. (In Russian).
11. Tolstykh, V.K. & Dmitruk, Yu.V. (2025) Controllability analysis and optimization of the water gun nozzle shape based on a direct extremal approach. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 25 (1), 65–76, doi: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76. (In Russian).
12. Tolstykh, V.K. (2025) On the gradient in optimization problems of non-stationary systems with distributed control. *Chislennyye metody i programmirovaniye = Numerical Methods and Programming*. 26 (3), 229–244, doi: 10.26089/NumMet.v26r316. (In Russian).

13. Reshetnyak, V.V. & Semko, A.N. (2010) Influence of nozzle shape on water gun parameters. *Prikladnaya gidromekhanika = Applied Hydromechanics*. 12 (3), 62–74. (In Russian).
14. Semko, A.N. & Loktyushina, Yu.V. (2011) On taking into account liquid compressibility when calculating flow in a water gun. *Vestnik DonNU. Ser. A. Estestvennyye nauki = Bulletin of DonNU. Ser. A. Natural Sciences*. Donetsk, DonNU. (2), 95–101. (In Russian).
15. Reshetnyak, V.V. (2010) *Concept of evaluating the effectiveness of a water gun and choosing a rational design*: dis. ... kand. tekhn. nauk: 01.02.05. Donetsk. 148 p. (In Russian).

CALCULATION OF WAVE WATER FLOW IN A HYDROCANNON

V. K. Tolstykh, Yu. V. Dmitruk

The paper considers the problem of numerical simulation of wave water flow in a piston hydrocannon when liquid flows into a converging nozzle. The aim of the study is to develop the necessary numerical simulation algorithms that allow quantitative assessment of the characteristics of the generated pulsed jet and, subsequently, to solve problems of optimizing the parameters of the hydrocannon, including the nozzle shape. To describe the flow, a quasi-one-dimensional unsteady model of isentropic flow of an inviscid compressible liquid is used, taking into account the moving boundaries of the flow (the piston trajectory and the water front), the "anti-cavitation" condition, and the interaction of the flow with the atmosphere at the nozzle exit. The original system of equations is transformed to characteristic form, and equations in ordinary differentials along the characteristics of the first and second families are obtained. For these equations, a second-order finite-difference approximation on a moving space-time grid is developed. Test calculations are carried out, demonstrating physically reliable water flow. The results obtained can be used in the design of nozzles for hydraulic systems operating in the mode of high-velocity liquid outflow, as well as for assessing the characteristics of the generated jet.

Keywords: pulsed jets, hydrocannon, method of characteristics, numerical simulation.

Поступила в редакцию 30.06.2026 г.

Дмитрук Юлия Владимировна

старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

E-mail: dmitruk.iuli@yandex.com

ORCID: 0009-0009-6750-2068

SPIN-код: 5469-2714

Dmitruk Yuliia Vladimirovna

senior lecturer, Department of general and theoretical physics, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia.

Толстых Виктор Константинович

доктор физико-математических наук, доктор технических наук, профессор; профессор кафедры компьютерных технологий ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

E-mail: mail@tolstykh.com

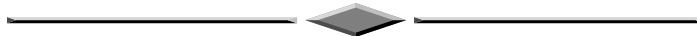
ORCID: 0000-0001-9055-1102

SPIN-код: 9966-6992

Tolstykh Victor Konstantinovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of computer technologies, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia.

Х И М И Ч Е С К И Е Н А У К И



УДК 532.782

DOI: 10.5281/zenodo.22786110

EDN: DRDQHZ

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ПЕРЕГРЕВА НА КРИСТАЛЛИЗАЦИЮ РАСПЛАВОВ КУМАРИНА И НАФТАЛИНА

© 2026. *Е. А. Покинтелица*

В статье представлены результаты экспериментального исследования влияния предварительного перегрева жидкой фазы на кинетику кристаллизации кумарина и нафталина. Методом циклического термического анализа установлен переход от квазиравновесной кристаллизации без существенного переохлаждения к неравновесно-взрывной кристаллизации с заметным переохлаждением при превышении критических температур перегрева. Показано, что скачкообразный характер изменения кинетики затвердевания связан с разрушением молекулярных кластеров-затравок при высоких перегревах.

Ключевые слова: кумарин, нафталин, плавление, перегрев, переохлаждение, квазиравновесная кристаллизация, неравновесно-взрывная кристаллизация, термограммы.

Введение. Процессы кристаллизации органических соединений из расплава имеют большое значение, как для фундаментального материаловедения, так и для практических задач получения кристаллов с заданной структурой и свойствами.

В последние годы наблюдается повышенный интерес к изучению переохлажденных состояний органических расплавов. Так в обзорной статье [1] обобщены современные методы контроля переохлаждения и кристаллизации фазопереходных материалов, используемых для хранения тепловой энергии. Авторы классифицировали методы воздействия на категории – внешние поля, добавки и прочие методы, такие как использование пористых сред, проволочных включений и изменение поверхностного натяжения. Для каждого метода в работе анализируют механизмы, с помощью которых ускоряют кристаллизацию и уменьшают переохлаждение.

Значительное внимание уделяется также молекулярному моделированию процессов зародышеобразования, включая расчет свободно-энергетических барьеров нуклеации в переохлажденных органических средах [2]. Хотя основная часть расчетов выполнена для коллоидных систем и модельных потенциалов, методология применима и к органическим молекулярным жидкостям, т.к. эта работа часто цитируется в исследованиях по зародышеобразованию в переохлажденных расплавах органических соединений.

Особый интерес в качестве модельных объектов проявляют кумарин и нафталин. Кумарин, ранее известный единственной кристаллической модификацией, в работе [3] продемонстрировал богатую полиморфию – из расплава были получены четыре новые метастабильные формы, а их кристаллические структуры были определены с помощью комбинации вычислительных алгоритмов прогнозирования кристаллических структур и рентгеновской порошковой дифракции. Это делает кумарин модельной системой для изучения слабых межмолекулярных взаимодействий и кристаллизационных механизмов.

В статье [4] описаны методы кристаллизации (в ограниченном объеме расплава и микровозгонка) для селективного получения метастабильных полиморфов кумарина. Исследование доказало, что комбинируя метод кристаллизации и тип химической модификации поверхности наночастиц, можно целенаправленно получать нужную

кристаллическую модификацию кумарина, что открывает путь к созданию материалов с заранее заданными свойствами.

Для нафталина в работах последних лет изучены предкристаллизационные переохлаждённые состояния в бинарных системах [5–8]. В целях дальнейшего исследования и построения неравновесной бинарной системы на основе кумарина и нафталина требуется предварительное выполнение термографических исследований индивидуальных веществ в одинаковых условиях.

В данной работе исследованы два модельных ароматических соединения – кумарин и нафталин, для которых определены температурные интервалы перехода от квазиравновесного к взрывному типу кристаллизации.

Методика эксперимента. Исследования выполнены методом циклического термического анализа [9]. Испытывали образцы кумарина и нафталина марки ЧДА массами по 0.15, 0.2, 0.5, 1.0 и 2.0 г по 5 образцов одной массы каждого вещества.

Исследуемые вещества помещали в герметично закрытые стеклянные ампулы объёмом 2 мл. Спай хромель-алюмелевой термопары через «горлышко» ампул помещали непосредственно в исследуемый образец. Образцы подвергались многократным (15–20) циклам нагрев–охлаждение с фиксацией температурных эффектов. Запись температурных данных осуществлялась с помощью цифрового двухканального термометра UNI-t UT 325 через интерфейс RS-232 на ПК. Максимальная приборная погрешность измерения температуры составляла 0.5 К, а измерения энтальпии фазовых превращений $1,5 \div 2,0$ кДж/кг. Чувствительность приборов при регистрации температуры составляла $\sim 0,25\text{--}0,35$ К, т.к. средняя флуктуация температуры не превышала значение в 0,25 К в диапазоне от 20 до 120 С, а дрейф температуры не превышал 0,35 К в течение нескольких часов. Скорость нагрева и охлаждения поддерживали в автоматическом режиме в пределах 0,13–0,17 К/с. Термоциклирование проводили в интервалах температур $\pm 50^\circ$ относительно соответствующих температур плавления T_L , при этом нижнюю границу термоцикла поддерживали постоянной, а верхнюю меняли либо по нарастающей от цикла к циклу, либо по убывающей либо путём произвольного задания этой температуры.

Как показали эксперименты, величины переохлаждений для исследуемых веществ практически не менялись в зависимости от этих масс.

Для каждого вещества предварительно были определены температуры плавления: для кумарина $T_L = 342$ К, для нафталина $T_L = 353$ К. Варьируя температуру перегрева расплава выше точки плавления, регистрировали характер экзотермических пиков при охлаждении и величины переохлаждения, необходимого для начала кристаллизации.

Результаты и их обсуждение. В ходе экспериментов установлено, что при малых перегревах расплава кристаллизация протекает квазиравновесным образом – с незначительным переохлаждением либо вообще без него (рис. 1, цикл I). При достижении определённой «критической» температуры перегрева T_C^+ происходит скачкообразный переход к неравновесно-взрывной кристаллизации (НРВК), сопровождающейся заметным переохлаждением (рис. 1, циклы II–VI).

Для кумарина критическая температура перегрева составила примерно 346 К (перегрев 4 К относительно температуры плавления T_L). При охлаждении слабо прогретого расплава (рис. 1, цикл I) регистрируется экзотермический эффект при температуре около 338 К, что соответствует переохлаждению $\Delta T_{LS}^- = 4$ К. По виду горизонтального плато на термограмме можно говорить о квазиравновесном механизме кристаллизации (КРК).

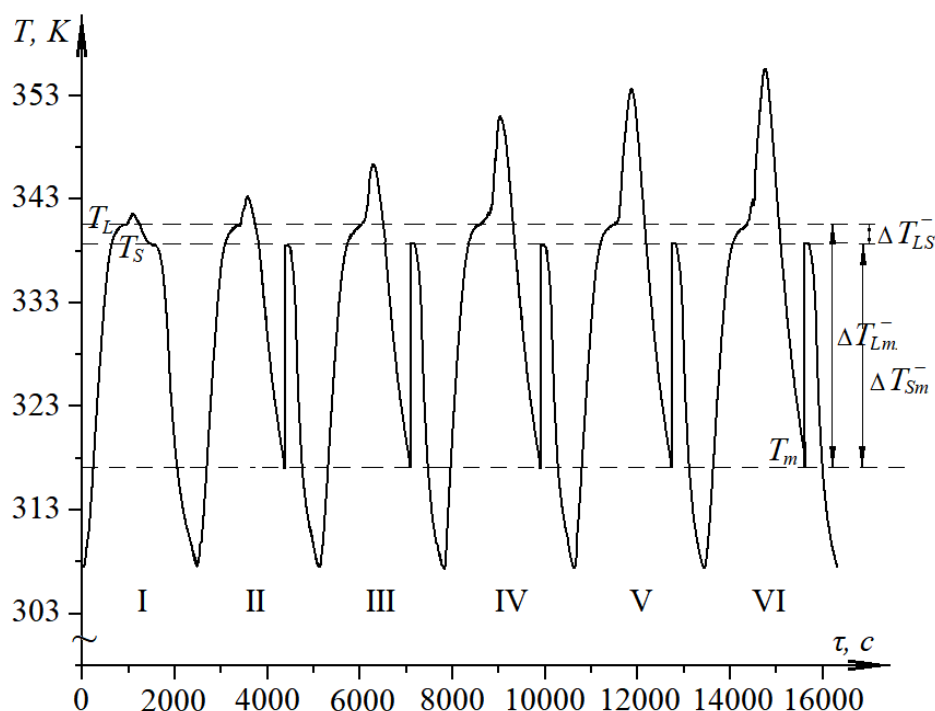


Рис. 1. Термограммы, характеризующие плавление и кристаллизацию кумарина массой 0,2 г.

Критическая температура T_C^+ характерна тем, что достаточно было нагреть расплав хотя бы на градус выше (рис. 1, термограммы II–VI), так сразу резко менялся вид термических линий охлаждения. В данном случае при температуре T_S не обнаруживается признаков экзоэффекта (как на термограмме I), а температура понижается до $T_m \approx 316$ К (рис. 1, циклы II–VI) за 950 с. Затем она самопроизвольно со скоростью ~ 20 К/с поднимается до температуры T_S за ~ 1 с, что свидетельствует об адиабатном эффекте. Таким образом, после прогрева расплава выше T_C^+ и его охлаждении вид кристаллизации меняется от КРК к НРВК.

Следует отметить, что температура во всех термоциклах неизменно поднималась от T_m до T_S , но не до T_L . Получается как бы два переохлаждения $\Delta T_{Lm}^- = T_L - T_m$ и $\Delta T_{Sm}^- = T_S - T_m$; при этом $\Delta T_{Lm}^- = \Delta T_{Sm}^- + \Delta T_{LS}^-$. Из сравнения термограмм II–VI на рис. 1 видно, что дальнейший перегрев ΔT^+ расплава выше T_C^+ до 26 К не приводит к изменению переохлаждений как ΔT_{Lm}^- , так и ΔT_{Sm}^- .

Для нафталина ситуация отличается меньшей чувствительностью к перегреву. В отсутствие значительного перегрева температуры плавления и кристаллизации совпадают (353 К) – переохлаждение отсутствует [10]. Критическая температура перегрева составляет примерно 358 К (перегрев 5 К). При превышении этого порога переохлаждение достигает 10 К, и кристаллизация также переходит в неравновесно-взрывной режим.

Математическую зависимость $\Delta T^- = f(\Delta T^+)$ при переходе от КРК практически без переохлаждения к НРВК с соответствующим переохлаждением можно записать в виде

$$\Delta T^- = \langle \Delta T^- \rangle \Theta(\Delta T^+ - T_C^+), \text{ где } \Theta = \begin{cases} 0, & \Delta T^+ < \Delta T_C^+, \\ 1, & \Delta T^+ \geq \Delta T_C^+, \end{cases} \text{ – функция Хевисайда.}$$

В частности, для кумарина эта зависимость относительно ΔT_{Lm}^- имеет вид: $\Delta T_{Lm}^- = 26\Theta(\Delta T^+ - 4^\circ)$, для нафталина: $\Delta T_{Lm}^- = 10\Theta(\Delta T^+ - 4^\circ)$.

Для проверки влияния изотермической выдержки расплава на процесс самопроизвольной кристаллизации были выбраны две температуры 320 и 330 К, т.е. ниже температуры плавления на 12 и 22 К. Как показали эксперименты, при предварительном прогреве расплава кумарина до 363 К и изотермической выдержке в метастабильной области в течение нескольких часов в обоих случаях самопроизвольной кристаллизации не происходило. Затвердевание наступало лишь после дальнейшего «принудительного» охлаждения от указанных температур до T_m , т.е. после достижения переохлаждения $\Delta T_{Lm}^- \approx 26$ К. О самопроизвольной кристаллизации судили по резкому подъему температуры от T_m до T_S .

При изучении зависимости переохлаждений от массы исследуемых веществ все образцы нагревали до 363 К ($\Delta T^+ \approx 21$ К) и охлаждали с одинаковыми скоростями до 308 К (нижняя граница термоциклов). Установлено, что для всех масс вид кривых был похож на указанную термограмму, за исключением того, что при температуре T_S для больших масс фиксировалось небольшое горизонтальное плато затвердевания (тем длиннее, чем больше масса образцов). Следует подчеркнуть, что при любой массе температура при взрывной кристаллизации поднималась неизменно лишь до температуры T_S (а не T_L), а докристаллизация происходила тоже при T_S .

Неизменность переохлаждений ΔT_{Lm}^- (или ΔT_{Sm}^-) в зависимости от массы при прочих одинаковых условиях эксперимента требует пояснения. Согласно кластерно-коагуляционной модели кристаллизации в переохлажденной области идет непрерывный процесс образования зародышей, т.к. движущая сила этого (этапа как разность свободных энергий Гиббса между жидкой G_L и твердой G_S фазами), есть функция переохлаждения $\Delta G_{LS}(\Delta T^-)$. Как только концентрация зародышей доходит до некоторого максимального значения (очевидно при температуре T_m), между ними начинается реакция коагуляции, за счет чего (возможно выделения излишка межфазной поверхностной энергии зародышей при их слиянии) температура поднимается от T_m до T_S . За это время формируется начальная доля α кристаллической фазы в расплаве. Поскольку скорость тепловыделения на данном этапе почти на три порядка выше скорости теплоотвода (охлаждения), то уравнения теплового баланса можно записать для трех масс m_1, m_2, m_3 в виде

$$\Delta H_{LS} m_{x1} \approx c_p m_1 \Delta T_1^-, \quad (1)$$

$$\Delta H_{LS} m_{x2} \approx c_p m_2 \Delta T_2^-, \quad (2)$$

$$\Delta H_{LS} m_{x3} \approx c_p m_3 \Delta T_3^-, \quad (3)$$

где ΔH_{LS} и c_p – энтальпия плавления и удельная теплоемкость кумарина;

$\Delta T_1^-, \Delta T_2^-, \Delta T_3^-$ – возможные переохлаждения;

m_{x1}, m_{x2}, m_{x3} – массы закристаллизованной части расплавов на этапе взрывной кристаллизации.

Поскольку для кумарина любой массы переохлаждения одинаковы $\Delta T_1^- = \Delta T_2^- = \Delta T_3^-$, то из (1)–(3) получаем

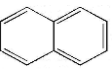
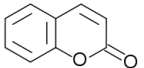
$$\frac{m_{x1}}{m_1} = \frac{m_{x2}}{m_2} = \frac{m_{x3}}{m_3} = \alpha. \quad (4)$$

Из (4) следует, что доля α затвердевшего образца за время взрывной кристаллизации не зависит от массы.

Отличие величины переохлаждения кумарина, например, от переохлаждения нафталина, получаемых в одних и тех же условиях можно объяснить различием в молекулярном и кристаллическом строении этих веществ (таблица 1).

Таблица 1

Физические характеристики нафталина и кумарина [11, 12].

Вещество	M , г моль	T_L , К	ΔH_{LS} , кДж моль	Структурная формула молекулы	Тип кристаллической решетки и координационное число Z	Параметры решетки, Å	Объем ячейки V , Å ³	ΔW
Нафталин $C_{10}H_8$	128,0	353	18,80		Моноклинная $P2_1/a$ ($Z=2$)	$a = 8,23$; $b = 6,00$; $c = 8,66$; $\beta = 122^\circ 55'$	427,6	623
Кумарин $C_9H_6O_2$	146,1	342	19,14		Ромбическая $Pca 2_1$ ($Z=4$)	$a = 15,50$; $b = 5,67$; $c = 7,92$	695,5	865

Молекула нафталина состоит из двух конденсированных в орто-положениях бензольных колец. В твердом состоянии молекулы $C_{10}H_8$ образуют моноклинную решетку. Между молекулами имеют место три типа слабых Ван-дер-Ваальсовых связей $C...C$, $C...H$, $H...H$. Молекула кумарина $C_9H_6O_2$ также состоит из двух конденсированных колец – бензольного цикла и лактонного кольца α -пирона. Между молекулами $C_9H_6O_2$ кроме Ван-дер-Ваальсовых связей проглядываются и дополнительные водородные связи типа $O...H$. Это обстоятельство и наличие дипольного момента у молекул кумарина создают условия для менее компактной упаковки молекул в кристалле, чем в кристалле нафталина. Об этом свидетельствуют и объемы решеток: у кумарина 695,5, а у нафталина 427,6 Å³.

О разнице в величинах ΔT^- этих веществ можно судить и из анализа изменения их энтропий ΔS при фазовом превращении

$$\Delta S = \frac{\Delta H_{LS}}{T_L} = R \ln \Delta W, \quad (5)$$

где ΔH_{LS} – энтальпия плавления, кДж/моль; $R = 8,31$ Дж/(моль·К); ΔW – изменение вероятностного состояния молекул при переходе жидкость $\rightarrow$ кристалл.

Расчеты по формуле (5) показали следующие значения: для кумарина $\Delta W \approx 865$, а для нафталина ~ 623 .

Выводы. Сравнение строений молекул кумарина и нафталина, типа решеток и их объемов, а также вероятностей образования упорядоченной структуры молекулами $C_9H_6O_2$ и $C_{10}H_8$ может свидетельствовать о том, что молекулам кумарина требуется больший инкубационный период для упорядочения и соответственно больших предкристаллизационных переохлаждений, чем молекулам нафталина.

Что касается перехода от КРК к НРВК в зависимости от перегрева расплава, то он, по-видимому, связан с тем, что при относительно слабом прогреве в расплаве сохраняются группировки молекул в виде кристаллоподобных кластеров, о чем свидетельствуют рентгеноструктурные исследования. При охлаждении подобной жидкости кристаллизация происходит как бы на собственных «затравках»

квазиравновесно. При перегреве расплава выше температуры T_c^+ кластеры разрушаются, а при охлаждении молекулам необходим определенный инкубационный период для налаживания утерянных связей и жидкость переходит в метастабильное состояние с определенной степенью переохлаждения и последующей кристаллизацией типа НРВК.

Работа выполнена в рамках государственного задания по научным исследованиям FRRW-2026-005, регистрационный номер 1025031400105-4-1.3.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhao, Y. Research progress in nucleation and supercooling induced by phase change materials / Y. Zhao, X. Zhang, X. Xu, S. Zhang // *J. Energy Storage*. – 2020. – Vol. 27. – P. 101156. – DOI: 10.1016/j.est.2019.101156.
2. Filion, L. Crystal nucleation of hard spheres using molecular dynamics, umbrella sampling, and forward flux sampling: A comparison of simulation techniques / L. Filion, M. Hermes, R. Ni, M. Dijkstra // *The Journal of Chemical Physics*. – 2010. – Vol. 133. – Iss. 24. – P. 244115. – DOI: 10.1063/1.3506838.
3. Shtukenberg, A. G. Powder diffraction and crystal structure prediction identify four new coumarin polymorphs / A. G. Shtukenberg, Q. Zhu, D. J. Carter, L. Vogt, J. Hoja, E. Schneider, H. Song, B. Pokroy, I. Polishchuk, A. Tkatchenko, A. R. Oganov, A. L. Rohl, M. E. Tuckerman, B. Kahr // *Chemical Science*. – 2017. – Vol. 8, Iss. 7. – P. 4926–4940. – DOI: 10.1039/c7sc00168a.
4. Chen, Y. Application of functionalized magnetic silica nanoparticles for selective induction of three coumarin metastable polymorphs / Y. Chen, X. Huang, S. Ding, Y. Feng, N. Wang, H. Hao // *Chinese Journal of Chemical Engineering*. – 2022. – Vol. 50. – P. 155–167. – DOI: 10.1016/j.cjche.2022.05.008.
5. Aleksandrov, V. D. Nonequilibrium crystallization of alloys in the naphthalene–dibenzyl system / V. D. Aleksandrov, O. A. Pokyntelytsia, N. V. Shchetovskaya // *Russian journal of physical chemistry A*. – Vol. 88, No 8. – 2014. – P. 1307–1311. – DOI: 10.1134/S0036024414080032. – EDN: XMIXNF.
6. Покинтелица, Е. А. Анализ параметров равновесной и неравновесной кристаллизации сплавов в системе нафталин – дибензил / Е. А. Покинтелица // *Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Актуальные проблемы физико-химического материаловедения*. – Вып. 2013-4 (102). – 2013. – С. 52–57. – EDN: MBXZZF.
7. Анализ путей кристаллизации сплавов в системе нафталин-дибензил / В. Д. Александров, Е. А. Покинтелица, Н. В. Щebetовская, О. В. Александрова // *Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки*. – 2013. – № 2. – С. 103–107.
8. Покинтелица, Е. А. Особенности кристаллизации эвтектического сплава 20.5 вес.% нафталина-79.5 вес.% о-терфенила / Е. А. Покинтелица, Н. В. Щebetовская // *Вестник Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева. Серия: Химия. География. Экология*. – 2023. – № 3 (144). – С. 51-62. – DOI: 10.32523/2616-6771-2023-144-3-51-62. – EDN: EAOWZC.
9. Александров, В. Д. Кинетика зародышеобразования и массовой кристаллизации переохлажденных жидкостей и аморфных сред : монография / В. Д. Александров. – Донецк: Донбасс, 2011. – 590 с. – EDN: QJZGCV. – ISBN 978-617-638-021-4.
10. Покинтелица, Е. А. Теплофизические особенности плавления и кристаллизации органических теплоаккумулирующих материалов группы дифенилов: дисс. ... канд. техн. наук : 05.14.04 / Покинтелица Елена Анатольевна. – Макеевка, 2019. – 186 с.
11. Китайгородский, А. И. Строение органического вещества: данные структурных исследований : [справочник]... / А. И. Китайгородский, П. М. Зоркий, В. К. Бельский // *АН СССР, Ин-т элементоорганических соединений*. – Москва: Наука, 1982. – 510 с.
12. Domalski, E. S. Heat capacities and entropies of organic compounds in the condensed phase / E. S. Domalski, E. D. Hearing // *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 1996. – V. III. – P. 25.

REFERENCES

1. Zhao, Y., Zhang, X., Xu X. & Zhang S. (2020). Research progress in nucleation and supercooling induced by phase change materials. *Journal of Energy Storage*, 27, 101156, doi: 10.1016/j.est.2019.101156.
2. Filion, L., Hermes, M., Ni, R. & Dijkstra M. (2010). Crystal nucleation of hard spheres using molecular dynamics, umbrella sampling, and forward flux sampling: A comparison of simulation techniques. *The Journal of Chemical Physics*, 133(24), 244115, doi: 10.1063/1.3506838.

3. Shtukenberg, A. G., Zhu, Q., Carter, D. J., Vogt, L., Hoja, J., Schneider, E., Song, H., Pokroy, B., Polishchuk, I., Tkatchenko, A., Oganov, A. R., Rohl, A. L., Tuckerman, M. E. & Kahr, B. (2017). Powder diffraction and crystal structure prediction identify four new coumarin polymorphs. *Chemical Science*, 8 (7), 4926–4940, doi: 10.1039/c7sc00168a.
4. Chen, Y., Huang, X., Ding, S., Feng, Y., Wang, N. & Hao, H. (2022). Application of functionalized magnetic silica nanoparticles for selective induction of three coumarin metastable polymorphs. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 50, 155–167, doi: 10.1016/j.cjche.2022.05.008.
5. Aleksandrov, V. D., Pokyntelytsia, O. A. & Shchebetovskaya, N. V. (2014). Nonequilibrium crystallization of alloys in the naphthalene–dibenzyl system. *Russian Journal of Physical Chemistry A*, 88(8), 1307–1311, doi: 10.1134/S0036024414080032.
6. Pokyntelytsia, E. A. (2013). [Analysis of parameters of equilibrium and nonequilibrium crystallization of alloys in the naphthalene–dibenzyl system]. *Vestnik Donbasskoy natsional'noy akademii stroitel'stva i arkhitektury. Aktual'nye problemy fiziko-khimicheskogo materialovedeniya*, 102, 52–57. (In Russian).
7. Aleksandrov, V. D., Pokyntelytsia, E. A., Shchebetovskaya, N. V., & Aleksandrova, O. V. (2013). [Analysis of crystallization paths of alloys in the naphthalene-dibenzyl system]. *Vestnik Donetskogo natsional'nogo universiteta. Seriya A. Estestvennye nauki*, 2, 103–107. (In Russian).
8. Pokyntelytsia, E. A., & Shchebetovskaya, N. V. (2023). [Features of crystallization of the eutectic alloy 20.5 wt.% naphthalene-79.5 wt.% o-terphenyl]. *Vestnik Evraziyskogo natsional'nogo universiteta imeni L.N. Gumileva. Seriya: Khimiya. Geografiya. Ekologiya*, 3, 51–62. (In Russian).
9. Aleksandrov, V. D. (2011). *Kinetics of nucleation and bulk crystallization of supercooled melts and amorphous media*. Donetsk: Donbass. 591 p. ISBN 978-617-638-021-4. (In Russian).
10. Pokyntelytsia, E. A. (2019). *Thermophysical features of melting and crystallization of organic heat-storage materials of the diphenyl group* [Doctoral dissertation]. Makeevka. 186 p. (In Russian).
11. Kitaygorodskiy, A. I., Zorkiy, P. M., & Bel'skiy, V. K. (1982). *Structure of organic matter: data from structural studies*. Moscow: Nauka. 510 p. (In Russian).
12. Domalski, E. S., & Hearing, E. D. (1996). Heat capacities and entropies of organic compounds in the condensed phase. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, III, 25.

EFFECT OF PREHEATING ON THE CRYSTALLIZATION OF COUMARINE AND NAPHTHALENE MELTS

E. A. Pokintelitsa

This article presents the results of an experimental study of the effect of preheating the liquid phase on the crystallization kinetics of coumarin and naphthalene. Using cyclic thermal analysis, a transition from quasi-equilibrium crystallization without significant supercooling to nonequilibrium-explosive crystallization with significant supercooling upon exceeding critical superheat temperatures was established. It is shown that the abrupt change in solidification kinetics is associated with the destruction of seed molecular clusters at high superheats.

Keywords: coumarin, naphthalene, melting, superheating, overcooling, quasi-equilibrium crystallization, nonequilibrium-explosive crystallization, thermograms.

Поступила в редакцию 30.06.2026 г.

Покинтелица Елена Анатольевна

кандидат технических наук, доцент,
«Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры» – филиал ФГБОУ ВО
«Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет»,
г. Макеевка, ДНР, РФ.

E-mail: o.a.pokyntelytsia@donnasa.ru

ORCID: 0009-0000-2677-7844

SPIN-код: 5708-6360

Pokintelitsa Elena Anatolyevna

candidate of technical sciences, associate professor,
The Donbas National Academy of Civil Engineering
and Architecture – a branch of the FSBEI HE
“National Research Moscow State University of
Civil Engineering”,
Makeyevka, DPR, Russia.

**КИНЕТИКА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ СПЛАВОВ СИСТЕМЫ In-Bi
В КВАЗИРАВНОВЕСНЫХ И НЕРАВНОВЕСНЫХ УСЛОВИЯХ**

© 2026. С. А. Фролова

В данной работе представлен сравнительный анализ кинетики кристаллизации отдельных сплавов системы In-Bi, включая чистые компоненты (In, Bi), химические соединения (BiIn, BiIn₂, Bi₃In₅) и промежуточные сплавы системы. Методом циклического термического анализа исследовано влияние температуры нагрева T^+ расплава относительно температуры кристаллизации T_L (или температуры ликвидус) на величину предельного предкристаллизационного переохлаждения $\Delta T_{пр}$ ($\Delta T_{пр} = T_L - T_{пр}$, где $T_{пр}$ – минимальная (предельная) температура в метастабильной области, при которой начинается кристаллизация). Показано, что для индия, соединения In₂Bi, двух эвтектик (In- BiIn₂, BiIn₂- Bi₃In₅) и сплавов с концентрацией Bi до 37 ат.% характерна квазиравновесная кристаллизация (КРК) с малыми значениями $\Delta T_{пр}$ (1–1,5 К) в области перегревов до 150 К. В то время как для Bi и соединения BiIn при критической температуре нагрева T_k^+ ($T_k^+ > T_L$) наблюдается переход от квазиравновесной к неравновесно-взрывной кристаллизации (НРВК) с быстрым скачком предельного переохлаждения $\Delta T_{пр}$ (у Bi до 24 К, у BiIn до 16 К). Результаты позволяют уточнить механизм образования кристаллических кластеров и подтверждают различие структурных состояний в расплавах разных концентраций системы In-Bi.

Ключевые слова: висмут, индий, сплав, химическое соединение, предельное переохлаждение, квазиравновесная и неравновесная кристаллизации

Введение. В последние годы внимание исследователей направлено на изучение процессов кристаллизации легкоплавких металлов и их сплавов в условиях различных режимов охлаждения. Значительный интерес вызывает система In-Bi благодаря наличию эвтектических точек, широкому применению в термоэлектрических и электронных материалах, а также выраженным особенностям фазовых превращений [1–3]. В литературе имеются многочисленные данные о влиянии перегрева, времени выдержки, скорости охлаждения и массы образцов на переохлаждение $\Delta T_{пр}$ при кристаллизации, однако они противоречивы и зависят от выбранной методики эксперимента [4–6]. В связи с этим актуальной задачей является систематическое исследование кинетики кристаллизации сплавов системы In-Bi в идентичных условиях.

Настоящая работа направлена на сравнительный анализ поведения чистых компонентов In, Bi), химических соединений (BiIn, BiIn₂, Bi₃In₅) и промежуточных сплавов системы In-Bi при квазиравновесной и неравновесной кристаллизации в зависимости от температуры перегрева расплава и условий охлаждения.

Методика эксперимента. Химические соединения и сплавы системы In-Bi готовили сплавлением компонентов высокой чистоты (99,999 %) общей массой 1 г в алуновдвых тиглях. Нагрев осуществляли на 150 К выше температуры плавления висмута с последующим перемешиванием до полного растворения компонентов. Термоциклирование образцов проводилось в безградиентной печи сопротивления при скорости охлаждения 0,05–1 К/с. Температура фиксировалась с помощью хромель-копелевой термопары (ХК) и цифрового термометра UT325 с точностью $\pm 0,2$ К. Достоверность результатов подтверждалась серией из 50 термоциклов. Анализ проводился методом совмещенного циклического и дифференциального термического анализа (ЦТА) [7].

Для проведения оптических исследований использовали оптический микроскоп МИМ-8. Образцы висмута, полученного в результате квазиравновесной и неравновесной кристаллизаций, готовили шлифованием, полированием и травлением.

Висмут травили в реактиве (молочная кислота – 50 г; азотная кислота – 20 г; перекись водорода – 10 г) методом окунания на 3–5 с промежуточным переполированием и контролем структуры. Для сплавов методика химического травления была та же, только применялись два реактива: первый (как для чистого висмута) – для выявления границ зерен, второй (плавиковая кислота – 10 г; азотная кислота – 50 г; соляная кислота – 50 г) – для выявления структуры сплава. Затем проводилась промывка под сильной струей воды и протирка спиртом.

Экспериментальная часть. Диаграмма состояния системы In-Bi является диаграммой эвтектического типа с тремя устойчивыми химическими соединениями: двумя конгруэнтно плавящимися BiIn_2 и BiIn , а также соединением Bi_3In_5 , образующимся по перитектической реакции.

Для сравнительного анализа процессов кристаллизации системы In-Bi исследовали сплавы следующих концентраций: I (100 %In), II (In+4 ат. %Bi), III (In+10 ат. %Bi), IV (In+15 ат. %Bi), V (In+21,5 ат. %Bi-эвтектика 1), VI (In+25 ат. %Bi), VII (In+28 ат. %Bi), VIII (In+33 ат. %Bi), IX (In+34,5 ат. %Bi-эвтектика 2), X (In+37 ат. %Bi), XI (In+40 ат. %Bi), XII (In+44 ат. %Bi), XIII (In+48 ат. %Bi), XIV (In+50 ат. %Bi), XV (In+56 ат. %Bi-эвтектика 3), XVI (In+60 ат. %Bi), XVII (In+70 ат. %Bi), XVIII (In+80 ат. %Bi), XIX (In+90 ат. %Bi), XX (100 %Bi).

Исследования показали, что поведение различных сплавов системы In-Bi при кристаллизации существенно отличается.

Для Bi (и соединения BiIn) имеется такая температура критического нагрева T_k^+ , характеризующая условный переход от КРК к НРВК. При термоциклировании чистого висмута наблюдалось, что после плавления (при температуре $T_L=544$ К и нагревания до некоторой критической температуры ($T_k^+ = T^+ - T_L$), где $T_k^+=554$ К и последующего охлаждения со скоростью 0,06 К/с, кристаллизация расплава происходила квазиравновесно почти без переохлаждения ($\Delta T_{\text{пр}} \approx 2$ К) (рис. 1, а). При этом экзотермическое плато кристаллизации наблюдали при температуре, совпадавшей с температурой плавления $T_L=544$ К. Достаточно было расплав хотя бы кратковременно перегреть на один градус выше $T_k^+=547$ К, как характер кристаллизации резко менялся. При $T_L=544$ К плато кристаллизации исчезало, зато при достижении переохлаждения $\Delta T_{\text{пр}}=24\pm 1$ К при $\Delta T_{\text{мин}} \approx 520$ К температура резко поднималась вверх до температуры плавления ~ 544 К со скоростью $\sim 10\div 15$ К/с (рис. 1, б). После подъема температуры до T_L температура на шкале $T - \tau$ «останавливается» на этой отметке до затвердевания образца. Установленный эффект перехода от квазиравновесной (КРК) к неравновесно-взрывной кристаллизации (НРВК) был обратимым. То есть, при понижении верхней границы цикла ниже T_k^+ при кристаллизации фиксировали обратный переход от НРВК к КРК. Согласно кластерно-коагуляционной теории кристаллизации расплава в диапазоне температур $T_L \div T_k^+$ сохраняются кристаллоподобные кластеры со структурой твердой фазы, образуя упорядоченную зону расплава.

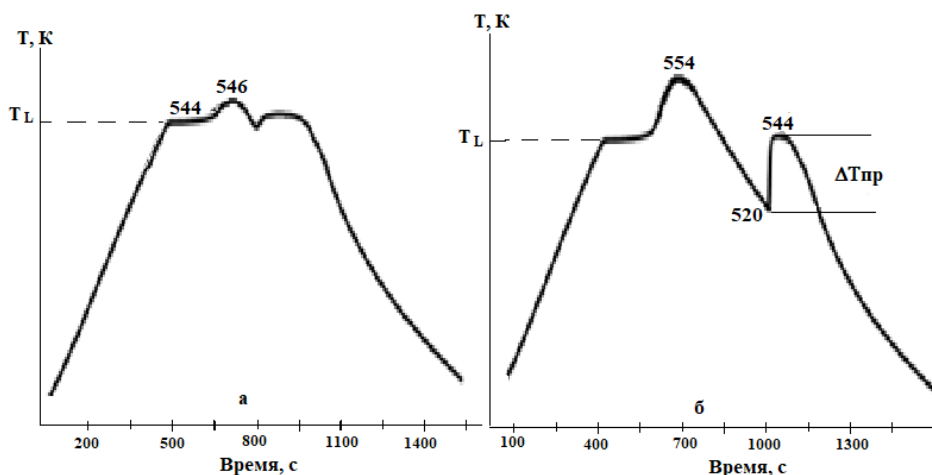


Рис. 1. Кривые нагревания-охлаждения висмута:
а) квазиравновесная кристаллизация; б) неравновесно-взрывная кристаллизация

Для химического соединения BiIn зафиксирована критическая температура нагрева $T_k^+ \approx 388 \text{ K}$ ($T_L = 383 \text{ K}$) и при охлаждении от температур $\geq T_k^+$ переохлаждение $\Delta T_{\text{пр}}$ скачком возрастало до $\sim 16 \text{ K}$. Т.е. наблюдался тот же скачкообразный переход от КРК к НРВК. Разброс переохлаждений $\pm 1 \text{ K}$ от среднего значения $\langle \Delta T_{\text{пр}} \rangle$ наблюдался по результатам измерений 40 термоциклов с одной и той же скоростью нагревания и охлаждения. Предельные переохлаждения Bi и BiIn сохранялись постоянными и не меняли свои значения до перегревов 150 K .

Индий, соединение BiIn_2 , эвтектические сплавы In-BiIn_2 (сплав V), $\text{BiIn}_2\text{-Bi}_3\text{In}_5$ (сплав IX) и промежуточные сплавы с содержанием Bi до 37 ат. %, напротив, демонстрировали устойчивую квазиравновесную кристаллизацию во всем диапазоне перегревов до 150 K с предельным переохлаждением $\Delta T_{\text{пр}} \approx 1\text{--}1,5 \text{ K}$.

У химического соединения Bi_3In_5 в любых условиях (при перегревах до 150 K , скоростях охлаждения от $0,06 \text{ K/c}$ до 1 K/c) кристаллизация проходила с небольшим предельным изотермическим переохлаждением $\Delta T_{\text{пр}} \approx 3\text{--}3,5 \text{ K}$. Т.е. наблюдалась изотермическая неравновесная кристаллизация невзрывного типа.

Промежуточные сплавы системы In-Bi вели себя по-другому. Заэвтектические сплавы в системе $\text{BiIn}_2\text{-Bi}_3\text{In}_5$ (диапазон от 34,5 ат.% Bi до 50 ат.% Bi) показали наличие переохлаждение $\Delta T_{\text{пр}}$ только относительно линии ликвидус. Исключение составил сплав X с наличием $\Delta T_{\text{пр}}$ относительно температуры ликвидус $\approx 2 \text{ K}$ и перитектической реакцией образования соединения Bi_3In_5 с $\Delta T_{\text{пр}} \approx 3\text{--}3,5 \text{ K}$. Для сплава XI переохлаждение $\Delta T_{\text{пр}} \approx 5 \text{ K}$, для сплава XII – $\Delta T_{\text{пр}} \approx 8 \text{ K}$, для сплава XIII – $\Delta T_{\text{пр}} \approx 10 \text{ K}$. Видно, что $\Delta T_{\text{пр}}$ увеличивалось с добавлением концентрации Bi в сплавах.

Эвтектика BiIn-Bi (сплав XV) при эвтектической температуре нагрева $T_S = 382,5 \text{ K}$ характеризовалась кристаллизацией типа НРВК с $\Delta T_{\text{пр}}^S \approx 12 \text{ K}$. И все до- и заэвтектические сплавы данной системы показали наличие $\Delta T_{\text{пр}}^S \approx 12 \text{ K}$ только относительно температуры солидус во всем диапазоне концентраций. Однако было странно, что относительно температуры ликвидус T_L переохлаждений не выявлено, хотя из расплава выпадает чистый висмут, у которого высокая величина переохлаждения $\Delta T_{\text{пр}}$ ($\sim 24 \text{ K}$).

Полученные экспериментальные значения переохлаждений для сплавов всего диапазона занесены в таблицу.

Таблица
Экспериментальные значения температур T_L , T_S , величин предельных переохлаждений $\Delta T_{пр}$, $\Delta T_{пр}^S$

№ сплава	T_L , К	T_S , К	$\Delta T_{пр}$, К	$\Delta T_{пр}^S$, К
I	429		1–1,5	
II	418	391	1–1,5	
III	395	365	1–1,5	
IV	370	345	1–1,5	
V	–	345	–	1–1,5
VI	398	345	1–1,5	–
VII	362	345	1–1,5	–
VIII	362	–	1–1,5	–
IX	–	361	1–1,5	–
X	362	361	2	3–3,5
XI	368	362	5	
XII	373	362	8	
XIII	381	362	10	
XIV	383	–	16	–
XV	–	382	–	12
XVI	403	382	–	12
XVII	458	382	–	12
XVIII	496	382	–	12
XIX	521	382	–	12
XX	544	–	24	–

Зависимость $\Delta T_{пр}$ от перегрева расплава ΔT^+ ($\Delta T^+ = T^+ - T_L$) для In, Bi, BiIn₂, BiIn, Bi₃In₅, эвтектик In-BiIn₂, BiIn₂-Bi₃In₅, BiIn-Bi приведен на рис. 2, а метастабильная область диаграммы состояния In-Bi нанесена на рис. 3.

Таким образом, в системе In-Bi с увеличением содержания Bi четко проявляется различие между устойчивыми квазиравновесными процессами и переходом к неравновесной кристаллизации.

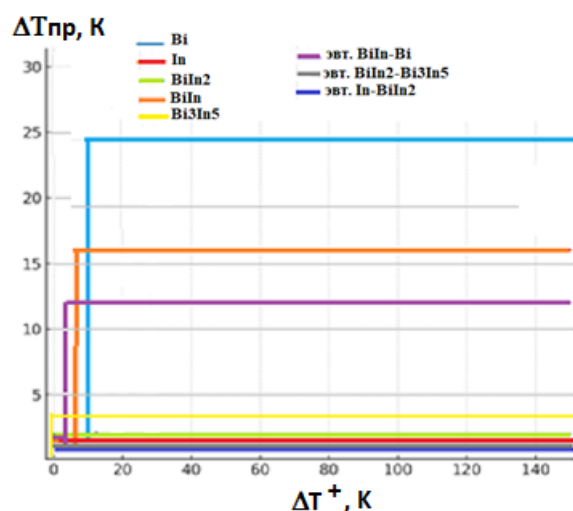


Рис. 2. Зависимость переохлаждения $\Delta T_{пр}$ от перегрева расплава ΔT^+ для компонентов и отдельных сплавов системы In-Bi

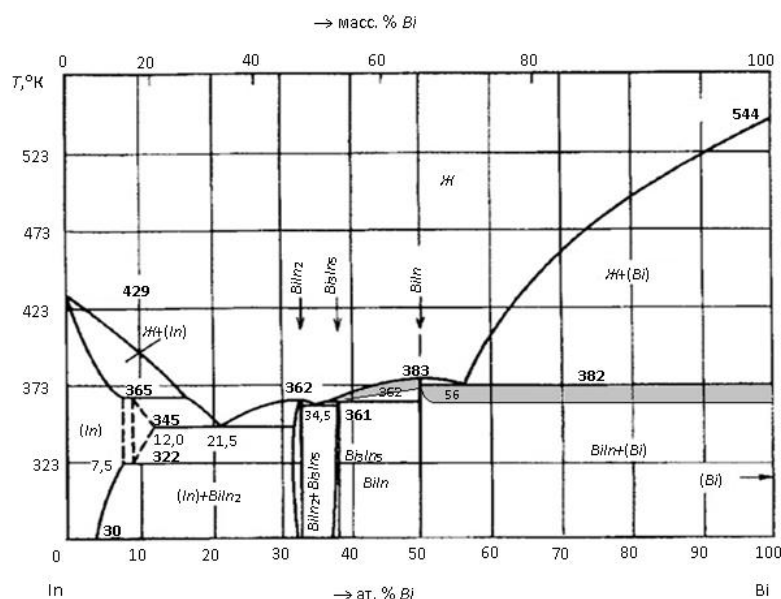


Рис. 3. Диаграмма состояния In-Vi с метастабильной областью (закрашенная серая часть)

Обсуждение результатов. Результаты показывают, что различия в поведении компонентов и химических соединений системы In-Bi связаны со структурой жидкого состояния. Для индия и сплавов с концентрацией до 37 ат. % Bi характерно наличие устойчивых предкристаллизационных кристаллоподобных кластеров, что обеспечивает квазиравновесную кристаллизацию. В отличие от них, для Bi, BiIn и сплавов с составом более 37 ат. % Bi предполагается хаотическое расположение атомов и кластеров, что приводит к увеличению времени инкубационного периода (время зародышеобразования в метастабильном состоянии) и необходимости значительного переохлаждения для начала процесса кристаллизации.

Чтобы понять влияние вида кристаллизации на размер зерна, методом оптической микроскопии, используя металлографический микроскоп МИМ-8, исследовались образцы В₁, полученные в результате квазиравновесной и неравновесной кристаллизаций при скорости охлаждения $\approx 0,05$ К/с. Результаты исследований привели к выводу, что размер поликристаллического висмута, кристаллизующегося без переохлаждения в 1,5–2 раза больше, чем размер зерен висмута, полученного при охлаждении с переохлаждением.

Это согласуется и с другими исследованиями, например, на жаропрочном никелевом сплаве в работе [8]. В этой работе отмечается, что с увеличением переохлаждения сплава уменьшается дисперсность зерен. В работах [9–12] экспериментально исследованы различные сплавы и установлено резкое уменьшение размера зерна при достижении критического переохлаждения. При исследовании полупроводниковых расплавов получили зависимость скорости роста кристалла от переохлаждения. Также изучены механизмы кристаллизации и влияние величины переохлаждения на морфологию и размеры кристаллов.

Структуры переохлажденного и квазиравновесного висмута представлены на рис. 4 и рис. 5.

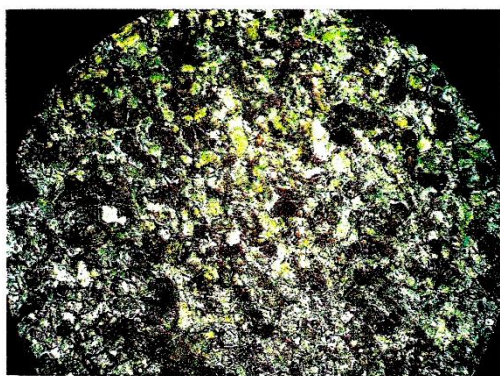


Рис. 4. Структура Bi, полученного в результате неравновесно-взрывной кристаллизации, т.е. с переохлаждением. X500

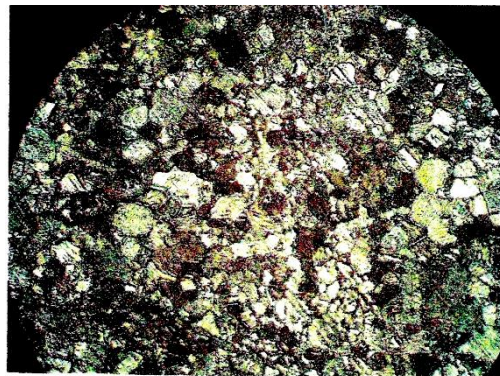


Рис. 5. Структура Bi, полученного в результате равновесной кристаллизации, т.е. без переохлаждения. X500

Практическое применение сплавов системы In-Bi основывается на сочетании низкой температуры плавления, высокой пластичности и способности смачивать неметаллические поверхности определяет его применение в узких, но технологически критичных областях. Например, в микроэлектронике [13] для герметизации корпусов лазерных диодов и GaAs-фотоприемников. В отличие от оловянно-свинцовых и SAC-припоев, сплавы In-Bi (например, эвтектика с содержанием In 56 ат.% Bi) практически не растворяют золото. Также эти сплавы находят применение в криогенной технике и производстве сверхпроводников (например, коммутация обмоток ВТСП-лент (высокотемпературных сверхпроводников второго поколения) [14], т.к. они сохраняют низкое удельное сопротивление и пластичность при температурах жидкого гелия (4,2 К), в отличие от многих оловянных и свинцовых припоев, разрушающихся при термических циклах.

Выводы.

1. Исследованы процессы кристаллизации сплавов системы In-Bi. Установлены закономерности перехода от квазиравновесной к неравновесной кристаллизации.
2. Для сплавов системы In-Bi с составом до 37 ат. % Bi наблюдается квазиравновесная кристаллизация как относительно температуры ликвидус T_L , так и относительно температуры солидус T_S .
3. Для сплавов системы In-Bi с составом от 37 до 50 ат. % Bi установлено наличие переохлаждений $\Delta T_{пр}$ только относительно T_L , которое увеличивается от 2 К до 10 К.
4. Для сплавов системы In-Bi в диапазоне от 50 ат. % Bi до чистого Bi установлена неравновесная кристаллизация только относительно T_S с $\Delta T_{пр} \approx 12$ К.
5. Полученные данные уточняют механизмы кристаллизации сплавов, которые связаны со структурой жидкой фазы и с концентрацией компонентов в сплаве.

Работа выполнена в рамках государственного задания по научным исследованиям FRRW-2026-005, регистрационный номер 1025031400105-4-1.3.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bismuth-indium system: Thermodynamic properties of liquid alloys / T.V. Kulikova, A.V. Mayorova, A.B.Shubin, V.A. Bykov, K.Yu. Shunyaev // *Metallic Materials*. – 2015. – Vol. 53, No. 3. – P. 133-137. – DOI: 10.4149/km_2015_3_133. – EDN: XZFRQP.
2. Филиппов В.В. Вязкость расплавов InBi-Pb / В.В. Филиппов, К.Ю. Шуныев // *Расплавы*. – 2020. – № 5. – С. 541-547. – DOI: 10.31857/S0235010620050059. – EDN: UDKPJC.

3. Formation of bismuth-based binary alloys and intermetallic compounds by ultrasonic cavitation / V.B. Kumar, G. Limmel, Z.E. Porat, A. Gedanken // *New Journal of Chemistry*. – 2015. – Vol. 39. – P. 5374-5381. – DOI: 10.1039/C5NJ00781J.
4. Aleksandrov V.D. The effect of sample mass on the crystallization supercooling in bismuth melt / V.D. Aleksandrov, V.A. Postnikov // *Technical Physics Letters*. – 2003. – Vol. 29. – P. 287-289. – DOI: 10.1134/1.1573293. – EDN: XJULMT.
5. Зозуля А.П. Влияние перегрева расплава на микротвердость висмута и олова при кристаллизации / А.П. Зозуля // *Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки*. – 2018. – № 3 (131). – С. 57-59.
6. Фролова С.А. Квазиравновесная и неравновесно-взрывная кристаллизация соединений InBi и In₂Bi / С.А. Фролова // *Расплавы*. – 2025. – № 1. – С. 3-9. – DOI: 10.7868/S3034571525010012. – EDN: XIBRTX.
7. Александров В.Д. Способ совмещенного циклического и термического анализа / В.Д. Александров, В.А. Постников, С.А. Фролова, С.В. Прокофьев // *Патент на изобретение*. – 2008. – № 83721. – Бюл. № 15 от 11.08.2008 г.
8. Управление структурообразованием жаропрочных сплавов на никелевой основе при производстве крупногабаритных лопаток газотурбинных установок / И.В. Кандаров, В.М. Пиксаев, Д.Л. Панкратов, В.Г. Шибаков // *Цветные металлы*. – 2024. – № 4. – С. 36-43. – DOI: 10.17580/tsm.2024.04.05. – EDN: FFPRYX.
9. Xiao J.Z. Solidification of undercooled molten Cu₃₀Ni₇₀ / J.Z. Xiao, H.W. Kui // *Journal of Materials Research*. – 1999. – Vol. 14, Iss. 5. – P. 1771-1781. – DOI: 10.1557/JMR.1999.0239.
10. Wang N. Rapid crystallization and growth mechanisms of highly undercooled Ag-Cu-Ge ternary alloys / N. Wang, B. Wei // *Journal of Crystal Growth*. – 2003. – Vol. 247, Iss. 3-4. – P. 576-586. – DOI: 10.1016/S0022-0248(02)01973-5. – EDN: BCYWTV.
11. Толочко Н.К. Методы получения мелкозернистой структуры отливок при кристаллизации / Н.К. Толочко, А.А. Андрушевич // *Литье и металлургия*. – 2012. – № 2(65). – С. 27-31. – EDN: SKENRR.
12. Довнар Г.В. Влияние высокой скорости кристаллизации на структуру алюминиевых сплавов / Г.В. Довнар, Л.П. Долгий, А.А. Андриц // *Литье и металлургия*. – 2010. – № 4(58). – С. 67-71. – EDN: UNAWWR.
13. Абдыкеримова А.С. Влияние среды на изменение свойства наночастиц металлов из импульсной плазмы / А.С. Абдыкеримова, Д.С. Кудайбергенова // *Известия кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова*. – 2022. – № 3(63). – С. 190-197. – DOI: 10.56634/16948335_2022_3_190. – EDN: POQWOI.
14. Sanhun Jin. Microstructure and mechanical properties of indium-bismuth alloys for low-melting solders / Sanhun Jin, Min-Su Kim, Shutsutsu Kanayama, and Hiroshi Nishikawa // *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*. – 2018. – Vol. 29. – P. 16460-16468. – DOI: 10.1007/s10854-018-9738-0.

REFERENCES

1. Kulikova T.V., Mayorova A.V., Shubin A.B., Bykov V.A., Shunyaev K.Yu. (2015). Bismuth-indium system: Thermodynamic properties of liquid alloys. *Metallic Materials*. 3, 133-137. DOI: 10.4149/km-2015-3-133. EDN: XZFRQP.
2. V.V. Fillipov, K.Yu. Shunyaev. (2020) [Vyazkost` rasplavov InBi-Pb] *Melts*. 5, 541-547. (In Russian). DOI: 10.31857/S0235010620050059/. EDN: UDKPJC.
3. Kumar V.B., Limmel G., Porat Z.E., Gedanken A. (2015). Formation of bismuth-based binary alloys and intermetallic compounds by ultrasonic cavitation. *New Journal of Chemistry*. 39, 5374-5381. DOI:10.1039/C5NJ00781J.
4. V.D. Aleksandrov, V.A. Postnikov (2003). The effect of sample mass on the crystallization supercooling in bismuth melt. *Technical Physics Letters*. 29, 287-289. DOI:10.1134/1.1573293. EDN: XJULMT.
5. A.P. Zozulya (2018). [Vliyanie peregreva raspлава na mikrotverdost` vismuta i olova pri kristallizacii]. *Vestnik DonNASA. Zdaniya i sooruzheniya s primeneniem novy`x materialov i texnologij*. 3 (131), 57-59. (In Russian).
6. S.A. Frolova (2025). [Kvaziravnovesnaya i neravnovesno-vzry`vnaya kristallizatsiya soedinenij InBi i In₂Bi]. *Raspлавы*. 1. 3-9. (In Russian). DOI: 10.31857/S0235010625010012. EDN: XIBRTX.
7. Aleksandrov V.D., Postnikov V.A., Frolova S.A., Prokof`ev S.V. (2008). [Sposob sovmeshhennogo ciklicheskogo i termicheskogo analiza]. *Patent na izobretenie*. 83721. Byul. № 15. (In Russian).

8. Kandarov I.V., V.M. Piksaev, Pankratov D.L., Shibakov V.G. (2024). Upravlenie strukturoobrazovaniem zharoprochnykh splavov na nikel'noy osnove pri proizvodstve krupnogabaritnykh lopatok gazoturbinykh ustanovok. *Cvetnye metally*. 4, 36-43. DOI: 10.17580/tsm.2024.04.05. EDN: FFPRYX.
9. J.Z. Xiao, H.W. Kui (1999). Solidification of undercooled molten Cu₃₀Ni₇₀. *Journal of Materials Research*. 14 (Issue 5), 1771-1781. DOI: 10.1557/JMR.1999.0239.
10. N. Wang, B. Wei (2003). Rapid crystallization and growth mechanisms of highly undercooled Ag-Cu-Ge ternary alloys. *Journal of Crystal Growth*. 247 (Issues 3-4), 576-586. DOI:10.1016/S0022-0248(02)01973-5. EDN: BCYWTV.
11. N.K. Tolochko, A.A. Andrushevich (2012). [Metody` polucheniya melkozernistoy struktury` otlivok pri kristallizatsii]. *Lit`e i metallurgiya*. 2(65), 27-31. (In Russian). EDN: SKENRR.
12. G.V. Dovnar, L.P. Dolgij, A.A. Andricz (2010). [Vliyanie vy`sokoy skorosti kristallizatsii na strukturu alyuminievy`x splavov]. *Lit`e i metallurgiya*. 4(58), 67-71. (In Russian). EDN: UNAWWR.
13. Abdykerimova A.S., Kudajbergenova D.S. (2022). [Vliyanie sredy na izmenenie svoystva nanochastich metallov iz impul'snoy plazmy]. *Izvestiya kyrgyzskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. I. Razzakova*. 3(63), 190-197. DOI: 10.56634/16948335_2022_3_190. EDN: POQWOI.14.
14. Sanhun Jin, Min-Su Kim, Shutsutsu Kanayama, and Hiroshi Nishikawa (2018). Microstructure and mechanical properties of indium-bismuth alloys for low-melting solders. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*. 29:16460-16468. DOI:10.1007/s10854-018-9738-0.

KINETICS OF CRYSTALLIZATION OF IN-BI SYSTEM ALLOYS UNDER QUASI-EQUILIBRIUM AND NONEQUILIBRIUM CONDITIONS

S. A. Frolova

This paper presents a comparative analysis of the kinetics of crystallization of individual alloys of the In-Bi system, including pure components (In, Bi), chemical compounds (BiIn, BiIn₂, Bi₅In₃) and intermediate alloys of the system. The influence of the melt heating temperature relative T^+ to the crystallization temperature T_L (or the liquidus temperature) on the value of the limiting pre-crystallization overcooling (ΔT_{np} ($\Delta T_{np} = T_L - T_{np}$), where ΔT_{np} is the minimum (limiting) temperature in the metastable region at which crystallization begins) has been studied by cyclic thermal analysis. It has been shown that indium, the In₂Bi compound, a number of eutectic substances (In-BiIn₂, BiIn₂-Bi₅In₃) and alloys with Bi concentrations up to 37 at.% are characterized by quasi-equilibrium crystallization (CRC) with low values ΔT_{np} (1–1.5 K) in the region of overheating up to 150 K. Whereas for Bi and the BiIn compound, a transition to nonequilibrium crystallization (NCR) is observed with a rapid jump in extreme overcooling ΔT_{np} (for Bi up to 24 K, for BiIn up to 16 K) at a critical heating temperature T_k^+ . The results make it possible to clarify the mechanism of crystal cluster formation and confirm the difference in structural states in melts of different concentrations of the In-Bi system.

Key words: bismuth, indium, alloy, chemical compound, extreme overcooling, quasi-equilibrium and nonequilibrium crystallizations.

Поступила в редакцию 24.07.2026 г.

Фролова Светлана Александровна

кандидат химических наук, доцент;
заведующий кафедрой «Физика и прикладная химия»,
«Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры» – филиал ФГБОУ ВО
«Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет»,
г. Макеевка, ДНР, РФ.
E-mail: s.a.frolova@donnasa.ru
ORCID: 0000-0001-8379-072X
SPIN-код: 2670-9883

Frolova Svetlana A.

candidate of Chemical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Physics and Applied
Chemistry,
The Donbas National Academy of Civil Engineering
and Architecture – a branch of the FSBEI HE
“National Research Moscow State University of Civil
Engineering”,
Makeyevka, DPR, Russia.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 612.82

DOI: 10.5281/zenodo.22786151

EDN: BLIIML

РАЗРАБОТКА ПРОГНОСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСПЕШНОСТИ БИОУПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ НА РАННИХ ЭТАПАХ ТРЕНИНГА НА ОСНОВЕ НЕЙРОФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

© 2026. М. А. Болдырева, А. М. Куликов

Статья посвящена исследованию нейрофизиологических показателей, отражающих успешность достижения положительной динамики изменения функционального состояния в процессе нейробиоуправления. Отобраны оптимальные ЭЭГ-показатели (прирост индивидуальной мощности альфа-ритма, фронтальная альфа-асимметрия с левосторонней локализацией), выступающие в роли маркеров способности к обучению навыкам самостоятельного регулирования, на основании которых предложена модель прогнозирования обучаемости в сессиях БОС-тренинга по альфа-протоколу на ранних этапах.

Ключевые слова: функциональное состояние, модель, прогнозирование, психофизиологические показатели, биологическое управление, ЭЭГ

Введение. Увеличение информационных, когнитивных, психоэмоциональных перегрузок в процессе образовательной или профессиональной деятельности человека, нарастающая гиподинамия, нарушение ритма бодрствование/сон, приводят к вегетативному и психоэмоциональному дисбалансу, что отражается на эффективности деятельности и работоспособности. Управление на основе биологической обратной связи (БОС), контролируемой со стороны центральной и вегетативной нервной системы, функциональным состоянием, при котором наблюдается снижение уровня эмоционального напряжения и стресса, выступает в качестве полезного приспособительного результата.

Биоуправление представляет немедикаментозный, неинвазивный метод коррекции состояния человека в различных сферах: спорте, медицине, педагогике, психологии, реабилитации и пр. БОС-тренировки облегчают восстановление и поддержание гомеостаза на многих уровнях, стабилизируют баланс между нервной и висцеральными системами путем формирования новой эндогенной функциональной системы с устойчивым удержанием физиологических показателей в оптимальном диапазоне функционирования, тем самым влияя на физические, психоэмоциональные, интеллектуальные и социальные аспекты. Этот метод активно используется при лечении различных заболеваний (боли различной локализации, мигрени, аддикций, вегетативных дисфункций, синдрома дефицита внимания, депрессии, психоэмоциональных расстройств и пр.), коррекции состояния у детей и подростков (повышение концентрации внимания, усидчивости, самооценки, мотивации к обучению, снижение уровня тревожности, оптимизации умственных нагрузок и пр.), а также в рамках психологического сопровождения сотрудников с высокой степенью стрессобусловленной дезадаптации (врачи, психологи, сотрудники МВД и пр.).

Особое внимание в литературе уделяется альфа-стимулирующему тренингу ЭЭГ, который направлен на переключение обработки информации с внешней среды на

внутреннюю и является перспективным способом влияния на витальные функции, обеспечивая их функционирование за счет оптимизации корково-подкорковых отношений. Преобладание альфа-ритма ЭЭГ соответствует состоянию спокойного бодрствования, снижению уровня тревожности и психоэмоционального напряжения. В результате БОС-тренинга организм переходит на новый уровень оптимального функционирования, эффективность которого зависит от многих факторов.

Наиболее важным на наш взгляд представляется вопрос о минимальном количестве сеансов БОС-тренинга по альфа-протоколу и выбор нейрофизиологических показателей, по которым можно прогнозировать способность к обучению навыкам самостоятельного регулирования состояния или отсутствию эффекта (отсутствие успешности выполнения, слабая скорость обучения, отрицательный тренд), что послужило целью нашей работы.

Литературный обзор. Методы функционального биоуправления, базирующиеся на принципах БОС, в настоящее время активно используются как в медицине, так и в персонифицированных психокоррекционных личностно-развивающих практиках с вовлечением дыхательной, сердечно-сосудистой, психической, эмоциональной, активационно-расслабляющей, эндокринной и вегетативной систем.

Анализ литературных источников [1–6] показал, что базовыми общебиологическими механизмами реализации биоуправления в рамках БОС-тренинга могут быть: классическое обусловливание по И. П. Павлову и оперантное обусловливание по Б. К. Скиннеру; формирование новых временных связей в коре головного мозга; в виде полезного результата при формировании функциональных систем в рамках теории П. К. Анохина; индивидуально формирующиеся мозговые системы обеспечения психической деятельности, предложенные Н. П. Бехтеревой; иерархические корково-подкорковые взаимоотношения с вовлечением лимбической системы, базальных ганглиев, ретикулярной формации, таламуса, отдельных висцеральных систем, префронтальной, передней поясной, премоторной и моторной областей коры.

В качестве регулирующего показателя в контуре адаптивного биоуправления выбираются показатели различных физиологических систем. Отдельным направлением коррекции состояния организма человека на основе биоэлектрических потенциалов мозга является нейробиоуправление, которое используется для обучения произвольной регуляции и контроля нового стереотипа или состояния, соответствующего доминирующему ритму ЭЭГ [7]. ЭЭГ-тренинг нормализует центральные механизмы регуляции, способствует восстановлению гемодинамических, метаболических, медиаторных функций, формируя в мозге новую функциональную систему, обладающую собственным эндогенным механизмом устойчивости [3]. В исследованиях по нейробиоуправлению используются протоколы подавления тета- и дельта-ритма, выработки навыков управления альфа- и бета-ритмами, изменения соотношения индексов альфа/бета, альфа+тета/альфа+бета, тета/бета, альфа+тета/бета, которые являются наиболее чувствительным к изменениям функционального состояния [8, 9].

Показано, что функциональное биоуправление приводит к реорганизации механизмов регуляции ряда функций, ломке их патологических взаимосвязей (жестких связей) и возникновению новых гибких связей между отдельными системами организма человека. При функциональных перестройках формируется новый алгоритм работы ритμοзадающих систем за счет снижения активности глубоких подкорковых структур (тета-ритм) и на фоне повышения активности поисковой системы (бета-ритм) [10].

Результативность тренингов в рамках биоуправления в ряде исследований имеет качественный анализ и направлена в большей степени на социальный эффект

(успешность обучения, социальная адаптация, мышечное расслабление, высокая степень контроля сознания, активное воображение, значительные волевые усилия, улучшение выполнения когнитивных задач, улучшение концентрации внимания и психоэмоционального фона, снижение или увеличение физиологических показателей). В некоторых исследованиях предпринята попытка количественного анализа эффективности БОС-тренингов: увеличение относительного прироста амплитуды альфа-ритма [11]; отклонение управляемого параметра от медианы фоновых значений на величину, превышающую два стандартных отклонения [12]; увеличение средней эффективности амплитуды альфа-ритма за сеанс не менее чем на 15 % относительно первого сеанса [11, 13].

Еще одним немаловажным показателем проводимых сеансов БОС-тренинга является длительность удержания или стабильность нового состояния функционирования регуляторных систем. В исследованиях показано, что переход к новому поведенческому паттерну возможен после 3–4-го сеанса БОС-тренинга по альфа-протоколу [5, 14, 15], а стойкая ремиссия наблюдается после 8 – 60 сеансов и может сохраняться до двух лет [4]. Однократного сеанса БОС-тренинга достаточно для определения резервных возможностей человека [4]. На эффективность БОС-терапии влияют индивидуальные особенности альфа-активности: участникам с исходно более высокоамплитудным ритмом достаточно одного курса БОС-терапии, у лиц с исходным низкоамплитудным альфа-ритмом требуются повторные курсы [11].

Кроме того, успешность биоуправления подразумевает количественную оценку сдвига регулируемого физиологического параметра в направлении заданном БОС-протоколом [13, 16] и зависит от типа стратегии саморегуляции произвольных функций человека, протокола тренинга (игровая форма, VR и AR-среды), индивидуальных особенностей, пластичности, лабильности и неустойчивости нейродинамических процессов, высокой мотивации и способности к управлению состоянием, а также наличия адаптационных резервов человека. Прогнозируемость и результативность обучения коррелирует с длительностью сохранения нового состояния.

Следует обратить внимание, что в зависимости от исходного уровня биоэлектрической активности мозга результативность может быть неуспешной или даже регрессирующей, что еще более актуализирует прогностическую функцию на ранних этапах БОС-тренинга [11].

Материалы и методы. До начала БОС-курса проводился комплексный скрининг по оценке индивидуально-психологических характеристик (опросник Айзенка, адаптация В.М. Русалова, 1987) и были определены показатели типа темперамента по шкалам «Экстраверсия – Интроверсия» и «Нейротизм – Эмоциональная стабильность».

В исследовании приняли участие 14 здоровых добровольцев (возраст 18–30 лет). Критериями включения являлись: отсутствие неврологических и психиатрических заболеваний, нормальное или скорректированное зрение, отсутствие приема психоактивных препаратов. Все участники дали письменное информированное согласие в соответствии с биоэтическими правилами.

Перед началом каждого сеанса производилась 5-минутная фоновая запись ЭЭГ (проба «глаза открыты» и проба «глаза закрыты») с использованием многоканального ЭЭГ-аппарата «Энцефалан-131-03» («Медиком», г. Таганрог) при наложении 19 электродов по международной системе «10-20». Всем участникам был предложен стандартизированный протокол нейробиоуправления, который направлен на обучение произвольной регуляции увеличения спектральной мощности альфа-ритма ЭЭГ. Обратная связь обеспечивалась в мультимодальном формате: визуальная (изменение

изображения на мониторе, графики мощности) и акустическая (звук, частота которого изменялась с уровнем правильной активности, достижение нужного состояния).

Для БОС-тренинга использовался программно-аппаратный комплекс «Реактор». Проводился анализ топографических карт, рассчитывались усредненные амплитудно-частотные характеристики в пределах основных частотных диапазонов. Для расчёта индивидуальной пиковой альфа-частоты и спектральной мощности использовались теменно-затылочные отведения ЭЭГ. Для расчёта фронтальной альфа-асимметрии использовались лобные отведения. Референтные электроды размещались на мочках ушей, импеданс электродов <10 кОм, частота дискретизации – 256 Гц, полоса пропускания 0,5–70 Гц. Курс состоял из 5 сессий.

Статистический анализ результатов исследования проводился в среде программирования Python (версия 3.10) с использованием специализированных библиотек для обработки данных и научного анализа. Взаимосвязи между психологическими показателями опросников (нейротизм, экстраверсия) и нейрофизиологическими параметрами оценивались с помощью коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Проверка нормальности распределения количественных признаков проводилась с помощью критерия Шапиро-Уилка. Ввиду отклонения ряда параметров от нормального распределения, для дальнейших расчетов были выбраны непараметрические методы. Сравнительный анализ для оценки статистической значимости различий между группами проводился с помощью U-критерия Манна-Уитни.

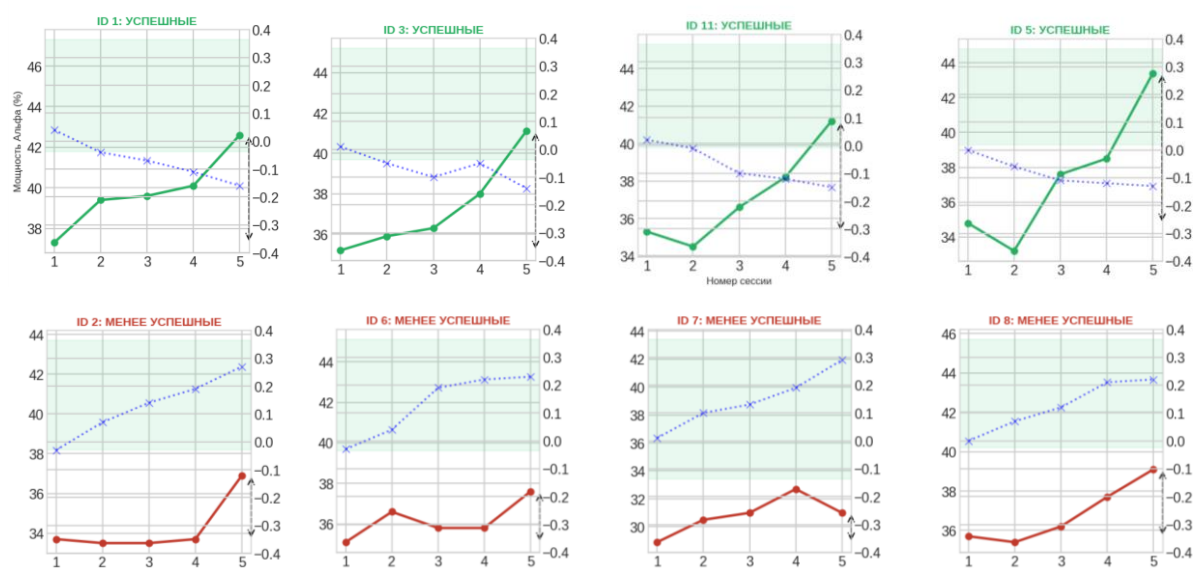
Для стратификации выборки был использован дискриминантный анализ с использованием модели Фишера. Линейная дискриминантная функция Фишера описана уравнением линейной регрессии [16], по результатам которой были выявлены наиболее значимые показатели ЭЭГ для стратификации выборки на успешно- и неуспешно обучаемых на ранних этапах БОС-тренинга с целью дальнейшего прогнозирования коррекции состояния. Для определения прогностической ценности параметров проводился ROC-анализ, где качество классификации оценивалось по площади под кривой, оптимальные пороги отсечения вычислялись путем максимизации индекса Юдена.

Анализ результатов. В ходе предтренингового скрининга индивидуальных особенностей участников нами были выделены показатели по шкалам «Экстраверсия – Интроверсия» и «Нейротизм – Эмоциональная стабильность» на основе опросника Айзенка. Далее проводилась предварительная стратификация выборки для последующего анализа влияния психологических особенностей на эффективность обучения БОС-тренингу. Отмечена высокая степень влияния уровня нейротизма, показателя фронтальной альфа-асимметрии и минимального времени выполнения сессии на эффективность БОС-тренировок по альфа-протоколу. Участники с высоким уровнем нейротизма чаще демонстрировали паттерны, интерпретируемые как «оборонительная» готовность и отсутствие успешной результативности альфа-БОС-протокола.

В ходе исследования обнаружена значимая отрицательная корреляция между уровнем нейротизма (по Айзенку) и приростом мощности альфа-ритма ЭЭГ у участников (коэффициент ранговой корреляции Спирмена $r=-0,54$, $p=0,046$). Успешность выполнения задания была задана низким уровнем нейротизма, который позволял участникам с левополушарной альфа-активностью беспрепятственно достигать положительного результата по управлению состоянием по принципу положительной обратной связи, увеличивая мотивацию и успешность обучения в последующих сессиях БОС-тренинга. Также показана высокая связь между уровнем нейротизма и латеритизацией фронтального фокуса альфа-активности ($p<0,05$). Показатель степени нейротизма выступает в роли психофизиологического маркера:

высокая эмоциональная лабильность участника ассоциирована с правосторонним сдвигом фронтальной альфа-активности, что может создавать физиологический конфликт между задачей альфа-тренинга и итоговым результатом и отражать состояние функционального стресса [19].

Результаты исследования показали, что способность обучения БОС-тренингу по альфа-протоколу зависит от ряда нейрофизиологических показателей (прирост индивидуальной мощности альфа-ритма и функциональная асимметрия альфа-ритма с левосторонней асимметрией) и проявляется уже на ранних этапах (5 сессий тренинга). На рис. 1 (пунктирная линия, верхний ряд) показан устойчивый тренд по снижению фронтальной альфа-асимметрии на протяжении 5 сессии тренинга, что свидетельствует о формировании навыка саморегуляции в ходе БОС-тренинга. Усиление мощности альфа-активности подтверждается литературными данными [17, 18], отражает процесс относительного снижения уровня напряжения и психофизиологической активности и обусловлено усилением синхронизирующих влияний стволовых структур ретикулярной системы на кору головного мозга.



Обозначения: пунктирной линией отмечена динамика фронтального фокуса альфа-активности, темное поле – целевая зона прироста альфа-активности ЭЭГ. По оси абсцисс – количество сессий БОС-тренинга, по оси ординат – прирост мощности альфа-ритма, мВ.

Рис. 1. Индивидуальная динамика прироста мощности альфа-ритма и фронтальной асимметрии исследования по протоколу альфа-БОС-тренинга на раннем этапе

Правостороннее доминирование фокуса альфа-активности наблюдалось в группе со слабой результативностью по саморегуляции в ходе БОС-тренинга (рис. 1, нижний ряд), что можно объяснить накоплением тревожности от неудачных попыток тренинга, истощением тормозного контроля, вероятной усталостью и непониманием как достигать процесса релаксации. Правостороннее доминирование замыкает круг: отсутствие успеха в БОС-тренировках ведёт к росту стресса, что уменьшает шансы на последующий результат.

На следующем этапе определено временное окно (время сеанса), затраченное участниками тренинга на достижение и устойчивое удержание целевого уровня альфа-активности. Определен оптимальный диапазон тестирования по протоколу альфа-БОС-

тренинга (24,7 мин), который позволяет добиться результативности управления состоянием при условии исходных нейрофизиологических коррелятов (прирост мощности альфа-активности, левосторонняя локализация альфа-активности). Дальнейшее увеличение времени тренировки у участников с неуспешной результативностью не приводит к улучшению состояния, так как связано с отсутствием исходных резервов пластичности (слабый прирост мощности альфа-ритма, правосторонняя локализация фронтальной альфа-асимметрии).

Далее нами была проведена стратификация выборки участников на основе объективного показателя нейропластичности – прироста относительной мощности альфа-ритма в динамике прохождения тестирования по саморегуляции состояния при использовании протокола альфа-БОС-тренинга. Пороговое значение разделения групп в 4,5 % (значимость $U=8,0$, $p=0,014$) было определено на основе медианного значения и использовалось для стратификации на раннем этапе БОС-тренинга. Этот критерий превышает естественную вариабельность альфа-мощности в покое, коррелирует с независимыми маркерами успешности (левосторонняя фронтальная альфа-активность, сокращение времени БОС-сессии) и согласуется с литературными данными [19]. Установленный порог позволил разделить участников с успешной динамикой саморегуляции по протоколу альфа-БОС-тренинга (средний прирост 5,3 %) и менее успешной (средний прирост менее 2,5 %). Формирование устойчивого навыка саморегуляции по альфа-протоколу БОС-тренинга или способность к изменению состояния наблюдается у участников с выраженной нейропластичностью, которые стабильно входят в целевую зону к 5-й сессии, а тренд к успешности отмечается на 3-й сессии.

По результатам анализа данных у всех участников, достигших значимого прироста альфа-мощности, исходная фронтальная альфа-активность была отрицательной (левостороннее доминирование, $M=-0,08$), в группе с незначительной результативностью саморегуляции на раннем этапе – была близка к нулю или положительной ($M=+0,02$, $p<0,01$). Для оценки качества моделей бинарной классификации и выбора порога чувствительности был использован ROC-анализ, с помощью которого установлен диагностический порог фронтального альфа-фокуса, равный $-0,066$ (критерий площади под кривой $AUC=0,94$ с 95 % доверительным интервалом; 0,82; 1,00): все участники с фронтальным фокусом альфа-активности попали в группу успешных ($<-0,066$) или менее успешных ($>-0,066$) по процессу саморегуляции состояния.

Показатель индивидуального прироста мощности альфа-активности избран в качестве диагностического критерия в психофизиологической модели успешности БОС-тренинга (пороговое значение $-0,066$ метод ROC) успешности БОС-тренинга по альфа-протоколу на ранней стадии (рис. 2). Прирост мощности альфа-ритма на 5 % (у менее успешных участников) и 10 % (у успешных участников тренировки) на ранних этапах позволяет достичь результативности обучения по управлению функциональным состоянием при условии, что участники исследования имеют левосторонние фокусы альфа-активности. Это подтверждается литературными данными о том, что произвольная регуляция альфа-ритма зависит от исходного его уровня: с высокоамплитудным альфа-уровнем успешность регуляции выше.

На рис. 2 визуализирован подход к психофизиологической модели по прогнозированию успешности управления состоянием в рамках альфа-БОС-протокола, в которой представлены четыре варианта состояния на основании показателей прироста мощности альфа-ритма ЭЭГ и времени достижения и удержания целевого состояния.

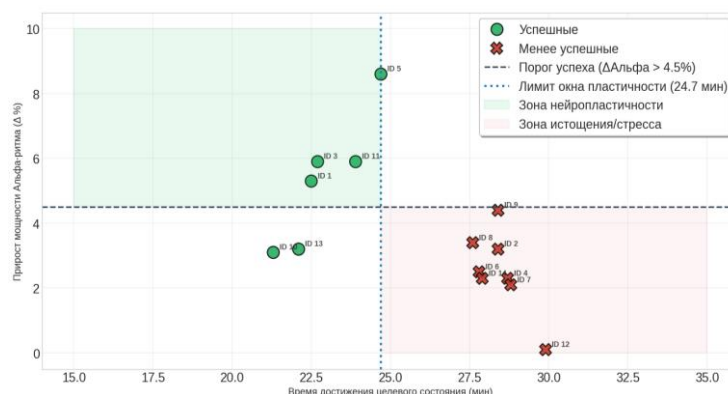


Рис. 2. Визуализация подхода к психофизиологической модели по прогнозированию успешности управления состоянием в рамках альфа-БОС-протокола

Наиболее оптимальным состоянием является «Зона нейропластичности» (левый верхний квадрант, светло-зеленое поле) по достижению результативности альфа-БОС-тренинга на ранних этапах до 25 мин, в которой отмечено превышение мощности альфа-пика (до 10 % на ранних этапах) и формирование левополушарного фронтального фокуса альфа-активности. Такое состояние свидетельствует о наличии адаптационного резерва для успешности выполнения БОС-тренировки. Для участников с такими психофизиологическими показателями характерно сочетание высокой скорости обучения (входа в состояние) и удержание в заданном или оптимальном состоянии, которые свидетельствуют об успешной автоматизации навыка саморегуляции. Время сессии выступает маркером оптимального обучения, и установленное методом ROC-анализа минимальное временное окно тренировки в 24,7 минуты является точкой перехода организма из режима обучения в режим поддержания состояния.

Состояние «неоптимального функционирования» (левый нижний квадрант) может возникать при недостаточном временном окне тренировок, либо связано с низкой лабильностью нервной системы (низкий прирост индивидуального альфа-ритма, менее 5 %), а также с текущим функциональным состоянием, коррелирующим с недостаточной успешностью результатов тренинга. Скорее всего, время, затраченное на тренинг (24,7 мин), недостаточно, и требуется либо его увеличение, либо увеличение количества сеансов БОС-тренинга для достижения более значимых результатов.

Состояние отсутствия адаптационных резервов при БОС-управлении ~~состоянием~~ связано с индивидуальными особенностями (правополушарный фокус альфа-ритма, отсутствие динамики прироста альфа-ритма) и не имеет положительной результативности (правый верхний квадрант). Увеличение времени, отведенного на сессию, не приводит к должной динамике и требует смены протокола БОС-тренинга.

Состояние повышенного стресса или «зона истощения» означает, что длительные безуспешные попытки БОС-тренинга коррелируют с усилением маркеров системы избегания (правополушарный фокус фронтальной альфа-активности), что может интерпретироваться как формирование неоптимальной стратегии регуляции по управлению состоянием. Практическая значимость модели состоит в том, что она позволяет регулировать длительность активной фазы тренинга и прекратить ее для тех участников, которые не достигают нужного результата и не имеют положительного тренда, так как продолжение тренинга может приводить к физиологическому истощению и стрессу.

Следовательно, на основании результатов нейрофизиологического анализа можно сделать вывод об «окне нейропластичности» в ходе БОС-тренинга и выделить оптимальные состояния для протокола альфа-БОС-тренинга.

Обсуждение. Стратификация целевой зоны успешности состояния саморегуляции на ранних этапах БОС-тренинга подтверждается качественным различием нейрофизиологических показателей и позволяет на основе таких показателей, как прирост индивидуальной мощности альфа-ритма и его функциональная асимметрия, индивидуализировать прогноз эффективности БОС-тренинга.

Эмпирически доказано, что участники, имеющие левостороннее доминирование фокуса фронтальной альфа-активности, обладают высокой степенью обучаемости и результативностью по саморегуляции состояния, эмоциональной устойчивостью, что соответствует оптимальной нейропластичности. Участники БОС-тренинга с правосторонним доминированием фронтальной альфа-активности не имеют положительных результатов на раннем этапе БОС-тренинга, что сочетается с эмоциональным напряжением и когнитивным диссонансом (недостаточное удержание внимания, гиперактивность, и пр.), создающими функциональный барьер к достижению результативности по принципу отрицательной обратной связи.

Показатель прироста мощности альфа-активности фронтального фокуса, его положительный тренд и временное окно достижения результативности альфа-БОС-тренинга положены в основу психофизиологической модели способности к саморегуляции состояния на раннем этапе. Левосторонняя фронтальная асимметрия выступает в роли «физиологического фундамента» для БОС-обучения. Участники с исходной правосторонней активацией сталкиваются с «когнитивным барьером»: их эмоциональный фон (связанный с тревожностью и системой избегания) блокирует механизмы альфа-генерации, что отражается в неспособности или неуспешности саморегуляции состояния человека.

Выводы. В ходе выполнения исследования получены следующие результаты:

1. Выделены оптимальные нейрофизиологические (прирост индивидуальной мощности альфа-ритма, фронтальная альфа-асимметрия с левосторонней локализацией) и психофизиологические (нейротизм, экстраверсия и тип темперамента) показатели для прогнозирования успешности динамики БОС-тренинга на раннем этапе.
2. Установлен пороговый критерий для определения минимального количества сессий для формирования динамики устойчивого навыка саморегуляции в рамках БОС-тренинга в зависимости от индивидуальных особенностей ЭЭГ.
3. Определено временное окно целевой зоны для достижения положительной динамики БОС-тренинга в зависимости от индивидуальных ЭЭГ особенностей.
4. Обоснован критерий порогового значения успешности БОС-тренинга по формированию навыка саморегуляции на основе показателя прироста мощности альфа-ритма, его латерализации в ходе БОС-тренинга на ранних этапах с помощью метода ROC.
5. Предложена модель прогнозирования обучаемости в сессиях БОС-тренинга по альфа-протоколу на ранних этапах на основе нейрофизиологических показателей с выделением оптимальной «зоны нейропластичности», и неоптимальной «зоны истощения».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gold J.M., Berman K.F., Randolph C. PET validation of a novel prefrontal task: Delayed response alteration // Neuropsychology. – 1996. – No 10(1). – P. 3–10.

2. Critchley H. D., Melmed R. N., Featherstone E. et al. Brain activity during biofeedback relaxation // *Brain*. – 2001. – No 124(5). – P. 1003–1012.
3. Горев А. С., Панова Е. Н. Эффективность БОС-тренинга регуляции функционального состояния в зависимости от индивидуальных психофизиологических характеристик // *Физиология человека*. – 2009. – № 5. – С. 25–32.
4. Черепкина Л.П. Прогнозирование и устойчивость навыка нейробиоуправления // *Омский научный вестник*. – 2006. – №3(36). – С. 226–228.
5. Сороко С. И., Трубачев В. В. Нейрофизиологические и психофизиологические основы адаптивного биоуправления. – СПб. : ИЭФБ РАН, 2010. – 607 с.
6. Рудакова Е. В., Грибанов А. В., Панков М. Н. Возможности БОС-тренинга в коррекции синдрома с гиперактивностью // *Вестник Поморского университета*. – 2007. – № 4. – С. 86–93.
7. Штарк М. Б. Скок А. Б. Применение электроэнцефалографического биоуправления в клинической практике // *Биоуправление-4: теория и практика*. – Новосибирск, 2002. – С. 9–17.
8. Jap B.T., Lal S., Fischer P., Bekiaris E. Using EEG spectral components to assess algorithms for detecting fatigue // *Expert Systems with Applications*. – 2009. – No 36. – P. 2352–2359.
9. Cheng Shyh-Yueh, Hsu Hong-Te. Mental Fatigue Measurement Using EEG, *Risk Management Trends*. – Giancarlo Nota (Ed.), 2011. – 228 p. – DOI:10.5772/16376
10. Демин Д.Б. Нейрофизиологическая характеристика вариантов вегетативного тонуса у подростков, проживающих в условиях европейского сервера: Автореф. дис. ... д-ра мед. наук: 11.05.2016. – Архангельск, 2016. – 35 с.
11. Черепкина Л.П., Тристан В.Г. Эффективность ЭЭГ-биоуправления в зависимости от его продолжительности // *Бюллетень СО РАМН*. – 2004. – №3(113). – С. 98–104.
12. Долецкий А.Н., Исмаил-заде И. К. Сравнительная оценка результативности методик биологической обратной связи с использованием стандартизированных критериев // *Вестник ВолгГМУ*. – 2013. – № 1(45). – С. 110–114.
13. Вережкин Е.Г., Недорезов Л.В. Об одном методе двумерного статистического оценивания успешности биоуправления // *Бюл. СО РАМН*. – 1999. – № 1 (91). – С. 9–13.
14. Таламова И.Г. Нейрофизиологические механизмы успешности нейробиоуправления и его психофизиологические эффекты // *Омский научный вестник*. – 2006. – № 5(39). – С. 237–241.
15. Суворов Н. Б. Функциональное биоуправление ритмом сердца человека: адаптивный модуль // *Медицинская техника*. – 2005. – № 2. – С. 24–27.
16. Митрофанов А.А., Кичук И.В., Русалова М.Н., Чаусова С.В., Соловьева Н.В. Методика быстрого автоматизированного дискриминантного анализа ээг при различении в два класса // *Психология. Журнал Высшей школы экономики*. – 2020. – Т. 17, № 2. – С. 223–249.
17. Klimesch W. EEG alpha and theta oscillations reflect cognitive and memory performance: a review and analysis // *Brain Research Reviews*. – 1999. – No 29(2-3). – P. 169–195.
18. Базанова О. М., Балиоз Н. В., Муравлева К. Б., Скорая М. В. Влияние тренинга произвольного увеличения альфа-мощности ЭЭГ на вариабельность сердечного ритма // *Физиология человека*. – 2013. – Т. 39, № 1. – С. 103–116.
19. Sagre E. Frontal Alpha Asymmetry in Emotion Regulation: A Systematic Review of State and Trait Perspectives. – University of Skovde, School of Bioscience. 2025. – 40 p.

REFERENCES

1. Gold, J.M., Berman, K.F., Randolph, C. (1996). PET validation of a novel prefrontal task: Delayed response alteration. *Neuropsychology*. №10(1), pp. 3-10.
2. Critchley, H.D., Melmed, R.N., Featherstone, E., Mathias, C.J., Dolan, R.J. (2000). Brain activity during biofeedback relaxation. A functional neuroimaging investigation. *Brain*. 24, pp. 1003–1012.
3. Gorev, A. S., Panova, E. N. (2009). Efficiency of biofeedback training of functional state regulation depending on individual psychophysiological characteristics. *Fiziologiya cheloveka* [Human Physiology]. 5, pp. 25-32. [in Russian].
4. Cherapkina, L.P. (2006). Forecasting and sustainability of neurobiofeedback skill. *Omsk Scientific Bulletin*. 3 (36). pp. 226-228. [in Russian].
5. Soroko, S. I., Trubachev, V. V. (2010). *Neirofiziologicheskie i psikhofiziologicheskie osnovy adaptivnogo bioupravleniya* [Neurophysiological and psychophysiological bases of adaptive biofeedback]. Saint Petersburg, IEFB RAN, 607 p. [in Russian].
6. Rudakova, E.V., Griбанov, A.V., Pankov, M.N. (2007). Opportunities biofeedback training in correction hyperactivity syndrome. *Vestnik Pomorskogo universiteta* [Pomor University Bulletin]. 4, pp. 86-93. [in Russian].

7. Shtark, M.B., Skok, A.B. (2002). Primenenie elektroentsefalograficheskogo bioupravleniya v klinicheskoi praktike [Application electroencephalographic biofeedback in clinical practice]. In: *Bioupravlenie-4: teoriya i praktika* [Biofeedback-4: Theory and Practice]. Novosibirsk, pp. 9–17. [in Russian].
8. Jap, B.T., Lal, S., Fischer, P., Bekiaris, E. (2009). Using EEG spectral components to assess algorithms for detecting fatigue. *Expert Systems with Applications*. 36, pp. 2352–2359.
9. Cheng, Shyh-Yueh, Hsu, Hong-Te. (2011). *Mental Fatigue Measurement Using EEG, Risk Management Trends*. Giancarlo Nota (Ed.).
10. Demin, D.B. (2016). Neurophysiological characteristics of autonomic tone variants in adolescents living in the conditions of the European server: Abstract of a Doctor of Medicine dissertation: 11.05.2016. Arkhangelsk. 35 p. [in Russian].
11. Cherapkina, L.P., Tristan, V.G. (2004). Efficiency of EEG biofeedback depending on its duration. *Bulletin of the Siberian Branch of the Russian Academy of Medical Sciences*. 3 (113), pp. 98–104. [in Russian].
12. Doletsky, A.N., Ismail-zade, I.K. (2013). Comparative assessment of the effectiveness of biofeedback techniques using standardized criteria. *Bulletin of VolgSMU*. 1 (45), pp. 110–114. [in Russian].
13. Verevkin, E.G., Nedorezov, L.V. (1999). On one method of two-dimensional statistical evaluation of the success of biofeedback. *Bulletin of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*. 1 (91), pp. 9–13. [in Russian].
14. Talamova, I.G. (2006). Neurophysiological mechanisms of the success of neurobiofeedback and its psychophysiological effects. *Omsk Scientific Bulletin*. 5 (39), pp. 237–241. [in Russian].
15. Suvorov, N. B. (2005). Biofeedback of human heart rate: adaptive module. *Meditinskaya tekhnika* [Biomedical Engineering]. 2, pp. 24–27. [in Russian].
16. Mitrofanov, A.A., Kichuk, I.V., Rusalova, M.N., Chausova, S.V., Solovieva, N.V. (2020). Methodology of fast automated discriminant analysis of EEG when distinguishing into two classes. *Psychology. Journal of the Higher School of Economics*. 17(2), pp. 223–249. [in Russian].
17. Klimesch, W. (1999). EEG alpha and theta oscillations reflect cognitive and memory performance: a review and analysis. *Brain Research. Brain Research Reviews*. Vol. 29 (2-3), pp. 169–195.
18. Bazanova, O.M., Balioz, N.V., Muravleva, K.B., Skoraya, M.V. (2013). Voluntary alpha-power increasing training impact on the heart rate variability. *Fiziologiya cheloveka* [Human Physiology]. 39 (1), pp. 103–116. [in Russian].
19. Sagre, E. Frontal Alpha Asymmetry in Emotion Regulation: A Systematic Review of State and Trait Perspectives. *University of Skovde, School of Bioscience*. 2025. – 40 p.

DEVELOPMENT OF A PREDICTIVE MODEL FOR THE SUCCESS OF BIOFEEDBACK TRAINING IN THE EARLY STAGES OF TRAINING BASED ON NEUROPHYSIOLOGICAL INDICATORS

M. A. Boldyreva, A. M. Kulikov

This article examines neurophysiological indicators that can predict the ability to learn skills for independent functional state regulation at early stages using the alpha protocol of biofeedback training. Optimal EEG indicators (increase in individual alpha rhythm power, frontal alpha asymmetry with left-sided localization) were selected to achieve positive dynamics during functional biofeedback. We proposed a model for predicting learning ability during biofeedback training sessions using the alpha protocol at early stages.

Keywords: model, forecasting, functional state; psychophysiological indicators; biological control, EEG

Поступила в редакцию 05.06.2026 г.

Болдырева Марина Алексеевна

Кандидат биологических наук, доцент;
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
г. Ростов-на-Дону, РФ.
E-mail: mpavlovskaya@mail.ru
ORCID: 0000-0001-9164-7296
SPIN-код: 8571-5683

Boldyreva Marina A.

Candidate of Biological Sciences,
Southern Federal University,
Rostov-on-Don, RF.

Куликов Андрей Михайлович

магистрант;
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
г. Ростов-на-Дону, РФ.
E-mail: andku@sfnu.ru

Kulikov Andrej M.

student,
Southern Federal University,
Rostov-on-Don, RF.

ИЗМЕНЕНИЯ БИОХИМИЧЕСКИХ И АГРОХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЧВЫ И РОСТА ОВСА ПРИ СОВМЕСТНОМ ВНЕСЕНИИ БИОУГЛЯ И СИДЕРАТА

© 2026. *В. И. Кулагина, А. Н. Грачев, Р. Р. Шагидуллин, Л. М. Сунгатуллина, К. А. Гордеева, С. А. Забелкин, С. С. Рязанов, А. М. Хайруллина*

Показано, что последовательное внесение в почву сидерата и биоугля из илов сточных вод в лабораторном опыте не привело к статистически значимому изменению высоты и биомассы растений овса посевного (*Avena sativa* L.) по сравнению с контролем. Поскольку содержание обменного калия и доступного фосфора увеличивалось с дозой вносимого биоугля, то ограничивающим фактором следует признать доступный азот, содержание которого оставалось очень низким на всех вариантах опыта. Реакция биохимической активности почв на внесение биоугля с сидератом неоднозначна. Активность фермента уреазы статистически значимо выше контроля при внесении 5 % биоугля, фосфатазы и инвертазы статистически значимо ниже контроля при дозах биоугля 5 % и 10 %.

Ключевые слова: биоуголь; илы сточных вод; сидерат; биомасса растений; высота растений; лабораторный опыт; инвертаза; фосфатаза; уреазы.

Введение. В России ежегодно образуется порядка 1,5 млн. м³ иловых осадков сточных вод, которые в основном направляются на иловые карты [1]. Объем иловых карт не безграничен. К тому же подобный способ складирования вызывает проблемы, поскольку для осадка характерен резкий неприятный запах, он содержит поверхностно-активные вещества, тяжелые металлы, патогенную микрофлору, яйца гельминтов [2]. Количество опасных ингредиентов варьирует, но в тех или иных количествах они присутствуют в любом городском осадке сточных вод. Осадок необходимо безопасно утилизировать, что является непростой задачей. Существует несколько способов переработки и обеззараживания иловых осадков, включая сжигание до золы, анаэробное сбраживание, пиролиз [1, 2]. Твердым продуктом пиролиза является биоуголь, содержащий значительное количество веществ, пригодных для питания растений, обладающий большой пористостью и емкостью катионного обмена, часто содержащий вещества, способные уменьшить кислотность почв. При этом считается, что тяжелые металлы в биоугле находятся в труднодоступной для растений форме [3, 4]. Получение биоугля с последующим внесением его в почву могло бы стать перспективным способом утилизации осадков сточных вод.

Переработка осадков сточных вод в биоуголь станет коммерчески привлекательной и широко распространенной лишь в случае однозначно положительного воздействия на урожайность сельскохозяйственных культур с сохранением или повышением качества продукции. Опыты с биоуглем из осадков сточных вод проводились в разных странах. Однако полученные результаты противоречивы. В опытах наблюдалось как повышение [5, 6], так и снижение урожайности сельскохозяйственных культур [7]. Возможной причиной снижения урожайности может быть не только наличие токсичных веществ, сколько несбалансированный по питательным веществам состав самого биоугля в совокупности с высокой поглотительной способностью. Стремясь повторить успех Terra Preta, плодородных искусственных почв на основе древесного биоугля из бассейна Амазонки [8], современные исследователи продолжают поиск органических и минеральных компонентов, способных в сочетании с биоуглем ощутимо увеличить урожайность

сельскохозяйственных культур уже в условиях бореальной зоны и сохранить этот эффект на долгие годы.

Сотрудники Тольяттинского государственного университета, например, предложили способ получения органоминерального удобрения путем смешивания биоугля из «активного ила с фосфоритной мукой и древесными опилками для обеспечения стабильности показателей». Полученный продукт соответствует требованиям ГОСТ Р 54651-2011, однако данные о воздействии его на сельскохозяйственные растения в статье не приводятся [9].

Биоугли из разного сырья имеют ряд общих свойств, поэтому результаты их совместного применения с органическими и минеральными удобрениями полезны для разработки технологии использования биоуглей из илов сточных вод в сельском хозяйстве. Хотя итоги совместного применения также неоднозначны. Согласно исследованиям, проведенным во Вьетнаме, внесение в почву 40 кг N, 120 кг P₂O₅, 80 кг K₂O и 1 т/га биоугля привело к увеличению урожая сои на 2–3 ц/га [10]. Дубровина И.А. с соавторами отмечали, что совместное внесение биоугля с азофоской в дерново-подзолистую песчаную почву способствовало увеличению сырой биомассы ячменя, а в дерново-подзолистую тяжелосуглинистую – к уменьшению биомассы [11]. В Приморском крае на агротемногумусовых подбелах урожай белокочанной капусты при совместном внесении биоугля и минеральных удобрений увеличился в 3 раза по сравнению с контролем, биомасса свеклы при совместном внесении биоугля и органических удобрений увеличилась в 1,9 раза, зеленая биомасса сои возросла, но урожай соевых бобов уменьшился [12]. Мелкоделяночные опыты, проведенные в Ленинградской области, показали отсутствие статистически значимого увеличения урожайности картофеля и ячменя при совместном внесении биоугля и азофоски [13].

Сотрудниками ИПЭН АН РТ также предприняты усилия по нахождению оптимального сочетания биоугля с минеральными или органическими удобрениями, для чего проведена серия вегетационных опытов. Попытка сбалансировать соотношение питательных веществ за счет внесения вместе с биоуглем минеральных азотных удобрений привела к увеличению общей численности микроорганизмов в почве, однако максимальная биомасса растений овса посевного наблюдалась на варианте, где применялся уголь без удобрений [14]. Совместное внесение биоугля с гуматом калия не привело к увеличению биомассы полбы, возможно, из-за резкого недостатка азота в почве, но способствовало увеличению содержания хлорофилла в растениях [15].

Цель данной работы – определить агрохимические и биохимические показатели почвы, биомассу и высоту растений овса посевного при внесении в почву различных количеств биоугля из илов сточных вод в сочетании с сидератом (горчицей белой).

Материалы и методы исследования. Перед проведением опыта почва вегетационных сосудов прошла предварительную подготовку. В каждый сосуд с почвой, кроме контроля, добавляли по 8 г сидерата в сыром весе – надземной части молодых растений горчицы белой (*Sinapis alba* L.). Сосуды с почвой и сидератом выдерживали 90 дней при оптимальной влажности почвы – 65 % полевой влагоемкости. Неразложившиеся остатки растений горчицы через 90 дней в почве не обнаруживались. Далее в ряд сосудов добавляли биоуголь. Общее количество почвы или смеси почвы с биоуглем в вегетационных сосудах составляло 400 г. Опыт включал 5 вариантов: 1) почва (контроль); 2) почва, выдержанная с сидератом, но без биоугля, 3) почва + сидерат + 2 % биоугля от веса почвы, 4) почва + сидерат + 5 % биоугля, 5) почва + сидерат + 10 % биоугля. Опыт проводили в трехкратной повторности.

Варианты с биоуглем, но без сидерата, в данный опыт не включали, так как подобные опыты проводили с этой же партией биоугля ранее [14, 15].

Далее приведен пересчет дозы биоугля в т/га: 2 % – соответствует 6,7 т/га, 5 % – 16,7 т/га, 10 % – это 33,4 т/га. Величины вполне реальные для внесения в почву, сопоставимые, например, с дозами внесения навоза или доломитовой муки. Коммерчески привлекательным внесение в почву биоугля с различными добавками станет лишь в случае значительного повышения урожайности сельскохозяйственных растений с сохранением качества продукции.

Почва для опыта – дерново-подзолистая с 30-летней залежи. Дерново-подзолистые почвы часто используются под пашню в северо-западной части Республики Татарстан. Залежь – заброшенная на время пашни, которая может быть распахана вновь. Гумусовый, в данном случае старопашотный, горизонт, отбирали на залежи, так как планировался не один вегетационный опыт, а целая серия, почвы требовалось много. Снимать плодородный горизонт на используемой в настоящее время пашне показалось не корректным, так как это неизбежно создает неудобства для сельхозпроизводителей. Специально выбрана относительно бедная почва для более яркого проявления эффекта от внесения биоугля и сидерата. Содержание гумуса по Тюрину И.В. – 1,78 %, это очень низкое содержание гумуса согласно агрохимической группировке, но обычное для пахотных дерново-подзолистых почв. Содержание общего азота – 0,12 %, щелочногидролизуемого азота методом Корнфилда А. Х. – 22,4 мг/кг (очень низкое). Реакция среды используемой почвы слабокислая ($pH_{\text{солевой}} = 5,15$). Гранулометрический состав почвы – легкосуглинистый, более подробно выделенные механические фракции приведены в статье [15].

Биоуголь для вегетационного опыта получен при температуре $+500 \pm 20$ °C из иловых осадков сточных вод г. Чебоксары на установке быстрого пиролиза FPP02, которая является запатентованной разработкой компании ООО «Энерголеспром», г. Казань [1]. Содержание общего нелетучего углерода в биоугле 68,7 %, зольность 19,3 %. Содержание щелочногидролизуемого азота 105 мг/кг, подвижного фосфора и обменного калия – 800 и 3350 мг/кг соответственно.

В качестве тест-культуры использован овес посевной (*Avena sativa* L.).

Опыт производили согласно ГОСТ Р ИСО 22030-2009. В каждый вегетационный сосуд высевали по 12 семян. На 14 день часть растений срезали. В каждом сосуде оставляли по 4 растения, которые дорастивали до 42 дня, после чего срезали для определения биомассы. Определяли высоту растений (длину стеблей).

Агрохимические показатели почв определяли общепринятыми методами: щелочногидролизуемый азот методом Корнфилда А.Х., подвижный фосфор и обменный калий – по Чирикову, реакция среды солевой вытяжки – потенциометрическим методом. Биохимические показатели определяли следующими методами: активность уреазы – по Галстяну А.Ш. в модификации Хазиева Ф.Х., инвертазы – по Щербаковой Т.А., фосфатазы по методу Геллера И.Т. и Гинзбург К.Е.

Связь между почвенными свойствами анализировали с помощью коэффициента корреляции Пирсона, статистическая значимость определена при $p < 0,05$.

Результаты исследований и их обсуждение. Проведенные исследования показали, что внесение в почву сидерата и биоугля не оказало статистически значимого воздействия на реакцию среды солевой вытяжки. На всех вариантах реакция среды относилась к среднекислой и колебалась в очень узких пределах – $pH=4,9-5,0$ (рис. 1, А).

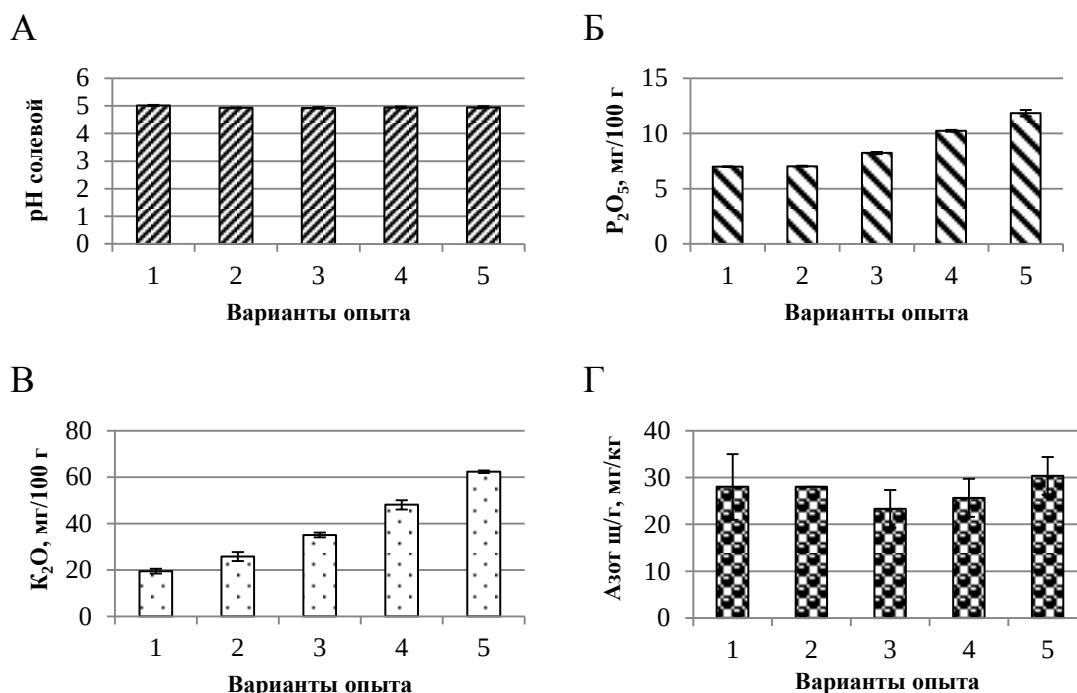


Рис. 1. Агрохимические показатели почв (среднее $\pm$ стандартное отклонение) по вариантам опыта: 1 – контроль (почва), 2 – почва с сидератом, 3 – почва+сидерат+2% биоугля от веса почвы, 4 – почва+сидерат+5% биоугля, 5 – почва+сидерат+10% биоугля. А – реакция среды, Б – подвижный фосфор, В – обменный калий, Г – щелочногидролизующий азот.

Согласно литературным данным биоугли, полученные в разных условиях, по-разному воздействуют на почвенную реакцию среды – как правило, чем выше температура, тем больше золы содержится в твердом продукте пиролиза, и, следовательно, такие угли более щелочные [4, 16]. Использованный нами биоуголь получен при среднем для пиролиза диапазоне температур, pH водной вытяжки равна 7,9.

Опыт, проведенный годом ранее с той же партией биоугля, выявил подщелачивание дерново-подзолистого почвенного горизонта, хотя для большинства вариантов реакция среды осталась в пределах той же градации агрохимической группировки, и только при дозе биоугля 10% вышла за ее пределы [15]. Отсутствие значимого воздействия в данном эксперименте, вероятно, связано с буферной ролью органического вещества, получившегося в результате внесения сидерата и его биохимической переработки [17].

Содержание подвижного фосфора в почве на контроле относилось к агрохимической группировке «среднее» (рис. 1, Б). Добавление сидерата не привело к увеличению содержания в почве этого элемента питания растений. Зато при внесении твердого продукта пиролиза содержание доступного фосфора последовательно увеличивалось и при дозах угля 5 % и 10 % оценивалось уже как «повышенное». Статистически значимая разница с контролем отмечалась на всех вариантах с внесением биоугля (t-тест, $p < 0,05$). Наблюдалась очень высокая прямая зависимость между дозой внесенного биоугля и подвижным фосфором ($r = 0,98$, $p < 0,05$). Дубровина И.А. (2021) также отмечала прямую зависимость между этими показателями [18]. Полученные результаты также согласуются с полученными нами ранее данными [15].

Содержание обменного калия даже на контроле относилось к агрохимической группировке «очень высокое» и увеличивалось как от внесения сидерата, так и при добавлении биоугля (рис. 1, В).

Взаимосвязь содержания между содержанием обменного калия и дозой биоугля очень высокая, прямая ($r=0,97$, $p<0,05$). Увеличение содержания обменного калия в почве пропорционально дозе вносимого биоугля соответствует литературным данным. Соколик Г.А. с соавторами отмечали увеличение содержания обменного калия в дерново-подзолистой почве в 1,3–3,3 раза по сравнению с контролем через 1–2 месяца после внесения биоугля [19]. Полученные результаты также подтверждают данные, полученные нами ранее [15].

При определении щелочногидролизуемого азота методом Корнфилда А.Х. учитывается «азот обменного аммония, амидов, аминсахаров, а также других лабильных азотсодержащих органических соединений» [20], содержащихся в почве, включая карбамид. Содержание щелочногидролизуемого азота в почве (рис. 1, Г) на всех вариантах опыта очень низкое (<100 мг/кг). Статистическая обработка результатов показала отсутствие значимой разницы между вариантами опыта (t-тест, $p<0,05$). Однако прослеживается интересная тенденция – к снижению содержания щелочногидролизуемого азота по сравнению с контролем при внесении 2 % и 5 % биоугля. Причиной может быть усиление деятельности микроорганизмов, использующих легкодоступный азот. Например, по мнению Рижей Е.Я. с соавторами биоуголь стимулирует развитие почвенных плесневых грибов и аэробных целлюлозоразлагающих бактерий, являющихся активными потребителями азота [21].

Уреаза – фермент, гидролизующий карбамид до аммиака и углекислого газа [22]. Проведенные исследования показали, что активность уреазы колеблется в пределах 2,4–3,2 мкг NH_3 /г за час (или, по-другому, 576–768 мкг NH_3 / 10 г за 24 часа). Согласно шкале Звягинцева почва очень богата данным ферментом на всех вариантах опыта [22]. Усиление активности уреазы по сравнению с контролем наблюдается при дозах биоугля 2 % и 5 % (рис. 2, А), при этом только при дозе 5 % разница с контролем статистически значима (t-тест, $p<0,05$).

По-видимому, при дозе биоугля 2 % и 5 % карбамид утилизировался наиболее активно, а образовавшийся аммиак быстро использовался микроорганизмами и растениями в качестве азотного питания, либо улетучивался.

Инвертаза катализирует гидролиз дисахаридов и полисахаридов, в частности сахарозы, до глюкозы и фруктозы. Её активность является показателем интенсивности разложения органического вещества в почве и играет важную роль в круговороте углерода [22]. Активность инвертазы в почвах опыта колебалась в пределах 2,9–3,5 мг глюкозы /г почвы за 4 часа (17,4–21,0 мг/г за 24 часа). Согласно шкале Звягинцева обогащенность почвы инвертазой средняя на всех вариантах опыта.

Проведенные исследования показали, что, чем выше доза вносимого биоугля, тем ниже активность инвертазы (рис. 2, Б) Корреляционная зависимость очень высокая, но обратная ($r=-0,92$, $p<0,05$). При дозах биоугля 5 % и 10 % активность инвертазы статистически значимо меньше, чем на контроле (t-тест, $p<0,05$). По-видимому, внесение биоугля из илов сточных вод подавляет активность инвертазы.

Корреляция активности инвертазы с щелочногидролизуемым азотом слабая обратная ($r=-0,36$, $p<0,05$), с уреазой – отсутствует ($r=-0,02$, $p<0,05$).

Фосфатаза катализирует гидролиз ортофосфорных эфиров различных спиртов и фенолов, а также фосфорорганических соединений, составляющих значительную часть запасов фосфора в почве. В результате гидролиза происходит отщепление «остатков ортофосфорной кислоты, что переводит фосфор в доступные для растений формы» [22].

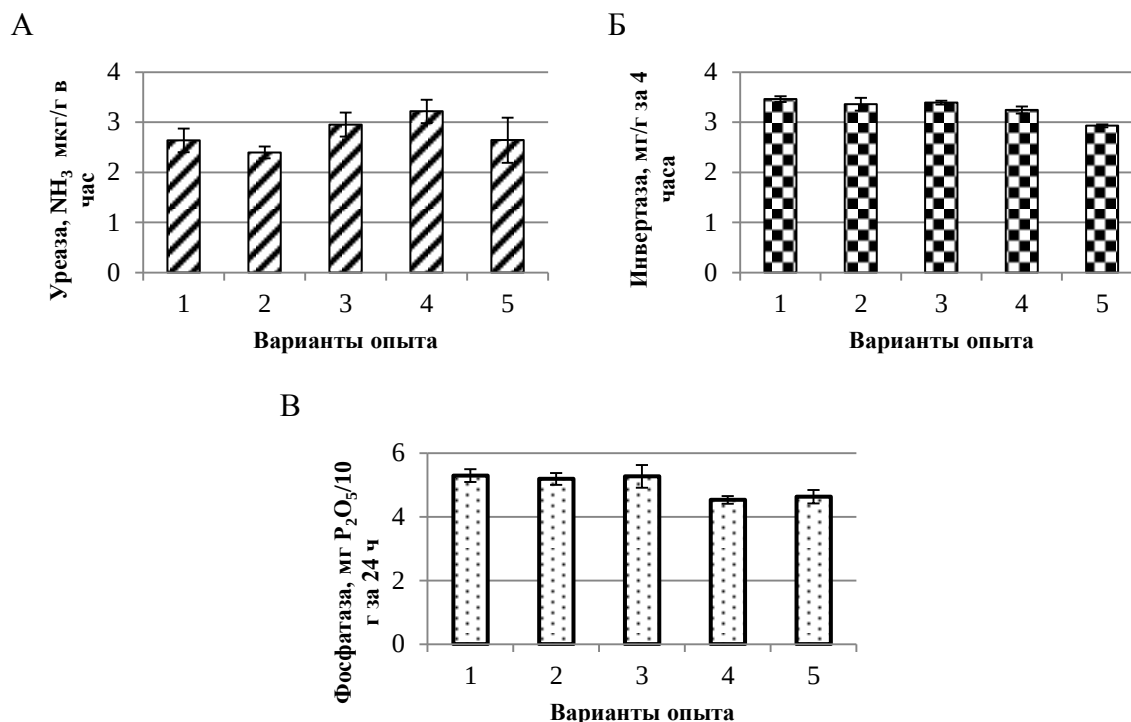


Рис.2. Активность ферментов ($M \pm \sigma$) по вариантам опыта: 1 – контроль (почва), 2 – почва с сидератом, 3 – почва+сидерат+2% биоугля от веса почвы, 4 – почва+сидерат+5% биоугля, 5 – почва+сидерат+10% биоугля. А – уреазы, Б – инвертазы, В – фосфатазы.

Активность фосфатазы в почвах опыта колебалась в пределах 4,5–5,3 мг P_2O_5 / 10 г за 24 часа (рис. 2, В), то есть по шкале Звягинцева обогащенность фосфатазой от средней до богатой.

Активность фосфатазы уменьшалась с увеличением дозы вносимого биоугля. При внесении 5 % и 10 % биоугля разница с контролем статистически значима (t-тест, $p < 0,05$). Согласно проведенным исследованиям, высокая, но обратная корреляционная зависимость наблюдалась между фосфатазой и содержанием подвижного фосфора ($r = -0,77$, $p < 0,05$) и фосфатазой и дозой внесения биоугля ($r = -0,72$, $p < 0,05$).

Результат логичный, поскольку фосфатаза вырабатывается микроорганизмами и растениями в основном при недостатке подвижного фосфора [24], а в данном случае с биоуглем вносилось большое его количество, следовательно, потребность в фосфатазе уменьшилась.

Взаимосвязь между активностью фосфатазы и инвертазы средняя прямая ($r = 0,69$, $p < 0,05$), с уреазой – слабая обратная ($r = -0,36$, $p < 0,05$).

Статистическая обработка результатов показала, что сухая биомасса овса посевного к моменту завершения опыта на контроле и разных вариантах значимо не отличалась (t-тест, $p < 0,05$). Вероятная причина – очень низкое содержание доступного растениям азота в почве на всех вариантах опыта. Изменения сухой биомассы прослеживаются только в виде тенденции (рис. 3, А).

Она увеличивается при добавлении сидерата и уменьшается с увеличением дозы биоугля, добавленного в вегетационные сосуды с сидератом. Корреляционная взаимосвязь между сухой биомассой и дозой вносимого биоугля отрицательная средней силы ($r = -0,65$, $p < 0,05$).

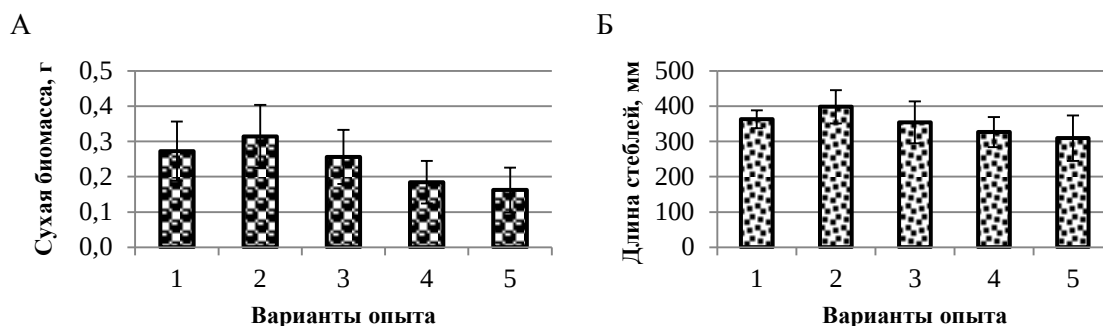


Рис.3. Сухая биомасса и длина стеблей овса посевного ($M \pm \sigma$) по вариантам опыта: 1 – контроль (почва), 2 – почва с сидератом, 3 – почва+сидерат+2% биоугля от веса почвы, 4 – почва+сидерат+5% биоугля, 5 – почва+сидерат+10% биоугля. А – сухая биомасса, Б – длина стеблей.

Обнаружена прямая корреляционная зависимость средней силы между сухой биомассой и активностью инвертазы ($r=0,50$, $p<0,05$), и слабая между сухой биомассой и активностью фосфатазы ($r=0,43$, $p<0,05$).

Средняя длина стеблей точно повторяют закономерности распределения сухой биомассы (рис. 3, Б). Корреляционная зависимость прямая и очень высокая – коэффициент корреляции между сухой биомассой и длиной стеблей овса посевного равен 0,904.

Полученные результаты согласуются с полученными нами ранее данными для совместного внесения биоугля с гуматом калия, которое не привело к статистически значимому изменению сухой биомассы растений из-за недостаточности азотного питания [15]. Похожие результаты получены Бетехиной А.А. с соавторами при выращивании пшеницы в вегетационном опыте с использованием агродерново-подзолистой почвы и 2 % биоугля – высота растений не изменилась по сравнению с контролем, однако биомасса растений достоверно снизилась [25]. Авторы объясняют это с тем, что «биоуголь может снижать доступность элементов минерального питания для поглощения корнями» [25]. Тенденция к уменьшению биомассы овса посевного частично согласуется с данными Дубровиной И.А. с соавторами, отмечавшими замедление роста растений ячменя при внесении биоугля в тяжелосуглинистую почву и связывавшими такой эффект с количеством доступного азота [11].

Выводы. Внесение в почву вегетационных сосудов сидерата в количестве 2 % от веса почвы и биоугля из илов сточных вод в дозах 2 %, 5 % и 10 % не привело к статистически значимому изменению высоты и биомассы растений овса посевного (*Avena sativa* L.) по сравнению с контролем.

Почвенная реакция среды в результате эксперимента не изменилась. Содержание обменного калия и доступного фосфора увеличивалось с дозой вносимого биоугля. Ограничивающим фактором роста растений следует признать доступный (щелочногидролизуемый) азот, содержание которого осталось очень низким на всех вариантах опыта.

Низкое содержание доступного азота, возможно, обусловлено деятельностью почвенных ферментов, участвующих в круговороте азота – корреляция активности уреазы и содержания щелочногидролизуемого азота обратная средней силы ($r=-0,65$, $p<0,05$).

Изменения интенсивности биохимических реакций в ответ на внесение биоугля с сидератом разнонаправлены. Активность фермента уреазы статистически значимо выше контроля при внесении 5 % биоугля, фосфатазы и инвертазы статистически

значимо ниже контроля при дозах биоугля 5 % и 10 %. Уменьшение активности фосфатазы объясняется внесением с углем большого количества доступного фосфора, в связи с чем необходимость в расщеплении фосфорорганических соединений снижается. Механизм снижения активности инвертазы при совместном внесении биоугля и сидерата требует дополнительного изучения.

Полученные результаты подтверждают необходимость наблюдения за азотным питанием растений при совместном внесении биоугля с органическими удобрениями в почву.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Термохимическая переработка иловых осадков сточных вод и применение биоугля / А.Н. Грачев, С.А. Пушкин, С.В. Буренков, В.Н. Башкиров, А.А. Макаров, С.А. Забелкин // Наилучшие доступные технологии водоснабжения и водоотведения. – 2024. – № S2. – С. 25-29.
2. Ручкинова, О. И. Методы утилизации осадков городских очистных сооружений / О. И. Ручкинова, А. Н. Зверева // Современные технологии в строительстве. Теория и практика. – 2020. – Т. 1 – С. 192–196.
3. Содержание тяжелых металлов в растениях при внесении различных видов биоуглей в серую лесную почву / С. С. Рязанов, А. Н. Грачев, В. И. Кулагина, А. М. Хайруллина // Российский журнал прикладной экологии. – 2020. – № 3. – С. 29–34.
4. Влияние биоуглей на концентрацию доступных для растений элементов в почве / К.О. Пономарев, А.А. Дрягина, Е.А. Филимонов, И.Д. Димитрюк // Бюллетень Почвенного института им. В.В. Докучаева. – 2024. – № 120. – С. 265-294.
5. Брындина, Л. В. Восстановление почвы после гербицидного загрязнения с помощью биочара из осадков сточных вод и опилок / Л. В. Брындина, О. В. Бакланова // Экология и промышленность России. – 2021. – Т. 25, № 6. – С. 32–37.
6. Liu, T. Nutrients and Heavy Metals in Biochar Produced by Sewage Sludge Pyrolysis: Its Application in Soil Amendment/ T. Liu, B. Liu, W. Zhang // Polish Journal of Environmental Studies. – 2014. – No 23(1). – P. 271–275.
7. Phytotoxicity of sewage sludge biochars prepared at different pyrolysis condition / J. Ábrego, M. Atienza-Martínez, J. R. Gimeno, J. Aibar, D. Quilez, G. Gea // 23rd European Biomass Conference and Exhibition. – Vienna, Austria, 2015. – URL: <https://www.researchgate.net/publication/278031095>
8. Stable isotope ecology of terra preta in Caxiuanã National Forest, Brazil / D.K. Wright, H.L. Pinto, J. Choi, J.-H. Choi, A.T. B. Ribeiro, M.C.P. Mariano, K. McDaniel // Frontiers in Earth Science. – 2023. – Vol.11. – P. 1–15.
9. Исследование осадков сточных вод для получения органоминерального удобрения / М.В. Кравцова, Ю.В. Чариков, Д.А. Волков, Д.А. Мельникова, Т.А. Пустовитова, М.В. Кравцов // Экология и промышленность России. – 2023. – Т. 27, № 4. – С. 17-21.
10. Nguyen, Kh.T. The effect of applying biochar in combination with mineral fertilizers on the growth, development, and yield of soybean varieties dt20 and dt26 / Kh.T. Nguyen, T.T. Pham // Agrarian History. – 2024. – No 18. – С. 11-21.
11. Дубровина, И.А. Влияние биоугля и удобрений на развитие растений ячменя и агрохимические показатели дерново-подзолистых почв в вегетационном опыте / И.А. Дубровина, М.Г. Юркевич, В.А. Сидорова // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. – 2020. – № 3. – С. 31-44.
12. Влияние внесения биоугля на урожайность сельскохозяйственных культур / М. А. Бовсун, О. В. Нестерова, В. А. Семаль, Н. А. Сакара, А. В. Брикманс, Т. Ю. Карпенко, Т. С. Тарасова // Вестник Томского государственного университета. Биология. – 2023. – № 61. – С. 6–26.
13. Влияние биоугля на урожайность пропашных и злаковых культур в условиях северо-западного региона РФ / И. М. Мухина, Е. Я. Рижия, Н. П. Бучкина, Е. В. Балашов // Почвы России: вчера, сегодня, завтра : Сборник статей по материалам Всероссийской с международным участием научной конференции. – 2017. – С. 94–100.
14. Воздействие совместного внесения биоугля и минеральных азотных удобрений на растения овса посевного и биологические свойства почв / В.И. Кулагина, А.Н. Грачев, Р.Р. Шагидуллин, Л.М. Сунгатуллина, С.С. Рязанов, С.А. Забелкин // Вестник Томского государственного университета. Биология. – 2023. – № 61. – С. 27-44.

Кулагина В. И., Грачев А. Н., Шагидуллин Р. Р., Сунгатуллина Л. М.,
Гордеева К. А., Забелкин С. А., Рязанов С. С., Хайруллина А. М.

15. Микробиологические и биохимические свойства почв при разных сроках применения системы органического земледелия / В.И. Кулагина, Л.М. Сунгатуллина, Р.Р. Шагидуллин, С.С. Рязанов, А.М. Хайруллина, К.А. Гордеева // Ученые записки Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского. Биология. Химия. – 2025. – Т. 11, № 2. – С. 132-144.
16. Влияние биоугля на рост растений, микробиологические и физико-химические показатели мало гумусированной почвы в условиях вегетационного опыта / Б.Р. Григорьян, А.Н. Грачев, В.И. Кулагина, Л.М. Сунгатуллина, Т.Г. Кольцова, С.С. Рязанов // Вестник Технологического университета. – 2016. – Т. 19, № 11. – С. 185-189.
17. Неведров, Н. П. Влияние биоугля на биологические и физико-химические свойства агротемно-серых почв при выращивании злаковых и бобовых культур в Курской области / Н.П. Неведров, К.М. Кавунбаева, А.А. Куракулова // Агрохимический вестник. – 2026. – № 2. – С. 3-9.
18. Дубровина, И.А. Влияние биоугля на агрохимические показатели и ферментативную активность почв средней тайги Карелии / И.А. Дубровина // Почвоведение. – 2021. – № 12. – С. 1523-1534.
19. Характеристики дерново-подзолистых почв после внесения биоугля / Г.А. Соколик, С.В. Овсянникова, Т.Г. Иванова, М.В. Попеня, Е.В. Войникова // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя хімічных навук. – 2015. – № 2. – С. 87-94.
20. Практикум по агрохимии / Под ред. Б.А. Ягодина. – М.:Агропромиздат, 1987. – 512 с.
21. Влияние биоугля на свойства образцов дерново-подзолистой супесчаной почвы с разной степенью окультуренности (лабораторный эксперимент) / Е.Я. Рижия, Н.П. Бучкина, И.М. Мухина, А.С. Белинец, Е.В.Балашов // Почвоведение. – 2015. – № 2. – С. 211-220.
22. Казеев, К.Ш. Биодиагностика почв: методология и методы исследований / К.Ш. Казеев, С.И. Колесников. – Ростов-наДону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2012. – 260 с.
23. Наими, О.И. Закономерности профильного распределения уреазы в черноземе обыкновенном в агроценозе // International Journal of Humanities and Natural Sciences. – 2019. – Vol. 8-1. – DOI:10.24411/2500-1000-2019-11446
24. Пространственно-временные особенности фосфатазной активности естественных и антропогенно-преобразованных почв / Н.Н. Каширская, Л.Н. Плеханова, Е.В. Чернышева, М.В. Ельцов, С.Н. Удальцов, А.В. Борисов // Почвоведение. – 2020. – № 1. – С. 89-101.
25. Изменение свойств почвы и морфометрических параметров пшеницы при внесении биоугля: вегетационный эксперимент // А.А. Бетехтина, О.А. Некрасова, А.В. Малахеева, С.А. Черепанов, В.В. Валдайских // Аграрный вестник Урала. – 2024. – Т. 24, № 3. – С. 298-308.

REFERENCES

1. Grachev, A.N., Pushkin, S.A., Burenkov, S.V., Bashkirov, V.N., Makarov, A.A. & Zabelkin, S.A. (2024) Thermochemical processing of sewage sludge and application of biochar. Best Available Technologies for Water Supply and Sanitation. 2, 25-29. (In Russian)
2. Ruchkinova, O.I. & Zvereva, A.N. (2020) Methods of municipal wastewater sludge disposal. Modern Technologies in Construction. Theory and Practice. 1, 192-196. (In Russian)
3. Ryazanov, S.S., Grachev, A.N., Kulagina, V.I. & Khairullina, A.M. (2020) Content of heavy metals in plants when applying various types of biochar to gray forest soil. Russian Journal of Applied Ecology. 3, 29-34. (In Russian)
4. Ponomarev, K.O., Dryagina, A.A., Filimonenko, E.A. & Dimitruk, I.D. (2024) Effect of biochar on the concentration of plant-available elements in soil. Bulletin of the V.V. Dokuchaev Soil Institute. 120, 265-294. (In Russian)
5. Bryndina, L.V. & Baklanova, O.V. (2021) Soil remediation after herbicide contamination using biochar from sewage sludge and sawdust. Ecology and Industry of Russia. 25(6), 32-37. (In Russian)
6. Liu, T., Liu, B. & Zhang, W. (2014) Nutrients and Heavy Metals in Biochar Produced by Sewage Sludge Pyrolysis: Its Application in Soil Amendment. Polish Journal of Environmental Studies. 23(1), 271-275.
7. Ábrego, J., Atienza-Martínez, M., Gimeno, J.R., Aibar, J., Quilezb, D. & Geaa, G. (2015) Phytotoxicity of sewage sludge biochars prepared at different pyrolysis condition. In: 23rd European Biomass Conference and Exhibition. Vienna, Austria. Available at: <https://www.researchgate.net/publication/278031095> (Accessed: date).
8. Wright, D.K., Pinto, H.L., Choi, J., Choi, J.-H., Browne Ribeiro, A.T., Mariano, M.C.P. & McDaniel, K. (2023) Stable isotope ecology of terra preta in Caxiuanã National Forest, Brazil. Frontiers in Earth Science. 11, 1-15.
9. Kravtsova, M.V., Charikov, Yu.V., Volkov, D.A., Melnikova, D.A., Pustovitova, T.A. & Kravtsov, M.V. (2023) Study of sewage sludge for the production of organomineral fertilizer. Ecology and Industry of Russia. 27(4), 17-21. (In Russian)

10. Nguyen, Kh.T. & Pham, T.T. (2024) The effect of applying biochar in combination with mineral fertilizers on the growth, development, and yield of soybean varieties dt20 and dt26. *Agrarian History*. 18, 11-21.
11. Dubrovina, I.A., Yurkevich, M.G. & Sidorova, V.A. (2020) Effect of biochar and fertilizers on barley plant development and agrochemical properties of soddy-podzolic soils in a vegetation experiment. *Proceedings of the Karelian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 3, 31-44. (In Russian)
12. Bovsun, M.A., Nesterova, O.V., Semal, V.A., Sakara, N.A., Brikmans, A.V., Karpenko, T.Yu. & Tarasova, T.S. (2023) Effect of biochar application on agricultural crop yields. *Bulletin of Tomsk State University. Biology*. 61, 6-26. (In Russian)
13. Mukhina, I.M., Rizhiya, E.Ya., Buchkina, N.P. & Balashov, E.V. (2017) Effect of biochar on the yield of row crops and cereals in the north-western region of the Russian Federation. In: *Soils of Russia: yesterday, today, tomorrow: Collection of articles based on the materials of the All-Russian scientific conference with international participation*. pp. 94-100. (In Russian)
14. Kulagina, V.I., Grachev, A.N., Shagidullin, R.R., Sungatullina, L.M., Ryazanov, S.S. & Zabelkin, S.A. (2023) Effect of combined application of biochar and mineral nitrogen fertilizers on common oat plants and soil biological properties. *Bulletin of Tomsk State University. Biology*. 61, 27-44. (In Russian)
15. Kulagina, V.I., Sungatullina, L.M., Shagidullin, R.R., Ryazanov, S.S., Khairullina, A.M. & Gordeeva, K.A. (2025) Microbiological and biochemical properties of soils under different timing of organic farming system application. *Scientific Notes of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Biology. Chemistry*. 11(2), 132-144. (In Russian)
16. Grigoryan, B.R., Grachev, A.N., Kulagina, V.I., Sungatullina, L.M., Koltsova, T.G. & Ryazanov, S.S. (2016) Effect of biochar on plant growth, microbiological and physicochemical parameters of low-humus soil in a vegetation experiment. *Bulletin of Technological University*. 19(11), 185-189. (In Russian)
17. Nevedrov, N.P., Kavunbaeva, K.M. & Kurakulova, A.A. (2026) Effect of biochar on biological and physicochemical properties of agro-dark gray soils in the cultivation of cereals and legumes in the Kursk region. *Agrochemical Bulletin*. 2, 3-9. (In Russian)
18. Dubrovina, I.A. (2021) Effect of biochar on agrochemical parameters and enzymatic activity of soils in the middle taiga of Karelia. *Soil Science*. 12, 1523-1534. (In Russian)
19. Sokolik, G.A., Ovsyannikova, S.V., Ivanova, T.G., Popenya, M.V. & Voinikova, E.V. (2015) Characteristics of soddy-podzolic soils after biochar application. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Chemical Sciences Series*. 2, 87-94. (In Russian)
20. Yagodin, B.A. (ed.) (1987) *Workshop on Agrochemistry*. Moscow: Agropromizdat. 512 p. (In Russian)
21. Rizhiya, E.Ya., Buchkina, N.P., Mukhina, I.M., Belinets, A.S. & Balashov, E.V. (2015) Effect of biochar on the properties of samples of soddy-podzolic sandy loam soil with different degrees of cultivation (laboratory experiment). *Soil Science*. 2, 211-220. (In Russian)
22. Kazeev, K.Sh. & Kolesnikov, S.I. (2012) *Biodiagnostics of soils: methodology and research methods*. Rostov-on-Don: Southern Federal University Publishing House. 260 p. (In Russian)
23. Naimi, O.I. (2019) Patterns of profile distribution of urease in ordinary chernozem in agroecosystem. *International Journal of Humanities and Natural Sciences*. 8-1. doi: 10.24411/2500-1000-2019-11446. (In Russian)
24. Kashirskaya, N.N., Plekhanova, L.N., Chernysheva, E.V., Eltsov, M.V., Udaltsev, S.N. & Borisov, A.V. (2020) Spatiotemporal features of phosphatase activity of natural and anthropogenically transformed soils. *Soil Science*. 1, 89-101. (In Russian)
25. Betekhtina, A.A., Nekrasova, O.A., Malakheeva, A.V., Cherepanov, S.A. & Valdayskikh, V.V. (2024) Changes in soil properties and morphometric parameters of wheat upon biochar application: a vegetation experiment. *Agrarian Bulletin of the Urals*. 24(3), 298-308. (In Russian)

CHANGES IN SOIL BIOCHEMICAL AND AGROCHEMICAL PROPERTIES AND OAT GROWTH UNDER CO-APPLICATION OF BIOCHAR AND GREEN MANURE

V. I. Kulagina, A. N. Grachev, R. R. Shagidullin, L. M. Sungatullina, K. A. Gordeeva, S. A. Zabelkin, S. S. Ryazanov, A. M. Khairullina

It was shown that the sequential application of green manure and sewage sludge-derived biochar to soil in a laboratory experiment did not result in any statistically significant changes in the height or biomass of oat (*Avena sativa* L.) plants compared to the control. Since exchangeable potassium and available phosphorus contents increased with the biochar application rate, available nitrogen, which remained very low across all treatments, should be considered the limiting factor. The response of soil biochemical activity to the combined

Кулагина В. И., Грачев А. Н., Шагидуллин Р. Р., Сунгатуллина Л. М.,
Гордеева К. А., Забелкин С. А., Рязанов С. С., Хайруллина А. М.

application of biochar and green manure was ambiguous. Urease activity was statistically significantly higher than in the control at the 5% biochar rate, while phosphatase and invertase activities were statistically significantly lower than in the control at both the 5% and 10% biochar rates.

Keywords: biochar; sewage sludge; green manure; plant biomass; plant height; laboratory experiment; invertase; phosphatase; urease.

Поступила в редакцию 30.06.2026 г.

Кулагина Валентина Ивановна

кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник, заведующий лабораторией экологии почв, Институт проблем экологии и недропользования Академии наук Республики Татарстан, г. Казань, РФ.

E-mail: viksoil@mail.ru

ORCID:0000-0002-1963-7680,

SPIN-код: 3159-7011,

AuthorID: 680743

Kulagina Valentina Ivanovna

Candidate of Biological Sciences, Leading Researcher, Head of the Soil Ecology Laboratory, Research Institute for Problems of Ecology and Mineral Wealth Use of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan, Russia

Грачев Андрей Николаевич

доктор технических наук, профессор кафедры химической технологии переработки возобновляемых ресурсов, ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет», г. Казань, РФ.

E-mail: energolesprom@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9790-4564

SPIN-код: 2690-0367,

AuthorID: 247642

Grachev Andrey Nikolaevich

Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of chemical technology for processing renewable resources, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

Шагидуллин Рифгат Роальдович,

Академик Академии наук Республики Татарстан, доктор химических наук, директор, Институт проблем экологии и недропользования Академии наук Республики Татарстан, г. Казань, РФ.

E-mail: shagidullin_@mail.ru

ORCID: 0000-0002-3321-0923

SPIN-код: 1843-4029,

AuthorID: 43448

Shagidullin Rifgat Roaldovich

Academician of Tatarstan Academy of Sciences, Doctor of Chemical Sciences, Director, Research Institute for Problems of Ecology and Mineral Wealth Use of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan, Russia

Сунгатуллина Люция Мансуровна

старший научный сотрудник лаборатории экологии почв, Институт проблем экологии и недропользования Академии наук Республики Татарстан, г. Казань, РФ.

E-mail: sunlyc@yandex.ru

ORCID:0009-0004-5966-5944

SPIN-код: 9745-3180,

AuthorID: 782063

Sungatullina Lucia Mansurovna

Senior Researcher of the Soil Ecology Laboratory, Research Institute for Problems of Ecology and Mineral Wealth Use of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan, Russia

Гордеева Карина Андреевна

научный сотрудник лаборатории экологии почв, Институт проблем экологии и недропользования Академии наук Республики Татарстан, г. Казань, РФ.

E-mail: Karina_869@mail.ru

ORCID:0009-0006-2472-0768

SPIN-код: 7052-1265,

AuthorID: 1059941

Gordeeva Karina Andreevna

Researcher of the Soil Ecology Laboratory, Research Institute for Problems of Ecology and Mineral Wealth Use of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan, Russia

Забелкин Сергей Андреевич

кандидат технических наук, доцент кафедры химической технологии переработки возобновляемых ресурсов, ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет», г. Казань, РФ.

E-mail: szabelkin@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1349-6669

SPIN-код: 9778-8088,

AuthorID: 726059

Zabelkin Sergey Andreevich

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of chemical technology for processing renewable resources, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

Рязанов Станислав Сергеевич

Кандидат биологических наук, старший научный сотрудник лаборатории экологии почв, Институт проблем экологии и недропользования Академии наук Республики Татарстан, г. Казань, РФ.

E-mail: RStanislav.soil@yandex.ru

ORCID:0000-0002-5043-1963

SPIN-код: 7011-4140,

AuthorID: 833364

Ryazanov Stanislav Sergeevich

Candidate of Biological Sciences, Senior Researcher of the Soil Ecology Laboratory, Research Institute for Problems of Ecology and Mineral Wealth Use of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan, Russia

Хайруллина Алина Маратовна

младший научный сотрудник лаборатории экологии почв, Институт проблем экологии и недропользования Академии наук Республики Татарстан, г. Казань, РФ.

E-mail: his.alina94@mail.ru

ORCID:0009-0002-3864-1826

SPIN-код: 3834-4260,

AuthorID: 993598

Khairullina Alina Maratovna

Junior Researcher of the Soil Ecology Laboratory, Research Institute for Problems of Ecology and Mineral Wealth Use of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan, Russia

ВЛИЯНИЕ СВЕТОТЕМНОВЫХ РЕЖИМОВ НА АДАПТАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ: ФИЗИОЛОГО-ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ С ОЦЕНКОЙ УРОВНЯ СВОБОДНО ЦИРКУЛИРУЮЩЕЙ ДНК В СЛЮНЕ

© 2026 *Е. В. Обыденных, О. В. Мячина, А. Н. Пашков, Н. В. Парфенова, А. А. Чепрасова*

В эпоху глобализации и усиления международной академической мобильности массовая миграция студентов превращается в устойчивый социальный феномен. Перемещение в иную страну связано с необходимостью адаптироваться к новым социокультурным и экологическим условиям, что представляет собой многоаспектную проблему, воздействующую на физиологические, психологические и социальные сферы жизнедеятельности индивида.

Особенно затруднительной адаптация становится в урбанизированной среде, где естественные циклы освещённости нарушены из-за постоянной активности мегаполиса и широкого использования искусственного света. Свет выступает главным синхронизатором циркадных ритмов, регулятором выработки мелатонина и фактором, влияющим на функционирование вегетативной нервной системы. Изменения режимов свет–темнота способны нарушить гомеостаз и снизить адаптационные резервы организма.

В рамках данного исследования проведён сравнительный анализ вариаций уровня свободно циркулирующей ДНК (сцДНК) в слюне у молодых людей – студентов, переехавших в Воронеж из Индии (группа «Индийцы») и жителей Центрального Черноземья (группа «Русские»), в условиях перехода от света к темноте.

В ходе исследования было установлено статистически значимое увеличение уровня сцДНК в слюне после воздействия темнового режима по сравнению со световым в обеих этнических группах: с $16,76 \pm 1,78$ нг/мл на свету до $50,17 \pm 8,81$ нг/мл в темноте у индийцев и с $17,02 \pm 2,10$ нг/мл на свету до $53,20 \pm 7,87$ нг/мл у русских. Полученные данные свидетельствуют о модулирующем влиянии смены освещённости на адаптационные процессы, что согласуется с представлениями о роли циркадианных ритмов в регуляции метаболической активности клеток слизистой оболочки ротовой полости и слюнных желез.

Ключевые слова: урбанизированная среда, светотемновой режим, физиологическая адаптация, студенты, свободно циркулирующая ДНК, стресс.

Введение. Свет представляет собой один из ключевых экзогенных факторов, обеспечивающих согласование физиологических процессов организма с изменениями внешней среды. Циркадная система, возникшая в ходе эволюции под воздействием фотопериодических изменений, контролирует обширный ряд метаболических, эндокринных и иммунных реакций, способствуя приспособлению организма к циклу день-ночь [1]. В последние годы научное сообщество активно исследует воздействие режима освещения на биохимический состав биологических жидкостей, таких как слюна. Слюна рассматривается как перспективный неинвазивный биоматериал для оценки функционального состояния организма. Особое внимание уделяется анализу содержания свободно циркулирующей ДНК (сцДНК), которая отражает степень повреждения и восстановления генетического материала, а также активность стресс-чувствительных сигнальных механизмов [2, 3]. Несмотря на имеющиеся сведения о том, как уровень освещённости влияет на концентрацию мелатонина и кортизола [4], вопрос о воздействии кратковременной темновой адаптации на высвобождение нуклеиновых кислот в слюне остается малоизученным.

Современная урбанистическая среда отличается значительным нарушением естественных фотопериодических циклов. Искусственное освещение, непрерывная работа городских систем и перенос социальной активности на ночное время вызывают

десинхроноз циркадных ритмов — один из основных факторов риска метаболических, сердечно-сосудистых и иммунных расстройств [5].

Целью настоящей работы явился сравнительный физиолого-экологический анализ влияния светового и темнового режимов на содержание сцДНК в слюне у молодых людей.

Материалы и методы. В рамках исследования были обследованы 40 студентов, проходящих обучение в ВГМУ имени Н.Н. Бурденко. В состав выборки вошли 20 представителей русской национальности, являющихся жителями Центрального Черноземья (группа «Русские») и 20 студентов, прибывших в Воронеж из Индии (группа «Индийцы»). Забор биологического материала осуществлялся в утренние часы натощак, что соответствует периоду максимальной секреторной активности слюнных желез. Для этих целей применялся слюносорбник производства компании Sarstedt (артикул D-51588 Numbrecht). Поскольку состав слюны подвержен влиянию таких факторов, как состояние здоровья, возраст испытуемых и циклические колебания гормонального фона, в эксперимент были включены исключительно молодые мужчины (средний возраст в каждой группе составлял $19,9 \pm 2,6$ лет), не имевшие признаков каких-либо заболеваний.

У каждого испытуемого забор слюны осуществлялся в двух повторностях. Стерильные тампоны помещались под язык в зоне расположения выводных протоков поднижнечелюстной и подъязычной слюнных желез на фиксированный десятиминутный интервал. Первая порция слюны собиралась в условиях стандартного освещения, вторая — спустя 30 минут после пребывания испытуемого в полной темноте (период темновой адаптации). Общая продолжительность нахождения в темноте достигала 40 минут, включая десятиминутный этап сбора слюны. Полученные образцы подвергались центрифугированию при скорости 3000 об/мин в течение 10 минут.

Экстракция сцДНК выполнялась с использованием набора реагентов diaGene DNA-Sorb-B (производитель — ООО «НПФ Литех», Россия). Методология выделения основывалась на принципе сорбции на силикатной матрице в присутствии хаотропных солей, при этом строго соблюдался протокол, рекомендованный производителем.

После элюции в низкосолеовом буфере количественное определение сцДНК и оценку ее чистоты проводили методом ионообменной хроматографии на колонке Sepharose Q (размер 10×200 мм) в системе FPLC® (Швеция). Концентрацию выделенной сцДНК определяли спектрофотометрически на приборе СФ-2000 по оптической плотности при длине волны 260 нм (A_{260}). Расчет концентрации (в нг/мл) выполняли при построении калибровочной кривой.

Статистическую обработку данных выполняли с использованием методов вариационной статистики посредством надстройки «Пакет анализа» в Microsoft Excel. Критический уровень значимости принимали равным $p < 0,05$. Результаты в работе представлены в формате $M \pm SD$, где M — среднее арифметическое, SD — стандартное отклонение.

Результаты и обсуждение. В ходе проведения экспериментального исследования было установлено статистически значимое увеличение уровня сцДНК в слюне после воздействия темнового режима по сравнению со световым в обеих этнических группах. Полученные данные свидетельствуют о модулирующем влиянии смены освещенности на адаптационные процессы, что согласуется с представлениями о роли циркадианных ритмов в регуляции метаболической активности клеток слизистой оболочки ротовой полости и слюнных желез [6–11].

Хроматографический анализ полученного биоматериала выявил наличие не только фракции сцДНК, но и аденозина, аденозинмонофосфата (АМФ), аденозиндифосфата (АДФ), гуанозиндифосфата (ГДФ). Их обнаружение было ожидаемо, поскольку в ранее проведенном нами исследовании, включающем хроматографическое фракционирование стандартного раствора фрагментированной ДНК тимуса теленка (Sigma-Albrich), были выявлены те же фракции.

При этом важно отметить у представителей группы «Индийцы» ($n=20$) увеличение площади элюируемой сцДНК на хроматограммах: с $383,73 \pm 11,43$ мм² (на свету) до $568,33 \pm 14,09$ мм² (в условиях темноты), что свидетельствует о повышении содержания сцДНК в слюне после 40-минутного пребывания в полной темноте (рис. 1). Оптическая плотность образцов возросла с $0,302 \pm 0,037$ до $0,989 \pm 0,181$ отн. ед.

Среднее значение концентрации сцДНК в условиях освещения у «Индийцев» составило $16,76 \pm 1,78$ нг/мл, в то время как в условиях темновой адаптации данный показатель возрос до $50,17 \pm 8,81$ нг/мл. Различие между сравниваемыми условиями было статистически значимым ($p < 0,05$). Прирост концентрации сцДНК в темноте относительно светового режима достиг 199 %.

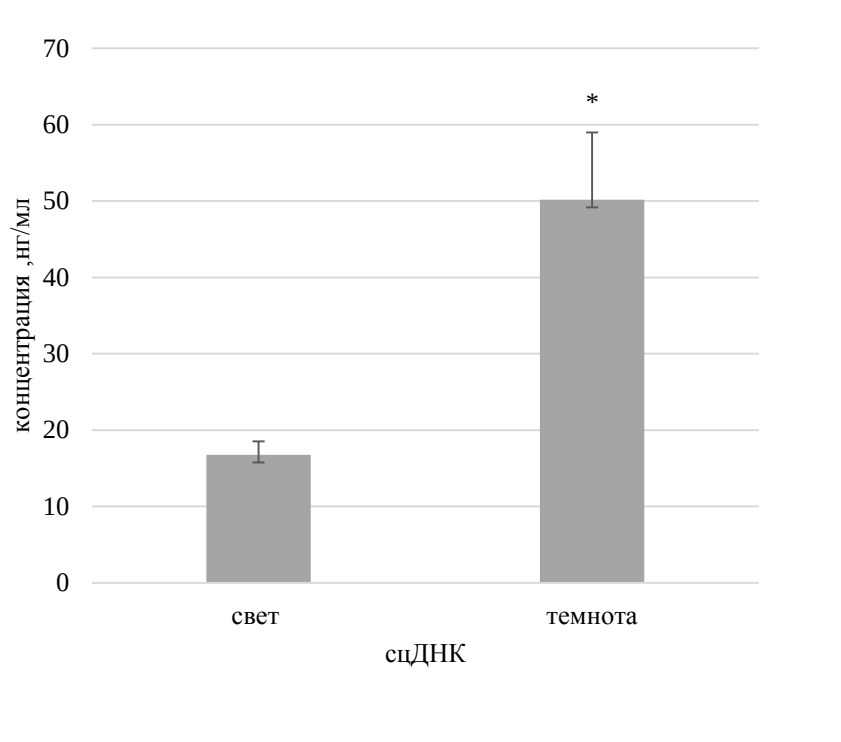


Рис. 1. Содержание сцДНК в слюне у представителей группы «Индийцы»
Примечание: * – значимые отличия сцДНК в условиях света и темноты ($p \leq 0,05$)

В группе «Русские» ($n=20$) были получены сопоставимые результаты. Средняя площадь пиков сцДНК на хроматограммах увеличилась с $391,08 \pm 11,65$ мм² (на свету) до $668,66 \pm 13,99$ мм² (в условиях темноты). Оптическая плотность возросла с $0,307 \pm 0,043$ до $1,051 \pm 0,162$ отн. ед.

В условиях освещения у «Русских» концентрация сцДНК в слюне составляла $17,02 \pm 2,10$ нг/мл, а после 40-минутного пребывания в темноте повысилась до $53,20 \pm 7,87$ нг/мл ($p < 0,05$) (рис. 2). Процент прироста достиг 212 %.

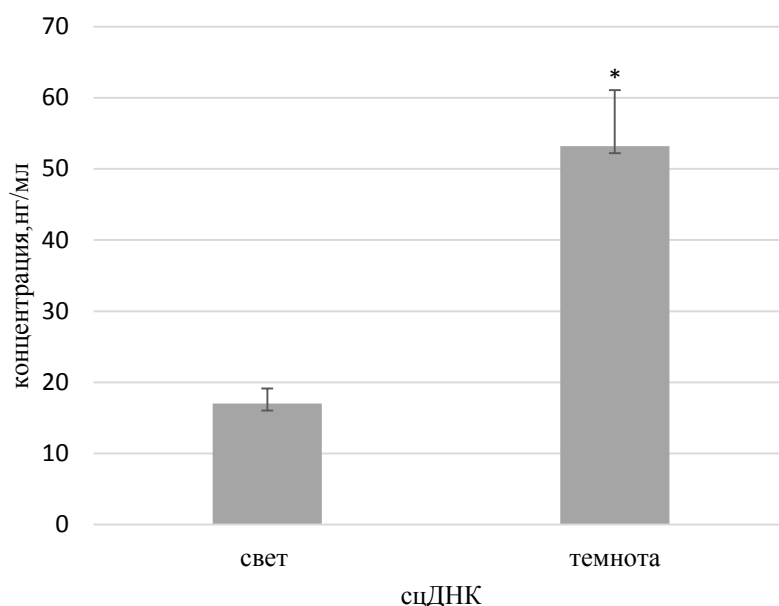


Рис. 2. Содержание scDNA в секретах слюнных желез у представителей группы «Русские»
 Примечание: * – значимые отличия scDNA в условиях света и темноты ($p \leq 0,05$)

При межгрупповом сравнении (русские и индийцы) по уровню scDNA как в световых, так и в темновых условиях не было выявлено статистически значимых различий. Данный факт может указывать на универсальность физиологических механизмов реагирования слюнных желез на смену светотемнового режима, независимо от этнической принадлежности и связанных с ней морфофизиологических особенностей [12].

Интересно, что вариабельность уровня scDNA в условиях темновой адаптации значимо возрастает относительно светового режима в обеих исследуемых группах ($p < 0,01$). Данный феномен, вероятно, обусловлен базальным уровнем симпатикотонии, а также скоростью адаптационных реакций на смену освещенности, что согласуется с ранее описанными механизмами нейрогуморальной регуляции [13]. Выявленная динамика находит объяснение в индивидуальных различиях экспрессии часовых генов — в частности, CLOCK и BMAL1, которые модулируют устойчивость клеточного метаболизма к окислительному стрессу [14]. У лиц со сниженной базальной активностью указанных генов адаптация к темноте может сопровождаться более выраженным выбросом scDNA вследствие замедленной репарации клеточных повреждений. Полученные результаты согласуются с данными, показавшими, что нарушение циркадианных ритмов приводит к повышению вариабельности уровня внеклеточной ДНК в периферических тканях [15, 16].

Полученные результаты согласуются с данными литературы о том, что смена светотемнового режима способна индуцировать апоптоз и активировать процессы репарации в клетках слизистых оболочек, что сопровождается выходом внеклеточной ДНК в биологические жидкости [17]. Выявленное повышение уровня scDNA в слюне после темновой адаптации может быть следствием активации симпатического отдела нервной системы и повышения уровня кортизола, которые усиливают апоптотические процессы в эпителиальных клетках ротовой полости [18]. Кроме того, темнота является мощным стимулом для выработки мелатонина, который, как известно, участвует в регуляции циркадианных ритмов и может оказывать проапоптотическое действие на клетки с высоким уровнем метаболизма [19–21].

Выводы. Таким образом, результаты исследования демонстрируют, что экспозиция в полной темноте в течение 40 минут вызывает достоверное трехкратное увеличение концентрации сцДНК в слюне у молодых мужчин обеих этнических групп. Данный эффект является физиологически значимым и может быть использован в качестве маркера адаптационных процессов организма при воздействии факторов среды. Полученные данные также подчеркивают необходимость учета светотеневого режима при планировании и интерпретации результатов исследований, основанных на анализе слюны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Czeisler C.A., Gooley J.J. Sleep and circadian rhythms in humans // *Cold Spring Harb Symp Quant Biol.* — 2007. — Vol. 72. — P. 579–597. — DOI: 10.1101/sqb.2007.72.064. — PMID: 18419318.
2. Pisetsky D.S. Pathogenesis of autoimmune disease // *Nat Rev Nephrol.* — 2023. — Vol. 19, Iss. 8. — P. 509–524. — DOI: 10.1038/s41581-023-00720-1. — PMID: 37165096. — PMCID: PMC10171171.
3. Zhang G., Lübke L., Chen F., et al. Neuron-Radial Glial Cell Communication via BMP/Id1 Signaling Is Key to Long-Term Maintenance of the Regenerative Capacity of the Adult Zebrafish Telencephalon // *Cells.* — 2021. — Vol. 10, Iss. 10. — DOI: doi: 10.3390/cells10102794. — PMID: 34685774. — PMCID: PMC8534405.
4. Becker L., Kaltenegger H.C., Nowak D., Weigl M., Rohleder N. Physiological stress in response to multitasking and work interruptions: Study protocol // *PLoS ONE.* — 2022. — Vol. 17, Iss. 2. — Article e0263785. — DOI: 10.1371/journal.pone.0263785.
5. Ahmad S.B., Ali A., Bilal M., Rashid S.M., Wani A.B., Bhat R.R., Rehman M.U. Melatonin and Health: Insights of Melatonin Action, Biological Functions, and Associated Disorders // *Cell Mol Neurobiol.* — 2023. — Vol. 43, Iss. 6. — P. 2437–2458. — DOI: 10.1007/s10571-023-01324-w. — PMID: 36752886. — PMCID: PMC9907215.
6. Müller J., Hartwig C., Sonntag M., et al. A novel approach for in vivo DNA footprinting using short double-stranded cell-free DNA from plasma // *Genome Res.* — 2024. — Vol. 34, Iss. 8. — P. 1185–1195. — DOI: 10.1101/gr.279326.124. — PMID: 39271293. — PMCID: PMC11444180.
7. Pijpe J., Kalk W.W., Bootsma H., Spijkervet F.K., Kallenberg C.G., Vissink A. Progression of salivary gland dysfunction in patients with Sjogren's syndrome // *Ann Rheum Dis.* — 2007. — Vol. 66, Iss. 1. — P. 107–112. — DOI: 10.1136/ard.2006.052647. — PMID: 16728458. — PMCID: PMC1798390.
8. Netea M.G., Domínguez-Andrés J., Barreiro L.B., et al. Defining trained immunity and its role in health and disease // *Nat Rev Immunol.* — 2020. — Vol. 20, Iss. 6. — P. 375–388. — DOI: 10.1038/s41577-020-0285-6. — PMID: 32132681. — PMCID: PMC7186935.
9. Aps J.K.M., Martens L.C. Review: The Physiology of Saliva and Transfer of Drugs into Saliva // *Forensic Science International.* — 2005. — Vol. 150. — P. 119–131. — DOI: 10.1016/j.forsciint.2004.10.026.
10. Wang Q., Sun X., Liu C., Wang C., Zhao W., Zhu Z., Ma S., Zhang S. Current development of stretchable self-powered technology based on nanomaterials toward wearable biosensors in biomedical applications // *Front Bioeng Biotechnol.* — 2023. — Vol. 11. — Article 1164805. — DOI: 10.3389/fbioe.2023.1164805. — PMID: 37113667. — PMCID: PMC10126507.
11. Ramírez-Valle F., Maranville J.C., Roy S., Plenge R.M. Sequential immunotherapy: towards cures for autoimmunity // *Nat Rev Drug Discov.* — 2024. — Vol. 23, Iss. 7. — P. 501–524. — DOI: 10.1038/s41573-024-00959-8. — PMID: 38839912.
12. Турлак И.В. Слюна — основные направления исследования её свойств / И.В. Турлак // *Современные проблемы науки и образования.* — 2020. — № 4. — Режим доступа: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=29934>.
13. Zimmermann H. Nucleotide signaling in nervous system development // *Pflugers Arch.* — 2006. — Vol. 452, Iss. 5. — P. 573–588. — DOI: 10.1007/s00424-006-0067-4. — PMID: 16639549.
14. Fribourgh J.L., Srivastava A., Sandate C.R., Michael A.K., Hsu P.L., Rakers C., Nguyen L.T., Torgrimson M.R., Parico G.C.G., Tripathi S., Zheng N., Lander G.C., Hirota T., Tama F., Partch C.L. Dynamics at the serine loop underlie differential affinity of cryptochromes for CLOCK:BMAL1 to control circadian timing // *eLife.* — 2020. — Vol. 9. — Article e55275. — DOI: 10.7554/eLife.55275. — PMID: 32101164. — PMCID: PMC7064333.
15. Boswell-Casteel R.C., Hays F.A. Equilibrative Nucleoside Transporters — a Review / R.C. Boswell-Casteel, F.A. Hays // *Nucleosides Nucleotides & Nucleic Acids.* — 2017. — Vol. 36, Iss. 1. — P. 7–30. — DOI: 10.1080/15257770.2016.1210805.

16. Tutanov O., Tamkovich S. The Influence of Proteins on Fate and Biological Role of Circulating DNA // *Int J Mol Sci.* — 2022. — Vol. 23, Iss. 13. — Article 7224. — DOI: 10.3390/ijms23137224. — PMID: 35806228. — PMCID: PMC9266439.
17. Tsuda T., Takefuji M., Wettschureck N., et al. Corticotropin releasing hormone receptor 2 exacerbates chronic cardiac dysfunction // *J Exp Med.* — 2017. — Vol. 214, Iss. 7. — P. 1877–1888. — DOI: 10.1084/jem.20161924. — PMID: 28550160. — PMCID: PMC5502432.
18. Hancock A.M., Witonsky D.B., Gordon A.S., Eshel G., Pritchard J.K., Coop G., Di Rienzo A. Adaptations to climate in candidate genes for common metabolic disorders // *PLoS Genet.* — 2008. — Vol. 4, Iss. 2. — Article e32. — DOI: 10.1371/journal.pgen.0040032. — PMID: 18282109. — PMCID: PMC2242814.
19. Ristić L., Rančić M., Radović M., Krtinić D., Pavlović M., Ilić B., Milojković M., Živković N., Turković K., Sokolović D. Melatonin inhibits apoptosis and oxidative tissue damage in cisplatin-induced pulmonary toxicity in rats // *Arch Med Sci.* — 2020. — Vol. 20, Iss. 3. — P. 977–983. — DOI: 10.5114/aoms.2020.95952. — PMID: 39050161. — PMCID: PMC11264154.
20. Yama K., Morishima S., Tsutsumi K., et al. Oral Microbiota Development in the First 60 Months: A Longitudinal Study // *J Dent Res.* — 2024. — Vol. 103, Iss. 12. — P. 1249–1257. — DOI: 10.1177/00220345241272011. — PMID: 39394772. — PMCID: PMC11562288.
21. Hoermann R., Midgley J.E., Larisch R., Dietrich J.W. Homeostatic Control of the Thyroid-Pituitary Axis: Perspectives for Diagnosis and Treatment // *Front Endocrinol (Lausanne).* — 2015. — Vol. 6. — Article 177. — DOI: 10.3389/fendo.2015.00177. — PMID: 26635726. — PMCID: PMC4653296..

REFERENCES

1. Czeisler, C.A. and Gooley, J.J. (2007) Sleep and Circadian Rhythms in Humans. *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, **72**, 579-597. doi: 10.1101/sqb.2007.72.064.
2. Pisetsky, D.S. (2023) Pathogenesis of Autoimmune Disease. *Nature Reviews Nephrology*, **19**(8), 509-524. doi: 10.1038/s41581-023-00720-1.
3. Zhang, G., Lübke, L., Chen, F., Beil, T., Takamiya, M., Diotel, N., Strähle, U. and Rastegar, S. (2021) Neuron-Radial Glial Cell Communication via BMP/Id1 Signaling Is Key to Long-Term Maintenance of the Regenerative Capacity of the Adult Zebrafish Telencephalon. *Cells*, **10**(10). Article 2614.
4. Becker, L., Kaltenegger, H.C., Nowak, D., Weigl, M. and Rohleder, N. (2022) Physiological Stress in Response to Multitasking and Work Interruptions: Study Protocol. *PLoS ONE*, **17**(2), e0263785. doi: 10.1371/journal.pone.0263785.
5. Ahmad, S.B., Ali, A., Bilal, M., Rashid, S.M., Wani, A.B., Bhat, R.R. and Rehman, M.U. (2023) Melatonin and Health: Insights of Melatonin Action, Biological Functions, and Associated Disorders. *Cellular and Molecular Neurobiology*, **43**(6), 2437-2458. doi: 10.1007/s10571-023-01324-w.
6. Müller, J., Hartwig, C., Sonntag, M., Bitzer, L., Adelman, C., Vainshtein, Y., Glanz, K., Decker, S.O., Brenner, T., Weber, G.F., von Haeseler, A. and Sohn, K. (2024) A Novel Approach for in vivo DNA Footprinting Using Short Double-Stranded Cell-Free DNA from Plasma. *Genome Research*, **34**(8), 1185-1195. doi: 10.1101/gr.279326.124.
7. Pijpe, J., Kalk, W.W., Bootsma, H., Spijkervet, F.K., Kallenberg, C.G. and Vissink, A. (2007) Progression of Salivary Gland Dysfunction in Patients with Sjogren's Syndrome. *Annals of the Rheumatic Diseases*, **66**(1), 107-112. doi: 10.1136/ard.2006.052647.
8. Netea, M.G., Domínguez-Andrés, J., Barreiro, L.B., Chavakis, T., Divangahi, M., Fuchs, E., Joosten, L.A.B., van der Meer, J.W.M., Mhlanga, M.M., Mulder, W.J.M., Riksen, N.P., Schlitzer, A., Schultze, J.L., Stabell Benn, C., Sun, J.C., Xavier, R.J. and Latz, E. (2020) Defining Trained Immunity and Its Role in Health and Disease. *Nature Reviews Immunology*, **20**(6), 375-388. doi: 10.1038/s41577-020-0285-6.
9. Aps, J.K.M. and Martens, L.C. (2005) Review: The Physiology of Saliva and Transfer of Drugs into Saliva. *Forensic Science International*, **150**, 119-131. doi: 10.1016/j.forsciint.2004.10.026.
10. Wang, Q., Sun, X., Liu, C., Wang, C., Zhao, W., Zhu, Z., Ma, S. and Zhang, S. (2023) Current Development of Stretchable Self-Powered Technology Based on Nanomaterials toward Wearable Biosensors in Biomedical Applications. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, **11**, 1164805. doi: 10.3389/fbioe.2023.1164805.
11. Ramírez-Valle, F., Maranville, J.C., Roy, S. and Plenge, R.M. (2024) Sequential Immunotherapy: Towards Cures for Autoimmunity. *Nature Reviews Drug Discovery*, **23**(7), 501-524. doi: 10.1038/s41573-024-00959-8.
12. Turlak, I.V. (2020) [Saliva — main directions of research into its properties]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya=Modern Problems of Science and Education*, (4). Retrieved from: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=29934> (In Russian).

13. Zimmermann, H. (2006) Nucleotide Signaling in Nervous System Development. *Pflügers Archiv – European Journal of Physiology*, **452**(5), 573-588. doi: 10.1007/s00424-006-0067-4.
14. Fribourgh, J.L., Srivastava, A., Sandate, C.R., Michael, A.K., Hsu, P.L., Rakers, C., Nguyen, L.T., Torggrimson, M.R., Parico, G.C.G., Tripathi, S., Zheng, N., Lander, G.C., Hirota, T., Tama, F. and Partch, C.L. (2020) Dynamics at the Serine Loop Underlie Differential Affinity of Cryptochromes for CLOCK:BMAL1 to Control Circadian Timing. *eLife*, **9**, e55275. doi: 10.7554/eLife.55275.
15. Boswell-Casteel, R.C. and Hays, F.A. (2017) Equilibrative Nucleoside Transporters — a Review. *Nucleosides, Nucleotides & Nucleic Acids*, **36**(1), 7-30. doi: 10.1080/15257770.2016.1210805.
16. Tutanov, O. and Tamkovich, S. (2022) The Influence of Proteins on Fate and Biological Role of Circulating DNA. *International Journal of Molecular Sciences*, **23**(13), 7224. doi: 10.3390/ijms23137224.
17. Tsuda, T., Takefuji, M., Wettschureck, N., Kotani, K., Morimoto, R., Okumura, T., Kaur, H., Eguchi, S., Sakaguchi, T., Ishihama, S., Kikuchi, R., Unno, K., Matsushita, K., Ishikawa, S., Offermanns, S. and Murohara, T. (2017) Corticotropin Releasing Hormone Receptor 2 Exacerbates Chronic Cardiac Dysfunction. *Journal of Experimental Medicine*, **214**(7), 1877-1888. doi: 10.1084/jem.20161924.
18. Hancock, A.M., Witonsky, D.B., Gordon, A.S., Eshel, G., Pritchard, J.K., Coop, G. and Di Rienzo, A. (2008) Adaptations to Climate in Candidate Genes for Common Metabolic Disorders. *PLoS Genetics*, **4**(2), e32. doi: 10.1371/journal.pgen.0040032.
19. Ristić, L., Rančić, M., Radović, M., Krtinić, D., Pavlović, M., Ilić, B., Milojković, M., Živković, N., Turković, K. and Sokolović, D. (2020) Melatonin Inhibits Apoptosis and Oxidative Tissue Damage in Cisplatin-Induced Pulmonary Toxicity in Rats. *Archives of Medical Science*, **20**, 977-983. doi: 10.5114/aoms.2020.95952
20. Yama, K., Morishima, S., Tsutsumi, K., Jo, R., Aita, Y., Inokuchi, T., Okuda, T., Watai, D., Ohara, K., Maruyama, M., Chikazawa, T., Iwamoto, T., Kakizawa, Y. and Oniki, T. (2024) Oral Microbiota Development in the First 60 Months: A Longitudinal Study. *Journal of Dental Research*, **103**(12), 1249-1257. doi: 10.1177/00220345241272011..
21. Hoermann, R., Midgley, J.E., Larisch, R. and Dietrich, J.W. (2015) Homeostatic Control of the Thyroid-Pituitary Axis: Perspectives for Diagnosis and Treatment. *Frontiers in Endocrinology*, **6**, 177. doi: 10.3389/fendo.2015.00177.

EFFECT OF LIGHT-DARK REGIMES ON ADAPTATION: PHYSIOLOGICAL AND ECOLOGICAL ANALYSIS WITH cDNA LEVEL ASSESSMENT IN SALIVA

E. V. Obyednykh, O. V. Myachina, A. N. Pashkov, N. V. Parfenova, A. A. Cheprasova

In the era of globalization and international academic mobility increasing, mass migration of students is turning into a sustainable social phenomenon. Moving to another country is associated with adaptation to new socio-cultural and environmental conditions, which is a multidimensional problem affecting physiological, psychological and social spheres of individual's life.

Adaptation becomes especially difficult in urbanized environment, where natural illumination cycles are disrupted due to metropolis constant activity and artificial light. Light acts as the main synchronizer of circadian rhythms, melatonin production regulator and a factor affecting the autonomic nervous system functioning. Changes in light-dark modes can disrupt homeostasis and reduce the organism's adaptive reserves.

In this study, comparative analysis of freely circulating DNA (cDNA) level in saliva was carried out in young people – students who moved to Voronezh from India ("Indians" group) and residents of Central Chernozem region ("Russians" group), in conditions of transition from light to dark.

The study revealed statistically significant increase in cDNA level in saliva after exposure to dark compared with light in both ethnic groups: from 16.76 ± 1.78 ng/ml in the light to 50.17 ± 8.81 ng/ml in the dark in Indians and from 17.02 ± 2.10 ng/ml to 53.20 ± 7.87 ng/ml in Russians. The data obtained indicate the modulating effect of illumination change on adaptive processes, which corresponds to ideas about the role of circadian rhythms in regulating the metabolic activity of oral mucosa cells and salivary glands.

Keywords: urban environment, light-dark cycle, physiological adaptation, students, freely circulating DNA (cDNA), stress.

Поступила в редакцию 25.05.2026 г.

Обыденных Екатерина Викторовна

инженер кафедры биологии,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
медицинский университет им. Н.Н. Бурденко»,
г. Воронеж, РФ.
E-mail: obidennyh.e@yandex.ru
ORCID: 0009-0003-0957-2507
SPIN-код: 4851-6392

Мячина Ольга Владимировна

доктор медицинских наук,
заведующий кафедрой биологии,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
медицинский университет им. Н.Н. Бурденко»,
г. Воронеж, РФ.
E-mail: biologvgma@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-6124-4469
SPIN-код: 6814-8345

Пашков Александр Николаевич

доктор биологических наук,
профессор кафедры биологии,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
медицинский университет им. Н.Н. Бурденко»,
г. Воронеж, РФ.
E-mail: biologvgma@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-2454-0397
SPIN-код: 1089-6438

Парфенова Наталья Владимировна

кандидат биологических наук,
доцент кафедры биологии,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
медицинский университет им. Н.Н. Бурденко»,
г. Воронеж, РФ.
E-mail: assistant78.9@mail.ru
ORCID: 0000-0003-1917-0256
SPIN-код: 4673-6594

Чепрасова Анна Александровна

кандидат биологических наук,
ассистент кафедры биологии,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
медицинский университет им. Н.Н. Бурденко»,
г. Воронеж, РФ.
E-mail: cheprasova_81@mail.ru
ORCID: 0000-0001-7275-4635
SPIN-код: 3024-2770

Obydennykh Ekaterina Viktorovna

Engineer of Biology Department,
Voronezh State Medical University named after
N.N. Burdenko, Voronezh, Russia

Myachina Olga Vladimirovna

Doctor of Medical Sciences,
Head of Biology Department,
Voronezh State Medical University named after
N.N. Burdenko, Voronezh, Russia

Pashkov Alexander Nikolaevich

Doctor of Biological Sciences,
Professor of Biology Department,
Voronezh State Medical University named after
N.N. Burdenko, Voronezh, Russia

Parfenova Natalya Vladimirovna

Candidate of Biological Sciences,
Associate Professor of Biology Department,
Voronezh State Medical University named after
N.N. Burdenko, Voronezh, Russia

Cheprasova Anna Alexandrovna

Candidate of Biological Sciences,
Assistant of Biology Department,
Voronezh State Medical University named after
N.N. Burdenko, Voronezh, Russia

ИЗМЕНЕНИЯ СИНАПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В МОДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ДИСФУНКЦИИ ГЕМАТОЭНЦЕФАЛИЧЕСКОГО БАРЬЕРА

© 2026. А. В. Савотченко, Е. Н. Чуян

Дисфункция гематоэнцефалического барьера (ГЭБ), нередко возникающая на фоне эпилептического статуса, приводит к изменению микросреды нервной ткани и вносит вклад в развитие эпилепсии. В наших предыдущих работах был предложен подход к воспроизведению ранней стадии нарушения ГЭБ, в основе которого лежит приближение ионного состава перфузионного раствора к таковому в плазме крови и добавлении тромбина в концентрации 5 Ед/мл. В этих условиях регистрировалась эпилептиформная активность как на уровне отдельных нейронов, так и на уровне нейронных сетей гиппокампа. В настоящей работе исследованы особенности синаптической передачи при моделировании дисфункции ГЭБ. Показано, что экспериментальное нарушение барьера индуцирует изменения синаптической пластичности, выражающиеся в усилении как кратковременных, так и долговременных ее форм.

Ключевые слова: гематоэнцефалический барьер, синаптическая пластичность, гиппокамп, тромбин.

Введение. Нарушение целостности ГЭБ – это патологическое состояние головного мозга, которое обычно наблюдается при черепно-мозговых травмах (ЧМТ), инсультах, опухолях, инфекциях, и может стать причиной развития эпилепсии. Эпилептические приступы как таковые способны приводить к увеличению проницаемости ГЭБ, что было продемонстрировано на экспериментальных моделях приобретенной эпилепсии, и у пациентов с эпилепсией [1, 2]. В предыдущих работах нами был разработан протокол, имитирующий ранние последствия дисфункции ГЭБ *in vitro*, который включал в себя модификацию раствора искусственной спинномозговой жидкости (ИСМЖ) и добавление тромбина в концентрации 5 Ед/мл [3]. При разрушении ГЭБ происходит увеличение проницаемости не только к тромбину, но и к таким токсичным молекулам, как альбумин, гемоглобин, фибриноген, железосодержащий гемосидерин, плазмин, свободное железо [4]. Однако было показано, что только тромбин вызывает эпилептические приступы сразу после попадания в мозговую ткань [5, 6]. Недавние исследования констатируют существенное повышение концентрации тромбина в мозге сразу после инициации эпилептического статуса [7], и обратную ситуацию, когда внутримозговое введение тромбина провоцирует приступы [8]. В наших исследованиях с использованием условий, имитирующих нарушение ГЭБ *in vitro*, было показано развитие эпилептиформной активности в нейронах гиппокампа, сравнимой по амплитуде и частоте с таковой в литий-пилокарпиновой модели, которая является классической моделью височной эпилепсии, связанной с дисфункцией ГЭБ [3]. В текущей работе мы решили выяснить возможный эффект модельных условий нарушения барьера на пластичность нейронных сетей гиппокампа. Генерация эпилептиформной активности и индукция синаптической пластичности имеют общие молекулярные и клеточные механизмы. Наблюдаемая нами эпилептиформная активность при имитации нарушений ГЭБ свидетельствует о гипервозбудимом состоянии нейронных сетей, что может существенным образом влиять на разные формы нейропластичности.

Цель исследования – выявление особенностей функционирования нейронных сетей гиппокампа в условиях, имитирующих ранние последствия нарушения ГЭБ.

Материалы и методы. Все эксперименты выполнены в соответствии с ГОСТ Р 53434-2009 от 02.12.2009, правилами лабораторной практики при проведении доклинических исследований, этическими стандартами, утвержденными правовыми актами Российской Федерации, принципами Базельской декларации и рекомендациями биоэтического комитета ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» (протокол № 5 от 2022 г.).

Исследование выполнено на 21-дневных самцах крыс линии *Wistar*. Методика приготовления переживающих срезов гиппокампа не отличалась от описанной ранее [9]. Головной мозг переносили в ледяной раствор ИСМЖ, насыщаемый карбогеном (95 % O₂ / 5 % CO₂), содержащий (ммоль/л): NaCl – 119; KCl – 3,5; CaCl₂ – 2; MgCl₂ – 1,3; NaHCO₃ – 26; NaH₂PO₄ – 1; глюкоза – 11; pH = 7,35. На вибраторе (Vibroslice NVSL, «World Precision Instruments Inc.», США) мозг нарезали на срезы, толщиной 500 мкм. Перед экспериментом срезы инкубировали в базовом растворе на протяжении 90 мин.

В электрофизиологической установке срезы находились в условиях непрерывной аппликации оксигенированным раствором. Регистрацию внеклеточных полевых потенциалов осуществляли от слоя апикальных дендритов пирамидных нейронов зоны CA1, для чего применяли стеклянные микроэлектроды, заполненные ИСМЖ (сопротивление 2–3 МОм), и усилитель переменного тока RK-400 (Bio-Logic Science Instruments, Франция). Стимуляцию полевых возбуждающих постсинаптических потенциалов (пВПСП) производили путем раздражения коллатералей Шаффера в области CA3 с использованием биполярного электрода (FHC Inc., США) и стимулятора ISO-Flex (A.M.P. Instruments, Израиль). К протоколу индукции синаптической пластичности приступали после получения стабильной базовой линии регистрации длительностью 10–20 мин.

Применение высокочастотной тетанической стимуляции частотой 100 Гц (длительностью 1 с) вызывало кратковременную посттетаническую потенциацию (ПТП), за которой следовала долговременная потенциация (ДВП) постсинаптических потенциалов, регистрируемая не менее 30 мин. ПТП анализировали в первые 5 мин после тетануса, ДВП оценивали путем усреднения синаптического ответа в течение 20–30 мин после стимуляции. Для оцифровки сигналов применяли АЦП производства National Instruments (США), работавший на частоте 10 кГц; запись и хранение полученных данных на компьютере осуществлялись средствами программного пакета WinWCP (Strathclyde Electrophysiology Software, Великобритания).

Мы использовали адаптированный по концентрационным значениям электролитов плазмы крови раствор ИСМЖ, содержащий 5 Ед/мл тромбина («Sigma-Aldrich», США) для моделирования дисфункции ГЭБ *in vitro*. Модифицированный ИСМЖ (мИСМЖ) содержал (ммоль/л): NaCl – 125; KCl – 5; CaCl₂ – 1; MgCl₂ – 0,8; NaHCO₃ – 24; NaH₂PO₄ – 1,25; глюкоза – 11; pH = 7,35.

Обработка данных. Для статистической обработки полученных результатов применяли программное обеспечение Clampfit (Axon Instruments, США), Origin 7.5 (OriginLab, США) и GraphPad Prism 8 (GraphPad, США). По каждой выборке определяли средние значения, величину стандартного отклонения и стандартной ошибки. Нормальность распределения предварительно проверяли с помощью теста Шапиро–Уилка; так как условие нормальности выполнялось, межгрупповые различия оценивали по t-критерию Стьюдента. Уровень значимости принимался равным $p < 0,05$. Полученные данные представлены как среднее $\pm$ SEM, при этом число наблюдений в каждой выборке вынесено в скобки.

Результаты исследования. Для исследования пластичности синаптической передачи в условиях имитации ранней дисфункции ГЭБ, мы использовали протокол

высокочастотной стимуляции, состоящий из 100 импульсов, прикладываемых с частотой 100 Гц. На рис. 1, А представлены сгруппированные данные пВПСП в контрольной и имитирующей дисфункцию ГЭБ группах до и после тетанической стимуляции.

Сначала мы оценивали базовую синаптическую передачу в сетях СА3–СА1 гиппокампа. Стимуляция коллатералей Шаффера вызвала пВПСП в радиальном слое области СА1 во всех исследуемых срезах как в контрольных, так и в модельных условиях. Наблюдалось значительное увеличение амплитуды пВПСП во время моделирования дисфункции ГЭБ *in vitro* ($0,51 \pm 0,08$ мВ) по сравнению с регистрациями в контрольном растворе ИСМЖ ($0,2 \pm 0,03$ мВ), что указывает на повышение синаптической эффективности в исследуемых нейронных сетях ($p < 0,01$, $n = 9$ контроль, $n = 10$ модель дисфункции ГЭБ, рис. 1, Б).

Анализ усредненных значений максимальной амплитуды ПТП выявил достоверное увеличение амплитуды в экспериментальной группе ($211,1 \pm 19,9$ %, $n = 10$) по сравнению с контрольной ($165,6 \pm 11,6$ %, $n = 9$; $p < 0,01$, рис. 1, В). Стабильная ДВП индуцировалась в обеих экспериментальных группах (контроль: $138,4 \pm 3,1$ %, $n = 9$; модель дисфункции ГЭБ: $159,8 \pm 6,6$ %, $n = 10$). Однако ДВП в срезах модельной группы была значительно выше, чем в контрольной ($p < 0,001$, рис. 1, Г).

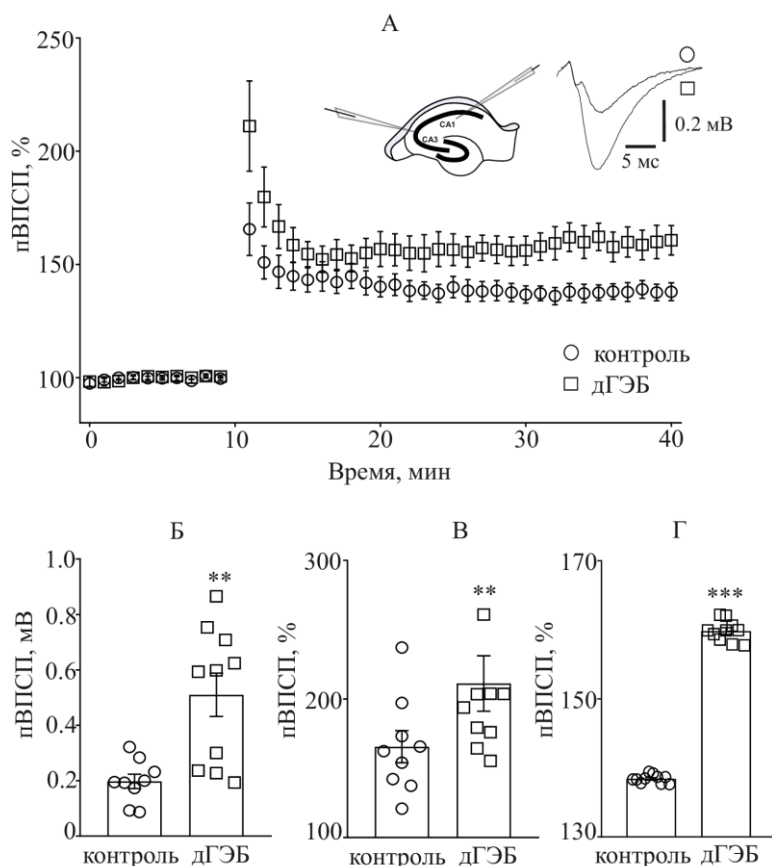


Рис. 1. Изменение функционального состояния СА3-СА1-нейронных сетей гиппокампа крыс в модельных условиях дисфункции гематоэнцефалического барьера (дГЭБ): А – Нормализованные по среднему значению базовой активности амплитуды полевых возбуждающих постсинаптических потенциалов (пВПСП) до и после тетанической стимуляции; на верхней панели представлены примеры регистрации пВПСП в контроле (○) и при экспериментальном воздействии (□); Б – Количественный анализ выявил статистически значимое увеличение амплитуды пВПСП в условиях моделируемой дисфункции ГЭБ; В – Достоверное возрастание амплитуды посттетанической потенциации срезов гиппокампа в экспериментальных условиях нарушения ГЭБ; Г – Статистически значимое увеличение долгосрочной пластичности СА3-СА1-синапсов при повреждении ГЭБ. ** $p < 0,01$, *** $p < 0,001$

В современной исследовательской практике воспроизведение патофизиологических процессов в экспериментальных условиях *in vitro* выступает незаменимым подходом к пониманию сложных механизмов, лежащих в основе развития дисфункций. На сегодняшний день известно значительное количество *in vitro*-моделей, так называемой «эпилепсии в чашке», которые воспроизводят электрографические корреляты эпилептогенеза нейронных сетей исследуемых структур мозга, чаще всего височной доли, воспроизводимые непосредственно в день эксперимента [10]. В предыдущей работе мы предложили *in vitro*-модель дисфункции ГЭБ и показали появление эпилептиформной активности в ответ на изменение состава ИСМЖ и добавление тромбина [3].

В настоящем исследовании обнаружено, что кратковременное воздействие экспериментального раствора, содержащего тромбин в концентрации 5 Ед/мл, усиливает ДВП СА3–СА1 нейронных сетей гиппокампа наряду с увеличением показателей ПТП. Эти результаты подтверждают участие факторов свёртывания крови в регуляции нейрональной пластичности и согласуются с данными о пропластическом эффекте тромбина [11, 12]. При компретации ГЭБ происходит более, чем 200-кратное увеличение концентрации тромбина в мозге: со 100 пмоль до 25 нмоль [13]. Выбор дозы тромбина (5 Ед/мл; ~25 нмоль) обусловлен её соответствием тем значениям, которые наблюдаются в ликворе пациентов с внутрижелудочковым кровоизлиянием. В этом диапазоне фермент способен запускать сигнальные каскады через рецепторы PAR1, не вызывая морфологических нарушений в ткани. Реакция нейронов наступает практически без латентного периода – ранее нами было показано возникновение эпилептиформной активности непосредственно после попадания тромбина в регистрационную камеру [3]; здесь достоверный прирост амплитуды пВПСП отмечался уже через 2–4 мин, а стабильные ответы фиксировались через 10–15 мин.

Тромбин является лишь одним из множества циркулирующих белков, способных проникать в паренхиму мозга при нарушении ГЭБ. В моделях бактериального воспаления (внутрижелудочковое введение ЛПС) наблюдали диаметрально противоположный эффект – угнетение ДВП за счёт высвобождения провоспалительных цитокинов [14]. При внутрижелудочковом введении искусственного раствора электролитов, приближенного по составу к сыворотке, с повышенным содержанием K^+ , пониженным Mg^{2+} и Ca^{2+} в присутствии альбумина, интенсивность ДВП, напротив, возрастала, что авторы связывали с аномальным повышением внеклеточного K^+ и активацией астроцитарных рецепторов TGF β II [15]. Наши данные показывают, что в условиях, имитирующих раннее геморрагическое повреждение ГЭБ, пластические процессы смещаются в сторону гипервозбудимости и совпадают по направлению с альбуминовой, но не воспалительной моделью, что подчёркивает различие молекулярных сценариев, лежащих в основе этих патологических состояний.

Нарушение синаптической пластичности является характерной чертой различных нейродегенеративных расстройств, воспроизводимых в экспериментальных животных моделях. Высокочастотная активация нейронов, сопровождающая судорожные разряды, оказывает неблагоприятное влияние на ДВП [14, 16]. В пилокарпиновой модели эпилепсии это проявляется выраженным снижением ДВП в зубчатой извилине – входной области гиппокампа [17]. Однако при хронической эпилепсии в поле СА1, несмотря на значительную гибель пирамидных клеток, наоборот, наблюдалось усиление ДВП [18]. Одним из возможных объяснений подобного противоречия может служить тот факт, что деафферентация или ослабление нейронных сетей от мшистых волокон до поля СА3 [17], способно приводить к повышению синаптического ответа в

CA3–CA1 синапсе, как вариант сенситизации. Похожее усиление пластичности фиксировали при кислородно-глюкозной депривации [19] и очаговых поражениях мозга [20], что согласуется с концепцией гомеостатического усиления сохранившихся синапсов и компенсаторного увеличения синаптической эффективности после гибели нейронов. Мы также обнаружили прирост амплитуды ДВП, который, по-видимому, относится к патологической форме гиперпластичности, описанной в первые часы после лёгкой ЧМТ [21]. Сам по себе факт усиления ДВП не означает улучшения когнитивных функций. Напротив, резкое снижение порога ее индукции, вероятно, уменьшает избирательность синаптического фильтра и приводит к гиперсинхронизации сетей, что, в свою очередь, способствует судорожной активности и формированию эпилептогенной сети.

Следует отметить, что действие тромбина обратимо: применение селективного антагониста ПАР1 SCH 79797 нивелирует эпилептиформную активность, индуцируемую в исследуемой модели дисфункции ГЭБ в культуре гиппокампа [22], восстанавливает синаптическую пластичность и нарушения поведенческих реакций крыс после эпилептического статуса [23], блокирует амнестический эффект легкой ЧМТ [24]. Прямые ингибиторы тромбина – аргатробан и дабигатран – потенциально могут проявлять противоэпилептические свойства и способствовать восстановлению пластичности в условиях повышенной концентрации тромбина и гиперактивации ПАР1 в мозге, что наблюдается при нарушении ГЭБ [25]. Избирательный антагонист ПАР1 ворапаксар уже одобрен в кардиологии и потенциально может быть репозиционирован для нейропротекции при остром инсульте или ЧМТ. Однако системное применение прямых ингибиторов тромбина сопровождается дозозависимым риском кровотечений, поэтому при их возможном использовании для нейропротекции необходимо определить безопасный терапевтический диапазон и рассмотреть методы адресной доставки, минимизирующие системные геморрагические осложнения.

Таким образом, полученные нами данные позволяют предположить, что фиксируемое в первые часы после нарушения ГЭБ усиление синаптической пластичности представляет собой преимущественно кратковременное, адаптивное явление. Начальный рост синаптической эффективности, по-видимому, обусловлен быстрым притоком факторов свёртывания и сопровождающим его каскадом сигналов (в том числе повышением внеклеточной концентрации Ca^{2+} и активацией протеинкиназ), что временно понижает порог индукции ДВП и усиливает амплитуду возбуждающих постсинаптических потенциалов. По мере того, как химический состав межклеточной среды постепенно приближается к физиологическому, а буферные и энергетические ресурсы нейрональной сети истощаются, активируется ряд компенсаторных процессов: усиливается обратный захват глутамата астроглией, повышается активность Ca^{2+} -насосов и экспрессия молекул, задействованных в гомеостатическом синаптическом масштабировании. В совокупности это приводит к постепенному снижению уровня пластичности до базового, а при сохранении патологических стимулов – к смещению баланса в сторону механизмов долговременной депрессии. Следовательно, обнаруженный феномен следует рассматривать как фазо-специфическую реакцию ткани на острую дестабилизацию барьера, причём его длительность и последующие траектории (стабилизация, возврат к норме либо переход к депрессивным изменениям) во многом будут определяться скоростью восстановления ионного и метаболического гомеостаза, а также степенью вовлечения клеточных звеньев глии и иммунной системы мозга.

Заключение. Результаты настоящего исследования подтверждают, что дисфункция ГЭБ в условиях *in vitro* приводит к патологическому усилению синаптической пластичности в нейронных сетях гиппокампа крыс, что может лежать в

основе ограниченного реабилитационного потенциала при цереброваскулярных заболеваниях. Полученные данные демонстрируют важность тромбин-опосредованных механизмов в нарушении нормального функционирования пластичности синаптической передачи и открывают новые перспективы для разработки терапевтических подходов, направленных на восстановление адаптивных возможностей мозга после повреждения ГЭБ. Предложенная экспериментальная модель может служить эффективным инструментом для дальнейших исследований патофизиологических механизмов эпилептогенеза и разработки нейропротекторных стратегий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства Просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы ОТГЕ-2026-0005, дополнительное соглашение № 073-03-2026-057/2 от 21.02.2026).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Friedman A. Blood-brain barrier dysfunction, status epilepticus, seizures and epilepsy: a puzzle of a chicken and egg? // *Epilepsia*. – 2011. – Vol. 52. – P. 19–20. – DOI: 10.1111/j.1528-1167.2011.03227.x.
2. Oby E., Janigro D. The blood-brain barrier and epilepsy // *Epilepsia*. – 2006. – Vol. 47. – P. 1761–1774. – DOI: 10.1111/j.1528-1167.2006.00817.x/.
3. Savotchenko A., Klymenko M., Shypshyna M., Isaev D. The role of thrombin in early-onset seizures // *Frontiers in Cellular Neuroscience*. – 2023. – Vol. 17. – P. 1101006. – DOI: 10.3389/fncel.2023.1101006.
4. Montagne A., Toga A.W., Zlokovic B. V. Blood-brain barrier permeability and gadolinium: benefits and potential pitfalls in research // *JAMA Neurology*. – 2016. – Vol. 173. – P. 13–14. – DOI: 10.1001/jamaneurol.2015.2960.
5. Singh T., Mehra A., Batabyal T., Joshi S., Kapur J. Thrombin mediates seizures following cortical injury-induced status epilepticus // *Epilepsy Research*. – 2025. – Vol. 2013. – P. 107549. – DOI: 10.1016/j.eplesyres.2025.107549.
6. Tomkins O., Friedman O., Ivens S., Reiffurth C., Major S., Dreier J.P., Heinemann U., Friedman A. Blood-brain barrier disruption results in delayed functional and structural alterations in the rat neocortex // *Neurobiology of Disease*. – 2007. – Vol. 25. – P. 367–377. – DOI: 10.1016/j.nbd.2006.10.006.
7. Isaev D., Lushnikova I., Lunko O., Zapukhliak O., Maximyuk O., Romanov A., Skibo G., Tian C., Holmes G.L., Isaeva E. Contribution of protease-activated receptor 1 in status epilepticus induced epileptogenesis // *Neurobiology of Disease*. – 2015. – Vol. 78. – P. 68–76. – DOI: 10.1016/j.nbd.2015.03.026.
8. Lee K. R., Drury I., Vitarbo E. and Hoff J. T. Seizures induced by intracerebral injection of thrombin: a model of intracerebral hemorrhage // *Journal of Neurosurgery*. – 1997. – Vol. 87. – P. 73–78. – DOI: 10.3171/jns.1997.87.1.0073.
9. Savotchenko A. V., Chuyan E. N. Short-Term Synaptic Plasticity of Hippocampal Neural Networks under Experimentally-Induced Blood–Brain Barrier Dysfunction // *Journal of Evolutionary Biochemistry and Physiology*. – 2025. – Vol. 61, No. 4. – P. 1200–1208. – DOI: 10.1134/S0022093025040209.
10. Ергина Ю., Смирнова Е. *In vitro* модели эпилептиформной активности // *Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова*. – 2019. – № 105. – С. 954–965. – DOI: 10.1134/S0869813919080041.
11. Gingrich M. B., Traynelis S. F. Serine proteases and brain damage - is there a link? // *Trends in Neuroscience*. – 2000. – Vol. 23, № 9. – P. 399–407. – DOI: 10.1016/s0166-2236(00)01617-9.
12. Maggio N., Cavaliere C., Papa M., Blatt I., Chapman J., Segal M. Thrombin regulation of synaptic transmission: implications for seizure onset // *Neurobiology of Disease*. – 2013. – Vol. 50. – P. 171–178. – DOI: 10.1016/j.nbd.2012.10.017.
13. Suzuki M., Ogawa A., Sakurai Y., Nishino A., Venohara K., Mizoi K., Yoshimoto T. Thrombin activity in cerebrospinal fluid after subarachnoid hemorrhage // *Stroke*. – 1992. – Vol. 23. – P. 1181–1182. – DOI: 10.1161/01.str.23.8.1181.
14. Postnikova T. Y., Griflyuk A. V., Ergina J. L., Zubareva O. E., Zaitsev A. V. Administration of bacterial lipopolysaccharide during early postnatal ontogenesis induces transient impairment of long-term synaptic plasticity associated with behavioral abnormalities in young rats // *Pharmaceuticals (Basel)*. – 2020. – Vol. 13, No. 3. – P. 48. – DOI: 10.3390/ph13030048.

15. Salar S., Lapilover E., Müller J., Hollnagel J. O., Lippmann K., Friedman A., Heinemann U. Synaptic plasticity in area CA1 of rat hippocampal slices following intraventricular application of albumin // *Neurobiology of Disease*. – 2016. – Vol. 91. – P. 155–165. – DOI: 10.1016/j.nbd.2016.03.008.
16. Kryukov K. A., Kim K. K., Magazanik L. G., Zaitsev A. V. Status epilepticus alters hippocampal long-term synaptic potentiation in a rat lithium-pilocarpine model // *Neuroreport*. – 2016. – Vol. 27, No 16. – P. 1191–1195. – DOI: 10.1097/WNR.0000000000000656.
17. Beck H., Goussakov I. V., Lie A., Helmstaedter C., Elger C. E. Synaptic plasticity in the human dentate gyrus // *Journal of Neuroscience*. – 2000. – Vol. 20, No 18. – P. 7080–7086. – DOI: 10.1523/JNEUROSCI.20-18-07080.2000.
18. Müller L., Tokay T., Porath K., Köhling R., Kirschstein T. Enhanced NMDA receptor-dependent LTP in the epileptic CA1 area via upregulation of NR2B // *Neurobiology of Disease*. – 2013. – Vol. 54. – PP. 183–193. – DOI: 10.1016/j.nbd.2012.12.011.
19. Voytenko L. P., Lushnikova I. V., Savotchenko A. V., Isaeva E. V., Skok M. V., Lykhmus O. Y., Patseva M. A., Skibo G. G. Hippocampal GABAergic interneurons coexpressing alpha7-nicotinic receptors and connexin-36 are able to improve neuronal viability under oxygen-glucose deprivation // *Brain Research*. – 2015. – Vol. 1616. – P. 134–145. – DOI: 10.1016/j.brainres.2015.04.061.
20. Huemmelke M., Eysel U. T., Mittmann T. Lesion-induced enhancement of LTP in rat visual cortex is mediated by NMDA receptors containing the NR2B subunit // *Journal of Physiology*. – 2004. – Vol. 559. – P. 875–882. – DOI: 10.1113/jphysiol.2004.069534.
21. Aungst S. L., Kabadi S. V., Thompson S. M., Stoica B. A., Faden A. I. Repeated mild traumatic brain injury causes chronic neuroinflammation, changes in hippocampal synaptic plasticity, and associated cognitive deficits // *Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism*. – 2014. – Vol. 34, No. 7. – P. 1223–1232. – DOI: 10.1038/jcbfm.2014.75.
22. Shypshyna M., Savotchenko A., Kuznetsov K. and Veselovsky N. The effect of thrombin in the serum-adapted ionic environment on the induction of epileptiform firing activity of hippocampal cultured neurons // *Fiziologichnyi Zhurnal*. – 2021. – Vol. 67. – P. 3–10. – DOI: 10.15407/fz67.05.003.
23. Semenikhina M., Bogovyk R., Fedoriuk M., Nikolaenko O., Al Kury L. T., Savotchenko A., Krishtal O., Isaeva E. Inhibition of protease-activated receptor 1 ameliorates behavioral deficits and restores hippocampal synaptic plasticity in a rat model of status epilepticus // *Neuroscience Letters*. – 2019. – Vol. 692. – P. 64–68. – DOI: 10.1016/j.neulet.2018.10.058.
24. Itzekson Z., Maggio N., Milman A., Shavit E., Pick C. G., Chapman J. Reversal of trauma-induced amnesia in mice by a thrombin receptor antagonist // *Journal of Molecular Neuroscience*. – 2014. – Vol. 53, No. 1. – P. 87–95. – DOI: 10.1007/s12031-013-0200-8.
25. Klebe D., Flores J. J., McBride D.W., Krafft P. R., Rolland W. B., Lekic T., Zhang J. H. Dabigatran ameliorates post-haemorrhagic hydrocephalus development after germinal matrix haemorrhage in neonatal rat pups // *Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism*. – 2017. – Vol. 37, No. 9. – P. 3135–3149. – DOI: 10.1177/0271678X16684355.

REFERENCES

1. Friedman, A. (2011) Blood-brain barrier dysfunction, status epilepticus, seizures and epilepsy: a puzzle of a chicken and egg? *Epilepsia*. 52, 19–20, doi: 10.1111/j.1528-1167.2011.03227.x.
2. Oby, E., and Janigro, D. (2006) The blood-brain barrier and epilepsy. *Epilepsia*. 47, 1761–1774, doi: 10.1111/j.1528-1167.2006.00817.x.
3. Savotchenko, A., Klymenko, M., Shypshyna, M., Isaev, D. (2023) The role of thrombin in early-onset seizures. *Front. Cell. Neurosci.* 17:1101006, doi: 10.3389/fncel.2023.1101006.
4. Montagne, A., Toga, A. W., and Zlokovic, B. V. (2016). Blood-brain barrier permeability and gadolinium: benefits and potential pitfalls in research. *JAMA Neurol.* 73, 13–14, doi: 10.1001/jamaneurol.2015.2960.
5. Singh, T., Mehra, A., Batabyal, T., Joshi, S., Kapur, J. (2025) Thrombin mediates seizures following cortical injury-induced status epilepticus. *Epilepsy Res.* 2025, 107549, doi: 10.1016/j.eplepsyres.2025.107549.
6. Tomkins, O., Friedman, O., Ivens, S., Reiffurth, C., Major, S., Dreier, J. P., et al. (2007) Blood-brain barrier disruption results in delayed functional and structural alterations in the rat neocortex. *Neurobiol. Dis.* 25, 367–377, doi: 10.1016/j.nbd.2006.10.006.
7. Isaev, D., Lushnikova, I., Lunko, O., Zapukhliak, O., Maximyuk, O., Romanov, A., et al. (2015) Contribution of protease-activated receptor 1 in status epilepticus-induced epileptogenesis. *Neurobiol. Dis.* 78, 68–76, doi: 10.1016/j.nbd.2015.03.026.
8. Lee, K. R., Drury, I., Vitarbo, E., and Hoff, J. T. (1997) Seizures induced by intracerebral injection of thrombin: a model of intracerebral hemorrhage. *J. Neurosurg.* 87, 73–78, doi: 10.3171/jns.1997.87.1.0073.

9. Savotchenko, A.V., Chuyan, E.N. (2025) Short-Term Synaptic Plasticity of Hippocampal Neural Networks under Experimentally-Induced Blood–Brain Barrier Dysfunction. *Journal of Evolutionary Biochemistry and Physiology*. 61, 1200–1208, doi: 10.1134/S0022093025040209.
10. Ergina, J. L., Smirnova, E. Y. (2019) In vitro models of epileptic-like activity. *Russian Journal of Physiology*. 105, 954–965, doi: 10.1134/S0869813919080041.
11. Gingrich, M. B., Traynelis, S. F. (2000) Serine proteases and brain damage – is there a link? *Trends Neurosci*. 23(9), 399–407, doi: 10.1016/s0166-2236(00)01617-9.
26. Maggio, N., Cavaliere, C., Papa, M., Blatt, I., Chapman, J., Segal, M. (2013) Thrombin regulation of synaptic transmission: implications for seizure onset, *Neurobiol. Dis.* 50, 171–178, doi: 10.1016/j.nbd.2012.10.017.
12. Suzuki, M., Ogawa, A., Sakurai, Y., Nishino, A., Venohara, K., Mizoi, K., Yoshimoto, T. (1992) Thrombin activity in cerebrospinal fluid after subarachnoid hemorrhage. *Stroke*. 23, 1181–1182, doi: 10.1161/01.str.23.8.1181.
13. Postnikova, T. Y., Griflyuk, A. V., Ergina, J. L., Zubareva, O. E., Zaitsev, A. V. (2020) Administration of bacterial lipopolysaccharide during early postnatal ontogenesis induces transient impairment of long-term synaptic plasticity associated with behavioral abnormalities in young rats. *Pharmaceuticals (Basel)*. 13(3), 48, doi: 10.3390/ph13030048.
14. Salar, S., Lapilover, E., Müller, J., Hollnagel, J. O., Lippmann, K., Friedman, A., Heinemann, U. (2016) Synaptic plasticity in area CA1 of rat hippocampal slices following intraventricular application of albumin. *Neurobiol. Dis.* 91, 155–165, doi: 10.1016/j.nbd.2016.03.008.
15. Kryukov, K. A., Kim, K. K., Magazanik, L. G., Zaitsev, A. V. (2016) Status epilepticus alters hippocampal long-term synaptic potentiation in a rat lithium-pilocarpine model. *Neuroreport*. 27(16), 1191–1195, doi: 10.1097/WNR.0000000000000656.
16. Beck, H., Goussakov, I. V., Lie, A., Helmstaedter, C., Elger, C. E. (2000) Synaptic plasticity in the human dentate gyrus. *J. Neurosci*. 20(18), 7080–7086, doi: 10.1523/JNEUROSCI.20-18-07080.2000.
17. Müller, L., Tokay, T., Porath, K., Köhling, R., Kirschstein, T. (2013) Enhanced NMDA receptor-dependent LTP in the epileptic CA1 area via upregulation of NR2B. *Neurobiol. Dis.* 54, 183–193, doi: 10.1016/j.nbd.2012.12.011.
18. Voytenko, L. P., Lushnikova, I. V., Savotchenko, A. V., Isaeva, E. V., Skok, M. V., Lykhmus, O. Y., Patseva, M. A., Skibo, G. G. (2015) Hippocampal GABAergic interneurons coexpressing alpha7-nicotinic receptors and connexin-36 are able to improve neuronal viability under oxygen-glucose deprivation. *Brain Res.* 1616, 134–145, doi: 10.1016/j.brainres.04.061.
19. Huemmeke, M., Eysel, U. T., Mittmann, T. (2004) Lesion-induced enhancement of LTP in rat visual cortex is mediated by NMDA receptors containing the NR2B subunit. *J. Physiol.* 559, 875–882, doi: 10.1113/jphysiol.2004.069534.
20. Aungst, S. L., Kabadi, S.V., Thompson, S. M., Stoica, B. A., Faden, A. I. (2014) Repeated mild traumatic brain injury causes chronic neuroinflammation, changes in hippocampal synaptic plasticity, and associated cognitive deficits. *J. Cereb. Blood. Flow. Metab.* 34(7), 1223–1232, doi: 10.1038/jcbfm.2014.75.
21. Shypshyna, M., Savotchenko, A., Kuznetsov, K., and Veselovsky, M. (2021) The effect of thrombin in the serum-adapted ionic environment on the induction of epileptiform firing activity of hippocampal cultured neurons. *Fiziol. Zh.* 67, 3–10, doi: 10.15407/fz67.05.003.
22. Semenikhina, M., Bogovyk, R., Fedoriuk, M., Nikolaienko, O., Al Kury, L.T., Savotchenko, A., Krishtal, O., Isaeva, E. (2019) Inhibition of protease-activated receptor 1 ameliorates behavioral deficits and restores hippocampal synaptic plasticity in a rat model of status epilepticus. *Neurosci. Lett.* 692, 64–68, doi: 10.1016/j.neulet.2018.10.058.
23. Itzekson, Z., Maggio, N., Milman, A., Shavit, E., Pick, C. G., Chapman, J. (2014) Reversal of trauma-induced amnesia in mice by a thrombin receptor antagonist. *J. Mol. Neurosci.* 53(1), 87–95, doi: 10.1007/s12031-013-0200-8.
24. Klebe, D., Flores, J. J., McBride, D. W., Krafft, P. R., Rolland, W. B., Lekic, T., Zhang, J. H. (2017) Dabigatran ameliorates post-haemorrhagic hydrocephalus development after germinal matrix haemorrhage in neonatal rat pups. *J. Cereb. Blood Flow Metab.* 37(9), 3135–3149, doi: 10.1177/0271678X16684355.

ALTERATIONS OF SYNAPTIC PLASTICITY UNDER MODEL CONDITIONS
OF BLOOD-BRAIN BARRIER DYSFUNCTION

A. V. Savotchenko, E. N. Chuyan

Status epilepticus is frequently accompanied by blood–brain barrier (BBB) dysfunction, which alters the microenvironment of the nervous tissue and contributes to the development of epilepsy and comorbid neuropsychiatric disorders. We have previously developed an approach to model the initial phase of BBB disruption based on adjusting the ionic composition of the perfusion solution to that of blood plasma and supplementing it with thrombin at 5 U/mL. Under these conditions, epileptiform activity was recorded at both the single-neuron and hippocampal network levels. In the present study, we examined the features of synaptic transmission under modeled BBB dysfunction. We found that experimental BBB disruption induces changes in hippocampal synaptic plasticity, manifested as enhancement of both its short- and long-term forms.

Keywords: blood-brain barrier, synaptic plasticity, hippocampus, thrombin.

Поступила в редакцию 28.06.2026 г.

Савотченко Алина Владимировна

кандидат биологических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры физического воспитания, спорта и естественнонаучных дисциплин, ФГБОУ ВО «Азовский государственный педагогический университет им. П.Д. Осипенко», г. Бердянск, Запорожская обл., РФ.
E-mail: asavotchenko@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-5276-430X
SPIN-код: 8407-4018

Savotchenko Alina Vladimirovna

Candidate of Biological Sciences, Senior Scientific Researcher, Associate Professor of the Department of Physical Education, Sports and Natural Sciences, P.D. Osipenko Azov State Pedagogical University, Berdyansk, RF

Чуян Елена Николаевна

Доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой физиологии человека и животных и биофизики, ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», Симферополь, РФ.
E-mail: elena-chuyan@rambler.ru
ORCID: 0000-0001-6240-2732
SPIN-код: 8373-3871

Chuyan Elena Nikolaevna

Doctor of Biological Sciences, Professor, Head of the Department of Human and Animal Physiology and Biophysics, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, RF

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ВАРИАБЕЛЬНОСТИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОЛА У ЛИЦ МОЛОДОГО ВОЗРАСТА

© 2026. *Д. А. Скорлупкин, Е. К. Голубева, Т. М. Николаева*

Исследовалась факторная структура взаимосвязи параметров variability сердечного ритма (ВСР) у 50 мужчин и 50 женщин 18–20 лет. Женщины были обследованы в фолликулярную и лютеиновую фазы менструального цикла. Установлено, что у мужчин и женщин в фолликулярную фазу факторная структура ВСР сходна. Выделены 2 группы факторов, отражающих парасимпатические (№ 1) и интегративные влияния на ритм сердца (№ 2). Показана ведущая роль блуждающего нерва в регуляции ВСР в покое, что более выражено у мужчин. У женщин в лютеиновую фазу цикла маркеры симпатической и парасимпатической активности образуют две отдельные факторные группы, вероятно, из-за увеличения влияния симпатических центров на ритм сердца.

Ключевые слова: variability сердечного ритма; вегетативная нервная система; факторный анализ; половые различия; менструальный цикл.

Введение. Одной из характеристик сердечной деятельности является variability длительности интервалов R-R, обусловленная комплексным влиянием на организм различных факторов, реализующих своё действие через нервные и гуморальные механизмы регуляции [1]. Поэтому регистрация электрокардиограммы (ЭКГ) с анализом variability сердечного ритма (ВСР) представляет собой объективный метод оценки функционального состояния сердца, а также характера симпатических, парасимпатических и гуморальных влияний на его деятельность [2]. Согласно рекомендациям «Европейской ассоциации кардиологов» и «Североамериканского общества кардиостимуляции и электрофизиологии» для анализа ВСР допускается использование двух вариантов регистрации ЭКГ: краткосрочная безартефактная запись продолжительностью не менее 5 минут, а также 24-часовая регистрация [3]. Это позволяет не только охарактеризовать состояние регуляторных механизмов в условиях физиологического покоя, но и изучить особенности активации адаптивных реакций при воздействии различных эндо- и экзогенных факторов [4–6]. Многочисленные исследования свидетельствуют о периодическом изменении функционального состояния вегетативных механизмов регуляции у женщин репродуктивного возраста, что связано с циклическими колебаниями гормонального фона в различные фазы менструального цикла [7, 8]. Известно, что гормоны яичников эстрадиол и прогестерон оказывают широкий спектр физиологических эффектов на организм женщины, в том числе, могут вызывать изменения ВСР. Большинство исследований показывает, что у женщин с регулярным менструальным циклом во время фолликулярной фазы преобладает эффект парасимпатической нервной системы, а во время лютеиновой фазы цикла увеличивается роль симпатических влияний [9].

В современной физиологии и медицине интерпретация параметров ВСР базируется на широком спектре показателей, традиционно объединяемых в группы спектральных, временных и расчётных [10]. Следует отметить, что между этими показателями существует большое количество корреляционных связей. Поэтому кроме описания абсолютных значений исследуемых параметров имеет значение факторный анализ их взаимосвязей. Это даёт возможность объединить коррелирующие между собой показатели в несколько обобщённых групп [11, 12]. Значимым достоинством

факторного анализа является, с одной стороны, возможность сокращения большого массива показателей до нескольких факторов, а с другой – выявление скрытых взаимосвязей между параметрами, что повышает точность интерпретации результатов. Структура взаимосвязей параметров ВСР в зависимости от пола и фазы менструального цикла практически не изучена. Актуальность настоящего исследования определяется необходимостью выявления особенностей факторной структуры параметров ВСР не только у мужчин, но и у женщин с учётом фазы менструального цикла, что позволит уточнить характер вегетативной регуляции деятельности сердца.

Цель исследования. Сравнить факторную структуру взаимосвязей показателей вариабельности сердечного ритма у мужчин и у женщин с учетом фазы менструального цикла.

Материал и методы. В исследовании приняли участие 100 практически здоровых студентов Ивановского ГМУ: 50 мужчин и 50 женщин в возрасте от 18 до 20 лет. Из исследования исключены лица с острыми инфекционными и неинфекционными заболеваниями, а также с хроническими заболеваниями в стадии обострения, нарушениями функций эндокринной, сердечно-сосудистой и нервной системы, а также испытуемые с индексом массы тела менее $18,5 \text{ кг/м}^2$ (дефицит массы тела) и более 25 кг/м^2 (избыточная масса тела). Обследование женщин выполнено на 5–6 день от начала менструального цикла (фолликулярная фаза) и за 5–6 дней до его окончания (лютеиновая фаза). Все испытуемые перед началом работы подписали информированное согласие. Протокол настоящего исследования рассмотрен и одобрен на заседании этического комитета Ивановского ГМУ (протокол заседания № 5 от 16.11.2020 г.). Регистрацию ЭКГ с последующим анализом ВСР производили с использованием компьютерного комплекса «Поли-спектр» компании «Нейрософт» (г. Иваново, Россия) в положении лёжа на спине в течение 5 минут. Перед началом записи испытуемые находились в положении лёжа в течение 10 минут. Для анализа были выбраны следующие параметры ВСР: частота сердечных сокращений (ЧСС, уд/мин), стандартное отклонение RR-интервалов (SDNN, мс), квадратный корень из среднего квадрата разностей соседних RR-интервалов (RMSSD, мс), амплитуда моды (Амо, %), медиана (Ме, с), мощность спектра в диапазоне 0,04–0,15 Гц (LF, мс^2), мощность спектра в диапазоне 0,15–0,40 Гц (HF, мс^2), симпатовагальный индекс (LF/HF, у.е.), доля мощности спектра в диапазоне низких частот (LF%), доля мощности спектра в диапазоне высоких частот (HF%).

Статистическая обработка полученных результатов осуществлялась в таблицах Microsoft Excel и пакете статистических программ Statistica. На основании расчёта критерия Колмогорова-Смирнова установлено, что распределение числовых значений экспериментальных данных отличается от нормального. В связи с этим последующий анализ выполнен с применением методов непараметрической статистики, а результаты исследования представлены в виде медианы (Ме) и межквартильного размаха [Q1; Q3]. Для оценки межгрупповых различий абсолютных значений показателей ВСР использовался критерий Краскела-Уоллиса. Для изучения структуры взаимосвязей показателей ВСР был проведен факторный анализ [13]. Выделение факторов выполнено методом главных компонент. Количество факторов определялось на основе критерия Кайзера и подтверждалось визуальной оценкой Scree-графика. Вращение факторов не использовалось. Пригодность данных для факторного анализа оценивалась на основе корреляционной матрицы. Факторные нагрузки $\geq \pm 0,55$ рассматривались как значимые, нагрузки $\geq \pm 0,70$ – как сильные. Факторный анализ проводился отдельно для трёх групп испытуемых: мужчины, женщины в фолликулярную фазу менструального

цикла, женщины в лютеиновую фазу цикла с последующим выявлением межгрупповых различий [14].

Результаты и обсуждение. Исследование межгрупповых различий абсолютных значений параметров ВСР показало, что у женщин в фолликулярную фазу менструального цикла по сравнению с мужчинами наблюдается более высокая ЧСС, а также более низкие значения SDNN и HF (табл. 1). У женщин в лютеиновую фазу цикла также выше, чем у мужчин, ЧСС и ниже RMSSD. Медианный интервал R-R у женщин в обе фазы ниже по сравнению с мужчинами, что закономерно согласуется с более высокой ЧСС. Это позволяет сделать вывод о том, что у мужчин степень парасимпатических влияний на ритм сердца выше, чем у женщин. В то же время, статистически значимых межгрупповых различий таких показателей, как LF/HF, LF, LF%, HF% и Aто, не выявлено.

Таблица 1

Абсолютные значения показателей ВСР у мужчин и женщин, Ме [Q1; Q3]

Показатель ВСР	Мужчины (n=50)	Женщины (фолликулярная фаза, n=50)	Женщины (лютеиновая фаза, n=50)
ЧСС, уд/мин	64,70 [57,95; 71,30]	70,70 [64,78; 78,65] * p<0,001	72,30 [66,63; 77,00] * p<0,001
SDNN, мс	65,00 [56,00; 89,00]	60,00 [47,00; 69,50] * p=0,029	60,00 [43,25; 75,00]
RMSSD, мс	65,00 [51,00; 97,00]	57,50 [43,00; 79,00]	59,50 [39,00; 76,50] * p=0,048
LF/HF, у.е.	0,59 [0,46; 1,01]	0,65 [0,41; 1,15]	0,77 [0,49; 1,18]
LF, мс ²	1006,00 [634,00; 1886,00]	882,00 [542,50; 1413,50]	1067,00 [512,00; 1679,00]
HF, мс ²	1721,00 [1050,00; 3300,00]	1239,50 [630,50; 2211,25] * p=0,050	1436,50 [697,25; 2064,50]
%LF, %	25,60 [18,40; 34,60]	29,90 [19,38; 35,25]	27,25 [19,93; 34,50]
%HF, %	40,80 [28,25; 49,75]	39,35 [25,00; 51,90]	35,50 [25,90; 47,65]
Aто, %	34,60 [27,60; 43,15]	38,90 [32,00; 46,75]	39,25 [31,18; 46,25]
Me, с	0,93 [0,84; 1,04]	0,85 [0,75; 0,92] * p=0,001	0,82 [0,77; 0,89] * p<0,001

Примечание: * – статистически значимые различия параметров ВСР у мужчин и женщин (p≤0,05).

Несмотря на достоверные различия некоторых показателей, спектральные маркеры симпатической (%LF, LF), парасимпатической активности (HF, %HF), а также показатель вегетативного равновесия (LF/HF) не имеют статистически значимых отличий у мужчин и женщин в разные фазы цикла. Однако различия ВСР в исследуемых группах испытуемых могут заключаться не столько в абсолютных величинах отдельных показателей, сколько в характере их взаимосвязей. Поэтому был проведен факторный анализ. Этот метод статистической обработки позволяет объединить различные показатели ВСР в одну группу на основе их корреляционных связей: чем выше степень корреляции между изучаемыми показателями, тем более вероятно их объединение в одну факторную группу, которая свидетельствует о влиянии на ритм сердца единого регуляторного механизма.

Использование критерия Кайзера в сочетании с интерпретацией графической формы Scree-plot у мужчин позволило выявить двухфакторную структуру взаимосвязи

параметров ВСП. В структуре фактора № 1 объединены сильные положительные факторные нагрузки Me, HF%, значимая положительная факторная нагрузка RMSSD, а также сильная отрицательная факторная нагрузка ЧСС и значимые отрицательные нагрузки LF/HF и Aмо (табл. 2). Необходимо отметить, что представленная структура фактора № 1 и принцип объединения перечисленных выше параметров в одну факторную группу имеют следующее физиологическое обоснование. Так, эффект блуждающего нерва на деятельность сердца в первую очередь проявляется тормозным влиянием на синоатриальный узел проводящей системы, что приводит к снижению ЧСС и удлинению продолжительности сердечного цикла. Это сопровождается увеличением медианного RR-интервала (Me). В то же время наблюдается рост RMSSD и HF% – классических маркеров парасимпатической активности. При этом закономерно снижается Aмо и показатель симпатико-парасимпатического равновесия LF/HF. Таким образом, результаты анализа позволяют заключить, что наблюдаемые взаимосвязи носят не случайный, а физиологически закономерный характер и все перечисленные выше показатели в совокупности отражают влияние на сердце блуждающего нерва. В связи с этим они объединены в одну обобщённую группу показателей (фактор № 1), интерпретируемую как группа маркеров парасимпатической активности. Также показано, что на фактор № 1 приходится 33,29 % общей дисперсии значений исследуемых показателей (табл. 3). Фактор № 2 имеет сильные положительные нагрузки у LF и HF при низких нагрузках всех остальных показателей и, соответственно, характеризуется как интегративный показатель вегетативной регуляции сердечной деятельности. При этом на долю фактора № 2 приходится 21,50 % всей дисперсии. Таким образом, общая дисперсия значений, приходящаяся на долю факторов № 1 и № 2, у мужчин составляет 54,79 %. Из результатов интерпретации двух факторных групп показателей следует, что у мужчин молодого возраста в состоянии физиологического покоя вегетативная регуляция сердца имеет интегративный характер с доминированием парасимпатической активности.

Таблица 2

Факторные нагрузки параметров ВСП у мужчин

Показатель ВСП	Фактор № 1	Фактор № 2
ЧСС, уд/мин	– 0,80 *	– 0,24
SDNN, мс	+ 0,44	– 0,21
RMSSD, мс	+ 0,59 *	– 0,24
LF/HF, у.е.	– 0,60 *	+ 0,38
LF, мс ²	+ 0,17	+ 0,90 *
HF, мс ²	+ 0,18	+ 0,90 *
LF%, %	– 0,41	+ 0,20
HF%, %	+ 0,76 *	– 0,32
Aмо, %	– 0,56 *	– 0,20
Me, с	+ 0,82 *	+ 0,21

Примечание (здесь и далее): * – факторные нагрузки $\geq \pm 0,55$

Таблица 3

Собственные значения и доля дисперсии двух факторов у мужчин

Фактор	Собственные значения факторов	Доля от общей дисперсии, %	Суммарная доля в общей дисперсии, %
1	3,33	33,29	54,79
2	2,15	21,50	

Результаты факторного анализа ВСР у женщин также позволили выделить два фактора взаимосвязи исследуемых показателей. Так, во время фолликулярной фазы менструального цикла в структуре фактора № 1 показатели RMSSD и SDNN имеют сильные положительные факторные нагрузки, у Me – значимая положительная нагрузка, а у Aпо и ЧСС значимая отрицательная нагрузка (табл. 4). Описанные взаимосвязи физиологически объяснимы: показатели парасимпатической активности (RMSSD, SDNN), объединенные в одном факторе, коррелируют со снижением ЧСС и удлинением кардиоинтервалов. В то же время, параметры LF и HF имеют сильные факторные нагрузки. Таким образом, у женщин в фолликулярную фазу менструального цикла перечисленные выше показатели формируют объединенный фактор № 1, сопряженный с активностью парасимпатических кардиальных центров. При этом фактор № 1 составляет 41,70 % общего разброса значений показателей ВСР (табл. 5). В структуре фактора № 2 наблюдается сильная отрицательная факторная нагрузка показателей симпатической активности (LF/HF, и LF%), значимая факторная нагрузка у ЧСС и LF на фоне значимой положительной нагрузки HF% и Me. Из описанной взаимосвязи параметров следует, что фактор № 2 может быть интерпретирован, как интегративный, обусловленный влиянием и симпатических, и парасимпатических нервных центров и объясняет 27,81 % всей дисперсии. Общая дисперсия значений, приходящихся на долю факторов № 1 и № 2, у женщин во время фолликулярной фазы менструального цикла составляет 69,51 %. На основании изложенных выше результатов можно заключить, что структура взаимосвязи параметров ВСР у женщин во время фолликулярной фазы менструального цикла и у мужчин сопоставима. В частности, наблюдается сбалансированный характер активности симпатических и парасимпатических кардиальных центров с преобладающим влиянием блуждающего нерва.

Таблица 4

Факторные нагрузки параметров ВСР у женщин во время фолликулярной фазы менструального цикла

Показатель ВСР	Фактор № 1	Фактор № 2
ЧСС, уд/мин	– 0,55 *	– 0,59 *
SDNN, мс	+ 0,84 *	– 0,39
RMSSD, мс	+ 0,88 *	– 0,32
LF/HF, у.е.	– 0,26	– 0,70 *
LF, мс ²	+ 0,77 *	– 0,56 *
HF, мс ²	+ 0,90 *	– 0,27
LF%, %	– 0,23	– 0,78 *
HF%, %	+ 0,33	+ 0,60 *
Aпо, %	– 0,67 *	– 0,14
Me, с	+ 0,55 *	+ 0,56 *

Таблица 5

Собственные значения и доля дисперсии двух факторов у женщин во время фолликулярной фазы менструального цикла

Фактор	Собственные значения факторов	Доля в общей дисперсии, %	Суммарная доля в общей дисперсии, %
1	4,17	41,70	69,51
2	2,78	27,81	

Во время лютеиновой фазы менструального цикла у женщин также были выделены два фактора взаимосвязи параметров. Однако качественная характеристика структуры сердечного ритма отличается от таковой во время фолликулярной фазы цикла и у мужчин. Так, по результатам анализа матрицы факторных нагрузок фактор

№ 1 идентифицирован как маркер активности парасимпатического отдела вегетативной нервной системы. В составе этой группы обнаружены сильные положительные факторные нагрузки у показателей RMSSD и SDNN, значимые положительные нагрузки у HF, HF% и Me. Сильные отрицательные нагрузки обнаружены у Aмо и значимые отрицательные нагрузки – у ЧСС и LF%. Доля дисперсии значений выборки параметров ВСР, приходящаяся на фактор № 1, равна 40,5 % (табл. 6, табл. 7). В структуре фактора № 2 выявлена сильная положительная нагрузка показателя LF, значимая положительная нагрузка LF/HF на фоне значимой отрицательной нагрузки HF. Поэтому фактор № 2 интерпретирован как показатель активности симпатического звена вегетативной регуляции сердечного ритма. Этот фактор составляет 27,50 % от общей дисперсии. Суммарная дисперсия значений ВСР, приходящаяся на долю факторов № 1 и № 2, равна 68,0 %.

Таблица 6
Факторные нагрузки параметров ВСР у женщин во время лютеиновой фазы менструального цикла

Показатель	Фактор № 1	Фактор № 2
ЧСС, уд/мин	– 0,68 *	– 0,18
SDNN, мс	+ 0,71 *	– 0,54
RMSSD, мс	+ 0,81 *	– 0,37
LF/HF, у.е.	– 0,50	+ 0,66 *
LF, мс ²	+ 0,07	+ 0,93 *
HF, мс ²	+ 0,57 *	– 0,58 *
LF%, %	– 0,58 *	– 0,52
HF%, %	+ 0,68 *	+ 0,53
Aмо, %	– 0,76 *	+ 0,22
Me, с	+ 0,69 *	+ 0,21

Таблица 7
Собственные значения и доля дисперсии двух факторов у женщин во время лютеиновой фазы менструального цикла

Фактор	Собственные значения факторов	Доля в общей дисперсии, %	Суммарная доля в общей дисперсии, %
1	4,05	40,50	68,00
2	2,75	27,50	

Результаты исследования подтверждают, что характер вегетативной регуляции сердечной деятельности в значительной степени зависит от пола испытуемых, а у женщин репродуктивного возраста также от фазы менструального цикла. В ряде научных исследований экспериментально доказано, что на фоне действия эстрогенов, концентрация которых преобладает в первую половину менструального цикла, отмечается преобладание активности парасимпатического звена регуляции, при этом одним из ключевых механизмов этого эффекта является эстроген-зависимое повышение возбудимости барорецепторов крупных артериальных сосудов [15–16]. Анализ абсолютных значений показателей ВСР в условиях физиологического покоя показал, что у мужчин влияние эффекта блуждающего нерва на сердце сильнее, чем у женщин в обе фазы цикла. При этом факторная структура показателей ВСР у мужчин и у женщин в фолликулярную фазу цикла сходна: определены две факторные группы, характеризующие парасимпатические (фактор № 1) и интегративные (фактор № 2) механизмы регуляции сердечного ритма.

У женщин в лютеиновую фазу менструального цикла, напротив, маркеры симпатических и парасимпатических влияний объединяются в разные факторы, что, вероятно, обусловлено увеличением степени участия симпатических центров в

регуляции деятельности сердца. Это может быть связано с повышением содержания эндогенного прогестерона, пик концентрации которого приходится на середину лютеиновой фазы. Таким образом, можно предположить, что гормональные изменения во время менструального цикла оказывают модулирующее влияние на функциональную активность вегетативных центров регуляции кардиоритма, что проявляется не только в изменении абсолютных значений показателей ВСР, но и в качественной перестройке структуры их взаимосвязей.

Выводы. У мужчин и у женщин в фолликулярную фазу менструального цикла факторная структура параметров ВСР сходна: факторная группа № 1 объединяет показатели парасимпатической активности, факторная группа № 2 – и интегративные влияния, что свидетельствует о ведущей роли блуждающего нерва в регуляции сердечной деятельности в условиях физиологического покоя. При этом у мужчин влияние на сердце блуждающего нерва более выражено, чем у женщин в фолликулярную фазу. У женщин в лютеиновую фазу, напротив, маркеры активности симпатического и парасимпатического звена регуляции образуют две отдельные факторные группы, что, вероятно, обусловлено увеличением степени участия симпатических кардиальных центров в регуляции деятельности сердца. Таким образом, качественная перестройка структуры взаимосвязей показателей ВСР свидетельствует о необходимости интерпретации ВСР у женщин с учётом фазы менструального цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щукина Е.В. Современный взгляд на вариабельность сердечного ритма в нейрокардиологии / Е.В. Щукина, И.В. Сарбаш // Актуальные проблемы медицины. – 2025. – Т. 48, № 2. – С. 166-182. – DOI: 10.52575/2687-0940-2025-48-2-166-182.
2. Спицин А.П. Корреляции между показателями тревожности и вариабельности сердечного ритма у студентов при интенсивной когнитивной деятельности / А.П. Спицин, О.В. Резцов, И.С. Княжев // Вятский медицинский вестник. – 2025. – № 1(85). – С. 55-60. – DOI: 10.24412/2220-7880-2025-1-55-60.
3. De Maria B. Day and night heart rate variability using 24-h ECG recordings: a systematic review with meta-analysis using a gender lens / B. De Maria [et al.] // Clinical Autonomic Research. – 2023. – Vol. 33, No. 6. – P. 821-841. – DOI: 10.1007/s10286-023-00969-3.
4. Беляева В.А. Анализ вариабельности сердечного ритма у студентов и школьников при ортостатическом тестировании / В.А. Беляева // Вестник новых медицинских технологий. – 2023. – № 1. – С. 80-84. – DOI: 10.24412/1609-2163-2023-1-80-84.
5. Временные и спектральные показатели вариабельности ритма сердца курсантов института гражданской авиации с разным типом локомоторной двигательной активности / А.И. Рязанцев [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Медицина. – 2025. – Т. 29, № 2. – С. 211-221. – DOI: 10.22363/2313-0245-2025-29-2-211-221.
6. Анфилов И.Ю. Вариабельность сердечного ритма студентов вуза разной физической подготовленности / И.Ю. Анфилов, Н.С. Туманова // Человек. Спорт. Медицина. – 2023. – Т. 23, № 1. – С. 37-43. – DOI: 10.14529/hsm230105.
7. Мирошников А.Б. Количественная оценка и номенклатура фаз менструального цикла у спортсменок: анализ классификаций / А.Б. Мирошников, А.Е. Анисимова // Российский журнал спортивной науки: медицина, физиология, тренировка. – 2025. – Т. 4, № 1(13). – DOI: 10.24412/2782-6570-2025_04_01_1.
8. Effects of menstrual cycle on hemodynamic and autonomic responses to central hypovolemia / V. Shankhwar [et al.] // Frontiers in Cardiovascular Medicine. – 2024. – Vol. 11. – DOI: 10.3389/fcvm.2024.1290703.
9. Heart rate variability measurements across the menstrual cycle and oral contraceptive phases in two Olympian female swimmers: a case report / M. Dupuit [et al.] // Sports. – 2025. – Vol. 13, No. 6. – DOI: 10.3390/sports13060185.
10. Устойчивость параметров суточной вариабельности сердечного ритма как паттерн функционального состояния немодифицируемых факторов ее формирования / И.И. Новиков, В.П. Кицышин, В.В. Салухов, П.В. Суржиков // Регионарное кровообращение и микроциркуляция. – 2025. – Т. 24, № 2. – С. 35-42. – DOI: 10.24884/1682-6655-2025-24-2-35-42.

11. Rowsthorn E. Factor analysis of multimodal MRI, biofluid, and vascular biomarkers reveals latent constructs of brain health / E. Rowsthorn [et al.] // *GeroScience*. – 2026. – Vol. 48, No. 2. – P. 1885-1903. – DOI: 10.1007/s11357-025-01771-x.
12. Ельникова О.Е. Особенности взаимосвязи регуляции кардиоритма и компонентов внутренней картины болезни у студентов / О.Е. Ельникова, А.В. Добрин // *Клиническая и специальная психология*. – 2024. – Т. 13, № 2. – С. 159-185. – DOI: 10.17759/cpse.2024130210.
13. Попова О.А. Разработка гибридного метода факторного анализа для неполного набора медицинских данных / О.А. Попова // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. – 2025. – № 91. – С. 87-103. – DOI: 10.21667/1995-4565-2025-91-87-103.
14. Мороз И.Н. Статистические гипотезы при проведении медико-биологических исследований / И.Н. Мороз, С.В. Власова // *Медицинский журнал*. – 2026. – № 1. – С. 121-134.
15. Bradykinin-mediated estrogen-dependent depressor response by direct activation of female-specific distribution of myelinated Ah-type baroreceptor neurons in rats / K.X. Li [et al.] // *CNS Neuroscience and Therapeutics*. – 2022. – Vol. 28, No. 3. – P. 435-447. – DOI: 10.1111/cns.13792.
16. Richey R.E. Exogenous estradiol increases cardiovagal baroreflex sensitivity during a hypertensive stimulus in premenopausal young women / R.E. Richey [et al.] // *American Journal of Physiology. Heart and Circulatory Physiology*. – 2025. – Vol. 329, No. 2. – P. 439-449. – DOI: 10.1152/ajpheart.00131.2025.

REFERENCES

1. Shchukina, E.V. & Sarbash, I.V. (2025) [Modern View on Heart Rate Variability in Neurocardiology]. *Aktual'nye problemy mediciny = Challenges in Modern Medicine*. 48 (2), 166-182, DOI: 10.52575/2687-0940-2025-48-2-166-182. (in Russian).
2. Spitsin, A.P., Reztsov, O.V. & Knyazhev, I.S. (2025) [Correlations between indicators of anxiety and heart rate variability in students with intensive cognitive activity]. *Vyatskij medicinskij vestnik = Medical newsletter of Vyatka*. 2 (1), 55-60, DOI: 10.24412/2220-7880-2025-1-55-60. (in Russian).
3. De Maria, B., Parati, M., Dalla Vecchia, L.A. & La Rovere, M.T. (2023) Day and night heart rate variability using 24-h ECG recordings: a systematic review with meta-analysis using a gender lens. *Clinical autonomic research*. 33(6), 821-841, DOI: 10.1007/s10286-023-00969-3.
4. Belyaeva, V.A. (2023) [Analysis of heart rate variability in students and schoolchildren during orthostatic testing]. *Vestnik novyh medicinskih tehnologij = Journal of new medical technologies*. 1, 80-84, DOI: 10.24412/1609-2163-2023-1-80-84. (in Russian).
5. Ryazancev, A.I., Grebennikov, E.K., Grebennikova, I.N., Sorokin, O.V. & Subotyalov, M.A. (2025) [Civil aviation institute cadet's temporal and spectral indices of heart rate variability engaged different types of locomotor activity]. *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Medicina = RUDN Journal of Medicine*. 29 (2), 211-221, DOI: 10.22363/2313-0245-2025-29-2-211-221. (in Russian).
6. Anfilatov, I.Yu. & Tumanova, N.S. (2023) [Heart rate variability in university students with different levels of physical fitness]. *Chelovek. Sport. Medicina = Human. Sport. Medicine*. 23 (1). 37-43, DOI: 10.14529/hsm230105. (in Russian).
7. Miroshnikov, A.B. & Anisimova, A.E. (2025) [Quantitative assessment and nomenclature of phases of the menstrual cycle in athletes: analysis of classifications]. *Rossijskij zhurnal sportivnoj nauki: medicina, fiziologiya, trenirovka = Russian Journal of Sports Science: Medicine, Physiology, Training*. 1 (13), DOI: 10.24412/2782-6570-2025_04_01_1. (in Russian).
8. Shankhwar, V., Urvec, J., Steuber, B., Schmid Zalaudek, K., Saloň, A., Hawliczek, A., Bergauer, A., Aljasmí, K., Abdi, A., Naser, A., Himeidi, M., Alsuwaidi, H., Du Plessis, S., Alsheikh-Ali, A., Kellett, C., Bayoumi, R., Blaber, A.P. & Goswami, N. (2024) [Effects of menstrual cycle on hemodynamic and autonomic responses to central hypovolemia]. *Frontiers in Cardiovascular Medicine*. 1 (11), DOI: 10.3389/fcvm.2024.1290703.
9. Dupuit, M., Barlier, K., Tranchard, B., Toussaint, J.F., Antero, J. & Pla, R. (2025) [Heart rate variability measurements across the menstrual cycle and oral contraceptive phases in two olympian female swimmers: a case report]. *Sports*. 13(6), DOI: 10.3390/sports13060185.
10. Novikov, I.I., Kitsyshin, V.P., Salukhov, V.V. & Surzhikov, P.V. (2025) [Stability of parameters of daily heart rate variability as a pattern of the functional state of unmodifiable factors of its formation]. *Regionarnoe krovoobrashchenie i mikrocirkulyaciya = Regional blood circulation and microcirculation*. 24(2), 35-42, DOI: 10.24884/1682-6655-2025-24-2-35-42. (in Russian).
11. Rowsthorn, E., Sim, M.A., O'Brien, W.T., McDonald, S.J., Franks, K., Sinclair, B., Chong, T.T., Yiallourou, S., Cavuoto, M., Vivash, L., O'Brien, T.J., Shao, X., Wang, D.J.J., Law, M., Harding, I.H. & Pase, M.P. (2026) [Factor analysis of multimodal MRI, biofluid, and vascular biomarkers reveals latent constructs of brain health]. *Geroscience*. 48(2), 1885-1903, DOI: 10.1007/s11357-025-01771-x.

12. Elnikova, O.E. & Dobrin, A.V. (2024) [Features of the relationship between cardiorhythm regulation and components of internal picture of disease in students]. *Klinicheskaya i spetsial'naya psikhologiya = Clinical Psychology and Special Education*. 13(2), 159-185, DOI: 10.17759/cpse.2024130210. (in Russian).
13. Popova, O.A. (2025) [Development of hybrid factor analysis method for small medical data set]. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Ryazan state radioengineering university*. 91, 87-103, DOI: 10.21667/1995-4565-2025-91-87-103. (in Russian).
14. Moroz, I.N., & Vlasova, S.V. (2026) [Statistical hypotheses in biomedical research]. *Meditsinskij zhurnal = Medical Journal*. 1, 121-134. (in Russian).
15. Li, K.X., Feng, Y., Fan, X.X., Sun, X., Li, Y., Wu, D., Liu, L., Cui, C.P., Xiong, X., Li, H.D., Zhou, M., Ma, H.L., Liu, Y., Zhang, R. & Li, B.Y. (2022) [Bradykinin-mediated estrogen-dependent depressor response by direct activation of female-specific distribution of myelinated Ah-type baroreceptor neurons in rats]. *CNS Neuroscience & Therapeutics*. 28 (3), 435-447, DOI: 10.1111/cns.13792.
16. Richey, R.E., Miner, J.A., Miner, J.C., Brunt, V.E., Kaplan, P.F., Halliwill, J.R. & Minson, C.T. (2025) [Exogenous estradiol increases cardiovagal baroreflex sensitivity during a hypertensive stimulus in premenopausal young women]. *American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology*. 329 (2), 439-449, DOI: 10.1152/ajpheart.00131.2025.

FACTOR ANALYSIS OF HEART RATE VARIABILITY DEPENDING ON SEX IN YOUNG ADULTS

D.A. Skorpupkin, E.K. Golubeva, T.M. Nikolaeva

The factor structure of the relationships among heart rate variability (HRV) parameters was studied in 50 men and 50 women aged 18–20 years. The women were examined during the follicular and luteal phases of the menstrual cycle. It was found that in men and in women during the follicular phase, the factor structure of HRV was similar. Two groups of factors were identified, reflecting parasympathetic (No. 1) and integrative influences on heart rhythm (No. 2). The leading role of the vagus nerve in the regulation of resting HRV was demonstrated, which was more pronounced in men. In women during the luteal phase of the cycle, markers of sympathetic and parasympathetic activity form two distinct factor groups, likely due to the increased influence of sympathetic centers on heart rhythm.

Keywords: heart rate variability; autonomic nervous system; factor analysis; sex differences; menstrual cycle.

Поступила в редакцию 25.05.2026 г.

Скорлупкин Дмитрий Андреевич

Ассистент кафедры нормальной физиологии, Ивановский государственный медицинский университет, г. Иваново, Россия.

E-mail: sk_dmit96@mail.ru

ORCID: 0009-0001-2586-6711

SPIN-код: 5232-5682

Skorpupkin Dmitry Andreevich

Assistant of the department of normal physiology, Ivanovo State Medical University, Ivanovo, Russia.

Голубева Елена Константиновна

Доктор медицинских наук, профессор кафедры нормальной физиологии, доцент, Ивановский государственный медицинский университет, г. Иваново, Россия.

E-mail: elkgol@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-0664-4742

SPIN-код: 1750-0121

Golubeva Elena Konstantinovna

Doctor of medical sciences, professor of the department of normal physiology, associate professor, Ivanovo State Medical University, Ivanovo, Russia.

Николаева Татьяна Михайловна

Старший преподаватель кафедры патофизиологии и иммунологии, Ивановский государственный медицинский университет, г. Иваново, Россия.

E-mail: tania020480@yandex.ru

ORCID: 0000-0003-1877-0196

SPIN-код: 4062-2729

Nikolaeva Tatiana Mikhailovna

Senior lecturer of the department of pathophysiology and immunology, Ivanovo State Medical University, Ivanovo, Russia.

СУБХРОНИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ L-КАРНИТИНА УЛУЧШАЕТ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СКЕЛЕТНОЙ МЫШЦЫ БЫСТРОГО ТИПА В ЭКСПЕРИМЕНТАХ НА КРЫСАХ

© 2026. В. В. Труш, В. И. Соболев

На крысах изучена эффективность L-карнитина (100 мг/кг/сутки, внутривентрально, на протяжении 10, 30 и 60 суток) в улучшении функциональных параметров *m. tibial anterior*.

Субхроническое введение L-карнитина достоверно ($p < 0,05$ относительно контроля) повышает устойчивость мышцы к утомлению и ускоряет восстановление ее сократительной функции после интенсивной нагрузки и через 30–60 суток применения обеспечивает улучшение параметров тетанического сокращения: увеличение скорости развития тетануса (на 46–163 %), силы тетанического сокращения (на 163–295 %), продолжительности максимальной (на 49–55 %) и субмаксимальной (на 65–69 %) работоспособности и сокращение послететанического полурасслабления (на 55–57 %). Полученные данные позволяют рассматривать L-карнитин как перспективное средство повышения работоспособности мышц и ускорения их восстановления после нагрузок.

Ключевые слова: скелетная мышца; мышечное сокращение; мышечная работоспособность; L-карнитин; крысы.

Введение. В последние годы одним из наиболее активно развивающихся направлений современной медицины является метаболическая терапия, ориентированная на восстановление нарушенных обменных процессов при различных патологических состояниях. Особое внимание уделяется коррекции клеточного энергетического обмена, поскольку вторичные митохондриальные дисфункции сопровождают широкий спектр заболеваний и существенно влияют на их течение и прогноз.

Среди препаратов метаболического действия особый интерес представляют L-карнитин и его ацетилированная форма — ацетил-L-карнитин. Эти соединения являются естественными компонентами организма, обладают благоприятным профилем безопасности и рассматриваются в качестве перспективных средств комплексной терапии заболеваний, сопровождающихся нарушением митохондриального метаболизма. В настоящее время показана эффективность карнитина при различных поражениях центральной и периферической нервной системы, включая гипоксически-ишемические повреждения мозга, черепно-мозговую травму, болезнь Альцгеймера, нейромышечные заболевания, а также патологии сердечно-сосудистой системы, печени и почек.

L-карнитин представляет собой эндогенное соединение, близкое по биологическим свойствам к витаминам группы В и выполняющее важнейшую функцию в энергетическом обеспечении клетки [1]. Основной его резерв (около 90–95 %) локализован в скелетной мускулатуре [2], что обуславливает особую чувствительность мышечной ткани к изменениям карнитинового обмена.

Физиологическая роль карнитина связана, прежде всего, с транспортом длинноцепочечных жирных кислот через внутреннюю мембрану митохондрий, где осуществляется их β -окисление и образование АТФ. Благодаря этому препарат рассматривается как эффективный энерготропный агент, способствующий поддержанию клеточного энергетического гомеостаза [3, 4].

Наряду с участием в энергетическом обмене L-карнитин характеризуется широким спектром биологических эффектов. В экспериментальных и клинических

исследованиях показаны его антиоксидантные [5, 6], антигипоксические [7], мембранопротекторные [8], дезинтоксикационные, гиполипидемические и антиапоптотические свойства [5, 9, 10]. Кроме того, карнитин способствует сохранению функциональной активности митохондрий [8], регулирует работу пируватдегидрогеназного комплекса, улучшает утилизацию углеводов и препятствует развитию лактатацидоза при интенсивном энергетическом обмене [11].

Большинство экспериментальных исследований свидетельствует о выраженном защитном действии L-карнитина на нервно-мышечный аппарат, особенно при состояниях, сопровождающихся вторичной митохондриальной недостаточностью. Показано, что введение препарата замедляет возрастную дегенерацию мышечных волокон II типа, уменьшает выраженность денервационных изменений и ускоряет процессы реиннервации [12, 13]. Клинические исследования также демонстрируют способность карнитина улучшать функциональное состояние скелетных мышц и препятствовать уменьшению их массы у пациентов, находящихся на гемодиализе [14].

Несмотря на значительное количество экспериментальных и клинических исследований, посвящённых применению L-карнитина, его влияние на функциональные свойства скелетных мышц, в частности на их работоспособность и устойчивость к утомлению, до настоящего времени оценивается неоднозначно.

Цель исследования состояла в оценке влияния субхронического введения L-карнитина в дозе 100 мг/кг/сут, эквивалентной умеренной терапевтической дозе для человека в 1,5 г/сутки, на протяжении 10–60 суток на функциональное состояние скелетной мышцы с преобладанием гликолитических волокон (*m. tibialis anterior*).

Методика. Экспериментальная часть работы выполнена в соответствии с требованиями «Руководства по проведению доклинических исследований лекарственных средств» [15]. Содержание лабораторных животных осуществлялось в виварии кафедры физиологии человека и животных Донецкого государственного университета при стандартных условиях: температура воздуха поддерживалась на уровне 22 °С, режим освещения соответствовал циклу 12 ч свет / 12 ч темнота. Животные имели неограниченный доступ к питьевой воде и стандартному корму. Все этапы эксперимента, включая содержание животных, проведение исследований и эвтаназию, соответствовали положениям Европейской конвенции по защите позвоночных животных, используемых в научных целях (Директива 86/609/ЕЕС).

Объектом исследования служили 40 половозрелых самок крыс возрастом 4–5 месяцев с исходной массой тела 190–200 г. После рандомизации животных распределили на две группы: контрольную (n = 10), в которую вошли интактные животные, не подвергавшиеся каким-либо экспериментальным воздействиям, и опытную (n = 30), получавшую L-карнитин (L-CAR). В качестве исследуемого препарата использовали L-карнитин («Элькар», ООО «ПИК-ФАРМА», Россия), который вводили внутривентрально один раз в сутки в дозе 100 мг/кг. Продолжительность введения составляла 10, 30 или 60 суток. В зависимости от длительности курса опытную группу впоследствии разделили на три подгруппы по 10 животных: L-CAR-10, L-CAR-30 и L-CAR-60.

После завершения соответствующего курса введения препарата у животных под общей анестезией (тиопентал натрия, 100 мг/кг, внутривентрально) проводили острый эксперимент. В ходе исследования определяли электрофизиологические и эргометрические характеристики передней большеберцовой мышцы (*m. tibialis anterior*) с использованием методических подходов, подробно описанных ранее [16].

По окончании эксперимента животных выводили из опыта в состоянии глубокой анестезии путем внутривентрального введения тиопентала натрия в летальной дозе (300 мг/кг).

Статистическая обработка данных. Статистический анализ результатов выполняли с использованием программного пакета *Statistica 7.0*. Перед проведением параметрического анализа оценивали соответствие распределения количественных показателей нормальному закону с помощью критерия Шапиро—Уилка. При подтверждении нормальности распределения различия между группами анализировали с использованием t-критерия Стьюдента, а также F-критерия при проверке статистических гипотез. Различия считали статистически значимыми при уровне вероятности $p < 0,05$. Все количественные показатели представлены в виде средней арифметической величины и стандартной ошибки среднего ($M \pm m$).

Результаты и обсуждение. Субхроническое введение L-карнитина парентеральным путем сопровождалось изменением как исходных электрофизиологических и сократительных характеристик исследуемой мышцы, так и ее функционального ответа на утомляющую нагрузку.

Эффекты L-карнитина на электрические и сократительные параметры m. tibialis anterior. Уже спустя 10 суток после начала введения препарата выявлялись статистически значимые отличия от контрольной группы ($p < 0,05$): латентный период М-ответа сокращался на 13,1 %, а его амплитуда увеличивалась более чем в два раза (на 108,2 %), при этом продолжительность М-ответа оставалась неизменной (табл. 1). Данные изменения сохранялись на протяжении всего периода наблюдения, составлявшего 60 суток.

Таблица 1

Средние значения ($\bar{X} \pm m$) некоторых параметров М-ответа¹, массы и количества активируемых двигательных единиц² *m. tibialis anterior* крыс контрольной группы и животных, получавших L-карнитин (L-CAR)

Группа животных	Параметры М-ответа			Количество активируемых двигательных единиц	Масса мышцы, мг
	Латентный период, мс	Амплитуда, мВ	Длительность, мс		
К	1,2±0,05	2,6±0,22 (-36±8,4•)	5,5±0,51 (+38±3,9•)	14,1±1,21 (-26±2,0•)	399,8±6,81
L-CAR-10	1,1±0,04 [-13*]	6,0±0,83 (-42±5,1•), [+108*]	4,8±0,64 (52±6,1•)	12,6±1,17	438,0±22,80
L-CAR-30	1,1±0,03 [-12*]	4,4±0,25 (-43±5,2•), [+53*]	5,7±0,69 (+44±3,2•)	19,4±1,98 [+37*]	477,3±18,77 [+19*]
L-CAR-60	1,1±0,03 [-12*]	4,2±0,37 (-38±4,7•), [+45*]	5,4±1,01 (+50±4,4•)	19,7±1,73 [+39*]	535,2±16,06 [+34*]

Примечания: ¹ – одиночный М-ответ *m. tibialis anterior* вызывали путем стимуляции электрическим током малоберцового нерва с частотой 0,2 имп/с до и после выполнения мышцей утомляющей нагрузки; ² – количество активируемых двигательных единиц определяли по методике Galea V. [17]; * – в квадратных скобках указана статистически значимая разница показателя относительно соответствующего значения контрольной группы (в %, $p < 0,05$); • – в круглых скобках указана статистически значимая разница показателя после выполнения утомляющей нагрузки относительно исходного значения соответствующей группы (в %, $p < 0,05$).

Статистически значимое сокращение латентного периода М-ответа у животных всех L-CAR-групп, вероятнее всего, обусловлено комплексом механизмов, включающих повышение возбудимости мышечных волокон, улучшение проведения возбуждения по двигательным нервам, а также оптимизацию процессов нервно-мышечной передачи. Косвенным подтверждением более эффективного сопряжения процессов возбуждения и сокращения под влиянием L-карнитина служит выявленное у животных опытных групп уменьшение латентного периода одиночного мышечного

сокращения: через 30 и 60 суток введения препарата этот показатель оказался на 13–24 % меньше контрольных значений ($p < 0,05$; табл. 2). Подобные изменения могут отражать ускорение распространения возбуждения по внутримышечным ветвям нервных волокон и повышение эффективности механизмов электромеханического сопряжения в мышечных волокнах.

Таблица 2

Средние значения ($\bar{X} \pm m$) параметров одиночного сокращения мышцы контрольных животных и крыс, получавших L-карнитин (L-CAR)

Группа животных	Амплитуда, мм	Латентный период, мс	Длительность активного состояния мышцы, мс	Скорость укорочения, мм/с	Скорость расслабления, мм/с
К	3,0±0,22, (-24±2,2●)	11,2±0,57, (+43±7,5●)	47,9±1,99, (-14±3,5●)	103,6±5,23	54,7±4,21
L-CAR-10	2,7±0,30	11,4±0,29, (+12±1,6●)	43,4±2,91	95,7±4,32	51,9±4,00
L-CAR-30	3,2±0,29	9,7±0,33, (20±3,1●), [-13*]	46,8±2,50	109,1±9,05	51,3±5,06
L-CAR-60	3,1±0,38	8,5±0,34, (+24±2,2●), [-24*]	50,8±1,35	117,0±12,14	50,3±3,12

Примечания: * – в квадратных скобках указана статистически значимая разница показателя относительно соответствующего значения контрольной группы (в %, $p < 0,05$); ● – в круглых скобках указана статистически значимая разница показателя относительно исходного значения соответствующей группы (в %, $p < 0,05$).

Следует отметить, что сокращение латентного периода одиночного сокращения происходило без существенных изменений остальных его характеристик. Амплитуда одиночного сокращения, продолжительность активного состояния мышцы, а также скорость фаз укорочения и расслабления оставались сопоставимыми с контрольными величинами (табл. 2), что свидетельствует об эффекте L-карнитина преимущественно на скорость реализации одиночного сократительного ответа.

В пользу способности карнитина улучшать синхронизацию возбуждения и сокращения в периферическом звене нервно-мышечного аппарата свидетельствует обнаруженная другими специалистами [18] его способность облегчать синтез ацетилхолина в холинергических синапсах и оказывать частичное холиномиметическое действие, а также наблюдаемое в нашем эксперименте выраженное облегчение синаптической передачи на фоне повышенной амплитуды исходного М-ответа при отсутствии признаков синаптической депрессии у части особей L-CAR-групп при оптимальной частоте стимуляции нервно-мышечного аппарата (30 имп/с, см. табл. 2). Причем наибольшая частота регистрации выраженного облегчения синаптической передачи при оптимальном режиме стимуляции малоберцового нерва (30 имп/с) отмечалась спустя 30 дней введения L-карнитина (у 50 % особей L-CAR-30-группы), и средняя по L-CAR-30-группе степень облегчения синаптической передачи превосходила 30 % и значимо превышала таковую контроля ($p < 0,05$, см. табл. 3).

Вероятно, выявленное облегчение синаптической передачи обусловлено положительным влиянием L-карнитина на функционирование синаптического аппарата. Такой эффект может быть связан как с его холиномиметическими свойствами, так и со способностью активировать процессы синтеза и обратного захвата ацетилхолина в холинергических окончаниях, что согласуется с данными других исследователей [19]. Примечательно, что после выполнения утомляющей нагрузки облегчение синаптической передачи не регистрировалось ни у одного животного, получавшего L-карнитин (табл. 3). Вместе с тем, в отличие от контрольной группы, амплитуда М-ответов после нагрузки у этих животных не снижалась по сравнению с

исходными значениями (табл. 1). Это позволяет предположить, что физическое утомление сопровождалось уменьшением пула ацетилхолина, доступного для немедленного высвобождения из пресинаптических терминалей малоберцового нерва, вследствие чего исчезал ранее наблюдавшийся облегчающий эффект L-карнитина на синаптическую передачу. Но в то же время сохранение амплитуды М-ответов после утомляющей нагрузки свидетельствует о наличии достаточных функциональных резервов синаптического аппарата, обеспечивающих эффективную нервно-мышечную передачу даже после утомляющего воздействия.

Таблица 3

Средние значения ($\bar{X} \pm m$) амплитуды М-ответа и степени ее изменения при разных частотах стимуляции малоберцового нерва в мышце контрольных животных и крыс, получавших L-карнитин (L-CAR)

Группа животных	Частота стимуляции – 30 имп/с			Частота стимуляции – 70 имп/с	
	Амплитуда 1-го М-ответа, мВ	Степень облегчения (в % относительно 1-го М-ответа) / % особей в группе с облегчением более 30%	Степень депрессии (снижение амплитуды М-ответов в % относительно 1-го)	Амплитуда 1-го М-ответа, мВ	Степень изменения амплитуды М-ответа (в % относительно 1-го М-ответа) при достижении максимальной амплитуды тетануса
К	2,4±0,21	11,1±2,86 / 0	-5,7±2,58	2,4±0,23	-11,8±4,59
L-CAR-10	5,3±0,69, [+102*]	27,0±8,41 / 20	-0,6±0,61	5,7±0,92, [+138*]	10,3±5,21°
L-CAR-30	4,2±0,53, [+59*]	38,1±8,56° / 50	-6,1±3,51	3,9±0,45, [+63*]	15,2±4,23°
L-CAR-60	3,9±0,30, [+48*]	26,3±7,69 / 30	-9,8±5,00	3,4±0,47, [+61*]	14,8±5,55°

Примечания: Степень облегчения и депрессии синаптической передачи оценивалась на основании максимально возможного прироста (в %) и снижения (в %) амплитуды М-ответов относительно 1-го при ритмической стимуляции нервно-мышечного аппарата с частотой 30 имп/с [20]; * – в квадратных скобках указана статистически значимая разница показателя относительно контрольной группы (в %, $p < 0,05$); ° – указано статистически значимое ($p < 0,05$) изменение амплитуды М-ответа при соответствующих режимах стимуляции малоберцового нерва относительно такового контроля.

При продолжительном введении препарата (30–60 суток) отмечалось не только стойкое повышение амплитуды М-ответа, но и увеличение массы *m. tibialis anterior* (на 19,4–33,9 %) и количества активируемых двигательных единиц (на 37,2–39,4 %) по сравнению с контролем ($p < 0,05$) (табл. 1). Полученные результаты позволяют предположить, что длительное применение L-карнитина способствует развитию гипертрофических изменений мышечных волокон.

Представленные данные согласуются с результатами ранее выполненных экспериментальных исследований, в которых продолжительное введение L-карнитина сопровождалось увеличением массы скелетных мышц у лабораторных животных [21]. Сходные эффекты описаны и в исследованиях на людях. Так, Sawicka A.K. и соавт. [22] установили, что длительный прием L-карнитина у человека ассоциируется с достоверным увеличением мышечной массы.

Эффекты L-карнитина на скорость восстановления электрических и сократительных ответов m. tibialis anterior после утомляющей нагрузки. Введение L-карнитина сопровождалось рядом особенностей изменения электрофизиологических и механических характеристик скелетной мышцы в условиях развития утомления и в восстановительном периоде. Несмотря на сопоставимое с контрольной группой снижение амплитуды М-ответов после утомляющей нагрузки, у животных, получавших L-карнитин, наблюдалось более выраженное увеличение их длительности ($p < 0,05$). При

этом число активируемых двигательных единиц практически не изменялось относительно исходных значений, тогда как в контрольной группе этот показатель достоверно уменьшался (на 26 %, $p < 0,05$ относительно исходного значения, см. табл. 1). Это свидетельствует о сохранении активности большей части моторных единиц после утомляющей нагрузки под влиянием L-карнитина.

Дополнительным подтверждением защитного действия препарата являлось отсутствие характерного для контроля снижения амплитуды одиночного мышечного сокращения и продолжительности активного состояния мышцы после выполнения утомляющей нагрузки (см. табл. 2). Наряду с этим замедление процесса расслабления мышцы после нагрузки у животных экспериментальных групп было значительно менее выраженным, по сравнению с контролем ($p < 0,05$; см. табл. 2). Совокупность полученных данных позволяет предположить, что под действием L-карнитина после утомляющей нагрузки из работы выключалось меньшее количество мышечных волокон, что обеспечивало более высокую устойчивость нервно-мышечного аппарата к развитию утомления и способствовало ускоренному восстановлению его функционального состояния.

Еще одной характерной особенностью животных, получавших L-карнитин, являлась реакция нервно-мышечного аппарата на высокочастотную стимуляцию (70 имп/с). В отличие от контрольной группы, где при достижении максимальной амплитуды тетанического сокращения регистрировалось некоторое уменьшение амплитуды М-волны относительно исходного уровня, у животных экспериментальных групп этот показатель, напротив, возрастал и превышал амплитуду первого М-ответа серии ($p < 0,05$), а степень изменения амплитуды М-ответов у животных опытных групп значимо отличалась от таковой контроля ($p < 0,05$, см. табл. 3). Подобная динамика может быть обусловлена компенсаторной активацией Na^+/K^+ -АТФазы в ответ на длительную деполяризацию мембраны мышечных волокон, сопровождающейся их последующей гиперполяризацией. Вероятно, улучшение энергетического обеспечения мышечной ткани под влиянием L-карнитина создает благоприятные условия для функционирования механизмов активного транспорта ионов, включая работу Na^+/K^+ -насоса в период интенсивной деполяризации. Такое предположение согласуется с результатами исследований других специалистов [23, 24], показавших способность экзогенного ацетил-L-карнитина повышать активность Na^+/K^+ -АТФазы в нервных волокнах.

Эффекты L-карнитина на параметры тетанического сокращения m. tibialis anterior. Субхроническое применение L-карнитина сопровождалось выраженным улучшением характеристик тетанического сокращения скелетной мышцы. После 30 и 60 суток введения препарата регистрировалось статистически значимое, по сравнению с контролем ($p < 0,05$), увеличение амплитуды тетануса, а также повышение скорости его развития (см. табл. 4). Наряду с этим уже через 10 дней после начала введения L-карнитина отмечалось достоверное сокращение периода полурасслабления мышцы после тетанического сокращения, которое сохранялось на протяжении всего двухмесячного периода наблюдения ($p < 0,05$ относительно контроля; см. табл. 4).

Вероятно, ускорение послететанического расслабления обусловлено положительным влиянием L-карнитина на энергетический обмен в мышечной ткани, что способствует уменьшению выраженности лактатацидоза, возникающего при интенсивной физической нагрузке. Дополнительным механизмом данного эффекта могут служить описанные в литературе свойства карнитина, включающие улучшение восстановления скелетных мышц после нагрузки благодаря вазодилатирующему и антиоксидантному действию, а также стимуляции продукции тромбоцитарного фактора роста тромбоцитами [25, 26].

Таблица 4

Средние значения ($\bar{X} \pm m$) параметров тетанического сокращения мышцы контрольных животных и крыс, получавших карнитин (L-CAR), при внешней нагрузке 70 г

Группа животных	Параметры тетанического сокращения			
	Амплитуда, мм	Время достижения максимальной амплитуды, с	Скорость развития, мм/с	Время полурасслабления, мс
К	13,8±1,13	2,9±0,24	4,8±0,32	130,0±13,9
L-CAR-10	9,9±1,14	2,8±0,34	3,5±0,29	93,0±8,52, [-28*]
L-CAR-30	18,7±1,98, [+90*]	3,1±0,29	6,1±0,49, [+81*]	59,0±6,71, [-55*]
L-CAR-60	18,0±1,92, [+83*]	3,1±0,31	5,7±0,41, [+70*]	55,8±5,97, [-57*]

Примечания: * – различия статистически значимы относительно соответствующего значения контрольной группы ($p < 0,05$).

Как уже было описано ранее, длительное введение L-карнитина практически не влияло на амплитудно-временные характеристики одиночного мышечного сокращения. Вместе с тем, препарат существенно улучшал параметры тетанического сокращения и функциональные показатели работоспособности мышцы. Через 30–60 дней применения L-карнитина по сравнению с контрольной группой наблюдалось достоверное увеличение силы тетанического сокращения в 2,6–3,95 раза ($p < 0,05$), повышение величины выполняемой мышцей внешней работы на 59–77 %, а также удлинение периодов максимальной и субмаксимальной работоспособности соответственно на 49–55 % и 65–69 % (см. табл. 5).

Таблица 5

Средние значения ($\bar{X} \pm m$) силовых и временных параметров тетанического сокращения мышцы контрольных животных и крыс, получавших L-карнитин (L-CAR), в момент выполнения утомляющей работы

Группа животных	Сила, мН	Внешняя работа, мДж	Продолжительность работоспособности, с	
			максимальной	субмаксимальной
К	0,8±0,10	6,6±0,81	3,6±0,39	9,2±1,08
L-CAR-10	0,8±0,09	6,5±0,67	4,9±0,61	13,6±2,04
L-CAR-30	2,1±0,23, [+163*]	11,7±0,32, [+77*]	5,7±0,36, [+55*]	15,2±1,07, [+65*]
L-CAR-60	3,2±0,31, [+295*]	10,5±1,28, [+59*]	5,4±0,65, [+49*]	15,6±1,18, [+69*]

Примечания: * – в квадратных скобках указана статистически значимая разница показателя относительно контрольной группы (в %, $p < 0,05$).

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что субхроническое введение L-карнитина преимущественно повышает функциональные возможности мышцы при выполнении интенсивной работы, улучшая скоростно-силовые характеристики тетанического сокращения, ускоряя восстановление после него и увеличивая устойчивость мышечной ткани к продолжительной нагрузке.

Обсуждение результатов. Проведенное исследование показало, что субхроническое введение L-карнитина в дозе 100 мг/кг/сут на протяжении 30–60 суток сопровождается выраженным улучшением функционального состояния нервно-мышечного аппарата. Применение препарата способствовало повышению синхронизации процессов возбуждения и сокращения мышечных волокон, улучшению силовых и скоростных характеристик тетанического сокращения, увеличению продолжительности периодов максимальной и субмаксимальной работоспособности, а также ускорению восстановления мышцы после утомляющей нагрузки.

Следует отметить, что литературные данные о влиянии L-карнитина на физическую работоспособность и выносливость остаются неоднозначными. Одни авторы сообщают о выраженном эргогенном эффекте препарата [27, 28], тогда как другие отмечают лишь умеренное улучшение [29] либо не выявляют статистически значимых изменений [30, 31]. Вероятной причиной таких расхождений являются различия в схемах применения L-карнитина, его дозировках, длительности курса, способах введения, интенсивности физических нагрузок и физиологическом состоянии испытуемых.

Так, в ряде экспериментальных исследований на животных отсутствие положительного влияния препарата на физическую работоспособность наблюдалось преимущественно при использовании кратковременных схем введения или относительно низких доз L-карнитина [32]. Напротив, клинические исследования свидетельствуют, что как краткосрочный прием 3–4 г L-карнитина за 60–90 минут до интенсивной физической нагрузки, так и длительное применение препарата в дозе 2–2,72 г/сут в течение 9–24 недель способствуют улучшению результатов высокоинтенсивных тренировок, тогда как влияние на показатели умеренной физической активности выражено значительно слабее [33]. Аналогичные выводы были получены и в метаанализе 11 исследований, согласно которому длительный прием L-карнитина (1–4 г/сут в течение 12–24 недель) повышал содержание карнитина в скелетных мышцах, способствовал увеличению мышечной массы и улучшению переносимости физических нагрузок, хотя достоверного влияния на мышечную силу у здоровых пожилых женщин выявлено не было [22].

Полученные в нашем исследовании результаты согласуются с современными представлениями о механизмах действия L-карнитина. Известно, что препарат оптимизирует энергетический обмен, усиливая транспорт длинноцепочечных жирных кислот в митохондрии и повышая эффективность аэробного синтеза АТФ. Кроме того, L-карнитин ограничивает накопление ацетил-КоА и лактата, снижает выраженность метаболического ацидоза, уменьшает интенсивность оксидативного стресса и способствует сохранению структурной целостности клеточных мембран [8, 34, 35]. Показано его протективное влияние на митохондриальный аппарат [8, 35, 36] и способность снижать выраженность апоптотических процессов благодаря активации антиоксидантной системы [5, 10].

Немаловажное значение имеет и анаболическое действие L-карнитина. По данным экспериментальных исследований, препарат способствует развитию гипертрофии мышечных волокон при физических нагрузках [37], уменьшает выраженность протеолиза, повышает аэробную производительность и замедляет развитие утомления [38, 39]. Сохранение аминокислотного пула вследствие уменьшения их использования в энергетическом обмене создает более благоприятные условия для синтеза мышечных белков [34]. В экспериментах на животных установлено, что применение карнитина во время тренировок сопровождается меньшей выраженностью протеолиза по сравнению с обычной физической нагрузкой [40].

Дополнительным механизмом повышения работоспособности может служить ускорение процессов восстановления мышечной ткани после нагрузки. Установлено, что применение L-карнитина сопровождается снижением концентрации в крови биохимических маркеров повреждения мышц, включая креатинкиназу, миоглобин и лактатдегидрогеназу, а также повышением экспрессии андрогеновых рецепторов и уменьшением выраженности оксидативного стресса, что создает более благоприятные условия для репарации мышечной ткани [34, 40, 41].

Следует учитывать и сосудистый компонент действия препарата. Показано, что L-карнитин способен улучшать эндотелий-зависимую регуляцию сосудистого тонуса,

увеличивая кровоснабжение работающих мышц. В экспериментах на собаках повышение сократительной силы мышц сопровождалось усилением локального кровотока даже без увеличения содержания карнитина в мышечной ткани, что свидетельствует о существенном вкладе сосудистых механизмов в реализацию его физиологических эффектов [42, 43].

Полученные нами результаты согласуются и с современными экспериментальными исследованиями. Так, при введении крысам L-карнитина в дозе 100 мг/кг в течение 21 суток на фоне принудительного плавания отмечалось уменьшение выраженности структурных повреждений как быстрых, так и медленных скелетных мышц, снижение доли поврежденных митохондрий и ослабление проявлений лактатацидоза, отека и оксидативного стресса [44].

Таким образом, совокупность собственных результатов и данных литературы позволяет заключить, что субхроническое применение L-карнитина оказывает комплексное положительное влияние на функциональное состояние скелетных мышц. Основными механизмами его действия, вероятно, являются оптимизация энергетического обмена, уменьшение выраженности метаболических нарушений и оксидативного стресса, поддержание структурной целостности мышечных волокон, улучшение микроциркуляции и ускорение восстановительных процессов. Это позволяет рассматривать L-карнитин как перспективное средство повышения мышечной работоспособности и ускорения восстановления как после динамических, так и после статических физических нагрузок.

Выводы

1. Субхроническое введение L-карнитина в дозе 100 мг/кг/сут в течение 10–60 суток достоверно повышает устойчивость скелетной мышцы к развитию утомления и ускоряет восстановление ее сократительной функции после интенсивной нагрузки по сравнению с контрольной группой ($p < 0,05$).

2. Применение L-карнитина не сопровождается замедлением сократительной активности мышцы и уже через 30–60 суток введения обеспечивает статистически значимое улучшение функциональных характеристик тетанического сокращения *m. tibialis anterior* по сравнению с контролем ($p < 0,05$): увеличение скорости развития тетануса (на 46–163 %), силы тетанического сокращения (на 163–295 %), сокращение периода послететанического полурасслабления (на 55–57 %), а также увеличение продолжительности максимальной (на 49–55 %) и субмаксимальной (на 65–69 %) работоспособности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Evans, A.M., Fornasini, G. Pharmacokinetics of L-carnitine // Clin. Pharmacokinet. – 2003. – V. 42. – P. 941-967. – DOI: 10.2165/00003088-200342110-00002
2. Georges, B., Le Borgne, F., Galland, S., Isoir, M., Ecosse, D., Grand-Jean, F., Demarquoy, J. Carnitine transport into muscular cells. Inhibition of transport and cell growth by mildronate // Biochem. Pharmacol. – 2000. – V. 59. – P. 1357–1363. – DOI: 10.1016/S0006-2928(00)00110-1
3. Виноградов, И.В., Блохин, А.В., Афанасьева, Л.М., Габля, М.Ю., Дендеберов, Е.С., Капто, А.А., Алексеев, Р.А. Опыт применения L-карнитина в лечении секреторного бесплодия у мужчин (обзор литературы) // Андрология и генитальная хирургия. – 2009. – № 2. – С. 19-22. – EDN: KUYIRP
4. Захарова, И.Н., Творогова, Т.М. Возможности применения препаратов карнитина в педиатрической практике // Российский вестник перинатологии и педиатрии. – 2008. – № 4. – С. 88-93. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vozmozhnosti-primeneniya-preparatov-karnitina-v-pediatricheskoy-praktike?ysclid=mrze49bo4i669497804>
5. Naderi Noreini, S., Malmir, M., Ghafarizadeh, A., Faraji, T., Bayat, R. Protective effect of L-carnitine on apoptosis, DNA fragmentation, membrane integrity and Lipid peroxidation of spermatozoa in the asthenoteratospermic men // Andrologia. – 2021. – V. 53, No. 2. – P. e13932. – DOI: 10.1111/and.13932

6. Nachvak, S.M., Shabanpur, M., Mostafai, R., Heidari, M.R. L-Carnitine supplementation reduces biomarkers of inflammatory and oxidative stress in patients with coronary artery disease: a randomised controlled trial // *J. Arch. Physiol. Biochem.* – 2023. – V. 129, No. 1. – P. 61-68. – DOI: 10.1080/13813455.2020.1797102
7. Chiechio, S., Canonico, P., Grilli, M. L-Acetylcarnitine: A Mechanistically Distinctive and Potentially Rapid-Acting Antidepressant Drug // *Int. J. Mol. Sci.* – 2018. – V. 19, No. 11. – P. 11-13. – DOI: 10.3390/ijms19010011
8. Gnoni, A., Longo, S., Gnoni, G.V., Giudetti, A.M. Carnitine in human muscle bioenergetics: can carnitine supplementation improve physical exercise? // *Molecules.* – 2020. – V. 25, No. 1. – P. 182. – DOI: 10.3390/molecules25010182
9. Kelek, S.E., Afşar, E., Akçay, G., Danişman, B., Aslan, M. Effect of chronic L-carnitine supplementation on carnitine levels, oxidative stress and apoptotic markers in peripheral organs of adult Wistar rats // *Food Chem. Toxicol.* – 2019. – V. 134. – P. 110851. – DOI: 10.1016/j.fct.2019.110851
10. Ravikumar, S., Prabhu, S., Vani, R. Effects of L-carnitine on the erythrocytes of stored human blood // *Transfus. Med.* – 2020. – V. 30, No. 3. – P. 215-225. – DOI: 10.1111/tme.12645
11. Stephens, F.B., Constantin-Teodosiu, D., Greenhaff, P.L. New insights concerning the role of carnitine in the regulation of fuel metabolism in skeletal muscle // *J. Physiol.* – 2007. – V. 581. – P. 431-444. – DOI: 10.1113/jphysiol.2006.125799
12. Байтингер, В.Ф., Логвинов, С.В., Серяков, В.И., Мустафина, Л.Р. Реиннервация скелетной мышечной ткани после микрохирургического шва под влиянием карнитина (экспериментальное исследование) // *Вопросы реконструктивной и пластической хирургии.* – 2010. – № 3(34). – С. 25-26. – DOI: 10.52581/1814-1471/87/03
13. De Angelis, C.C., Scarfo, C., Falcinelli, M., Perna, E., Ramacci, M.T., Angelucci, L. Age- and trauma-dependent modifications of neuromuscular junction and skeletal muscle structure in the rat. Effects of long-term treatment with Acetyl-L-Carnitine // *Mech. Ageing Dev.* – 1995. – V. 85, No. 1. – P. 37-53. – DOI: 10.1016/0047-6374(95)01615-8
14. Maruyama, T., Maruyama, N., Higuchi, T., Nagura, Ch., Takashima, H., Kitai, M., Utsunomiya, K., Tei, R., Furukawa, T., Yamazaki, T., Okawa, E., Ando, H., Kikuchi, F., Abe, M. Efficacy of L-carnitine supplementation for improving lean body mass and physical function in patients on hemodialysis: a randomized controlled trial // *Eur. J. Clin. Nutr.* – 2019. – V. 73, No. 2. – P. 293-301. – DOI: 10.1038/S41430-018-0348-Y
15. Руководство по проведению доклинических исследований лекарственных средств / А.Н. Миронова, Н.Д. Бунатян, ред. – Москва: Минздрав РФ, ЗАО «Гриф и К», 2012. – 944 с. – URL: https://rsmu.ru/fileadmin/templates/DOC/Zakon_RF/Mironov_Rukovodstvo_po_provedeniju_doklinicheskikh_issledovaniy_lekarstvennykh_sredstv.pdf?ysclid=mrze7klolk615481501
16. Труш, В.В., Соболев, В.И. Эффекты длительно вводимой α -липоевой кислоты на нервно-мышечный аппарат в модельных экспериментах на животных // *Ученые записки Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского Биология. Химия.* – 2019. – Т. 5(71), № 4. – С. 158-181. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/effekty-dlitelno-vvodimoy-a-lipoevoy-kisloty-na-nervno-myshechnyy-apparat-v-modelnyh-eksperimentah-na-zhivotnyh?ysclid=mrze8n08lh438164249>
17. Galea, V., De Bruin, H., Cavaşin, R., McComas, A.J. The number and relative size of motor units estimated by computer // *Muscle and Nerve.* – 1991. – V. 14. – P. 1123-1130. – DOI: 10.1002/mus.880141114
18. Rebouche, C.J. Carnitine. In: Shils M.E., Shike M., Ross A.C., Caballero B., Cousins R.J., eds. *Modern Nutrition in Health and Disease.* – 10th ed. – Philadelphia: Lippincott, Williams & Wilkins, 2006. – P. 537-544.
19. Parnetti, L., Gaiti, A., Mecocci, P., Cadini, D., Senin, U. Pharmacokinetics of IV and oral acetyl-L-carnitine in a multiple dose regimen in patients with senile dementia of Alzheimer type // *Eur. J. Clin. Pharmacol.* – 1992. – V. 42. – P. 89-93. – DOI: 10.1111/j.1471-4159.2010.06764
20. MacIntosh, B.R., Gardiner, Ph.F., McComas, A.J. *Skeletal muscle. Form and function.* – 2th ed. Champaign: Human Kinetics, 2006. – 423 p. – DOI: 10.5040/9781492596912
21. Клетикова, Л.В., Пронин, В.В., Каминская, А.А. Влияние карнитин-содержащего комплекса на морфоструктуру мышечной ткани японских перепелов // *Ветеринария и кормление.* – 2021. – № 6. – С. 24-27. – EDN: FQZOTO – DOI: 10.30917/ATT-VK-1814-9588-2021-6-6
22. Sawicka, A.K., Renzi, G., Olek, R.A. The bright and the dark sides of L-carnitine supplementation: a systematic review // *J. Int. Soc. Sports Nutr.* – 2020. – V. 17. – P. 49. – DOI: 10.1186/s12970-020-00377-2
23. Nakamura, J., Koh, N., Sakakibara, F., Hamada, Y., Wakao, T., Hara, T., Mori, K., Nakashima, E., Naruse, K., Hotta, N. Polyol pathway, 2,3-diphosphoglycerate in erythrocytes and diabetic neuropathy in rats // *Eur. J. Pharmacol.* – 1995. – V. 294, No. 1. – P. 207-214. – DOI: 10.1016/0014-2999(95)00531-5

24. Soneru, I.L., Khan, T., Orfalian, Z., Abaira, C. Acetyl-L-carnitine effects on nerve conduction and glycemic regulation in experimental diabetes // *Endocr. Res.* – 1997. – V. 23, No. 1-2. – P. 27-36. – DOI: 10.1080/07435809709031840.
25. Pekala, J., Patkowska-Sokola, B., Bodkowski, R. L-carnitine — metabolic functions and meaning in humans life // *Curr. Drug Metab.* – 2011. – V. 12. – P. 667-678. – DOI: 10.2174/138920011796504536
26. Wall, B.T., Stephens, F.B., Constantin-Teodosiu, D. Chronic oral ingestion of l-carnitine and carbohydrate increases muscle carnitine content and alters muscle fuel metabolism during exercise in humans // *Int. J. Sport Nutr. Exerc. Metab.* – 2011. – V. 21, No. 5. – P. 385-397. – DOI: 10.1136/jphysiol.2010.201343
27. Drăgan, G.I., Wagner, W., Ploșteanu, E. Studies concerning the ergogenic value of protein supply and L-carnitine in elite junior cyclists // *Physiologie.* – 1988. – V. 25. – P. 129-132. – DOI: 10.1515/physiol-1988-0211
28. Marconi, C., Sassi, G., Carpinelli, A., Cerretelli, P. Effects of L-carnitine loading on the aerobic and anaerobic performance of endurance athletes // *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.* – 1985. – V. 54. – P. 131-135. – DOI: 10.1007/BF02335919
29. Greig, C., Finch, K.M., Jones, D.A., Cooper, M., Sargeant, A.J., Forte, C.A. The effect of oral supplementation with L-carnitine on maximum and submaximum exercise capacity // *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.* – 1987. – V. 56. – P. 457-460. – DOI: 10.1007/BF00417775
30. Colombani, P., Wenk, C., Kunz, I., Krähenbühl, S., Kuhnt, M., Arnold, M., Frey-Rindova, P., Frey, W., Langhans, W. Effects of L-carnitine supplementation on physical performance and energy metabolism of endurance-trained athletes: A double-blind crossover field study // *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.* – 1996. – V. 73. – P. 434-439. – DOI: 10.1007/BF00334420
31. Novakova, K., Kummer, O., Bouitbir, J., Stoffel, S.D., Hoerler-Koerner, U., Bodmer, M. Effect of L-carnitine supplementation on the body carnitine pool, skeletal muscle energy metabolism and physical performance in male vegetarians // *Eur. J. Nutr.* – 2016. – V. 55, No. 1. – P. 207-217. – DOI: 10.1007/s00394-015-0838-9
32. Morand, R., Bouitbir, J., Felser, A., Hench, J., Handschin, C., Frank, S., Krähenbühl, S. Effect of carnitine, acetyl-, and propionylcarnitine supplementation on the body carnitine pool, skeletal muscle composition, and physical performance in mice // *Eur. J. Nutr.* – 2014. – V. 53, No. 6. – P. 1313-1325. – DOI: 10.1007/s00394-013-0631-6
33. Mielgo-Ayuso, J., Pietrantonio, L., Viribay, A., Calleja-González, J., González-Bernal, J., Fernández-Lázaro, D. Effect of Acute and Chronic Oral l-Carnitine Supplementation on Exercise Performance Based on the Exercise Intensity: A Systematic Review // *Nutrients.* – 2021. – V. 13, No. 12. – P. 4359. – DOI: 10.3390/nu13124359
34. Fielding, R., Riede, L., Lugo, J.P., Bellamine, A. L-carnitine supplementation in recovery after exercise // *Nutrients.* – 2018. – V. 10, No. 3. – P. 349. – DOI: 10.3390/nu10030349
35. Jang, J., Park, J., Chang, H., Lim, K. L-carnitine supplement reduces skeletal muscle atrophy induced by prolonged hindlimb suspension in rats // *Appl. Physiol. Nutr. Metab.* – 2016. – V. 41, No. 12. – P. 1240-1247. – DOI: 10.1139/apnm-2016-0094
36. Раджаббадиев, Р.М., Коростелева, М.М., Евстратова, В.С., Никитюк, Д.Б., Ханферьян, Р.А. L-карнитин: свойства и перспективы применения в спортивной практике // *Вопросы питания.* – 2015. – Т. 84, № 3. – С. 4-12. – EDN: UBEKZT.
37. Karlic, H., Lohninger, A. Supplementation of L-carnitine in athletes: does it make sense? // *Nutrition.* – 2004. – V. 20, No. 7-8. – P. 709-715. – DOI: 10.1016/J.NUT.2004.04.003
38. Gomes, M.R., Tirapegui, J. Relacao de alguns suplementos nutricionais e o desempenho fisico // *Arch. Latinoam. Nutr.* – 2000. – V. 50, No. 4. – P. 317-329. – DOI: 10.37527/2000.50.4.001
39. Kaczor, J.J., Ziolkowski, W., Antosiewicz, J., Hac, S. The effect of aging on anaerobic and aerobic enzyme activities in human skeletal muscle // *J. Gerontol. A. Biol. Sci. Med. Sci.* – 2006. – V. 61, No. 4. – P. 339-344. – DOI: 10.1093/gerona/61.4.339
40. Varney, J.L., Fowler, J.W., Gilbert, W.C., Coon, C.N. Utilisation of supplemented L-carnitine for fuel efficiency, as an antioxidant, and for muscle recovery in Labrador retrievers // *J. Nutr. Sci.* – 2017. – V. 6. – P. e8. – DOI: 10.1017/jns.2017.4
41. Yarizadh, H., Shab-Bidar, S., Zamani, B., Nazary Vanani, A. The Effect of L-Carnitine Supplementation on Exercise-Induced Muscle Damage: A Systematic Review and Meta-Analysis of Randomized Clinical Trials // *Journal of the American College of Nutrition.* – 2020. – V. 39, No. 5. – P. 457-468. – DOI: 10.1080/07315724.2019.1661804.
42. Dubelaar, M.L., Lucas, C.M., Hulsmann, W.C. The effect of L-carnitine on force development of the latissimus dorsi muscle in dogs // *J. Card. Surg.* – 1991. – V. 6. – P. 270-275. – DOI: 10.1111/jocs.1991.6.1s.270

43. Hulsmann, W.C., Dubelaar, M.L. Carnitine requirement of vascular endothelial and smooth muscle cells in imminent ischemia // *Mol. Cell. Biochem.* – 1992. – V. 116. – P. 125–129. – DOI: 10.1007/BF01270579
44. Хуторская, И.А., Шаймарданова, Г.Ф., Балашов, В.П., Абрамов, В.Н., Балашов, А.В., Быстрова, Е.В., Евстифеева, И.А. Морфология скелетных мышц при динамической физической нагрузке и коррекции L-карнитином // *Клин. эксп. морфология.* – 2024. – Т. 13, № 4. – С. 67–75. – DOI: 10.31088/CEM2024.13.4.67-75

REFERENCES

1. Evans, A.M., Fornasini, G. (2003) Pharmacokinetics of L-carnitine. *Clin. Pharmacokinet.* 42, 941-967, doi: 10.2165/00003088-200342110-00002
2. Georges, B., Le Borgne, F., Galland, S., Isoir, M., Ecosse, D., Grand-Jean, F., Demarquoy, J. (2000) Carnitine transport into muscular cells. Inhibition of transport and cell growth by mildronate. *Biochem. Pharmacol.* 59, 1357–1363, doi: 10.1016/S0006-2928(00)00110-1
3. Vinogradov I.V., Blokhin A.V., Afanaseva L.M., Gablya M.Y., Dendeberov E.S., Kapto A.A., Alekseev R.A. (2009) Usage of L-carnitine in the treatment of the male infertility (a review). *Andrology and genital surgery*, 2, 19-22. (In Russian)
4. Zakharova I.N., Tvorogova T.M. Possibilities of using carnitine preparations in pediatric practice. *Russian bulletin of perinatology and pediatrics*, 4, 88-93. (In Russian)
5. Naderi Noreini, S., Malmir, M., Ghafarizadeh, A., Faraji, T., Bayat, R. (2021) Protective effect of L-carnitine on apoptosis, DNA fragmentation, membrane integrity and Lipid peroxidation of spermatozoa in the asthenoteratospermic men. *Andrologia*, 53 (2), e13932, doi: 10.1111/and.13932
6. Nachvak, S.M., Shabanpur, M., Mostafai, R., Heidari, M.R. (2023) L-Carnitine supplementation reduces biomarkers of inflammatory and oxidative stress in patients with coronary artery disease: a randomised controlled trial. *J. Arch. Physiol. Biochem.*, 129 (1), 61-68, doi: 10.1080/13813455.2020.1797102
7. Chiechio, S., Canonico, P., Grilli, M. (2018) L-Acetylcarnitine: A Mechanistically Distinctive and Potentially Rapid-Acting Antidepressant Drug. *Int. J. Mol. Sci.*, 19 (11), 11-13, doi: 10.3390/ijms19010011
8. Gnoni, A., Longo, S., Gnoni, G.V., Giudetti, A.M. (2020) Carnitine in human muscle bioenergetics: can carnitine supplementation improve physical exercise? *Molecules*, 25 (1), 182, doi: 10.3390/molecules25010182
9. Kelek, S.E., Afşar, E., Akçay, G., Danişman, B., Aslan, M. (2019) Effect of chronic L-carnitine supplementation on carnitine levels, oxidative stress and apoptotic markers in peripheral organs of adult Wistar rats. *Food Chem. Toxicol.*, 134, 110851, doi: 10.1016/j.fct.2019.110851
10. Ravikumar, S., Prabhu, S., Vani, R. (2020) Effects of L-carnitine on the erythrocytes of stored human blood. *Transfus. Med.*, 30 (3), 215-225, doi: 10.1111/tme.12645
11. Stephens, F.B., Constantin-Teodosiu, D., Greenhaff, P.L. (2007) New insights concerning the role of carnitine in the regulation of fuel metabolism in skeletal muscle. *J. Physiol.*, 581, 431-444, doi: 10.1113/jphysiol.2006.125799
12. Baitinger, V.F., Logvinov, S.V., Seryakov, V.I., Mustafina, L.R. (2010) Reinnervation of skeletal muscle tissue after microsurgical suture under the influence of carnitine (experimental study). *Voprosy rekonstruktivnoy i plasticheskoy khirurgii [Issues of Reconstructive and Plastic Surgery]*, 3(34), 25-26, doi: 10.52581/1814-1471/87/03 (In Russian)
13. De Angelis, C.C., Scarfo, C., Falcinelli, M., Perna, E., Ramacci, M.T., Angelucci, L. (1995) Age- and trauma-dependent modifications of neuromuscular junction and skeletal muscle structure in the rat. Effects of long-term treatment with Acetyl-L-Carnitine. *Mech. Ageing Dev.*, 85 (1), 37-53, doi: 10.1016/0047-6374(95)01615-8
14. Maruyama, T., Maruyama, N., Higuchi, T., Nagura, Ch., Takashima, H., Kitai, M., Utsunomiya, K., Tei, R., Furukawa, T., Yamazaki, T., Okawa, E., Ando, H., Kikuchi, F., Abe, M. (2019) Efficacy of L-carnitine supplementation for improving lean body mass and physical function in patients on hemodialysis: a randomized controlled trial. *Eur. J. Clin. Nutr.*, 73 (2), 293-301, doi: 10.1038/S41430-018-0348-Y
15. Rukovodstvo po provedeniyu doklinicheskikh issledovaniy lekarstvennykh sredstv (Guidelines for conducting preclinical studies of medicines), A.N. Mironova, N.D. Bunatyan, eds. Moscow: Minzdrav RF, ZAO «Grif i K», 2012. 944 p. (In Russian)
16. Trush V.V., Sobolev V.I. (2019) Effects of long-term administration of α -lipoic acid on the neuromuscular apparatus in animal experiments. *Uchenyye zapiski Krymskogo federal'nogo universiteta imeni V.I. Vernadskogo Biologiya. Khimiya [Scientific Notes of the Crimean Federal University named after V.I. Vernadsky Biology. Chemistry]*, 5(71) (4), 158-181. (In Russian)
17. Galea, V., De Bruin, H., Cavasin, R., McComas, A.J. (1991) The number and relative size of motor unites estimated by computer. *Muscle and Nerve*, 14, 1123-1130, doi: <https://doi.org/10.1002/mus.880141114>

18. Rebouche, C.J. Carnitine. In: Shils M.E., Shike M., Ross A.C., Caballero B., Cousins R.J., eds. (2006) *Modern Nutrition in Health and Disease*. – 10th ed. – Philadelphia: Lippincott, Williams & Wilkins. – P. 537-544.
19. Parnetti, L., Gaiti, A., Mecocci, P., Cadini, D., Senin, U. (1992) Pharmacokinetics of IV and oral acetyl-L-carnitine in a multiple dose regimen in patients with senile dementia of Alzheimer type. *Eur. J. Clin. Pharmacol.*, 42, 89–93, doi: 10.1111/j.1471-4159.2010.06764
20. MacIntosh, B.R., Gardiner, Ph.F., McComas, A.J. (2006) *Skeletal muscle. Form and function*. – 2th ed. Champaign: Human Kinetics. – 423 p. – doi:10.5040/9781492596912
21. Kletikova L.V., Pronin V.V., Kaminskaya A.A. (2021) The influence of the carnitine-containing complex on the morphostructure at the muscle tissue of Japanese quail. *Veterinaria i kormlenie [Veterinary science and feeding]*, 6, 24–27.
22. Sawicka, A.K., Renzi, G., Olek, R.A. (2020) The bright and the dark sides of L-carnitine supplementation: a systematic review. *J. Int. Soc. Sports Nutr.*, 17, 49, doi: 10.1186/s12970-020-00377-2
23. Nakamura, J., Koh, N., Sakakibara, F., Hamada, Y., Wakao, T., Hara, T., Mori, K., Nakashima, E., Naruse, K., Hotta, N. (1995) Polyol pathway, 2,3-diphosphoglycerate in erythrocytes and diabetic neuropathy in rats // *Eur. J. Pharmacol.*, 294 (1), 207-214, doi: 10.1016/0014-2999(95)00531-5
24. Soneru, I.L., Khan, T., Orfalian, Z., Abaira, C. (1997) Acetyl-L-carnitine effects on nerve conduction and glycemic regulation in experimental diabetes. *Endocr. Res.*, 23 (1-2), 27-36, doi: 10.1080/07435809709031840.
25. Pekala, J., Patkowska-Sokola, B., Bodkowski, R. (2011) L-carnitine — metabolic functions and meaning in humans life. *Curr. Drug Metab.*, 12, 667-678, doi:10.2174/138920011796504536
26. Wall, B.T., Stephens, F.B., Constantin-Teodosiu, D. (2011) Chronic oral ingestion of l-carnitine and carbohydrate increases muscle carnitine content and alters muscle fuel metabolism during exercise in humans. *Int. J. Sport Nutr. Exerc. Metab.*, 21 (5), 385-397, doi: 10.1136/jphysiol.2010.201343
27. Drăgan, G.I., Wagner, W., Ploșteanu, E. (1988) Studies concerning the ergogenic value of protein supply and L-carnitine in elite junior cyclists. *Physiologie*, 25, 129–132, doi: 10.1515/physiol-1988-0211
28. Marconi, C., Sassi, G., Carpinelli, A., Cerretelli, P. (1985) Effects of L-carnitine loading on the aerobic and anaerobic performance of endurance athletes. *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.*, 54, 131–135, doi: 10.1007/BF02335919
29. Greig, C., Finch, K.M., Jones, D.A., Cooper, M., Sargeant, A.J., Forte, C.A. (1987) The effect of oral supplementation with L-carnitine on maximum and submaximum exercise capacity. *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.*, 56, 457–460, doi: 10.1007/BF00417775
30. Colombani, P., Wenk, C., Kunz, I., Krähenbühl, S., Kuhnt, M., Arnold, M., Frey-Rindova, P., Frey, W., Langhans, W. (1996) Effects of L-carnitine supplementation on physical performance and energy metabolism of endurance-trained athletes: A double-blind crossover field study. *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.*, 73, 434–439, doi: 10.1007/BF00334420
31. Novakova, K., Kummer, O., Bouitbir, J., Stoffel, S.D., Hoerler-Koerner, U., Bodmer, M. (2016) Effect of L-carnitine supplementation on the body carnitine pool, skeletal muscle energy metabolism and physical performance in male vegetarians. *Eur. J. Nutr.*, 55 (1), 207–217, doi: 10.1007/s00394-015-0838-9
32. Morand, R., Bouitbir, J., Felser, A., Hench, J., Handschin, C., Frank, S., Krähenbühl, S. (2014) Effect of carnitine, acetyl-, and propionylcarnitine supplementation on the body carnitine pool, skeletal muscle composition, and physical performance in mice. *Eur. J. Nutr.*, 53 (6), 1313–1325, doi: 10.1007/s00394-013-0631-6
33. Mielgo-Ayuso, J., Pietrantonio, L., Viribay, A., Calleja-González, J., González-Bernal, J., Fernández-Lázaro, D. (2021) Effect of Acute and Chronic Oral l-Carnitine Supplementation on Exercise Performance Based on the Exercise Intensity: A Systematic Review. *Nutrients*, 13 (12), 4359, doi: 10.3390/nu13124359
34. Fielding, R., Riede, L., Lugo, J.P., Bellamine, A. (2018) L-carnitine supplementation in recovery after exercise. *Nutrients*, 10 (3), 349, doi: 10.3390/nu10030349
35. Jang, J., Park, J., Chang, H., Lim, K. (2016) L-carnitine supplement reduces skeletal muscle atrophy induced by prolonged hindlimb suspension in rats. *Appl. Physiol. Nutr. Metab.*, 41 (12), 1240–1247, doi: 10.1139/apnm-2016-0094
36. Radzhabkadiyev, R.M., Korosteleva, M.M., Evstratova, V.S., Nikityuk, D.B., Khanferyan, R.A. (2015) L-carnitine: properties and prospects for use in sports practice. *Voprosy pitaniya [Nutrition Issues]*, 84 (3), 4–12. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23816223>
37. Karlic, H., Lohninger, A. (2004) Supplementation of L-carnitine in athletes: does it make sense? *Nutrition*, 20 (7-8), 709–715, doi: 10.1016/J.NUT.2004.04.003
38. Gomes, M.R., Tirapegui, J. (2000) Relacao de alguns suplementos nutricionais e o desempenho fisico. *Arch. Latinoam. Nutr.*, 50 (4), 317-329, doi: 10.37527/2000.50.4.001

39. Kaczor, J.J., Ziolkowski, W., Antosiewicz, J., Hac, S. (2006) The effect of aging on anaerobic and aerobic enzyme activities in human skeletal muscle. *J. Gerontol. A. Biol. Sci. Med. Sci.*, 61 (4), 339-344, doi: 10.1093/gerona/61.4.339
40. Varney, J.L., Fowler, J.W., Gilbert, W.C., Coon, C.N. (2017) Utilisation of supplemented L-carnitine for fuel efficiency, as an antioxidant, and for muscle recovery in Labrador retrievers. *J. Nutr. Sci.*, 6, e8, doi: 10.1017/jns.2017.4
41. Yarizadh, H., Shab-Bidar, S., Zamani, B., Nazary Vanani, A. (2020) The Effect of L-Carnitine Supplementation on Exercise-Induced Muscle Damage: A Systematic Review and Meta-Analysis of Randomized Clinical Trials. *Journal of the American College of Nutrition*, 39 (5), 457-468, doi: 10.1080/07315724.2019.1661804
42. Dubelaar, M.L., Lucas, C.M., Hulsmann, W.C. (1991) The effect of L-carnitine on force development of the latissimus dorsi muscle in dogs. *J. Card. Surg.*, 6, 270–275, doi: 10.1111/jocs.1991.6.1s.270
43. Hulsmann, W.C., Dubelaar, M.L. (1992) Carnitine requirement of vascular endothelial and smooth muscle cells in imminent ischemia. *Mol. Cell. Biochem.*, 116, 125–129, doi: 10.1007/BF01270579
44. Khutorskaya I.A., Shaymardanova G.F., Balashov V.P., Abramov V.N., Balashov A.V., Bystrova E.V., Evstifeeva I.A. (2024) Morphology of skeletal muscles under dynamic exercise and correction with L-carnitine. *Clin. exp. morphology*, 2024, 13 (4), 67–75, doi: 10.31088/CEM2024.13.4.67-75 (In Russian)

SUBCHRONIC ADMINISTRATION OF L-CARNITINE IMPROVES THE FUNCTIONAL STATE OF FAST-TWITCH SKELETAL MUSCLE IN RAT EXPERIMENTS

V. V. Trush, V. I. Sobolev

The efficacy of L-carnitine (L-CAR) at a dose equivalent to the moderate therapeutic dose for humans (100 mg/kg/day) in improving the functional parameters of mixed-type skeletal muscle with a predominantly glycolytic fiber content (*m. tibial anterior*) was studied in mature female rats. The animals of the experimental groups were administered the preparation for 10 (L-CAR-10 group), 30 (L-CAR-30 group), and 60 (L-CAR-60 group) days at a dose equivalent to the moderate therapeutic dose for humans: 100 mg/kg/day, intraperitoneally.

Subchronic administration of L-carnitine for 10–60 days significantly increases skeletal muscle resistance to fatigue and accelerates the recovery of its contractile function after intense exercise compared to the control group ($p < 0.05$). L-carnitine administration does not slow down muscle contractile activity and, after 30–60 days of administration, provides a statistically significant improvement in the functional characteristics of tetanic contraction of the tibialis anterior muscle compared to the control group ($p < 0.05$): an increase in the rate of tetanus development (by 46–163 %), tetanic contraction strength (by 163–295 %), a reduction in the post-tetanic semi-relaxation period (by 55–57 %), and an increase in the duration of maximum (by 49–55 %) and submaximal (by 65–69 %) performance. The data obtained suggest that L-carnitine may be a promising agent for enhancing muscle performance and accelerating recovery after both dynamic and static physical activity.

Keywords: skeletal muscle; muscle contraction; muscle performance; L-carnitine; rats.

Поступила в редакцию 24.06.2026 г.

Труш Вера Владимировна

доктор биологических наук, доцент,
заведующая кафедрой физиологии и биофизики,
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: ver.trush@yandex.ru,
ORCID: 0000-0001-8514-8431
SPIN-код: 1348-5996

Trush Vera Vladimirovna

Doctor of Biological Sciences,
Head of the Department of Physiology and Biophysics,
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

Соболев Валерий Иванович

доктор биологических наук, профессор,
профессор кафедры здоровья и реабилитации,
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет
им. В.И. Вернадского», г. Ялта, Крым, РФ.
E-mail: v.sobolev@mail.ru,
ORCID: 0000-0001-9318-5224
SPIN-код: 3093-6730

Sobolev Valery Ivanovich

Doctor of Biological Sciences, Professor,
Professor of the Department of Health and
Rehabilitation,
V.I. Vernadsky Crimean Federal University»,
Yalta, Crimea, RF.

СРАВНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ КАРДИОИНТЕРВАЛОМЕТРИИ У ЖИТЕЛЕЙ СЕВЕРНЫХ И ЮЖНЫХ ТЕРРИТОРИЙ ЕВРОПЕЙСКОЙ ЧАСТИ РОССИИ

© 2026. *И. В. Улесикова, В. В. Воронов, С. С. Гринчук,
Н. А. Щукина, М. А. Кунавин, А. Б. Мулик*

Во многих исследованиях последних лет обосновано влияние совокупности физико-географических факторов на особенности функционирования организма человека. При проведении исследований медико-биологического профиля часто не учитываются место проживания индивида и его половая принадлежность. Учет влияния факторов среды на проявления работы сердечно-сосудистой системы позволяет объективизировать оценку функционального состояния вегетативной нервной системы (ВНС) человека и адекватно оценить его функциональное состояние.

Ключевые слова: функциональное состояние, вегетативная нервная система, ритм сердца, пол, физико-географические факторы.

Введение. Многочисленные исследования как отечественных, так и зарубежных ученых о роли физико-географических факторов в формировании функционального статуса организма базируются на изучении здоровья населения Европейского Севера, Западной и Восточной Сибири, Северного Кавказа [1; 2]. Широтный фактор влияет на работоспособность и образ жизни человека, а также функциональные ресурсы жителей различных территорий [3; 4]. При переезде из средних и низких широт в высокие возникают реакции дезадаптации, вызванные резкими климатическими изменениями. Прежде всего, это сказывается на работоспособности пришлого населения. Основными факторами, негативно влияющими на состояние здоровья, являются низкие температуры, изменение уровня солнечной радиации, возмущение геомагнитного поля и т.д. По показателям здоровья и работоспособности оценивают функциональное состояние организма человека [5].

Исследования некоторых авторов направлены на изучение состояния центральной и вегетативной нервной системы у жителей различных регионов в условиях их жизнедеятельности и при нагрузках [6]. Для оценки функционального потенциала вегетативной нервной системы используют показатели вариационной кардиоинтервалометрии (ВКМ) – метод оценки вариабельности ритма сердца, в основе которого лежит оценка длительности кардиоинтервалов [7; 8]. Как известно, кардиоинтервалометрия зависит от индивидуальных проявлений сердечно-сосудистой системы, степени напряжения регуляторных механизмов и от общего психофизиологического статуса организма человека. При оценке кардиоинтервалограммы главной проблемой является отсутствие критериев нормы для стандартных показателей вариабельности сердечного ритма у жителей разных физико-географических зон. Существующая система универсального нормирования показателей ВКМ не учитывает физико-географических характеристик места жительства, пол и возраст человека. Некоторые исследования направлены на выявление нормативных диапазонов показателей ВКМ с учетом возраста, пола, особенностей деятельности [9]. Интерпретация полученных результатов всегда основана на относительном сравнении выраженности показателей с «нормой», однако, это уже не соответствует функциональному статусу среднестатистического современного жителя

нынешних регионов РФ. Понимание влияния природных факторов на проявления показателей ВКМ поможет индивидуализировать и объективизировать оценку функционального состояния ВНС у конкретного человека.

Цель исследования. Охарактеризовать специфику проявления показателей вариационной кардиоинтервалометрии у жителей северных и южных территорий Европейской части России.

Материалы и методы. В исследовании приняли участие молодые, социально благополучные, здоровые люди обоего пола - мужчины и женщины европеоидной расы, коренные жители регионов Европейской части России. Данные регионы различаются географическим положением и климатическими условиями. Место рождения респондентов ограничено географической широтой от 60,9° с.ш. до 64,5° с.ш. для северных территорий, и от 47,3° с.ш. до 50,9° с.ш. для южных территорий. В исследовании приняли участие студенты государственных вузов РФ. Все работы выполняли в соответствии с принципами Всеобщей декларации о биоэтике и правах человека [10]. Участие в исследовании было исключительно добровольным, с оформлением информированного согласия. Критериями включения явились следующие позиции – участники исследования от 18 до 23 лет; коренные жители северных и южных регионов Европейской части России; отсутствие у обследуемых диагностированных психических и соматических заболеваний; социально благополучные лица без выраженных стрессовых факторов; соблюдение сбалансированного питания и здорового образа жизни; отказ от приёма психоактивных веществ, нейротропных препаратов и алкоголя на момент исследования; добровольное информированное согласие на участие в исследовании. В качестве критериев исключения явилось наличие хронических заболеваний; приём лекарств, влияющих на когнитивные и моторные функции (антидепрессанты, седативные, стимуляторы и др.).

Гипотезой исследования явилось предположение о существовании генетически детерминированного уровня функционального состояния ВНС, характерного для европеоидного населения Севера и Юга России.

Исследования проведены на базе Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (г. Архангельск, Россия), Оренбургского государственного университета (г. Оренбург, Россия) и Волгоградского государственного медицинского университета (г. Волгоград, Россия) и Крымского Федерального университета им. В.И. Вернадского (г. Симферополь, республика Крым). Работа проведена с использованием результатов психофизиологических тестов, полученных в период с 01.03.2025 по 04.04.2025. Для оценки ВКМ использовали устройство психофизиологического тестирования УПФТ-1/30 «Психофизиолог» («Медиком МТД», г. Таганрог, Россия) для оценки измеряемых кардиоинтервалов при настройке на 128 кардиоциклов в исследовании. В сценарий прибора был добавлен тест «Вариационная кардиоинтервалометрия». Тестируемый, плотно прижав ладони, касался боковин пульта (пластинчатые электроды из нержавеющей стали). Регистрировался сигнал ЭКГ в первом стандартном отведении.

Исследование одобрено этическим комитетом Военно-медицинской академии имени С.М. Кирова (Санкт-Петербург, Россия), протокол № 295 от 22.10.2024 г. В работе уделяли внимание специфике проявления показателей в зависимости от половой принадлежности [11–13]. Учитывали основные стандартные и спектральные показатели ВКМ: минимальная длительность RR-интервала, максимальная длительность RR-интервала, средняя длительность RR-интервала, медиану, вариационный размах, уровень частоты сердечных сокращений, уровень вариабельности, индекс напряжения,

общую мощность спектра, мощность медленных волн второго порядка, мощность медленных волн первого порядка, мощность дыхательных волн, а также индекс централизации и индекс активации подкорковых центров.

Размер выборки предварительно не рассчитывали, поскольку исследование носило пилотный характер, и его основной целью была оценка принципиальной возможности выявления эффектов, без априорных предположений об их силе и направленности. Методы статистического анализа данных: Статистическая обработка осуществлялась с помощью пакета программ MS Excel 2007 (12.0.6611.1000; Microsoft Corporation, США), Statistica 6.0 (StatSoft Inc., США). Нормальность распределения значений количественных признаков определяли с помощью критерия Колмогорова-Смирнова. Статистический анализ полученных результатов вариационной кардиоинтервалометрии проводили в программе STATISTICA 10 однофакторным дисперсионным анализом Anova, позволяющим определить наличие статистически значимых различий между несколькими группами по одной независимой переменной, статистическую значимость различий принимали при $p < 0,05$.

Результаты и их обсуждение. На первом этапе исследования были проанализированы фоновые показатели ВКМ, характеризующие функциональное состояние ВНС у мужчин и женщин – жителей северных и южных территорий европейской части России (табл. 1). Выявлено, что жители южных территорий, по отношению к жителям северных территорий, в целом характеризуются относительно низкими значениями времени реакции и относительно высокими значениями числа упреждающих реакций на предъявление светового стимула.

Таблица 1

Характеристика базовых показателей оценки вариационной кардиоинтервалометрии у мужчин и женщин – жителей северных и южных территорий Европейской части России

Регионы	Номер квадрата классификации функционального состояния		
	Фон ($M \pm m$)		
	м	ж	<i>p</i>
Север	11.68±1.45	15±0.86	0.05
Центр	15.16±1.35	18.71±1.36	0.07
Юг	17.35±1.30	17.18±1.41	0.93
Восток	14.43±1.52	16.55±1.29	0.29
Регионы	0.04	0.11	
	Средняя длительность RR-интервалов, мс		
	Фон ($M \pm m$)		
	м	ж	<i>p</i>
	841.43±37.07	751.68±14.13	0.03
Север	738.16±29.72	702.57±27.05	0.38
Центр	718±25.84	732.75±29.31	0.70
Юг	767.25±27.58	731.72±27.99	0.3749
Восток	0.02	0.37	
Регионы	СКО, мс		
	Фон ($M \pm m$)		
	м	ж	<i>p</i>
	59.87±6.52	47.56±4.10	0,12
	49.08±6.34	32.5±3.82	0.02
Север	44.17±5.19	41.93±4.16	0.74
Центр	56.81±7.45	46.38±5.15	0.25
Юг	0.28	0.04	
Восток			

Продолжение табл. 1

Регионы	Уровень ЧСС		
	Фон (M±m)		
	м	ж	p
Север	2.87±0.28	3.5±0.15	0.06
Центр	3.5±0.23	4.07±0.26	0.12
Юг	3.94±0.24	3.87±0.27	0.85
Восток	3.43±0.28	3.77±0.24	0.37
Регионы	0.04	0.23	
	ЧСС, уд/мин		
	Фон (M±m)		
	м	ж	p
Север	73.06±2.86	80.18±1.47	0.03
Центр	83.08±4.12	86.92±3.27	0.46
Юг	85.17±2.92	83.87±3.19	0.76
Восток	79.75±2.72	84.22±3.41	0.32
Регионы	0.03	0.23	
	Уровень вариабельности		
	Фон (M±m)		
	м	ж	p
Север	2.31±0.26	2.5±0.20	0.58
Центр	2.66±0.37	3.35±0.19	0.10
Юг	2.64±0.19	2.81±0.20	0.56
Восток	2.25±0.19	2.6667±0.2287	0.1796
Регионы	0.52	0.01	

Примечание: * – значимые различия при значении $p \leq 0,05$.

Анализ значений показателей выявил различия между мужчинами и женщинами в зависимости от места жительства. Высокий уровень активации ВНС, системно характеризующий степень напряжения регуляторных механизмов, обеспечивает мужчин – жителей южных территорий – выраженным потенциалом функциональных возможностей, несмотря на незначительную неуравновешенность нервной системы с превалированием процессов возбуждения. У мужчин северных территорий наблюдают противоположные свойства вегетативной нервной системы: сниженный уровень активации ВНС, преобладание процессов торможения, низкий уровень функциональных возможностей, а также повышенная напряженность регуляторных механизмов. У мужчин-жителей северных территорий средняя длительность RR-интервалов ($p=0.02$) и среднее квадратическое отклонение (СКО) ($p=0.03$) значимо выше, чем у жителей южных территорий. У жителей южных территорий-мужчин значимо выше ЧСС и уровень ЧСС.

А также у женщин, представительниц регионов от севера до юга страны, наличие различий в показателях – среднее квадратическое отклонение и уровень вариабельности.

Интегральная характеристика «квадратов классификации» функциональных состояний по выделенным группам жителей северных и южных территорий представлена в таблице 2. В целом, уровень функциональных возможностей ВНС у жителей северных территорий сниженный, а у представителей южных территорий – повышенный.

Таблица 2

Интегральная характеристика функциональных возможностей вегетативной нервной системы мужчин и женщин – жителей северных и южных территорий Европейской части России.

Территория	Пол	Номер квадрата	Функциональные возможности вегетативной нервной системы
Север	м	4	Напряжение регуляторных механизмов. Выраженное преобладание эрготропной функции, влияние центрального контура регуляции. Низкий уровень функциональных возможностей.
	ж	3	Функциональное состояние допустимое. Выраженное напряжение регуляторных механизмов. Сниженный уровень функциональных резервов.
Юг	м	11	Функциональное состояние оптимальное. Нормокардия, оптимальный синусовый ритм. Баланс отделов вегетативной нервной системы, автономного и центрального контуров регуляции. Высокий уровень функциональных возможностей и психофизиологических резервов.
	ж	8	Функциональное состояние близко к оптимальному. Высокий уровень функциональных возможностей. Баланс центрального и автономного контуров регуляции.

Вывод. Таким образом, можно сделать вывод о различиях в уровнях функционирования как мужского, так и женского организма в зависимости от региона проживания, вследствие влияния физико-географических факторов окружающей среды, что, вероятнее всего, обусловлено особенностями нервно-гуморального статуса организма респондентов. Учёт места рождения, места жительства и пола человека позволяет персонализировать нормирование результатов оценки ВКМ при проведении медико-биологических исследований.

Работа выполнена по программе академического стратегического лидерства «Приоритет-2030».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Медведев, В.И. Адаптация человека / В.И. Медведев. – СПб: Институт мозга человека. – 2003. – 551 с.
2. Кандрор, И.С. Очерки по физиологии и гигиене человека на Крайнем Севере. – М.: Медицина. – 1968. – 280 с.
3. Матвеев, Л.М. Работоспособность и гемодинамика у мужчин в условиях проживания в средних и высоких широтах / Л.М. Матвеев // Физиология человека. – 1985. – Т. 11, № 1. – С. 113-120.
4. Показатели смертности от болезней органов кровообращения в зависимости от среднегодовой температуры воздуха и географической широты проживания в РФ / В.И. Хаснулин, В.В. Гафаров, М.И. Воевода, М.В. Артамонова // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 6-2. – С. 255-259.
5. Солонин, Ю.Г. Широтные особенности физиологических функций у жителей Севера / Ю.Г. Солонин // Физиология человека. – 1994. – Т. 20, № 6. – С. 137-143.
6. Солонин, Ю.Г. Физиологические показатели здоровья жителей Воркуты / Ю.Г. Солонин // Народное хозяйство Республики Коми. – 1994. – Т. 3, № 1. – С. 98-103.
7. Баевский, Р.М. Анализ вариабельности сердечного ритма: история и философия, теория и практика / Р.М. Баевский // Клиническая информатика и телемедицина. – 2004. – № 1. – С. 54-64.
8. Бокерия, Л.А. Вариабельность сердечного ритма: методы измерения, интерпретация, клиническое использование / Л.А. Бокерия, О.Л. Бокерия, И.В. Волковская // Анналы аритмологии. – 2009. – № 4. – С. 21-32.
9. Воробьева, Е.В. Связь нарушений адаптации с психофизиологическими и психологическими особенностями работников электроэнергетики Юга России / Е.В. Воробьева // Психология и право. – 2025. – Т. 15, № 1. – С. 105-124.

10. Un.org [Internet]. Universal Declaration on Bioethics and human rights. https://www.un.org/ru/documents/decl_conv/declarations/bioethics_and_hr.shtm. (дата обращения: 14.05.2026).
11. Бирюкова, Е.В. Гендерные особенности variability сердечного ритма и гемодинамического обеспечения учебной деятельности студентов / Е.В. Бирюкова, Н.А. Василюк, В.В. Андрианов // Российский медико-биологический вестник им. академика И.П. Павлова. – 2019. – №2. – С. 188-196. – DOI: 10.23888/PAVLOVJ2019272
12. Вenevtseva, Ю.Л. Гендерные особенности variability сердечного ритма и психометрического тестирования у здоровых студентов / Ю.Л. Вenevtseva, Л.В. Путилин, П.Ю. Прохоров // Современные вопросы биомедицины. – 2019. – Т. 3, № 3. – С. 1-10.
13. Дaдaшoвa, Г.М. Гендерные и возрастные особенности variability сердечного ритма у практически здоровых лиц / Г.М. Дaдaшoвa // Профилактическая медицина. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 54-58. – DOI: 10.17116/profmed201518254-58.

REFERENCES

1. Medvedev, V.I. (2003) Human Adaptation. St. Petersburg: Institute of the Human Brain. 551 p. (In Russian).
2. Kandror, I.S. (1968) *Essays on Human Physiology and Hygiene in the Far North*. Moscow: Meditsina. 280 p. (In Russian).
3. Matveev, L.M. (1985) [Performance and Hemodynamics in Men Living in Middle and High Latitudes]. *Fiziologiya cheloveka = Human Physiology*. 11 (1), 113-120. (In Russian).
4. Khasnulin, V.I., Gafarov, V.V., Voevoda, M.I. & Artamonova M.V. (2015) [Mortality rates from circulatory diseases depending on the average annual air temperature and geographical latitude of residence in the Russian Federation]. *Mezhdunarodny`j zhurnal prikladny`x i fundamental`ny`x issledovaniy = International Journal of Applied and Fundamental Research*. 6-2, 255-259. (In Russian).
5. Solonin, Yu.G. (1994) [Latitudinal features of physiological functions in the inhabitants of the North] *Fiziologiya cheloveka = Human Physiology*. 20(6), 137-143. (In Russian).
6. Solonin, Yu.G. (1994) [Physiological indicators of health of residents of Vorkuta]. *Narodnoe khozyajstvo Respubliki Komi = National Economy of the Komi Republic*. 3 (1), 98-103. (In Russian).
7. Baevsky R.M. (2004) [Analysis of Heart Rate Variability: History and Philosophy, Theory and Practice] *Klinicheskaya informatika i telemedicina = Clinical Informatics and Telemedicine*. 1, 54-64. (In Russian).
8. Bokeriya, L.A., Bokeriya, O.L. & Volkovskaya, I.V. (2009) [Variability of the heart rate: methods of measurement, interpretation, clinical use]. *Annaly` aritmologii` = Annals of arrhythmology*. 4, 21-32. (In Russian).
9. Vorobyeva, E.V. (2025) [Connection of Adaptation Disorders with Psychophysiological and Psychological Characteristics of Employees in the Southern Russian Electric Power Industry] *Psixologiya i pravo = Psychology and Law*. 15(1), 105-124. (In Russian).
10. Un.org [Internet]. (2005). *Universal Declaration on Bioethics and human rights*. https://www.un.org/ru/documents/decl_conv/declarations/bioethics_and_hr.shtm
11. Biryukova, E.V., Vasilyuk, N.A. & Andrianov, V.V. (2019) [Gender Features of Heart Rate Variability and Hemodynamic Support of Students' Academic Activities]. *Rossiiskij mediko-biologicheskij vestnik im. akademika I.P. Pavlova. = Russian Medical and Biological Bulletin named after Academician I. P. Pavlov*. 2, 188-196. doi:10.23888/PAVLOVJ2019272. (In Russian).
12. Venetseva, Yu.L., Putilin L.V. & Prokhorov P.Yu. (2019) [Gender Features of Heart Rate Variability and Psychometric Testing in Healthy Students]. *Sovremennye` voprosy` biomeditsiny` = Modern Issues of Biomedicine*. 3(3), 1-10. (In Russian).
13. Dadasova, G.M. (2015). [Gender and age-related features of heart rate variability in practically healthy individuals]. *Profilakticheskaya medicina = Preventive Medicine*. 18 (2), 54-58. doi:10.17116/profmed201518254-58. (In Russian).

COMPARISON OF VARIATIONAL CARDIOINTERVALOMETRY IN RESIDENTS
OF THE NORTHERN AND SOUTHERN TERRITORIES
THE EUROPEAN PART OF RUSSIA

I. V. Ulesikova, V. V. Voronov, S. S. Grinchuk, N. A. Tshukina, M. A. Kunavin, A. B. Mulik

In many recent studies, the influence of a combination of physical and geographical factors on the functioning of the human body has been substantiated. However, when conducting medical and biological studies, the individual's place of residence and gender are often overlooked. By considering the impact of environmental factors on the cardiovascular system, it becomes possible to objectify the assessment of the functional state of the autonomic nervous system (ANS) and provide an accurate evaluation of the individual's functional state.

Keywords: functional state, autonomic nervous system, heart rate, gender, physical and geographical factors.

Поступила в редакцию 12.05.2026 г.

Улесикова Ирина Владимировна

кандидат биологических наук,
научный сотрудник научно-исследовательского
отдела обитаемости Научно-исследовательского
центра,
ФГБВОУ ВО «Военно-медицинская академия
имени С. М. Кирова», г. Санкт-Петербург, РФ.
E-mail: ulesikovairina@mail.ru
ORCID: 0000-0001-9284-3280
SPIN-код: 9859-6036

Ulesikova Irina Vladimirovna

Candidate of Biological Sciences,
Researcher of the Research Department of Habitability
of the Research Center,
S.M. Kirov Military Medical Academy,
St. Petersburg, Russian Federation.

Воронов Виктор Витальевич

кандидат медицинских наук, начальник
лаборатории обитаемости объектов Научно-
исследовательского центра,
ФГБВОУ ВО «Военно-медицинская академия
имени С. М. Кирова», г. Санкт-Петербург, РФ.
E-mail: voronov_viktor@mail.ru
ORCID: 0009-0005-2430-891X
SPIN-код: 1628-6134

Voronov Viktor Vitalievich

Candidate of Medical Sciences,
Head of the Habitability Laboratory of the Research
Center,
S.M. Kirov Military Medical Academy,
St. Petersburg, Russian Federation.

Гринчук Светлана Сергеевна

научный сотрудник научно-исследовательского
отдела обитаемости Научно-исследовательского
центра,
ФГБВОУ ВО «Военно-медицинская академия
имени С. М. Кирова», г. Санкт-Петербург, РФ.
E-mail: fotinasvs53@gmail.com
ORCID: 0009-0006-3323-9781
SPIN-код: 8459-1211

Grinchuk Svetlana Sergeevna

Researcher of the Research Department of Habitability
of the Research Center,
S.M. Kirov Military Medical Academy,
St. Petersburg, Russian Federation.

Щукина Нэлла Алексеевна

научный сотрудник научно-исследовательского
отдела обитаемости Научно-исследовательского
центра,
ФГБВОУ ВО «Военно-медицинская академия
имени С. М. Кирова», г. Санкт-Петербург, РФ.
E-mail: tshukina.nella@mail.ru
ORCID: 0000-0001-9284-3280
SPIN-код: 8582-5461

Shchukina Nella Alekseevna

Researcher of the Research Department of Habitability
of the Research Center
S.M. Kirov Military Medical Academy,
St. Petersburg, Russian Federation.

Кунавин Михаил Алексеевич

кандидат биологических наук,
доцент кафедры биологии человека и
биотехнических систем ФГАОУ ВО «Северный
(Арктический) федеральный университет им.
М.В. Ломоносова», г. Архангельск, РФ.
E-mail: m.kunavin@narfu.ru
ORCID: 0000-0001-7948-1043
SPIN-код: 5271-0260

Kunavin Mikhail Alekseevich

Candidate of Biological Sciences,
Associate Professor of the Department of Human
Biology and Biotechnical Systems,
Lomonosov Northern (Arctic) Federal University,
Arkhangelsk, Russia.

Мулик Александр Борисович

доктор биологических наук, профессор, старший
научный сотрудник научно-исследовательского
отдела медико-психологического сопровождения
Научно-исследовательского центра,
ФГБВОУ ВО «Военно-медицинская академия
имени С. М. Кирова», г. Санкт-Петербург, РФ.
E-mail: mulikab@mail.ru
ORCID: 0000-0001-6472-839X
SPIN-код: 8079-9698

Mulik Alexander Borisovich

Doctor of Biological Sciences, Professor,
Senior Researcher of the Research Department of
Medical and Psychological Support of the Research
Center,
S.M. Kirov Military Medical Academy,
St. Petersburg, Russian Federation.

ИЗУЧЕНИЕ ДОЗОЗАВИСИМОЙ АНКСИОЛИТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ЭКСТРАКТА ШЛЕМНИКА БАЙКАЛЬСКОГО, КУЛЬТИВИРУЕМОГО НА ТЕРРИТОРИИ АСТРАХАНСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2026 В. В. Уранова, Н. А. Ломтева, Е. И. Кондратенко

Исследована дозозависимая анксиолитическая активность экстракта корней шлемника байкальского (*Scutellaria baicalensis* Georgi), культивируемого в Астраханской области, на модели хронического социального стресса у крыс. Экстракт вводили в дозах 50, 100, 200 и 300 мг/кг. Установлено, что в дозе 50 мг/кг экстракт шлемника байкальского вызывал преимущественно статистически незначимую тенденцию к нормализации изучаемых параметров. При введении экстракта в дозе 100 мг/кг впервые выявлены значимые изменения по сравнению со стресс-контролем ($p < 0,05$). Увеличилась продолжительность активного плавания, сократилось время пассивного плавания и иммобилизации. Также сократилась выраженность гематологических, биохимических и морфофункциональных нарушений. Дозы 200 и 300 мг/кг обеспечивали дальнейшее усиление эффекта: продолжительность активного плавания возрастала соответственно в 1,5 и 1,7 раза ($p < 0,05$), а показатели приближались к значениям интактных животных. Полученные результаты подтверждают дозозависимый характер стресс-протективного действия экстракта. Минимальной действующей дозой являлась доза 100 мг/кг.

Ключевые слова: Шлемник байкальский, экстракт, анксиолитическая активность, социальный стресс, дозозависимый эффект, минимальная действующая доза.

Введение. В современной физиологии и экспериментальной медицине проблема расширения адаптационных возможностей организма в условиях действия экстремальных факторов окружающей среды остается одной из наиболее фундаментальных [1–3]. Понятие стресса, первоначально сформулированное Г. Селье как неспецифический ответ организма на любое предъявленное ему требование, в современных реалиях трансформировалось в концепцию сложного многоуровневого процесса, затрагивающего молекулярно-генетические, метаболические и системные механизмы поддержания гомеостаза [4–6]. В условиях нарастающей антропогенной нагрузки, социальной напряженности и климатических изменений поиск эффективных средств – адаптогенов, способных повышать общую неспецифическую резистентность организма, приобретает статус стратегического направления фармакофизиологических исследований [7–11].

Физиологическая цена адаптации при воздействии интенсивных стрессоров зачастую оказывается чрезмерной, приводя к истощению функциональных резервов [12]. Ключевым звеном данного процесса является дезорганизация работы гипоталамо-гипофизарно-адренокортикальной и симпато-адреналовой систем, что влечет за собой каскад патофизиологических изменений: от нарушения сердечного ритма и метаболического сдвига до глубоких иммуносупрессивных состояний и структурных повреждений органов-мишеней [13, 14]. Важнейшим фактором повреждения в данном контексте выступает оксидативный стресс, представляющий собой дисбаланс между продукцией активных форм кислорода и мощностью эндогенных антиоксидантных систем [15]. В связи с этим особое внимание исследователей сосредоточено на поиске соединений, способных не только купировать симптомы стресс-реакции, но и оказывать системное протекторное действие, превентивно стабилизируя физиологические показатели [16].

Шлемник байкальский (*Scutellaria baicalensis* Georgi) (ШБ) выступает в качестве одного из наиболее перспективных и научно обоснованных источников рассматриваемых соединений. Данная культура, занимающая центральное место в традиционной восточной медицине на протяжении столетий, в настоящее время подвергается интенсивному изучению в рамках доказательной фармакологии [17, 18]. Высокая терапевтическая эффективность экстрактов растения обусловлена уникальным комплексом флавоноидов, представленным байкалином, байкалеином, вогонином и вогонозидом. Указанные метаболиты обеспечивают реализацию широкого спектра физиологических свойств, варьирующих от выраженного антиоксидантного и противоопухолевого до противовоспалительного и гипотензивного действия [19, 20].

Особая значимость ШБ в контексте стресс-протекции связана со способностью его компонентов модулировать активность ГАМК-ергических систем головного мозга [21]. Подобное воздействие, вероятно, позволяет осуществлять мягкую коррекцию психоэмоционального напряжения, выступающего первичным триггером системных адаптационных сдвигов и последующей дезорганизации гомеостаза. Однако биологическая ценность и количественное содержание действующих веществ в растительном сырье не являются константными величинами и значимо зависят от эколого-географических условий произрастания [22]. В данном аспекте особый научный интерес представляет изучение свойств ШБ, культивируемого на территории Астраханской области [23]. Данный регион характеризуется экстремальными для интродуцентов абиотическими факторами: резко континентальным климатом, высокой интенсивностью солнечной радиации, аридностью и засолением почвенного покрова. Согласно фундаментальным принципам фитофизиологии, воздействие умеренных стрессоров на само растение инициирует активацию вторичного метаболизма, что приводит к усиленному синтезу защитных соединений, в частности флавоноидов [24, 25]. Таким образом, интродукция ШБ в аридных условиях Нижнего Поволжья может способствовать получению сырья с измененным, потенциально более мощным биологическим профилем по сравнению с дикорастущими популяциями из исконных ареалов.

Несмотря на наличие серьезного пласта исследований, посвященных общим свойствам ШБ, вопрос дозозависимости его эффектов остается дискуссионным. В физиологии хорошо известен феномен гормезиса, когда малые дозы биологически активных веществ (БАВ) стимулируют адаптивные функции, в то время как высокие могут приводить к ингибированию защитных систем или проявлять прооксидантные свойства. Определение оптимального «терапевтического окна» для экстракта, полученного из культивируемого в Астраханской области сырья, имеет решающее значение для разработки эффективных схем коррекции дезадаптационных состояний. Понимание того, как варьирование концентрации активных веществ влияет на показатели общего адаптационного синдрома – от морфометрических параметров органов до биохимических маркеров стресса – позволит обосновать использование данного фитопрепарата в качестве средства персонализированной физиологической коррекции.

Изложенные факты обуславливают актуальность проведения комплексного исследования, направленного на изучение физиологических механизмов действия различных доз экстракта ШБ в условиях социальной модели стресса. Результаты исследования призваны не только углубить теоретические представления о механизмах реализации адаптационного потенциала растительных биорегуляторов, но и расширить базу доказательных данных об эффективности использования культивированного сырья в отечественной фармации и физиологии.

Цель исследования заключается в проведении сравнительного физиологического анализа дозозависимой анксиолитической активности экстракта корней ШБ, культивированного на территории Астраханской области, и оценке его влияния на показатели неспецифической адаптации организма.

Материал и методика исследования. Объектом исследования послужили корни ШБ (*Scutellaria baicalensis* Georgi), выращенного в условиях аридного климата на опытных участках в Астраханской области. Выбор данного региона обоснован специфическими почвенно-климатическими характеристиками, способствующими накоплению вторичных метаболитов в растительном сырье. Сбор материала (корни) осуществлялся в фазу окончания вегетации (сентябрь) у 2-х летних растений (2020 год сбора) [26].

Экстракт получали методом мацерации корней (3 мм) 70 %-ным этанолом (1:20) в течение 7 суток в темноте. Извлечение концентрировали на вакуумном испарителе ($\leq 45\text{ }^{\circ}\text{C}$) [27]. Для получения сухой формы густой остаток растворяли в этилацетате с последующим повторным упариванием и высушиванием до постоянной массы. Данная процедура обеспечила получение очищенного стабильного порошка и точность контроля при подготовке дозировок препарата.

Компонентный состав экстракта определяли методом высокоэффективной жидкостной хроматографии. Содержание байкалина составило 0,397 мг/г, байкалеина – 0,391 мг/г, вогонина – 1,531 мг/г сухого экстракта.

На основе полученной сухой субстанции путем взвешивания на аналитических весах подготавливались навески, соответствующие расчетным дозировкам (50, 100 и 200 мг/кг). Рабочие формы экстракта готовились непосредственно перед введением путем диспергирования навески в строго определенном объеме дистиллированной воды. Подобный алгоритм подготовки гарантировал однородность вводимого средства и строгое соблюдение дозозависимого принципа, заложенного в дизайн исследования [28].

Эксперименты выполнены на здоровых нелинейных половозрелых крысах-самцах массой 200–220 г ($n=60$). Выбор пола обусловлен необходимостью исключения влияния циклических гормональных колебаний на показатели стресс-реактивности. Животные содержались в условиях стандартного вивария при свободном доступе к воде и полноценному гранулированному корму, при 12-часовом световом режиме и температуре воздуха $22\pm 2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Протокол исследования соответствовал этическим нормам, изложенным в «Директиве 2010/63/EU Европейского парламента и Совета Европейского Союза по охране животных, используемых в научных целях», а также принципам Хельсинкской декларации о гуманном отношении к животным. Перед началом манипуляций особи проходили двухнедельный период адаптации к условиям лаборатории.

Оценка анксиолитической активности проводилась с использованием модели социального стресса. Животные были рандомизированы на шесть равных групп (по 10 особей в каждой):

Группа «Интakтная» – крысы, не подвергавшиеся стресс-воздействию и получавшие эквивалентное количество дистиллированной воды. Группа «Стресс (контроль)» – животные, подвергавшиеся социальному стрессу без фармакологической поддержки (введение плацебо – воды).

Группы «Стресс – экстракт ШБ (50 мг/кг)», «Стресс – экстракт ШБ (100 мг/кг)», «Стресс – экстракт ШБ (200 мг/кг)», «Стресс – экстракт ШБ (300 мг/кг)» – экспериментальные группы, в которых животным вводили экстракт ШБ в дозах 50 мг/кг, 100 мг/кг, 200 мг/кг и 300 мг/кг соответственно в условиях социального стресса.

Для индукции психоэмоционального стрессового состояния применялась модель сенсорного контакта, основанная на парадигме хронического социального конфликта (межсамцовых конфронтаций) [29]. Выбор указанного метода обусловлен возможностью формирования стойкого дезадапционного состояния, затрагивающего как поведенческие паттерны, так и системные физиологические показатели под влиянием этологически адекватного фактора. Экспериментальная процедура реализовывалась в специализированных клетках, разделенных прозрачной перфорированной перегородкой. Данное техническое решение позволяло животным поддерживать непрерывный сенсорный контакт (зрительный, ольфакторный и слуховой), исключая возможность непосредственного травматического взаимодействия во внеэкспериментальный период [30].

Ежедневный протокол социального стрессирования включал следующие этапы:

1. Агонистические столкновения. В светлое время суток перегородка убиралась на 10 минут, обеспечивая возможность прямого физического контакта. В ходе взаимодействия фиксировались классические элементы агрессивного и субмиссивного поведения: атаки, погони, вертикальные стойки и принятие подчиненных поз.

2. Формирование социальной иерархии. На основании результатов конфронтаций в каждой паре выделялись особи с доминирующим («агрессоры») и подчиненным («жертвы») типами поведения. Дальнейшее исследование проводилось на группе субмиссивных самцов, демонстрирующих выраженные признаки хронического стресса.

3. Ротация партнеров. Для нивелирования фактора привыкания и поддержания высокой интенсивности стрессогенного воздействия пары ежедневно менялись. При этом подчиненная особь направлялась в клетку к новому, заведомо более агрессивному партнеру.

Продолжительность периода моделирования социального конфликта составляла 14 суток. Исследуемый экстракт ШБ в дозах 50, 100, 200 и 300 мг/кг вводился субмиссивным животным внутривентрально за 60 минут до начала ежедневной процедуры агонистического контакта на 7-е и последующие сутки. Контрольная группа («жертвы») аналогичным образом получала эквивалентное количество дистиллированной воды [31–34].

Применение описанной модели позволило оценить дозозависимую анксиолитическую активность экстракта ШБ в условиях пролонгированного психоэмоционального давления, максимально приближенного к естественным механизмам формирования дезадаптации в популяции.

Для верификации уровня психоэмоционального дефицита и оценки эффективности коррекции экстрактом ШБ применялся тест «Вынужденное плавание» (тест «Порсолта»). В рамках настоящего исследования роль иницирующего фактора («претеста») выполнял протокол социального стресса, что позволило исключить первичную 15-минутную сессию плавания и оценивать влияние межсамцовых конфронтаций на аффективную сферу животных. Основным этапом тестирования в водной среде проводился через 24 часа от момента окончания последней сессии социальной конфронтации [35, 36].

Продолжительность теста составляла 5 минут. Животные помещались в узкий прозрачный цилиндр, заполненный водой температурой 24–25 °С на глубину, препятствующую поиску опоры или попыткам побега. В ходе эксперимента фиксировались следующие поведенческие показатели:

- длительность активного плавания – суммарное время совершения энергичных движений конечностями, направленных на преодоление препятствия;

- период пассивного плавания – интервал времени, в течение которого животное полностью прекращает активные локомоции (интенсивные гребки, попытки выпрыгивания или карабканья по стенкам цилиндра) и переходит к совершению лишь минимальных движений конечностями, необходимых исключительно для удержания головы над поверхностью воды и сохранения вертикального положения тела;

- время полной иммобилизации – период пассивного зависания в воде в характерной вертикальной позе.

Сокращение времени иммобилизации и увеличение продолжительности фазы активного плавания в опытных группах интерпретировалось как проявление антидепрессивного и анксиолитического действия исследуемого экстракта [37].

В работе были проведены гематологический и биохимические анализы. Процедура забора биологического материала осуществлялась немедленно после завершения экспериментального периода. Взятие проб крови проводилось при декапитации животных под легким эфирным наркозом, что обеспечивало получение репрезентативного объема цельной крови и сыворотки для последующих анализов. Для исключения влияния суточных ритмов на физиологические показатели все манипуляции выполнялись в утренние часы (с 9:00 до 11:00).

Гематологический анализ выполнялся на основе проб цельной крови, собранной в вакуумные пробирки с антикоагулянтом КЗ-ЭДТА. Количественное определение форменных элементов, включая концентрацию гемоглобина, общее число эритроцитов, лейкоцитов и тромбоцитов, проводилось на автоматическом гематологическом анализаторе, откалиброванном для исследования биоматериала мелких лабораторных грызунов.

Особое значение в контексте изучения анксиолитической активности ШБ имела оценка лейкоцитарной формулы. Микроскопическое исследование мазков крови, фиксированных метиловым спиртом и окрашенных по методу Романовского-Гимза, позволяло дифференцировать различные типы белых кровяных телец. На основании полученных данных рассчитывался интегральный показатель – лейкоцитарный индекс стресса (отношение сегментоядерных нейтрофилов к лимфоцитам). Данный коэффициент служил объективной мерой напряженности адаптационных процессов и выраженности иммуносупрессивного действия хронического социального конфликта [38].

Для проведения биохимических исследований забранную кровь выдерживали при комнатной температуре в течение 30 минут до формирования сгустка, после чего центрифугировали при 3000 об/мин в течение 15 минут. Полученная сыворотка аликвотировалась и хранилась при температуре –20 °С до момента проведения анализа. Определение биохимических параметров осуществлялось спектрофотометрическим методом с использованием стандартных коммерческих наборов реактивов [39].

Программа биохимического скрининга включала оценку показателей, наиболее чувствительных к влиянию стресс-факторов и анксиолитическому действию флавоноидов ШБ. Уровень глюкозы в плазме крови определялся гексокиназным методом для характеристики энергетического обеспечения стресс-реакции. Состояние липидного обмена и неспецифическую резистентность оценивали по содержанию общего белка и альбуминовой фракции, которые определяли биуретовым и колориметрическим методом с бромкрезоловым зеленым. Для верификации цитолитического синдрома, возникающего на фоне метаболической перегрузки, измерялась активность аминотрансфераз (АЛТ и АСТ) оптимизированным энзиматическим кинетическим методом [40].

Для оценки интенсивности стресс-реакции и метаболических сдвигов в сыворотке крови определяли концентрацию лактата ферментативным

колориметрическим методом [39, 40]. Данный показатель был выбран в качестве ключевого индикатора выраженности физиологического напряжения и изменения интенсивности анаэробных процессов в ответ на воздействие социального стрессора. Изучение динамики уровня лактата позволяет судить о степени метаболической дезорганизации и эффективности дозозависимого защитного действия экстракта ШБ.

Микроскопический анализ печени, надпочечников, тимуса и селезёнки проводили у животных всех экспериментальных групп: интактной, стресс-контрольной и групп, получавших препарат сравнения либо экстракт ШБ. Оценивали общую структуру тканей, состояние клеток и кровенаполнение сосудов [40].

Статистическая обработка полученного массива данных осуществлялась при помощи программного пакета «Statistica 10.0». Количественные параметры предварительно проверялись на соответствие закону нормального распределения с использованием критерия Шапиро-Уилка. Ввиду подтвержденного нормального распределения признаков для оценки достоверности межгрупповых различий применялся параметрический t-критерий Стьюдента для независимых выборок. Выполненный анализ включал обязательную проверку равенства генеральных дисперсий по критерию Левена для обоснования правомерности использования выбранного статистического метода. Экспериментальные данные представлены в формате среднего арифметического значения и стандартной ошибки среднего ($M \pm m$). Статистически значимыми признавались различия при уровне вероятности ошибки $p < 0,05$ [41].

Итоговый комплекс лабораторных методов обеспечил получение многогранной физиологической характеристики состояния организма, что необходимо для научного обоснования дозозависимого эффекта ШБ, культивированного на территории Астраханской области.

Результаты исследований и их обсуждение. Анализ поведенческой активности в тесте Порсолта позволил выявить выраженные изменения аффективного статуса лабораторных животных под влиянием хронического социального стресса и последующей фармакологической коррекции экстрактом ШБ. Результаты этологического мониторинга представлены в таблице 1.

Таблица 1
Показатели поведенческой активности крыс в тесте «Вынужденное плавание» ($M \pm m$, $n=10$)

Группы животных	Активное плавание, с	Пассивное плавание, с	Иммобильность, с
Интактная	138,4 $\pm$ 21,25	87,6 $\pm$ 12,41	59,0 $\pm$ 7,81
Стресс (контроль)	82,2 $\pm$ 12,17*	122,4 $\pm$ 18,26*	90,4 $\pm$ 11,4*
Стресс – экстракт ШБ (50 мг/кг)	79,5 $\pm$ 10,35	115,5 $\pm$ 17,03	101,0 $\pm$ 15,72
Стресс – экстракт ШБ (100 мг/кг)	120,8 $\pm$ 15,29#	90,2 $\pm$ 11,99#	63,0 $\pm$ 8,45#
Стресс – экстракт ШБ (200 мг/кг)	125,6 $\pm$ 16,13#	85,4 $\pm$ 12,27#	57,0 $\pm$ 7,27#
Стресс – экстракт ШБ (300 мг/кг)	140,4 $\pm$ 20,47#	80,6 $\pm$ 11,21#	55,0 $\pm$ 6,53#

Примечание: * – различия достоверны по сравнению с группой «Интактная» ($p < 0,05$); # – различия достоверны по сравнению с группой «Стресс (контроль)» ($p < 0,05$).

Установлено, что моделирование 14-дневного социального конфликта привело к формированию выраженного депрессивноподобного состояния у животных контрольной группы, о чём свидетельствовало достоверное снижение продолжительности активного плавания в 1,7 раза ($p < 0,05$) относительно интактных особей. Одновременно со снижением мотивационного компонента поведения отмечалось усиление признаков «поведенческого отчаяния»: период пассивного плавания увеличился в 1,4 раза ($p < 0,05$), а продолжительность полной иммобилизации – в 1,5 раза ($p < 0,05$) по сравнению с показателями интактной группы.

Курсовое введение экстракта ШБ продемонстрировало выраженный дозозависимый стресс-протективный эффект. Применение минимальной дозировки (50 мг/кг) не привело к статистически значимому изменению параметров относительно контроля, однако обозначило тенденцию к снижению пассивного плавания и иммобильности. При использовании экстракта в дозе 100 мг/кг отмечалось достоверное увеличение времени активного плавания в 1,5 раза ($p < 0,05$) и снижение периодов пассивного плавания и иммобильности по сравнению с группой стрессированных животных без фармакологической поддержки.

В группах, получавших экстракт в дозах 200 и 300 мг/кг, также наблюдались положительные изменения этологических показателей, несколько более выраженные по сравнению с эффектом дозы 100 мг/кг. При введении экстракта в дозе 200 мг/кг продолжительность активного плавания увеличилась в 1,5 раза ($p < 0,05$), время иммобилизации сократилось в 1,6 раза ($p < 0,05$), а период пассивного плавания – в 1,4 раза относительно группы «Стресс (контроль)». В дозе 300 мг/кг изменения имели сходную, но немного более выраженную направленность: продолжительность активного плавания возросла в 1,7 раза ($p < 0,05$), приближаясь к показателю интактных животных, а период пассивного плавания и иммобильности сократился в 1,5 раза и 1,6 раза ($p < 0,05$) по сравнению со стресс-контролем. Полученные результаты указывают на сохранение дозозависимой тенденции в действии экстракта.

Таким образом, минимальной эффективной дозой экстракта являлась доза 100 мг/кг, при введении которой наблюдались статистически значимые изменения поведенческих показателей относительно группы стресс-контроля ($p < 0,05$). Полученные результаты обосновывают целесообразность использования данной дозы в дальнейших исследованиях механизмов анксиолитического действия экстракта ШБ. Экстракт ШБ, полученный из растений, выращенных в условиях аридного климата, уменьшал выраженность поведенческого дефицита, вызванного хроническим психоэмоциональным стрессом. Увеличение продолжительности активного плавания и сокращение периодов пассивного плавания и иммобилизации указывают на сохранение поисковой активности животных и активацию адаптивных механизмов.

Поскольку хронический стресс проявляется не только поведенческими нарушениями, но и системными изменениями, следующим этапом исследования стала оценка клеточного состава периферической крови. Установлено, что социальный стресс сопровождался изменением ряда гематологических показателей (табл. 2). В группе стресс-контроля наблюдалась тенденция к снижению количества эритроцитов и концентрации гемоглобина в 1,2 раза по сравнению с интактной группой. При этом количество тромбоцитов статистически значимо снижалось в 1,3 раза ($p < 0,05$), тогда как общее количество лейкоцитов статистически значимо увеличивалось в 1,5 раза ($p < 0,05$).

Таблица 2

Влияние экстракта ШБ на гематологические показатели крыс ($M \pm m$, $n=10$)

Показатели	Интактная	Стресс (контроль)	Стресс – экстракт ШБ (50 мг/кг)	Стресс – экстракт ШБ (100 мг/кг)	Стресс – экстракт ШБ (200 мг/кг)	Стресс – экстракт ШБ (300 мг/кг)
Эритроциты, $10^{12}/л$	8,2 $\pm$ 0,18	7,0 $\pm$ 0,16	7,2 $\pm$ 0,17	7,9 $\pm$ 0,15	8,0 $\pm$ 0,16	8,3 $\pm$ 0,17
Hb, г/л	148,3 $\pm$ 5,65	126,7 $\pm$ 4,27	130,9 $\pm$ 4,95	139,1 $\pm$ 3,97	142,0 $\pm$ 4,11	145,3 $\pm$ 4,37
Лейкоциты, $10^9/л$	8,4 $\pm$ 0,45	12,8 $\pm$ 0,51*	12,0 $\pm$ 0,47	8,8 $\pm$ 0,39#	8,5 $\pm$ 0,51#	8,0 $\pm$ 0,60#
Тромбоциты, $10^9/л$	720,1 $\pm$ 35,49	575,3 $\pm$ 32,91*	590,7 $\pm$ 29,87	702,2 $\pm$ 31,29	705,3 $\pm$ 31,97	710,9 $\pm$ 35,43
Нейтрофилы, %	22,5 $\pm$ 1,97	37,0 $\pm$ 3,75*	40,1 $\pm$ 3,25	28,9 $\pm$ 2,39#	26,9 $\pm$ 1,85#	25,7 $\pm$ 3,09#
Лимфоциты, %	72,9 $\pm$ 4,22	50,1 $\pm$ 3,91*	52,0 $\pm$ 3,59	69,3 $\pm$ 3,71#	66,9 $\pm$ 3,29#	69,7 $\pm$ 4,09#
Н/Л	0,31 $\pm$ 0,03	0,74 $\pm$ 0,06**	0,77 $\pm$ 0,05	0,42 $\pm$ 0,04#	0,40 $\pm$ 0,03#	0,37 $\pm$ 0,03##

Примечание: * – различия достоверны по сравнению с группой «Интактная» ($p<0,05$); ** ($p<0,01$). # – различия достоверны по сравнению с группой «Стресс (контроль)» ($p<0,05$); ## ($p<0,01$). Н/Л – отношение сегментоядерных нейтрофилов к лимфоцитам.

Изменение лейкоцитарной формулы характеризовалось нейтрофилией и относительной лимфопенией. Доля сегментоядерных нейтрофилов у стрессированных животных была в 1,6 раза выше, а доля лимфоцитов – в 1,5 раза ниже интактного значения ($p<0,05$). В результате индекс Н/Л увеличивался в 2,4 раза ($p<0,01$), что указывает на выраженное напряжение адаптационных механизмов.

Экстракт в дозе 50 мг/кг не обеспечивал значимой коррекции гематологических нарушений. При дозе 100 мг/кг количество эритроцитов и концентрация гемоглобина увеличивались соответственно в 1,1 раза, количество тромбоцитов – в 1,2 раза, а содержание лейкоцитов уменьшалось в 1,5 раза относительно группы «Стресс (контроль)» ($p<0,05$). В лейкоцитарной формуле при введении 100 мг/кг доля нейтрофилов снижалась в 1,3 раза, а содержание лимфоцитов увеличивалось в 1,4 раза ($p<0,05$). Индекс Н/Л уменьшался в 1,8 раза ($p<0,05$), что свидетельствует об ослаблении гематологических проявлений стресс-реакции.

При использовании дозы 200 мг/кг количество лейкоцитов было в 1,5 раза ниже ($p<0,05$), а количество тромбоцитов – в 1,2 раза выше показателей стресс-контроля. Доля нейтрофилов снижалась в 1,4 раза, содержание лимфоцитов увеличивалось в 1,3 раза ($p<0,05$), индекс Н/Л уменьшался в 1,9 раза ($p<0,05$).

Доза 300 мг/кг обеспечивала наиболее выраженное восстановление клеточного состава крови. По сравнению со стресс-контролем количество лейкоцитов уменьшалось в 1,3 раза ($p<0,05$), содержание нейтрофилов – в 1,4 раза ($p<0,05$), тогда как доля лимфоцитов увеличивалась в 1,4 раза ($p<0,05$). Индекс Н/Л снижался в 2,0 раза ($p<0,01$) и статистически значимо практически не отличался от интактного значения.

Полученные результаты показывают, что экстракт ограничивал развитие стресс-индуцированной нейтрофилии, лимфопении и лейкоцитоза. Восстановление индекса Н/Л согласуется с изменениями поведенческих показателей и подтверждает снижение напряжённости системной адаптационной реакции.

Для комплексной оценки стресс-протективного действия экстракта наряду с гематологическими показателями были исследованы биохимические маркеры, отражающие состояние обменных процессов. Установлено, что социальный стресс

вызывал выраженные метаболические нарушения (табл. 3). Концентрация глюкозы у животных группы стресс-контроля увеличивалась в 1,5 раза ($p<0,05$), активность АЛТ и АСТ – соответственно в 1,7 и 1,5 раза, а содержание лактата – в 1,8 раза по сравнению с интактной группой ($p<0,05$). Одновременно концентрации общего белка и альбумина снижались соответственно в 1,6 и 1,8 раза ($p<0,05$).

Таблица 3

Влияние экстракта ШБ на биохимические показатели крови крыс ($M\pm m$, $n=10$)

Показатели	Интактная	Стресс (контроль)	Стресс – экстракт ШБ (50 мг/кг)	Стресс – экстракт ШБ (100 мг/кг)	Стресс – экстракт ШБ (200 мг/кг)	Стресс – экстракт ШБ (300 мг/кг)
Глюкоза, ммоль/л	5,3±0,25	7,8±0,37*	7,0±0,29	5,7±0,35#	4,9±0,27#	4,5±0,31#
Общий белок, г/л	78,5±1,17	50,0±1,23*	62,0±1,53	74,2±0,91#	76,5±0,89#	77,8±1,19#
Альбумин, г/л	39,5±0,84	22,0±0,72*	33,0±0,79	35,3±0,65#	37,5±0,83#	38,6±0,83#
АЛТ, Ед/л	61,0±2,87	101,9±3,41*	78,1±3,97	62,9±2,21#	66,4±2,69#	63,9±2,73#
АСТ, Ед/л	112,9±5,74	170,7±6,43*	143,1±6,71	120,5±5,31#	115,1±4,91#	117,9±4,85#
Лактат, ммоль/л	1,1±0,13	2,0±0,27*	1,7±0,31	0,9±0,35##	1,0±0,15#	1,1±0,11#

Примечание: * – различия достоверны по сравнению с группой «Интактная» ($p<0,05$); ** ($p<0,01$). # – различия достоверны по сравнению с группой «Стресс (контроль)» ($p<0,05$); ## ($p<0,01$).

Экстракт в дозе 50 мг/кг не обеспечивал значимой коррекции биохимических нарушений. В дозе 100 мг/кг экстракт уменьшал концентрацию глюкозы в 1,4 раза ($p<0,05$), активность АЛТ и АСТ – соответственно в 1,6 и 1,4 раза ($p<0,05$), а содержание лактата – в 2,2 раза относительно стресс-контроля ($p<0,01$). Концентрации общего белка и альбумина возрастали соответственно в 1,5 и 1,6 раза ($p<0,05$).

При дозах 200 и 300 мг/кг наблюдалось дальнейшее дозозависимое ослабление метаболических нарушений. В дозе 300 мг/кг концентрация глюкозы снижалась в 1,7 раза, активность АЛТ – в 1,6 раза, АСТ – в 1,5 раза, а содержание лактата – в 1,8 раза относительно стресс-контроля ($p<0,05$). Уровни общего белка и альбумина возрастали соответственно в 1,6 и 1,8 раза ($p<0,05$). Большинство показателей при этом статистически значимо не отличалось от интактного уровня.

Проведённый микроскопический анализ позволил оценить влияние стрессового воздействия и экстракта ШБ на структуру исследованных органов. У интактных животных строение печени, надпочечников, тимуса и селезёнки соответствовало норме. В стресс-контрольной группе отмечались умеренные изменения тканевой структуры и кровенаполнения сосудов. У животных, получавших экстракт, выявленные нарушения были менее выражены, что указывает на его возможное морфопротективное действие.

Экстракт корней ШБ оказывал дозозависимое анксиолитическое действие, проявлявшееся уменьшением поведенческого дефицита, восстановлением клеточного состава крови и ограничением метаболических нарушений. Доза 50 мг/кг не вызвала статистически значимой коррекции большинства показателей. Минимальной действующей дозой являлась доза 100 мг/кг, при которой были установлены значимые изменения этологических, гематологических и биохимических параметров относительно стресс-контроля ($p<0,05$). Дозы 200 и 300 мг/кг оказывали более выраженное действие, однако увеличение эффекта при переходе от 200 к 300 мг/кг было умеренным, что может свидетельствовать о приближении к плато дозозависимого ответа.

Для дальнейшего исследования механизмов действия экстракта целесообразно использовать дозу 100 мг/кг как минимальную эффективную. Вместе с тем окончательное подтверждение такого вывода требует анализа фактических индивидуальных данных и межгруппового сравнения методом однофакторного дисперсионного анализа с последующим критерием множественных сравнений. Применение нескольких независимых t-тестов для шести групп повышает вероятность ошибки первого рода.

Заключение. Проведённое экспериментальное исследование позволило установить наличие дозозависимой анксиолитической активности экстракта ШБ (*Scutellaria baicalensis* Georgi), культивируемого на территории Астраханской области. Полученные данные свидетельствуют о способности исследуемого экстракта ограничивать выраженность функциональных и структурных нарушений, возникающих при стрессовом воздействии, а также повышать неспецифическую резистентность организма. Характер выявленных изменений позволяет рассматривать действие экстракта как комплексное, связанное с коррекцией поведенческих проявлений стресса и снижением выраженности изменений во внутренних органах.

Анализ результатов показал, что выраженность эффекта зависела от количества вводимого экстракта. Применение дозы 50 мг/кг сопровождалось преимущественно тенденцией к улучшению исследуемых показателей, однако наблюдавшиеся изменения не позволяли считать данную дозировку устойчиво эффективной в условиях использованной экспериментальной модели. Следовательно, доза 50 мг/кг может рассматриваться как субэффективная, не обеспечивающая достаточного уровня анксиолитического действия.

При увеличении дозы до 100 мг/кг были впервые зарегистрированы статистически значимые изменения относительно группы стресс-контроля. Введение экстракта в указанной дозе сопровождалось улучшением поведенческих показателей, отражающих активность животных и выраженность стресс-индуцированных нарушений. Увеличение продолжительности активного поведения и уменьшение показателей пассивности и иммобилизации свидетельствуют об ослаблении поведенческих проявлений стресса и сохранении адаптационного потенциала организма. На основании совокупности полученных результатов доза 100 мг/кг может быть определена как минимальная действующая доза экстракта ШБ в условиях проведённого эксперимента.

Применение экстракта в дозах 200 и 300 мг/кг сопровождалось дальнейшим усилением выявленных эффектов. В данных экспериментальных группах отмечались более выраженное увеличение продолжительности активного плавания и сокращение периодов пассивного поведения по сравнению с животными группы стресс-контроля. При введении экстракта в дозе 200 мг/кг продолжительность активного плавания увеличивалась в 1,5 раза, тогда как в дозе 300 мг/кг – в 1,7 раза. Одновременно сокращались продолжительность иммобилизации и период пассивного плавания. Подобная динамика подтверждает дозозависимый характер действия исследуемого средства в диапазоне от 100 до 300 мг/кг. Вместе с тем наличие значимого эффекта уже при дозе 100 мг/кг указывает на отсутствие необходимости применения максимальных дозировок для достижения базового уровня физиологически значимого анксиолитического действия.

Результаты морфологического исследования согласуются с данными функциональной оценки. Стрессовое воздействие сопровождалось изменениями структуры органов, участвующих в реализации и регуляции общего адаптационного

синдрома. Применение экстракта способствовало уменьшению выраженности обнаруженных нарушений в печени, надпочечниках, тимусе и селезёнке. Выявленные особенности могут указывать на способность компонентов экстракта ограничивать последствия длительного напряжения регуляторных систем, поддерживать структурную сохранность органов-мишеней и препятствовать развитию выраженной дезадаптации. Сочетание поведенческих и морфологических эффектов позволяет предположить системный характер анксиолитического действия изучаемого растительного средства.

Вероятной основой обнаруженной активности служит комплекс БАВ ШБ, прежде всего флавоноидов, включая байкалин, байкалеин, вогонин и вогонозид [17–20]. Их совокупное антиоксидантное, нейротропное и противовоспалительное действие потенциально может способствовать ограничению стресс-индуцированных метаболических нарушений, стабилизации функционального состояния центральных регуляторных механизмов и поддержанию адаптационных реакций. Вместе с тем уточнение конкретных молекулярных и нейрогуморальных механизмов требует проведения дополнительных исследований с определением гормональных, биохимических и молекулярных маркеров стресса [20–22].

Таким образом, экстракт ШБ, полученный из растительного сырья, культивируемого в природно-климатических условиях Астраханской области, проявляет дозозависимую анксиолитическую активность. Минимальной действующей дозой в условиях использованной экспериментальной модели следует считать 100 мг/кг, поскольку именно при её применении впервые отмечены статистически значимые положительные изменения исследуемых показателей. Дозы 200 и 300 мг/кг обеспечивали более выраженный эффект, однако доза 100 мг/кг характеризовалась оптимальным соотношением минимальной фармакологической нагрузки и подтверждённой биологической активности.

Полученные результаты расширяют представления об адаптогенном потенциале *Scutellaria baicalensis* Georgi астраханской популяции и создают экспериментальные предпосылки для дальнейшей разработки стандартизированного растительного средства анксиолитического действия. В последующих исследованиях целесообразно провести количественную стандартизацию экстракта по содержанию основных флавоноидов, уточнить механизмы его влияния на нейроэндокринные и антиоксидантные системы, а также подтвердить эффективность минимальной действующей дозы 100 мг/кг на других моделях стрессового воздействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазачев, О. С. Адаптационная медицина: стратегия психофизиологического приспособления человека к критически измененной окружающей среде / О. С. Глазачев, С. Ю. Крыжановская // Вестник Международной академии наук. Русская секция. – 2019. – №. 1. – С. 48-55.
2. Kurnaz M. Physiological responses and adaptive mechanisms of amphibians and reptiles to multiple interacting environmental stressors: An integrative review / M. Kurnaz // Frontiers in Physiology. – 2026. – Vol. 17. – P. 1785483.
3. Изучение влияния экстракта травы Астрагала лисьего на свободнорадикальные процессы в печени и миокарде белых крыс в условиях информационного стресса / М. У. Сергалиева, А. А. Цибизова, О. А. Башкина, М. А. Самоутруева // Астраханский медицинский журнал. – 2022. – Т. 17, № 4. – С. 109-116.
4. Water physicochemical factors and oxidative stress physiology in fish, a review / B. Chu, K. Marwaha, T. Sanvictores, A.O. Awosika, D. Ayers // Frontiers in Environmental Science. – 2023. – Vol. 11. – P. 1240813.
5. Кругликов, Н. Ю. Физиология стресса: нейроэндокринные механизмы и его влияние на организм / Н. Ю. Кругликов, Н. В. Ковязина // Биология и интегративная медицина. – 2026. – № 5 (83). – С. 14-19.

6. Филаретова, Л. П. Стресс в физиологических исследованиях / Л. П. Филаретова // Российский физиологический журнал им. ИМ Сеченова. – 2010. – Т. 96, №. 9. – С. 924-935.
7. Барнаулов, О. Д. Стресс-лимитирующие свойства классических фитоадаптогенов / О. Д. Барнаулов, Т. В. Осипова // Обзоры по клинической фармакологии и лекарственной терапии. – 2012. – Т. 10, № 3. – С. 40-49.
8. Маснавиева, М. Р. Воздействие адаптогенов на организм / М. Р. Маснавиева // Молодежь и системная модернизация страны. – 2022. – С. 49-52.
9. Растения рода *Salicornia* - сбалансированный источник биоактивных компонентов (обзор) / Е. В. Голубкина, Р. Р. Исякаева, М. В. Мажитова, А. А. Таранина // Биология и интегративная медицина. – 2019. – № 11(39). – С. 43-54.
10. Panossian, A. G. Evolution of the adaptogenic concept from traditional use to medical systems: Pharmacology of stress-and aging-related diseases / A. Panossian, T. Lemerond, T. Efferth // Medicinal research reviews. – 2021. – Vol. 41, No. 1. – С. 630-703.
11. The effect of adaptogenic plants on stress: A systematic review and meta-analysis / A. Toth-Meszaros, G. Garmaa, P. Hegyi, A. Bánvölgyi, B. Fenyves, P. Fehervari, A. Harnos, D. Gergő, U. N. Do To, D. Csupor // Journal of Functional Foods. – 2023. – Vol. 108. – С. 105695.
12. Antoni, M. H. Stress management interventions to facilitate psychological and physiological adaptation and optimal health outcomes in cancer patients and survivors / M.H. Antoni, P.I. Moreno, F.J. Penedo // Annual review of psychology. – 2023. – Vol. 74, No. 1. – С. 423-455.
13. Cool, J. The physiology of stress / J. Cool, D. Zappetti // Medical student well-being: An essential guide. – Cham : Springer International Publishing, 2019. – P. 1-15.
14. A review of heat stress in chickens. Part I: Insights into physiology and gut health / G. Brugaletta, J.R. Teyssier, S.J. Rochell, S. Dridi, F. Sirri // Frontiers in physiology. – 2022. – Vol. 13. – P. 934381.
15. Li, Y. Oxidative stress in poultry and the therapeutic role of herbal medicine in intestinal health / Y. Li, K. Wang, C. Li // Antioxidants. – 2024. – Vol. 13, No. 11. – P. 1375.
16. Oxidative stress and inflammation in the pathogenesis of neurological disorders: Mechanisms and implications / U.C. Dash, N.K. Bhol, S.K. Swain, R.R. Samal, P.K. Nayak, V. Raina, S.K. Panda, R.G. Kerry, A.K. Duttaroy, A. B. Jena // Acta Pharmaceutica Sinica B. – 2025. – Vol. 15, No. 1. – P. 15-34.
17. Изучение ноотропного действия экстракта *Scutellaria baicalensis* Georgi при моделировании тревожно-депрессивных расстройств у крыс при выработке условного рефлекса пассивного избегания / В. В. Уранова, Н. А. Ломтева, О. В. Близняк, М.В. Мажитова, Е.И. Кондратенко // Астраханский медицинский журнал. – 2023. – Т. 18, № 3. – С. 103-114.
18. *Scutellaria baicalensis* Georgi and their natural flavonoid compounds in the treatment of ovarian cancer: a review / J. Cai, Q. Hu, Z. He, X. Chen, J. Wang, X. Yin, X. Ma, J. Zeng // Molecules. – 2023. – Vol. 28, No. 13. – P. 5082.
19. Research progress on pharmacological properties and application of probiotics in the fermentation of *Scutellaria baicalensis* Georgi / F. Guo, C. Li, J. Dou, J. Liang, Z. Chen, Z. Xu, T. Wang // Frontiers in Nutrition. – 2024. – Vol. 11. – P. 1407182.
20. *Scutellaria baicalensis* Georgi in metabolic-associated fatty liver disease treatment: research progress / L. Chen, E. Liu, X. Zhao, X. Liu, Q. Dong, Y. Lou, G. Huang, L. Li, Y. He // Frontiers in Pharmacology. – 2025. – Vol. 16. – P. 1565461.
21. Multi-target intervention mechanisms and prospects of the traditional Chinese medicine *Scutellaria baicalensis* georgi in Alzheimer's disease / M. Zhao, Y. Qu, S. Zhang, M. Zhang, H. Wang, Y. Yang, G. Xue, X. Hou, X. Yan // Frontiers in Pharmacology. – 2026. – Vol. 17. – P. 1707688.
22. Уранова, В. В. Изучение стресс-протективного и анксиолитического действий экстракта *Scutellaria baicalensis* Georgi в условиях «социального» стресса / В. В. Уранова, Н. А. Ломтева, О. Н. Кулешова // Siberian Journal of Life Sciences and Agriculture. – 2023. – Т. 15, № 5. – С. 117-136. – DOI 10.12731/2658-6649-2023-15-5-929.
23. Грязнов, М. Ю. Шлемник байкальский (*Scutellaria baicalensis* Georgi) - разработка методики проведения испытаний на отличимость, однородность и стабильность / М. Ю. Грязнов, О. М. Савченко // Аграрная Россия. – 2024. – № 6. – С. 10-14. – DOI 10.30906/1999-5636-2024-6-10-14.
24. Биогеохимические исследования почв терруара виноградников Западного Прикаспия и возможности освоения потенциала аридных земель / Э.А. Халилова, З.Г. Залибеков, М.Е. Котенко, В.И. Черкашин, Э.А. Исламмагомедова, А.А. Абакарова // Аридные экосистемы. – 2025. – Т. 31, № 1 (102). – С. 124-135.
25. Сафронова, И. Н. Современный растительный покров Северо-Западного Прикаспия и его картографическое отображение / И.Н. Сафронова, Т.Ю. Каримова, Н.Ю. Степанова // География и природные ресурсы. – 2023. – № 5S. – С. 45-51.

26. Мирошников, П. Н. Антиоксидантная активность экстрактов душицы обыкновенной и сабельника болотного, произрастающих в Алтайском крае, в связи с содержанием в них флавоноидов / П.Н. Мирошников, К.В. Жучаев, Ю.И. Коваль // Вестник НГАУ (Новосибирский государственный аграрный университет). – 2024. – № 3(72). – С. 213-220. – DOI 10.31677/2072-6724-2024-72-3-213-220.
27. Получение биологически активного комплекса из корней *Ferula foetida* (bunge) Regel, обладающего антиоксидантной активностью / Т.С. Хоснутдинова, А.О. Сапиева, Н.Г. Гемеджиева, Ж.Ж. Каржаубекова, Н.А. Султанова // Academic Journal of Physical and Chemical Sciences. – 2025. – № 1. – С. 252–265-252–265.
28. Батарея тестов для изучения адаптогенного действия биологически активных веществ в доклинических исследованиях / Е.Б. Шустов, С.В. Оковитый, В.Ц. Болотова, А.Е. Ким // Формулы фармации. – 2021. – Т. 3, №. 2. – С. 10-25.
29. Смолева, Е. О. Социальный стресс и стратегии его преодоления: анализ концепций и моделей / Е.О. Смолева // Социальное пространство. – 2020. – Т. 6, №. 3. – С. 3-3.
30. Липатова, Т. Е. Здоровье популяции и социальный стресс (на примере распространенности инфаркта миокарда и язвенной болезни желудка и двенадцатиперстной кишки) / Т.Е. Липатова, Л.А. Тюльтева, Т.П. Денисова // Саратовский научно-медицинский журнал. – 2021. – Т. 17, №. 3. – С. 532-535.
31. Мурталиева, В. Х. "Социальный" стресс - релевантная модель тревожно-депрессивного состояния животных / В. Х. Мурталиева, А. Л. Ясенявская, М. А. Самотруева // Современные вопросы биомедицины. – 2022. – Т. 6, № 4(21). – DOI 10.51871/2588-0500_2022_06_04_11.
32. Хмель, А. А. Социальный стресс. В поисках классификации / А.А. Хмель // Современные проблемы здравоохранения и медицинской статистики. – 2023. – №. 3. – С. 206-220.
33. Смолева, Е. О. Социальный стресс: инструментарий социологического исследования / Е.О. Смолева // Глобальные вызовы и региональное развитие в зеркале социологических измерений. – 2023. – С. 170-175.
34. Валеева, А. С. Социальный стресс как фактор нарушения психического здоровья / А. С. Валеева, Н. Р. Мингазова, Г. Р. Давлетшина // Вестник Башкирского государственного медицинского университета. – 2024. – № S2. – С. 12-15.
35. Григорьян, Г. А. Моделирование депрессии на животных: поведение как основа методологии, критериев оценки и классификации / Г.А. Григорьян, Н.В. Гуляева // Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова. – 2015. – Т. 65, №. 6. – С. 643-643.
36. Pirozhkova, V. O. Social and emotional intelligence as resources for overcoming stress by subjects of team and individual activity presenter / V. O. Pirozhkova, G. B. Gorskaya // Current Issues of Sports Psychology and Pedagogy. – 2022. – Vol. 2, No. 1. – P. 36-39. – DOI 10.15826/spp.2022.1.18.
37. Стресс и индивидуальное развитие / Ю. И. Александров, А. И. Булава, А. В. Бахчина, В.В. Гаврилов, М.Г. Колбенева // Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова. – 2022. – Т. 72, №. 4. – С. 437-456.
38. Мясоедов, Ю. М. Автоматизированный анализ параметров крови лабораторных животных / Ю. М. Мясоедов // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. – 2017. – №. 5. – С. 25-28.
39. Опыт проведения клинко-лабораторных исследований в доклинической оценке безопасности лекарств (часть 1: гематологические исследования) / А.В. Сорокина, С.В. Алексеева, Н.В. Еремина, А.Д. Дурнев // Вестник Научного центра экспертизы средств медицинского применения. – 2019. – Т. 9, №. 3. – С. 197-206.
40. Опыт проведения клинко-лабораторных исследований в доклинической оценке безопасности лекарств (часть 2: биохимические и патоморфологические исследования) / А.В. Сорокина, С.В. Алексеева, Н.В. Еремина, А.Д. Дурнев // Регуляторные исследования и экспертиза лекарственных средств. – 2019. – №. 4. – С. 272-279.
41. Успехи цифровизации в изучении биомедицинской статистики / С.А. Муслев, Н.В. Зайцева, А.А. Корнеев, А.А. Синицын, И. Л. Самосадная, Л.Н. Сидорова // Российский вестник перинатологии и педиатрии. – 2022. – Т. 67, №. 4. – С. 332-333.

REFERENCES

1. Glazachev, O.S., & Kryzhanovskaya, S.Yu. (2019). [Adaptation medicine: A strategy of human psychophysiological adaptation to a critically changed environment]. *Vestnik Mezhdunarodnoj akademii nauk. Russkaya sekciya = Bulletin of the International Academy of Sciences. Russian Section*. 1, 48–55. (In Russian).

2. Kurnaz, M. (2026). Physiological responses and adaptive mechanisms of amphibians and reptiles to multiple interacting environmental stressors: An integrative review. *Frontiers in Physiology*. 17, 1785483.
3. Sergalieva, M.U., Tsibizova, A.A., Bashkina, O.A., & Samotruieva, M.A. (2022). [Study of the effect of the extract of the herb *Astragalus vulpinus* on free radical processes in the liver and myocardium of white rats under conditions of information stress]. *Astraxanskij medicinskij zhurnal = Astrakhan Medical Journal*. 17(4), 109–116. (In Russian).
4. Chu, B., Marwaha, K., Sanvictores, T., Awosika, A.O., & Ayers, D. (2023). Water physicochemical factors and oxidative stress physiology in fish: A review. *Frontiers in Environmental Science*. 11, 1240813.
5. Kruglikov, N.Yu., & Kovyazina, N.V. (2026). [Physiology of stress: Neuroendocrine mechanisms and its effects on the body]. *Biologiya i integrativnaya medicina = Biology and Integrative Medicine*. 5(83), 14–19. (In Russian).
6. Filaretova, L.P. (2010). [Stress in physiological research]. *Rossiiskij fiziologicheskij zhurnal im. IM Sechenova = Russian Journal of Physiology*. 96(9), 924–935. (In Russian).
7. Barnaulov, O.D., & Osipova, T.V. (2012). [Stress-limiting properties of classical phytoadaptogens]. *Obzory po klinicheskoy farmakologii i lekarstvennoj terapii = Reviews on Clinical Pharmacology and Drug Therapy*. 10(3), 40–49. (In Russian).
8. Masnavieva, M.R. (2022). [Effects of adaptogens on the body]. *Molodezh' i sistemnaya modernizaciya strany' = Youth and Systemic Modernization of the Country*. 49–52. (In Russian).
9. Golubkina, E.V., Isyakaeva, R.R., Mazhitova, M.V., & Taranina, A.A. (2019). [Plants of the genus *Salicornia* as a balanced source of bioactive components: A review]. *Biologiya i integrativnaya medicina = Biology and Integrative Medicine*. 11(39), 43–54. (In Russian).
10. Panossian, A.G., Lemerond, T., & Efferth, T. (2021). Evolution of the adaptogenic concept from traditional use to medical systems: Pharmacology of stress- and aging-related diseases. *Medicinal Research Reviews*. 41(1), 630–703.
11. Toth-Meszaros, A., Garmaa, G., Hegyi, P., Bánvölgyi, A., Fenyves, B., Fehervari, P., Harnos, A., Gergő, D., Do To, U.N., & Csupor, D. (2023). The effect of adaptogenic plants on stress: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Functional Foods*. 108, 105695.
12. Antoni, M.H., Moreno, P.I., & Penedo, F.J. (2023). Stress management interventions to facilitate psychological and physiological adaptation and optimal health outcomes in cancer patients and survivors. *Annual Review of Psychology*. 74(1), 423–455.
13. Cool, J., & Zappetti, D. (2019). The physiology of stress. In: *Medical Student Well-Being: An Essential Guide*. Cham: Springer International Publishing. 1–15.
14. Brugaletta, G., Teyssier, J.R., Rochell, S.J., Dridi, S., & Sirri, F. (2022). A review of heat stress in chickens. Part I: Insights into physiology and gut health. *Frontiers in Physiology*. 13, 934381.
15. Li, Y., Wang, K., & Li, C. (2024). Oxidative stress in poultry and the therapeutic role of herbal medicine in intestinal health. *Antioxidants*. 13(11), 1375.
16. Dash, U.C., Bhol, N.K., Swain, S.K., Samal, R.R., Nayak, P.K., Raina, V., Panda, S.K., Kerry, R.G., Duttaroy, A.K., & Jena, A.B. (2025). Oxidative stress and inflammation in the pathogenesis of neurological disorders: Mechanisms and implications. *Acta Pharmaceutica Sinica B*. 15(1), 15–34.
17. Uranova, V.V., Lomteva, N.A., Bliznyak, O.V., Mazhitova, M.V., & Kondratenko, E.I. (2023). [Study of the nootropic effect of *Scutellaria baicalensis* Georgi extract in modeling anxiety-depressive disorders in rats during the development of a passive avoidance conditioned reflex]. *Astraxanskij medicinskij zhurnal = Astrakhan Medical Journal*. 18(3), 103–114. (In Russian).
18. Cai, J., Hu, Q., He, Z., Chen, X., Wang, J., Yin, X., Ma, X., & Zeng, J. (2023). *Scutellaria baicalensis* Georgi and its natural flavonoid compounds in the treatment of ovarian cancer: A review. *Molecules*. 28(13), 5082.
19. Guo, F., Li, C., Dou, J., Liang, J., Chen, Z., Xu, Z., & Wang, T. (2024). Research progress on pharmacological properties and application of probiotics in the fermentation of *Scutellaria baicalensis* Georgi. *Frontiers in Nutrition*. 11, 1407182.
20. Chen, L., Liu, E., Zhao, X., Liu, X., Dong, Q., Lou, Y., Huang, G., Li, L., & He, Y. (2025). *Scutellaria baicalensis* Georgi in metabolic-associated fatty liver disease treatment: Research progress. *Frontiers in Pharmacology*. 16, 1565461.
21. Zhao, M., Qu, Y., Zhang, S., Zhang, M., Wang, H., Yang, Y., Xue, G., Hou, X., & Yan, X. (2026). Multi-target intervention mechanisms and prospects of the traditional Chinese medicine *Scutellaria baicalensis* Georgi in Alzheimer's disease. *Frontiers in Pharmacology*. 17, 1707688.
22. Uranova, V.V., Lomteva, N.A., & Kuleshova, O.N. (2023). [Study of the stress-protective and anxiolytic effects of *Scutellaria baicalensis* Georgi extract under conditions of social stress]. *Siberian Journal of Life Sciences and Agriculture*. 15(5), 117–136. <https://doi.org/10.12731/2658-6649-2023-15-5-929> (In Russian).

23. Gryaznov, M.Yu., & Savchenko, O.M. (2024). [Scutellaria baicalensis Georgi: Development of a methodology for testing distinctness, uniformity, and stability]. *Agrarnaya Rossiya = Agrarian Russia*. 6, 10–14. <https://doi.org/10.30906/1999-5636-2024-6-10-14> (In Russian).
24. Khalilova, E.A., Zalibekov, Z.G., Kotenko, M.E., Cherkashin, V.I., Islammagomedova, E.A., & Abakarova, A.A. (2025). [Biogeochemical studies of vineyard terroir soils in the Western Caspian region and opportunities for utilizing the potential of arid lands]. *Aridny'e e'kosistemy' = Arid Ecosystems*. 31(1[102]), 124–135. (In Russian).
25. Safronova, I.N., Karimova, T.Yu., & Stepanova, N.Yu. (2023). [Current vegetation cover of the Northwestern Caspian region and its cartographic representation]. *Geografiya i prirodny'e resursy' = Geography and Natural Resources*. 55, 45–51. (In Russian).
26. Miroshnikov, P.N., Zhuchayev, K.V., & Koval, Yu.I. (2024). [Antioxidant activity of extracts from *Origanum vulgare* and *Comarum palustre* growing in the Altai Territory in relation to their flavonoid content]. *Vestnik NGAU (Novosibirskij gosudarstvenny'j agrarny'j universitet) = Bulletin of Novosibirsk State Agrarian University*. 3(72), 213–220. <https://doi.org/10.31677/2072-6724-2024-72-3-213-220> (In Russian).
27. Khosnutdinova, T.S., Sapieva, A.O., Gemedzhieva, N.G., Karzhaubekova, Zh.Zh., & Sultanova, N.A. (2025). [Obtaining a biologically active complex with antioxidant activity from the roots of *Ferula foetida* (Bunge) Regel]. *Academic Journal of Physical and Chemical Sciences*. 1, 252–265. (In Russian).
28. Shustov, E.B., Okovityi, S.V., Bolotova, V.Ts., & Kim, A.E. (2021). [A battery of tests for studying the adaptogenic effects of biologically active substances in preclinical research]. *Formuly' farmacii = Formulas of Pharmacy*. 3(2), 10–25. (In Russian).
29. Smoleva, E.O. (2020). [Social stress and coping strategies: An analysis of concepts and models]. *Social'noe prostranstvo = Social Area*. 6(3), 3. (In Russian).
30. Lipatova, T.E., Tyulyaeva, L.A., & Denisova, T.P. (2021). [Population health and social stress: The prevalence of myocardial infarction and gastric and duodenal ulcers]. *Saratovskij nauchno-medicinskij zhurnal = Saratov Journal of Medical Scientific Research*. 17(3), 532–535. (In Russian).
31. Murtalieva, V.Kh., Yasyenyavskaya, A.L., & Samotruyeva, M.A. (2022). [Social stress as a relevant animal model of anxiety and depression]. *Sovremennyye voprosy' biomeditsiny' = Current Issues in Biomedicine*. 6(4[21]). https://doi.org/10.51871/2588-0500_2022_06_04_11 (In Russian).
32. Khmel, A.A. (2023). [Social stress: In search of a classification]. *Sovremennyye problemy' zdravooxraneniya i medicinskoj statistiki = Current Problems of Health Care and Medical Statistics*. 3, 206–220. (In Russian).
33. Smoleva, E.O. (2023). [Social stress: Sociological research tools]. *Global'ny'e vy'zovy' i regional'noe razvitiye v zerkale sociologicheskix izmerenij = Global Challenges and Regional Development through the Lens of Sociological Dimensions*. pp. 170–175. (In Russian).
34. Valeeva, A.S., Mingazova, N.R., & Davletshina, G.R. (2024). [Social stress as a factor contributing to mental health disorders]. *Vestnik Bashkirskogo gosudarstvennogo medicinskogo universiteta = Bulletin of Bashkir State Medical University*. S2, 12–15. (In Russian).
35. Grigoryan, G.A., & Gulyaeva, N.V. (2015). [Animal modeling of depression: Behavior as the basis for methodology, assessment criteria, and classification]. *Zhurnal vy'sshej nervnoj deyatel'nosti im. I.P. Pavlova = I.P. Pavlov Journal of Higher Nervous Activity*. 65(6), 643. (In Russian).
36. Pirozhkova, V.O., & Gorskaya, G.B. (2022). Social and emotional intelligence as resources for overcoming stress by subjects of team and individual activity presenter. *Current Issues of Sports Psychology and Pedagogy*. 2(1), 36–39. <https://doi.org/10.15826/spp.2022.1.18>.
37. Aleksandrov, Yu.I., Bulava, A.I., Bakhchina, A.V., Gavrilov, V.V., & Kolbeneva, M.G. (2022). [Stress and individual development]. *Zhurnal vy'sshej nervnoj deyatel'nosti im. I.P. Pavlova = I.P. Pavlov Journal of Higher Nervous Activity*. 72(4), 437–456. (In Russian).
38. Myasoedov, Yu.M. (2017). [Automated analysis of blood parameters in laboratory animals]. *Vestnik Kurskoj gosudarstvennoj sel'skoxozyajstvennoj akademii = Bulletin of Kursk State Agricultural Academy*. 5, 25–28. (In Russian).
39. Sorokina, A.V., Alekseeva, S.V., Eremina, N.V., & Durnev, A.D. (2019). [Experience in conducting clinical laboratory studies during the preclinical safety assessment of medicines. Part 1: Hematological studies]. *Vedomosti Nauchnogo centra e'kspertizy' sredstv medicinskogo primeneniya = Bulletin of the Scientific Centre for Expert Evaluation of Medicinal Products*. 9(3), 197–206. (In Russian).
40. Sorokina, A.V., Alekseeva, S.V., Eremina, N.V., & Durnev, A.D. (2019). [Experience in conducting clinical laboratory studies during the preclinical safety assessment of medicines. Part 2: Biochemical and pathomorphological studies]. *Regulyatorny'e issledovaniya i e'kspertiza lekarstvenny'x sredstv = Regulatory Research and Medicine Evaluation*. 4, 272–279. (In Russian).

41. Muslov, S.A., Zaitseva, N.V., Korneev, A.A., Sinitsyn, A.A., Samosadnaya, I.L., & Sidorova, L.N. (2022). [Advances in digitalization in the study of biomedical statistics]. *Rossiiskij vestnik perinatologii i pediatrii = Russian Bulletin of Perinatology and Pediatrics*. 67(4), 332–333. (In Russian).

Поступила в редакцию 10.08.2026 г.

STUDY OF THE DOSE-DEPENDENT ANXIOLYTIC ACTIVITY OF AN EXTRACT OF BAIKAL SKULLCAP (SCUTELLARIA BAICALENSIS GEORGI) CULTIVATED IN THE ASTRAKHAN REGION

V. V. Uranova, N. A. Lomteva, E. I. Kondratenko

The dose-dependent anxiolytic activity of a root extract of *Scutellaria baicalensis* Georgi, cultivated in the Astrakhan Region, was investigated in a rat model of chronic social stress. The extract was administered at doses of 50, 100, 200, and 300 mg/kg. At 50 mg/kg, the extract produced a predominantly non-significant trend toward normalization of the studied parameters. Administration at 100 mg/kg resulted in the first statistically significant changes compared with the stress-control group ($p < 0.05$). The duration of active swimming increased, whereas the durations of passive swimming and immobility decreased. The severity of hematological, biochemical, and morphofunctional alterations was also reduced. At doses of 200 and 300 mg/kg, the effect was further enhanced: the duration of active swimming increased 1.5- and 1.7-fold, respectively ($p < 0.05$), while the studied parameters approached those observed in intact animals. The findings confirm the dose-dependent stress-protective effect of the extract. The minimum effective dose was 100 mg/kg.

Keywords: *Scutellaria baicalensis* Georgi, extract, anxiolytic activity, social stress, dose-dependent effect, minimum effective dose.

Уранова Валерия Валерьевна

ассистент кафедры фундаментальной химии,
ФГБОУ «Астраханский государственный
медицинский университет»,
г. Астрахань, РФ.

E-mail: fibi_cool@list.ru

ORCID: 0000-0003-2114-1286

SPIN-код: 3601-7336

AuthorID: 934288

Uranova Valeria Valerievna

assistant of the Department of Fundamental
Chemistry,
Astrakhan State Medical University,
Astrakhan, RF.

Ломтева Наталья Аркадьевна

Доктор биологических наук, доцент;
профессор, заведующий кафедрой
фундаментальной биологии и биомедицины,
ФГБОУ ВО «Астраханский государственный
университет им. В. Н. Татищева»,
г. Астрахань, РФ.

E-mail: molecula01@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-8336-7726

SPIN-код: 1629-6211

AuthorID: 370121

Lomteva Natalia Arkadyevna

Doctor of Biological Sciences, Associate Professor;
Professor, Head of the Department,
Astrakhan State University named after
V.N. Tatishchev,
Astrakhan, RF

Кондратенко Елена Игоревна

Доктор биологических наук, профессор;
профессор кафедры морфологии и физиологии,
АНО ВО «Медицинский институт имени
М.С. Зернова», г. Сочи, РФ.

E-mail: cond70@mail.ru

ORCID: 0000-0002-8988-5022

SPIN-код: 5968-1222

AuthorID: 349133

Kondratenko Elena Igorevna

Doctor of Biological Sciences, Professor;
Professor at the Department of Morphology and
Physiology,
M.S. Zernov Medical Institute,
Sochi, RF.

Научное издание

**Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки**

2026. – № 3

Технические редакторы: *М. В. Фоменко, П. А. Машаров*

Адрес редакции:
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк
Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: <https://dongu-vestnik01.ru>

Подписано к изданию 18.09.2026

Издательство ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24,
Тел: +7 (856) 302-92-27.